Ondas progressivas no modelo de Fisher-Kolmogorov – um clássico moderno

Simão Correia[1]
e-mail: simao.f.correia@gmail.com

Luís Sanchez
Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa
e-mail: sanchez@ptmat.fc.ul.pt

Resumo: Neste artigo fazemos uma introdução às soluções de onda progressiva das equações de tipo Fisher-Kolmogorov. Deduzimos a existência de soluções de onda progressiva e a existência de uma velocidade crítica, e mostramos como comparar (ou até mesmo determinar) velocidades críticas, e como determinar o comportamento assintótico do perfil de onda. Tiramos partido da abordagem para dar exemplos de soluções exactas. Utilizamos resultados simples de Análise e Equações Diferenciais, acessíveis a qualquer licenciado em Matemática.

Abstract In this paper, we give an introduction to travelling wave solutions for equations of Fisher-Kolmogorov type. We prove the existence of travelling wave solutions and the existence of a critical speed, and we show how to compare (or even determine) critical speeds and the asymptotic behaviour of the wave profile. We use a method that yields easily some exact solutions. We use results from Analysis and Differential Equations that are well known to students with a degree in Mathematics.

palavras-chave: equação FKPP, velocidade crítica, comportamento assintótico.

keywords: First keyword; FKPP equation, critical speed, asymptotic behaviour.

1 Introdução

Em 1937, o biólogo R. Fisher propôs uma equação com derivadas parciais, contendo um termo de difusão, para modelar a propagação de um gene vantajoso numa população diplóide unidimensional. No mesmo ano, num artigo seminal, Kolmogorov, Petrovsky e Piskunov [5] fizeram o estudo analítico

[1]Este autor foi bolseiro do programa Novos Talentos em Matemática (2010-2011), financiado pela Fundação Calouste Gulbenkian.

do modelo. O protótipo mais simples, inicialmente considerado, e que pode ser encarado como uma versão do modelo logístico em presença de difusão linear, é

$$u_t = u_{xx} + u(1-u). \tag{1}$$

O bem conhecido tratado de Murray [7] contém informação substancial sobre este e outros modelos análogos.

Uma equação algo semelhante surge na teoria da combustão: é a equação de Zeldovich,

$$u_t = u_{xx} + u^2(1-u), \tag{2}$$

onde u representa a temperatura e o termo $u^2(1-u)$ representa o calor gerado pelo fenómeno de combustão.

Em modelos como estes interessamo-nos por soluções $u(x,t)$ que tomam valores precisamente entre 0 e 1, que são as que têm significado para os problemas que lhes dão origem. Assim, neste artigo, consideraremos equações da forma

$$u_t = u_{xx} + f(u) \tag{3}$$

onde $f : [0,1] \to [0,+\infty)$ é tal que $f(0) = f(1) = 0$ e $f > 0$ em $]0,1[$. Os exemplos (1) e (2) são obviamente deste tipo.

Antes de mais, notemos que a equação (3) tem dois pontos de equilíbrio, nomeadamente $u = 0$ e $u = 1$[2]. Pretendemos abordar, concretamente, a *existência de soluções de* onda progressiva *crescentes, ligando os dois equilíbrios, i.e*, soluções da forma $u(x,t) = u(x+ct)$ (passe o abuso de se representar por u funções distintas) tais que $u(-\infty) = 0$, $u(\infty) = 1$, e u, como função de uma variável, é crescente. O parâmetro c diz-se *velocidade da onda* e terá importância crucial no estudo que se segue. Substituindo directamente na equação, obtemos

$$u''(\xi) - cu'(\xi) + f(u(\xi)) = 0, \quad \xi \in \mathbb{R} \tag{4}$$

e procuramos, pois, soluções de (4) tais que

$$u(-\infty) = 0, \;\; u(+\infty) = 1. \tag{5}$$

Em reconhecimento do papel pioneiro de Fisher e de Kolmogorov, Petrovsky e Piskunov no estudo do problema, é costume referir (1), ou (3), como *equações de tipo Fisher-Kolmogorov*, ou abreviadamente *de tipo FKPP*.

[2] A constante 1 é naturalmente o limite superior normalizado da quantidade que se pretende estudar: por exemplo, u pode representar a percentagem de indivíduos de uma população que apresentam determinada propriedade.

Estas equações descrevem variados modelos de mecânica, teoria da combustão, biologia e química. O termo $f(u)$, não-linear, representa uma *reacção.*

Ao estudar este tipo de modelos, verifica-se que as soluções de onda progressiva, para além de aparecerem naturalmente, descrevem o comportamento assintótico de algumas soluções. De facto, o que se verifica é que, em certos casos, dependendo das condições iniciais, a solução converge para uma onda progressiva quando $t \to \infty$. O estudo das equações de tipo FKPP tem dado origem a uma riquíssima literatura e continua a ser objecto de intensa investigação. Neste artigo trataremos simplesmente de expor, usando métodos razoavelmente elementares, as bases da teoria associada ao problema (4)-(5), isto é, a teoria da existência de heteroclínicas crescentes para (4), e das respectivas velocidades admissíveis. Como se verá, recorreremos apenas a uma equação diferencial ordinária de primeira ordem, ao teorema das contracções e ao teorema de Ascoli, obtendo-se os resultados sob hipóteses muito abrangentes. Ver-se-á que o modelo de primeira ordem que usamos contém informação suficiente para o estudo que temos em vista da dinâmica de (4)-(5). Para outras aproximações ao problema na literatura recente, enviamos o leitor para [6, 4] e para as referências de [3].

Consideremos então a equação (3) para a qual assumimos ao longo do texto as seguintes hipóteses:

1. $f(0) = f(1) = 0$;
2. $f > 0, \forall_{0<u<1}$;
3. f contínua em $[0, 1]$;
4. $\exists k > 0 : f(u) \leq k(1-u)$ e $\exists l > 0 : f(u) \leq lu \; \forall u \in [0, 1]$.

Dizemos que o número $c \in \mathbb{R}$ é uma *velocidade admissível* de (4), ou de f, se existir uma solução crescente u de (4)-(5).

Observações:

1. A monotonia da onda progressiva implica em particular que $u'(\xi) > 0, \forall \xi \in \mathbb{R}$. Com efeito, a hipótese 4 acima mostra que os problemas de valores iniciais para (4) com condições $u(t_0) = 0 = u'(t_0)$ ou $u(t_0) = 1$, $u'(t_0) = 0$ possuem solução (constante) única, e das condições (5) resulta então que as soluções só tomam valores no intervalo $(0, 1)$.

2. Mostremos que as soluções monótonas de (4) tais que $u(-\infty) = 0$ e $u(+\infty) = 1$ verificam $u'(\pm\infty) = 0$. Trata-se, pois, de verdadeiras heteroclínicas que ligam os equilíbrios $(0,0)$ e $(1,0)$ no espaço de fases.

   Na verdade, tem-se obviamente $\liminf_{s\to\pm\infty} u'(s) = 0$. Suponhamos, por contradição, que $\limsup_{s\to-\infty} u'(t) > 0$, sendo análogo o tratamento de $+\infty$. Seja $t_n \to -\infty$ tal que $u'(t_n) \to 0$. Integrando a equação em $[t_n, 0]$ vem $\int_{t_n}^0 f(u(s))\,ds$ limitado, e pela positividade de f infere-se que $\int_{-\infty}^0 f(u(s))\,ds$ converge. Escolhamos agora $t_n \to -\infty$ e $s_n \to -\infty$ de modo que $t_{n+1} < s_n < t_n$, $u'(t_n) \to 0$ e $u'(s_n) \to \delta > 0$. Tem-se então

   $$u'(t_n) - u'(s_n) - c(u(t_n) - u(s_n)) + \int_{s_n}^{t_n} f(u(s))\,ds = 0.$$

   Nesta igualdade, uma parcela do primeiro membro tende para $-\delta$ e as restantes tendem para 0, donde a contradição.

3. Integrando directamente (4) em toda a recta, e tendo em conta que $u' \to 0$ quando $\xi \to \pm\infty$,

   $$c = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u(\xi))d\xi$$

   e portanto podemos concluir que $c > 0$.

4. Caso f seja C^1, linearizando em torno dos dois pontos de equilíbrio, obtemos os seguintes valores próprios,

   $$\lambda_0^\pm = \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4f'(0)}}{2}; \quad \lambda_1^\pm = \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4f'(1)}}{2}$$

   Conclui-se que, quando $f'(0) > 0$ e $f'(1) < 0$:

   - O ponto $u = 1$ é um ponto sela;
   - O ponto $u = 0$ é um nó instável ou uma espiral instável, dependendo de $c^2 > 4f'(0)$ ou $c^2 < 4f'(0)$, respectivamente.

   A existência de ondas progressivas *crescentes* implica que $u = 0$ não pode ser uma espiral instável, e portanto $c^2 \geq 4f'(0)$.

   Combinando este facto com a observação 3 obtemos a seguinte minoração:

   $$c \geq 2\sqrt{f'(0)}$$

Na verdade este resultado não depende do recurso à dinâmica da equação de segunda ordem. Na próxima secção obteremos a mesma minoração somente com base na análise do problema de primeira ordem, bastanto que $f'(0)$ exista, e dispensando-se outras hipóteses de regularidade.

O plano do texto é o seguinte: na secção 2 reduzimos o problema a um de primeira ordem e mostramos que as velocidades admissíveis formam um intervalo $[c^*, +\infty)$; na secção 3 estudamos os perfis das heteroclínicas no plano de fases; na secção 4 mostramos como o nosso modelo permite obter algumas soluções exactas; na secção 5 fazemos algumas considerações sobre estimativas da velocidade mínima c^*.

Assinalamos na secção 4 um contributo relevante do Professor Assis Azevedo.

2 O modelo de primeira ordem

Nesta secção, começaremos por ver que a existência de ondas progressivas crescentes da equação (4) está intrinsecamente relacionada com a existência de um tipo particular de soluções de uma equação de primeira ordem. A redução de uma unidade na ordem da equação diferencial é possível devido ao facto da equação (4) ser autónoma e à hipótese de a onda progressiva ser crescente (que, como dissemos, tem como consequência $u' > 0$). Lembramos o leitor que $c > 0$.

Seja $u = U(\xi)$ uma solução de onda progressiva crescente de (4) e definida em $\mathbb{R}$. Assim sendo, $U'(\xi) > 0, \xi \in \mathbb{R}$ e portanto é possível definir $\xi(u)$, a função inversa de $u = U(\xi)$. Seja

$$\phi(u) = U'(\xi(u)) \tag{6}$$

Então $\phi :]0,1[\to \mathbb{R}^+$ é uma função de classe C^1, que pode ser estendida por continuidade ao intervalo $[0,1]$ com $\phi(0) = \phi(1) = 0$. A função ϕ satisfaz

$$\phi(u)\phi'(u) - c\phi(u) + f(u) = 0$$

Definindo $\psi(u) := \phi(u)^2$, e de acordo com a Observação 2 da Introdução, ψ é solução de

$$\psi'(u) = 2c\sqrt{\psi(u)} - 2f(u), \quad \psi(0) = \psi(1) = 0 \tag{7}$$

Reciprocamente, suponhamos que ψ satisfaz (7) e consideremos o problema de valores iniciais

$$u' = \sqrt{\psi(u)}, \quad u(0) = 1/2 \tag{8}$$

(O valor do dado inicial é irrelevante: a escolha de um outro valor entre 0 e 1 dá origem simplesmente a uma translacção da solução). O domínio da solução desta equação é $]\xi_-, \xi_+[$, onde

$$\xi_- = -\int_0^{1/2} \frac{du}{\sqrt{\psi(u)}}, \quad \xi_+ = \int_{1/2}^1 \frac{du}{\sqrt{\psi(u)}}.$$

A partir de (7), é fácil concluir que

$$\frac{\psi'(u)}{2\sqrt{\psi(u)}} \leq c$$

e portanto $\sqrt{\psi(u)} \leq cu$. Este facto implica que o primeiro integral é divergente, e portanto $\xi_- = -\infty$.

Atendendo à hipótese *4*, vem que $\psi'(u) \geq -2k(1-u)$. Assim sendo, numa vizinhança de $u = 1$, $\psi(u) \leq k(1-u)^2$, o que faz com que o segundo integral seja igualmente divergente, e portanto $\xi_+ = +\infty$.

Facilmente se verifica que $u(\xi)$ satisfaz $u'' - cu' + f(u) = 0$ em toda a recta, e que $u(-\infty) = 0, u(\infty) = 1$ e $u'(\xi) > 0, \forall_\xi$.

Acabámos de provar a seguinte proposição:

Proposição 1 (Equivalência de Soluções)**.** *Sob as hipóteses 1-4, seja ϕ a função definida em (6). Então $u = U(\xi)$ é uma solução de onda progressiva crescente ligando os dois pontos de equilíbrio se e só se $\phi(u)^2$ for uma solução de (7).*

Assim, *a raiz quadrada das soluções de (7) produz o perfil, no plano de fases, da trajectória de uma onda progressiva.*

A utilidade desta proposição é clara: em vez de tentar provar directamente a existência de uma solução de onda progressiva, podemos passar para a equação (7) e fazer um estudo simplificado. Note-se que a presença da raíz implica perda de unicidade dos problemas de Cauchy com o valor inicial 0 em $u = 0$. No entanto em qualquer tipo de redução, terá de aparecer alguma singularidade: caso contrário, o problema seria trivial[3].

Apresentamos agora um resultado que oferece condições suficientes para a existência de soluções de (7).

Proposição 2 (Existência de Soluções)**.** *Sob as hipóteses 1-4,*

[3]Em [3], é possível encontrar uma redução a uma equação integral de primeira ordem onde, em vez da raíz quadrada, aparece um denominador que se anula nos extremos de intervalo.

1. *Se além disso existe* $f'(0)$ *e se a equação* $\psi'(u) = 2c\sqrt{\psi(u)} - 2f(u)$ *tem uma solução* $\psi(u)$ *tal que* $\psi(0) = 0$ *e* $\psi(u) > 0$ *em algum intervalo* $(0, \eta)$, *então* $c^2 \geq 4f'(0)$.

2. *Se existe uma função* C^1 $s : [0,1] \to \mathbb{R}$ *tal que* $s(0) = 0, s(u) > 0$ *se* $u \in]0,1[$ *e para todo* $u \in [0,1]$,

$$s'(u) \leq 2c\sqrt{s(u)} - 2f(u), \tag{9}$$

   então o problema (7) tem solução.

3. *Para cada* $c > 0$ *fixado, o problema (7) tem no máximo uma solução.*

4. *O problema (4)-(5) tem no máximo uma solução crescente a menos de uma translacção.*

Demonstração.

1. Ponhamos $k = f'(0)$, $l = \limsup_{u\to 0}(\sqrt{\psi(u)})'$. Como $\sqrt{\psi(0)} = 0$ e $\sqrt{\psi(u)} > 0, \forall_{u\in(0,\eta)}$, temos $l \geq 0$. Basta considerar o caso em que $k > 0$. A existência de solução positiva numa vizinhança de 0 implica $(\sqrt{\psi(u)})' = c - \frac{f(u)}{u}\frac{u}{\sqrt{\psi(u)}}$, de onde, se $k > 0$, $l \leq c - 2k/l$. Como $l \geq 0$, temos $l^2 - cl + k \leq 0$.

2. A hipótese (9) significa que s é uma subsolução do problema de valores iniciais

$$\psi'(u) = 2c\sqrt{\psi(u)} - 2f(u), \quad \psi(0) = 0 \tag{10}$$

   o que implica, mediante um argumento simples, que este problema tem uma solução $\psi(u) \geq s(u)$.

   - Se $\psi(1) = 0$, já temos a solução pretendida.

   - Se $\psi(1) > 0$, consideramos a solução φ do problema de valores iniciais

$$\varphi'(u) = 2c\sqrt{\varphi(u)_+} - 2f(u), \quad \varphi(1) = 0. \tag{11}$$

   Claramente podemos assumir que $\varphi \geq 0$ em $[0,1]$, já que 0 é subsolução de (11) em $[0,1]$. Queremos agora mostrar que $0 < \varphi(u) < \psi(u), \forall_{u\in]0,1[}$:

   - Se u_0 for o maior zero de φ em $]0,1[$, então (11) implica que $\varphi'(u_0) < 0$, o que é impossível.

- Se $u_1 \in]0,1[$ for tal que $\varphi(u_1) = \psi(u_1)$, então, por unicidade, $\varphi \equiv \psi$, o que é absurdo, pois $\varphi(1) = 0 < \psi(1)$.

Logo $0 < \varphi(u) < \psi(u), \forall_{u \in]0,1[}$ e, por enquadramento, $\varphi(0) = 0$.

3. Suponhamos que ψ_1 e ψ_2 são duas soluções distintas de (7). Em primeiro lugar, note-se que $\psi_1, \psi_2 \neq 0, \forall_{u \in]0,1[}$. Então por unicidade, as duas soluções estão ordenadas, digamos, $\psi_1(u) < \psi_2(u), \forall_{u \in]0,1[}$. Mas, se assim for, (7) implica que $\psi_2 - \psi_1$ é estritamente crescente, o que contradiz $\psi_1(1) = \psi_2(1) = 0$.

4. Suponhamos que v e w são duas soluções crescentes do problema (4)-(5). Sejam ϕ_v e ϕ_w as correspondentes soluções da equação de primeira ordem. Pela alínea anterior, $\phi_v \equiv \phi_w$ em $[0,1]$, ou seja, $v' \circ v^{-1} \equiv w' \circ w^{-1}$ nesse intervalo. Mas isto implica que $(v^{-1})' \equiv (w^{-1})'$ em $(0,1)$. Logo existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $v^{-1} \equiv w^{-1} + C$, o que implica $w(\xi) = v(\xi + C)$, $\forall \xi \in \mathbb{R}$.

$\square$

Corolário 3. *Consideremos as seguintes equações:*

$$u'' - cu' + f(u) = 0, \quad v'' - dv' + g(u) = 0$$

de tal forma que as hipóteses 1-4 são satisfeitas para f e g. Então, se $f \geq g$, $c \leq d$ e a primeira equação admite uma solução de onda progressiva crescente entre os dois pontos de equilíbrio, a segunda também admite uma solução deste tipo. Além disso, as soluções associadas dos problemas de primeira ordem

$$\psi'(u) = 2c\sqrt{\psi(u)} - 2f(u), \quad \psi(0) = \psi(1) = 0$$
$$\theta'(u) = 2d\sqrt{\theta(u)} - 2g(u), \quad \theta(0) = \theta(1) = 0$$

verificam $\theta(u) \leq \psi(u)$ $\forall u \in (0,1)$.

A última afirmação resulta de que ψ é sub-solução do problema de valor inicial referente à segunda equação, com a condição $\theta(1) = 0$.

Nota: Este corolário mostra que, se c é uma velocidade admissível para f, então qualquer $d > c$ é igualmente uma velocidade admissível para f. Podemos na verdade ser mais precisos:

Proposição 4. *O conjunto das velocidades admissíveis é um intervalo fechado não limitado com elemento mınimo $c^* > 0$.*

Demonstração. Vamos utilizar a proposição de existência de soluções: Seja

$$M = \sup_{0<u<1} \frac{f(u)}{u}$$

(supremo que existe pela hipótese *4*). Fixe-se $c_0 \geq 2\sqrt{M}$ e procuremos agora uma solução da equação

$$s'(u) = 2c_0\sqrt{s(u)} - 2Mu$$

tal que $s(0) = 0$ e $s(u) > 0, \forall 0 < u \leq 1$. Olhando para os termos da equação, somos facilmente conduzidos a procurar uma solução da forma $s(u) = (Bu)^2$ com $B \in \mathbb{R}$. Substituindo, vem que

$$B^2 - c_0B + M = 0 \Rightarrow B = \frac{c_0 \pm \sqrt{c_0^2 - 4M}}{2}$$

e portanto $s(u) = (Bu)^2$ é solução da equação. Como $s(u)$ é subsolução de

$$y'(u) = 2c_0\sqrt{y(u)} - 2f(u)$$

pela proposição de existência de soluções, existe uma solução crescente de $u'' - c_0u' + f(u) = 0$ ligando os dois pontos de equilíbrio, e portanto qualquer número $c_0 > 0$ tal que $c_0^2 \geq 4M$ é uma velocidade admissível.

Como já mostrámos que se c é velocidade admissível e $d > c$ então d também é velocidade admissível, basta verificar que o ínfimo c^* de tais velocidades é velocidade admissível (do que foi visto anteriormente, resulta que $c^* > 0$). Ora, se tomarmos uma sucessão de velocidades admissíveis $c_n \to c^*$ e considerarmos as correspondentes soluções $y_n > 0$ dos problemas

$$y_n'(u) = 2c_n\sqrt{y_n(u)} - 2f(u), \quad y_n(0) = 0, \; y_n(1) = 0$$

concluimos que os y_n formam um conjunto equicontínuo e limitado em $C([0,1])$. Tomando uma subsucessão uniformemente convergente, segue-se o resultado. □

Este resultado mostra que a cada função f verificando 1-4 fica associado um número $c^* > 0$ que é a velocidade mínima admissível de (4) ou, equivalentemente, o mínimo dos $c > 0$ tais que (7) admite uma solução que é *positiva* em $(0,1)$. Escreveremos $c^* = c^*(f)$ e diremos que $c^* > 0$ é a *velocidade crítica* de (4)-(5), ou de f.

Nota: Resulta do que ficou demonstrado que, para funções nas condições anteriores:

$$f \geq g \Rightarrow c^*(f) \geq c^*(g); \tag{12}$$

$$\text{Se } f'(0) \text{ existe, } 2\sqrt{f'(0)} \leq c^*(f) \leq 2\sqrt{\sup_{0<u<1} \frac{f(u)}{u}}. \tag{13}$$

Em particular temos:

Proposição 5. *Se f satisfaz 1-4, existe $f'(0)$ e $f(u) \leq f'(0)u$ $\forall u \in (0,1)$, tem-se $c^* = 2\sqrt{f'(0)}$.*

Por exemplo, para a equação de Fisher (1), $c^* = 2$.

3 Comportamento assintótico

Nesta secção procuramos conhecer o comportamento de uma solução ψ de (7) nos extremos do intervalo $[0,1]$. O objectivo é calcular $(\sqrt{\psi})'(0)$ e $(\sqrt{\psi})'(1)$, imediatamente se reconhecendo que estes valores coincidem com os limites

$$\lim_{\xi \to -\infty} \frac{u'(\xi)}{u(\xi)}, \quad \lim_{\xi \to +\infty} \frac{u'(\xi)}{u(\xi) - 1}$$

que dão uma primeira informação sobre o comportamento assintótico da correspondente solução de (4)-(5).

Para obter resultados úteis assumiremos a existência das derivadas $f'(0)$ e $f'(1)$. Recordemos, para efeito do que segue, os números $\lambda_0^{\pm}$, que aqui designamos simplesmente por $\lambda^{\pm}(c)$:

$$\lambda^{\pm}(c) = \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4f'(0)}}{2}.$$

Começamos por fazer a observação seguinte. Seja $y(u)$ uma solução de

$$y'(u) = 2c_0\sqrt{y(u)} - 2f(u), \quad y(0) = 0 \tag{14}$$

onde f satisfaz as hipóteses *1-4*. Então,

$$y(u) \leq (c_0 u)^2. \tag{15}$$

De facto, (14) mostra que $\frac{d}{du}\sqrt{y(u)} \leq c_0$ e a conclusão segue-se.

Proposição 6. *Suponhamos que f satisfaz 1-4, e além disso $f'(0)$ existe. Se $y(u)$ é solução de $y'(u) = 2c\sqrt{y(u)} - 2f(u)$, $y(0) = 0$, com $y(u) > 0$ nalgum intervalo $(0,\eta)$, então existe a derivada $(\sqrt{y})'(0)$ e é igual a λ_0^+ ou λ_0^-.*

Demonstração. Ponhamos $y(u) = u^2\theta(u)$. Vimos em (15) que θ é uma função limitada. Esta função satisfaz, numa vizinhança de 0, a equação

$$\theta' = \frac{2}{u}(c\sqrt{\theta} - \theta - \frac{f(u)}{u})$$

Se o enunciado é falso, existe um intervalo $[a, b]$ que não contém nenhuma das raizes de $x^2 - cx + f'(0) = 0$ tal que $\theta(u)$ percorre todos os valores de $[a, b]$ quando u percorre cada um de uma infinidade de intervalos disjuntos $[t_i, s_i]$ com $s_i \to 0$. Então, para i suficientemente grande, o sinal de $c\sqrt{\theta(u)} - \theta(u) - \frac{f(u)}{u}$ é bem definido para $t_i < u < s_i$. Logo, o sinal de $\theta'(u)$ deverá ser também definido, contradizendo o carácter oscilatório de θ. $\square$

Lema 7. *Consideremos o problema de valores iniciais*

$$\psi'(u) = 2c\sqrt{\psi(u)} - 2f(u), \quad \psi(0) = 0 \tag{16}$$

Sejam $\eta > 0$, $0 < A < B$, $0 \leq a < b$, $0 < c_1 < c_2 < 2A$ *constantes tais que*

$$a \leq \frac{f(u)}{u} \leq b, \quad \textit{se} \quad 0 < u \leq \eta \tag{17}$$

$$A^2 - cA + b < 0 < B^2 - cB + a \quad \forall c \in [c_1, c_2]. \tag{18}$$

Então, para $c \in [c_1, c_2]$ *(16) tem uma única solução* ψ *tal que* $A^2u^2 \leq \psi(u) \leq B^2u^2$ *for* $0 \leq u \leq \eta$. *Esta solução depende continuamente de* c.

Demonstração. Consideremos o espaço X das funções contínuas v tais que

$$A^2u^2 \leq v(u) \leq B^2u^2, \forall_{v\in[0,\eta]}.$$

Este é um espaço métrico completo como subespaço do espaço das funções contínuas em $]0, 1]$ com a norma

$$||v|| = \sup_{u\in[0,\eta]} \frac{v(u)}{u^2}.$$

Defina-se o operador T com domínio X por

$$Tv(u) = 2c\int_0^u \sqrt{v(t)}dt - 2\int_0^u f(t)dt, \quad u \in [0, \eta]$$

Obviamente Tv é uma função contínua em $[0, \eta]$ e temos

$$Tv'(u) = 2c\sqrt{v(u)} - 2f(u) \leq cBu - au \leq B^2u,$$
$$Tv'(u) = 2c\sqrt{v(u)} - 2f(u) \geq cAu - bu \geq A^2u,$$

o que, por integração directa, mostra que $Tv \in X$. Vejamos que T é uma contracção em X:

$$\begin{aligned}|(Tv_1 - Tv_2)(u)| &\leq 2c\int_0^u \frac{|v_1 - v_2|(t)}{\sqrt{v_1(t)} + \sqrt{v_2(t)}}dt \\ &\leq 2c||v_1 - v_2||\int_0^u \frac{t^2}{2At} = \frac{c}{2A}||v_1 - v_2||u^2\end{aligned}$$

Logo, tem-se

$$||Tv_1 - Tv_2|| \leq \frac{c}{2A}||v_1 - v_2||$$

e portanto T é uma contracção uniforme em $c \in [c_1, c_2]$. Daí o resultado. $\square$

Lema 8. *Seja $\bar{c} > 2\sqrt{f'(0)}$. Escolha-se A, B com: $\frac{\bar{c}}{2} < A < \lambda^+(\bar{c}) < B$. Então há números $0 \leq a \leq f'(0) < b$, $\eta > 0$ e um intervalo $[c_1, c_2]$ contendo $\bar{c}$ de modo que todas as hipóteses do lema precedente são realizadas.*

Demonstração. Uma vez que $A^2 - \bar{c}A + f'(0) < 0 < B^2 - \bar{c}B + f'(0)$, basta tomar a, b suficientemente próximos de $f'(0)$ e invocar a continuidade e a definição de $f'(0)$. $\square$

Corolário 9. *Dado $c > 2\sqrt{f'(0)}$, existe $\eta > 0$ tal que $\psi'(u) = 2c\sqrt{\psi(u)} - 2f(u)$, $\psi(0) = 0$, tem uma solução única ψ em $[0, \eta]$ tal que $(\sqrt{\psi})'(0) = \lambda^+(c)$.*

Demonstração. É consequência dos anteriores dois lemas: o primeiro garante a existência e a unicidade; o segundo permite enquadrar $\frac{\sqrt{\psi(u)}}{u}$ numa vizinhança de $u = 0$ com precisão arbitrária. $\square$

Finalmente, podemos determinar especificamente o valor do limite pretendido:

Proposição 10. *Seja c uma velocidade admissível de $u'' - cu' + f(u) = 0$.*

1. *Se $c = c^*$,*
$$(\sqrt{\psi})'(0) = \lambda^+(c).$$
2. *Se $c > c^*$,*
$$(\sqrt{\psi})'(0) = \lambda^-(c).$$

Demonstração.

1. Em primeiro lugar, se $c = 2\sqrt{f'(0)}$, o resultado é trivial, pois $\lambda^+(c) = \lambda^-(c)$. Podemos então supor que $c \equiv c_1 > 2\sqrt{f'(0)}$. Com vista a um absurdo, suponhamos ainda que $(\sqrt{\psi})'(0) = \lambda^-(c_1)$. Considere-se a equação reduzida de primeira ordem

$$\psi'(u) = 2c_1\sqrt{\psi(u)} - 2f(u), \quad \psi(0) = \psi(1) = 0.$$

A solução w de

$$w' = 2c_1\sqrt{w} - 2f(u), \quad w(0) = 0, \quad (\sqrt{w})'(0) = \lambda^+(c_1)$$

satisfaz $w > \psi$ numa vizinhança de $u = 0$ (porque $(\sqrt{\psi})'(0) = \lambda^-(c_1) < \lambda^+(c_1) = (\sqrt{w})'(0)$) e, por unicidade, permanece positiva no intervalo $]0,1[$. Se $w(1) = 0$, teríamos duas soluções distintas de (7), o que é absurdo, pelo ponto 4 da proposição de existência de soluções. Logo $w > 0$ em $]0,1]$.

Ora, pelo corolário anterior, existe $\eta > 0$ tal que, se $d \leq c_1$ é suficientemente próximo de c_1 e $d > 2\sqrt{f'(0)}$, existe uma solução única z_d de

$$z_d' = 2d\sqrt{z_d} - 2f(u), \quad z_d(0) = 0, \ \ 0 \leq u \leq \eta, \quad (\sqrt{z_d})'(0) = \lambda^+(d),$$

e em particular $z_{c_1} = w$. Numa vizinhança de c_1, z_d depende continuamente de d em $[0,\eta]$ pelo lema 7 e, como $z_{c_1} > 0$ em $[\eta, 1]$, vale o teorema usual de dependência contínua do parâmetro. Logo, nessa mesma vizinhança de c_1, podemos aplicar dependência contínua do parâmetro em todo o intervalo. Escolhendo $d < c_1$ tal que $z_d > 0$ em $]0,1]$, obtemos uma função z_d nas hipóteses da proposição de existência de soluções. Logo existe uma solução de

$$\phi'(u) = 2d\sqrt{\phi(u)} - 2f(u), \quad \phi(0) = \phi(1) = 0.$$

e portanto $d < c_1$ é uma velocidade admissível. Logo $c_1 > c^*$, o que contradiz a hipótese.

2. Suponhamos, com vista a um absurdo, que

$$(\sqrt{\psi})'(0) = \lambda^+(c).$$

Seja s solução de

$$s'(u) = 2c^*\sqrt{s(u)} - 2f(u). \tag{19}$$

tal que $s(0) = s(1) = 0$.

Visto que

$$(\sqrt{\psi})'(0) = \lambda^+(c) > \lambda^+(c^*) \geq (\sqrt{s})'(0),$$

vem para η pequeno,

$$\sqrt{\psi(u)} > (\lambda^+(c) - \delta)u > \sqrt{s(u)}, \quad u \in]0, \eta],$$

ou seja,

$$\psi(u) > (\lambda^+(c) - \delta)^2 u^2 > s(u), \quad u \in]0, \eta]$$

o que contradiz o Corolário 3.

□

Podemos reeununciar o resultado em termos do comportamento assintótico das soluções de (4)-(5):

Proposição 11. *Seja c uma velocidade admissível de (4)-(5) e $u(\xi)$ uma correspondente solução.*

1. *Se $c = c^*$,*

$$\lim_{\xi \to -\infty} \frac{u'(\xi)}{u(\xi)} = \lambda^+(c).$$

2. *Se $c > c^*$,*

$$\lim_{\xi \to -\infty} \frac{u'(\xi)}{u(\xi)} = \lambda^-(c).$$

Nota: Também nos poderíamos debruçar sobre o estudo do comportamento em $+\infty$. A demonstração da existência do limite

$$\lim_{\xi \to +\infty} \frac{u'(\xi)}{u(\xi) - 1} = \lambda$$

seria totalmente análoga à que foi feita para $-\infty$, e provar-se-ia que

$$\lambda = \frac{c - \sqrt{c^2 - 4f'(1)}}{2},$$

independentemente de c ser velocidade crítica ou não.

4 Exemplos de soluções exactas

A equação (7) permite obter com facilidade e de modo natural algumas soluções exactas que são heteroclínicas de (4)-(5).

Para o termo de reacção $f(u) = u^m - u^n$, $0 \leq u \leq 1$, onde $1 \leq m < n$, procuremos uma solução de (7) da forma

$$\psi(u) = \lambda(u^\alpha - u^\beta)^2.$$

Introduzindo esta expressão na equação, obtemos de facto uma solução com escolha adequada de c em certos casos:

1. Se $m = 1$ e $n = 2$, isto é, no caso do modelo original de Fisher, vem $\alpha = 1$, $\beta = \frac{3}{2}$, $\lambda = \frac{2}{3}$ e $c = \frac{5}{\sqrt{6}}$. Obtivemos o perfil

$$\psi(u) = \frac{2}{3}u^2(1-\sqrt{u})^2, \quad \text{com } c = \frac{5}{\sqrt{6}}$$

associado a uma velocidade estritamente superior à crítica. Resolvendo o problema (8) por uma primitivação elementar, temos a expressão da correspondente heteroclínica

$$u(t) = \frac{1}{((\sqrt{2}-1)e^{-\frac{t}{\sqrt{6}}}+1)^2}$$

Esta solução foi dada em [1].

2. Na verdade, o exemplo anterior é caso particular da situação seguinte:[4] se $m = 1$ e $n > 1$, encontramos $\alpha = 1$, $\beta = \frac{n+1}{2}$, $\lambda = \frac{2}{n+1}$ e $c = \frac{n+3}{\sqrt{2(n+1)}}$. O perfil correspondente é

$$\psi(u) = \frac{2}{n+1}u^2(1-u^{\frac{n-1}{2}})^2$$

e a heteroclínica que se obtém a partir de (8) tem a expressão

$$u(t) = \frac{1}{\left((2^{\frac{n-1}{2}}-1)e^{-\frac{(n-1)t}{\sqrt{2(n+1)}}}+1\right)^{\frac{2}{n-1}}}.$$

Observa-se que a velocidade crítica da equação é 2, independentemente de n, mas $c = c_n = \frac{n+3}{\sqrt{2(n+1)}} \to 2$ quando $n \to 1$.

3. Se $m = 2$ e $n = 3$, isto é, no caso da equação de Zeldovich, o cálculo resulta com a escolha $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\lambda = \frac{1}{2}$ e $c = \frac{1}{\sqrt{2}}$. O perfil obtido é

$$\psi(u) = \frac{1}{2}u^2(1-u)^2, \quad \text{com } c = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Observemos que neste caso $f'(0) = 0$ e $\lim_{u\to 0}\frac{y(u)}{u^2} = \frac{1}{2}$. Em virtude da proposição 11 concluimos que $\frac{1}{\sqrt{2}}$ é a velocidade crítica da equação de Zeldovich, facto que foi demonstrado em [9]. A resolução de (8) fornece a expressão da correspondente heteroclínica

$$u(t) = \frac{1}{1+e^{-\frac{t}{\sqrt{2}}}}.$$

[4] Esta generalização foi-nos comunicada pelo Professor Assis Azevedo.

4. Também o caso anterior admite uma generalização: se $m = \frac{n+1}{2}$ e $n > 1$, obtemos $\alpha = 1$, $\beta = m$, $\lambda = \frac{1}{m}$ e $c = \frac{1}{\sqrt{m}}$. O perfil obtido é

$$\psi(u) = \frac{1}{m}u^2(1-u^{m-1})^2, \quad \text{com } c = \frac{1}{\sqrt{m}}.$$

Também neste caso se trata de um perfil correspondente à velocidade crítica. As correspondentes heteroclínicas são as translatadas[5] de

$$u_m(t) = \frac{1}{\left(1+e^{-\frac{(m-1)t}{\sqrt{m}}}\right)^{\frac{1}{m-1}}}.$$

5 Outra caracterização da velocidade crítica

Para simplificar a exposição, digamos que uma função com as propriedades 1-4 é uma *função de tipo A em* $[0,1]$. Se, para uma dada função f, existe $\theta \in (0,1)$ tal que f verifique

1'. $f \equiv 0$ em $[0,\theta]$ e $f(1) = 0$;

2'. $f(u) > 0, \forall_{\theta<u<1}$;

3'. f contínua em $[\theta,1]$;

4'. $\exists k > 0 : f(u) \leq k(1-u)\ \forall u \in [0,1]$,

diremos que f é *de tipo B em* $[0,1]$[6].

É interessante e útil estudar o problema (7) para uma função de tipo B. Estes modelos surgem associados à teoria da combustão. Curiosamente, um tal problema só tem uma “velocidade admissível":

Proposição 12. *Seja f de tipo B em $[0,1]$. Então existe um número $c^* > 0$ tal que o problema (7) admite uma solução positiva em $(0,1)$ se, e só se, $c = c^*$.*

Sem entrar nos detalhes da demonstração, repare-se que a hipótese 1' implica, com referência ao modelo de primeira ordem (7), que $\psi(u) = (cu)^2$

[5] O Professor Assis Azevedo calculou a expressão explícita de u_m e observou propriedades curiosas desta família de funções, tais como: se t_m é uma sucessão de números reais tal que $\lim_{m\to\infty} u_m(t_m)$ existe, então, para todo o $t \in \mathbb{R}$ tem-se $\lim_{m\to\infty} u_m(t+t_m) = \lim_{m\to\infty} u_m(t_m)$.

[6] Esta terminologia foi introduzida por Berestycki e Nirenberg num artigo de 1999 sobre este tipo de problemas.

para $u < \theta$[7]. Assim sendo, o comportamento de uma solução *positiva* no plano de fases está bem definido numa vizinhança de 0. Como $\phi(\theta) > 0$, já é possível aplicar dependência contínua do parâmetro para encontrar o único c tal que $\phi(u) > 0$ em $[\theta, 1)$ e $\phi(1) = 0$.

Agora o símbolo $c^*(f)$ tem sentido sempre que f é de tipo A ou B, e a construção do número c^* é tal que a propriedade de monotonia (12) vale para funções dos dois tipos.

As velocidades, bem definidas, das funções de tipo B, servem para calcular, pelo menos em teoria, a velocidade crítica das funções de tipo A. Na verdade tem-se o seguinte resultado.

Teorema 13. *Seja f de tipo A em $[0,1]$. Seja $f_1 \leq f_2 \leq \cdots$ uma sucessão de funções de tipo B em $[0,1]$ tais que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ $\forall x \in [0,1]$. Então $c^*(f_n) \uparrow c^*(f)$.*

A demonstração deste resultado baseia-se, uma vez mais, em argumentos semelhantes aos já utilizados nas secções anteriores e por isso limitamo-nos a observar que o facto de f ser de tipo A permite mostrar que $c^*(f_n)$ é sucessão crescente e limitada e que a hipótese implica a convergência uniforme de f_n, permitindo uma passagem ao limite com a utilização do teorema de Ascoli.

Podem-se obter ainda outros resultados que caracterizam a velocidade crítica de uma função f como limite de velocidades críticas de uma sucessão apropriada f_n (o teorema acima é especialmente interessante pois relaciona os tipos A e B). Refiramos neste contexto um resultado simples, mas bastante geral:

Proposição 14. *Sejam f e f_n de tipo A em $[0,1]$, para $n \in \mathbb{N}$. Definam-se*

- $\alpha_n = \sup\{\alpha \leq 1 : f_n \geq \alpha f\}$;
- $\beta_n = \inf\{\beta \geq 1 : f_n \leq \beta f\}$.

Então, se $\alpha_n, \beta_n \to 1$, $c^*(f_n) \to c^*(f)$.

Para um estudo mais aprofundado da dependência de c^* relativamente a f (função de tipo A) enviamos o leitor para o artigo [2].

Estes resultados fornecem um método simples de aproximação numérica, aplicável a certas funções, já que, para funções seccionalmente lineares, o problema pode resolver-se explicitamente:

[7] Isto equivale a existirem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $u(\xi) = be^{c\xi}, \xi \in]-\infty, a]$

Exemplo. Consideremos

$$g(u) = \begin{cases} 0, & 0 \leq u < \frac{1}{8} \\ 4u - \frac{1}{2}, & \frac{1}{8} \leq u < \frac{1}{4} \\ \frac{2}{3} - \frac{2}{3}u, & \frac{1}{4} \leq u \leq 1 \end{cases}$$

e procuremos encontrar a única velocidade admissível c. Antes de mais, observemos que $g \leq h$, onde

$$h(u) = \begin{cases} 2u, & 0 \leq u < \frac{1}{4} \\ \frac{2}{3} - \frac{2}{3}u, & \frac{1}{4} \leq u \leq 1 \end{cases}.$$

A velocidade crítica de h pode calcular-se explicitamente, e é fácil ver que $c^*(h) = 2\sqrt{2}$. Assim sendo, pela propriedade (12), obtemos a seguinte estimativa:

$$c^*(g) \leq 2\sqrt{2}.$$

Como g é seccionalmente linear, podemos escrever explicitamente $u = u(\xi)$:

$$u(\xi) = \begin{cases} A + Be^{c\xi} & 0 \leq u < \frac{1}{8} \\ e^{c\xi/2}(C\cos(\gamma_1\xi) + D\sin(\gamma_1\xi)) + \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \leq u < \frac{1}{4} \\ Ee^{\gamma_2\xi} + Fe^{\gamma_3\xi} + 1 & \frac{1}{4} \leq u \leq 1 \end{cases},$$

onde

$$\gamma_1 = \frac{\sqrt{16 - c^2}}{2}, \quad \gamma_2 = \frac{c - \sqrt{c^2 + 8/3}}{2}, \quad \gamma_3 = \frac{c + \sqrt{c^2 + 8/3}}{2}.$$

Para além das condições $u(\infty) = 1, u(-\infty) = 0$, necessitamos de fixar um ponto (porque qualquer translacção de uma solução é ainda uma solução). Assim sendo, para facilitar alguns cálculos, fazemos $u(0) = 1/4$[8]. Agora, partindo de $u = 1$ e retrocedendo, vamos poder calcular todas as constantes envolvidas. No final, restará uma equação para c, que poderá ser resolvida numericamente.

1. A condição $u(\infty) = 1$ implica que $F = 0$;
2. Como $u(0) = 1/4$, $1 + E = 1/4$. Logo $E = -3/4$;
3. Agora necessitamos de calcular o valor de u' em 0:
$$u'(0) = -\frac{3}{4}\gamma_2;$$
4. Passando agora para o segundo ramo de u, a condição $u(0) = 1/4$ implica que $C + 1/8 = 1/4$. Logo $C = 1/8$;

[8] O importante é que, em $\xi = 0$, u atinja o primeiro ponto u_0 tal que u é linear em $[u_0, 1]$.

5. Calculando u' neste troço,
$$u'(\xi) = e^{c\xi/2}((\frac{c}{2}C + \gamma_1 D)\cos(\gamma_1\xi) + (\frac{c}{2}D - \gamma_1 C)\sin(\gamma_1\xi));$$

6. Como $u'(0) = -3\gamma_2/4$
$$\frac{c}{2}C + \gamma_1 D = -\frac{3\gamma_2}{4} \Leftrightarrow D = -\frac{12\gamma_2 + c}{16\gamma_1};$$

7. Necessitamos agora de resolver $u(\xi) = 1/8$:
$$u(\xi_0) = \frac{1}{8} \Leftrightarrow C\cos(\gamma_1\xi_0) + D\sin(\gamma_1\xi_0) = 0 \Leftrightarrow \xi_0 = \frac{1}{\gamma_1}\arctan(-\frac{C}{D})$$

8. Passando agora para o primeiro ramo de u, a condição $u(-\infty) = 0$ implica que $A = 0$;

9. Determinamos agora B: como $u(\xi_0) = 1/8$,
$$B = \frac{1}{8}e^{-c\xi_0};$$

Finalmente, resta a equação correspondente a $u'(\xi_0)$:
$$cBe^{c\xi_0} = e^{c\xi_0/2}((\frac{c}{2}C + \gamma_1 D)\cos(\gamma_1\xi_0) + (\frac{c}{2}D - \gamma_1 C)\sin(\gamma_1\xi_0)).$$
Usando um método simples para encontrar a única solução desta equação (sem sequer recorrer a simplificações na expressão), obtemos
$$c = 1,5407 \pm 0,00001.$$
Agora podemos usar este valor como minorante de velocidades críticas para equações com termos não lineares $f \geq g$: por exemplo, para a equação com o termo não-linear
$$f(u) = \begin{cases} 8u^2, & 0 \leq u < \frac{1}{4} \\ \frac{2}{3} - \frac{2}{3}u, & \frac{1}{4} \leq u \leq 1 \end{cases},$$
podemos dizer que $c^*(f) \geq 1,5406$ (Note-se que para este termo não-linear, o minorante $2\sqrt{f'(0)}$ não é útil, pois $f'(0) = 0$).

Um majorante (grosseiro) pode obter-se atendendo a que $g(u) \leq \frac{32}{3}u^2(1-u)$ em $[0,1]$. Uma mudança de variável simples mostra que, se k é um número positivo, $c^*(kf) = \sqrt{k}\,c^*(f)$. Portanto, atendendo ao que vimos no exemplo 2 da secção 4, $c^*(g) \leq \frac{4}{\sqrt{3}} = 2,309\cdots$.

Agradecimentos: Os autores estão reconhecidos ao relator anónimo pelo cuidado posto na leitura do manuscrito original e pelas úteis sugestões de melhoria do texto.

Referências

[1] Mark J. Ablowitz, A. Zeppetella, *Explicit solutions of Fisher's equation for a special wave speed*, Bull. Math. Biol. 41 (1979), no. 6, 835–840.

[2] M. Arias, J. Campos, C. Marcelli, *Fastness and continuous dependence in front propagation in Fisher-KPP equations*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B 11 (2009), no. 1, 11–30.

[3] D. Bonheure, L. Sanchez, *Heteroclinic orbits for some classes of second and fourth order differential equations*, Handbook of Differential Equations - Ordinary Differential Equations, Vol. 3, 103–202, Elsevier, 2006.

[4] B.H. Gilding, R. Kersner, *Travelling waves in nonlinear diffusion-convection-reaction*, Birkhäuser, Basel, 2004.

[5] A. Kolmogorov, I. Petrovsky, N. Piskunov, *Étude de l'équation de la diffusion avec croissance de la quantité de matière et son application à un problème biologique*, Moscow Univ. Math. Bull. 1 (1937), 1–25.

[6] L. Malaguti, C. Marcelli, *Travelling wavefronts in reaction-diffusion equations with convection effects and non-regular terms*, Math. Nachr. 242 (2002), 148–164.

[7] J.D. Murray, *Mathematical Biology: I. An Introduction, Third Edition*, Springer-Verlag, 2001.

[8] Xiaojie Hou, Yi Li, Kenneth R. Meyer, *Travelling wave solutions for a reaction diffusion equation with double degenerate nonlinearities*, Discrete and Continuous Dynamical Systems, 2009.

[9] Q. Zhang, M. Wang and Q. Ye, *Travelling wave front solutions and their wave speeds for equations of Fisher type*, J. of Beijing Inst. of Tech., 10 (1990), 100–106.