Matemática Recreativa

Editores:
Jorge Picado e Paula Mendes Martins

Análise de um jogo solitário com a ajuda do corpo de Galois $\mathsf{GF}(4)$

Paula Mendes Martins e *Jorge Picado*

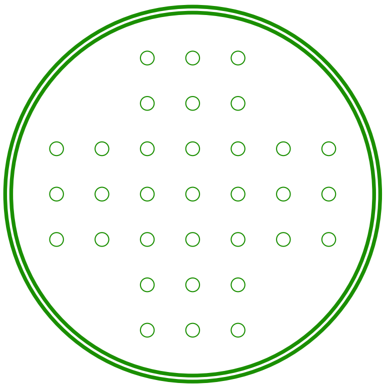
Resumo: Nesta pequena nota apresentamos uma aplicação do corpo finito com 4 elementos à analise do jogo solitário (Inglês) com berlindes, uma ideia original de N. de Bruijn [4].

Abstract: In this short note, we present an application of the four-element field to the (English) peg solitaire game, an idea due to N. de Bruijn [4].

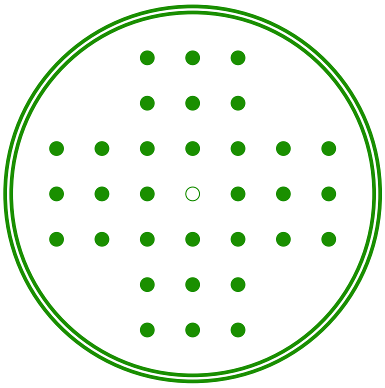
1 O jogo

O *jogo do solitário* é um antigo jogo de tabuleiro para um jogador. Na sua versão mais comum, o tabuleiro tem 33 buracos, dispostos em forma de cruz[1]:

[1]Esta é a versão chamada *Solitário Inglês.* Existe outra versão com 37 buracos (com 4 buracos adicionais, de modo a obter um quadrado central com 25 buracos), a original, chamada *Solitário Francês*, que oferece mais hipóteses de jogadas. De acordo com a lenda, o jogo foi inventado por um aristocrata francês no século XVII, na altura encarcerado na Bastilha. A primeira evidência do jogo surge numa gravura de 1697 (`http://en.wikipedia.org/wiki/Peg_solitaire`), da autoria de Claude Auguste Berey, onde a Princesa Anne de Rohan-Chabot aparece com um jogo do seu lado. Várias obras de arte desse tempo mostram diferentes tabuleiros de solitário, comprovando a grande popularidade do jogo na altura.



Caro leitor: se nunca jogou a este jogo, pouse imediatamente este artigo, vá comprar um tabuleiro e comece a jogar.[2] Inicialmente, em cada buraco, com excepção do central, coloca-se um berlinde (32 berlindes no total):



[2]Bem, hoje em dia não precisa de comprar um tabuleiro, facilmente encontra o jogo *online*, bem como muitas das suas variantes de tabuleiro.

O jogo desenrola-se movimentando um berlinde por cima de outro adjacente (somente na vertical ou na horizontal, nas direcções Este, Oeste, Norte e Sul) para um buraco vazio; o berlinde sobre o qual se saltou é então removido do jogo. O objectivo do jogador é chegar a uma situação em que só reste um berlinde no tabuleiro, idealmente na posição central.[3]

A solução mais rápida envolve 18 movimentos (contando saltos múltiplos consecutivos como movimentos singulares). Esta solução foi encontrada em 1912 por Ernest Bergholt mas foi John Beasley, em 1964, que provou ser essa de facto a solução mais curta [1, 3].

2 O problema

Se conseguirmos terminar com um único berlinde na posição central, também conseguiremos terminar com esse berlinde noutras posições (experimente!). Surge então uma questão óbvia:

> *Em quais posições é possível terminar o jogo, ganhando? Em todas?*

Bem, depois de jogarmos algumas vezes, não será difícil convencermo-nos que talvez não possa ocupar qualquer posição. Em [4], de Bruijn mostra como o corpo finito $\mathsf{GF}(4)$ pode ser usado para determinar tais posições. É esta solução que queremos aqui apresentar.

Comecemos por recordar o corpo $\mathsf{GF}(4)$, o único corpo com 4 elementos[4]:

$+$	0	1	α	β
0	0	1	α	β
1	1	0	β	α
α	α	β	0	1
β	β	α	1	0

$\cdot$	0	1	α	β
0	0	0	0	0
1	0	1	α	β
α	0	α	β	1
β	0	β	1	α

Observe que estas tabelas implicam as seguintes relações:

$$1+\alpha=\alpha^2, \quad \alpha+\alpha^2=1. \tag{1}$$

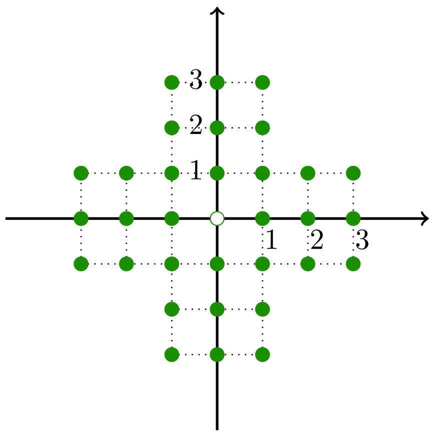
[3]Para mais informação sobre este jogo e suas variantes e generalizações consulte [3], e as referências aí incluídas, e [2].

[4]Único (a menos de isomorfismo) pois o Teorema da Classificação dos corpos finitos assegura que todo o corpo finito tem um número de elementos igual a uma potência de um primo, e existe exactamente um corpo de cada uma dessas cardinalidades.

Esta observação é importante para percebermos mais adiante por que é que este corpo se adapta tão bem ao solitário. De facto, este corpo[5] foi escolhido precisamente pelo facto de conter um elemento α satisfazendo as relações (1).

3 A solução

Comecemos por referenciar os buracos do tabuleiro por pares de inteiros (i, j), $i, j \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, com o buraco central em $(0, 0)$, do seguinte modo:



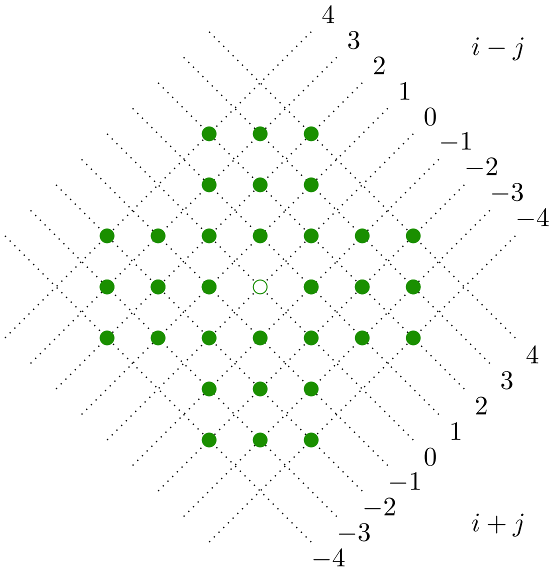
Em seguida, definamos, para cada conjunto X de berlindes colocados no tabuleiro, os números

$$A(X) = \sum_{(i,j)\in X} \alpha^{i+j} \quad \text{e} \quad B(X) = \sum_{(i,j)\in X} \alpha^{i-j}.$$

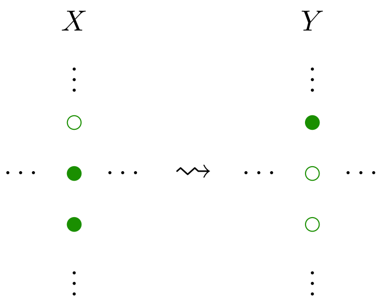
Por exemplo, para a posição inicial X_1 do jogo, é fácil concluir com a ajuda da figura seguinte que $A(X_1)$ e $B(X_1)$ são ambos iguais a

$$\begin{aligned} &2\alpha^4 + 4\alpha^3 + 5\alpha^2 + 4\alpha^1 + 2\alpha^0 + 4\alpha^{-1} + 5\alpha^{-2} + 4\alpha^{-3} + 2\alpha^{-4} \\ &= 0 + 0 + 5\beta + 0 + 0 + 0 + 5\alpha + 0 + 0 \\ &= \alpha + \beta = 1. \end{aligned}$$

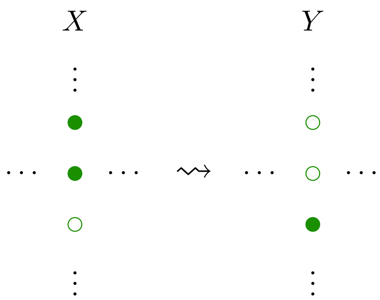
[5]Alternativamente, podemos descrever este corpo como contendo todos os polinómios sobre $\mathbb{Z}_2$ de grau inferior a dois, $\{0, 1, x, x + 1\}$. A adição e multiplicação não são módulo 4, mas sim módulo $x^2 + x + 1$, o único polinómio irredutível do segundo grau sobre $\mathbb{Z}_2$.



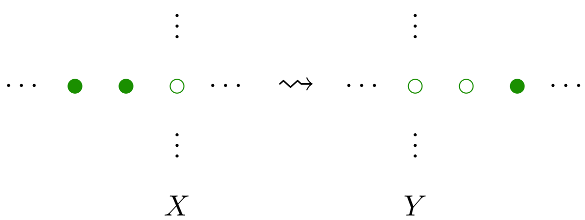
Cada jogada, que transforma um conjunto X de berlindes no tabuleiro num conjunto Y, é necessariamente de um dos quatro tipos seguintes:



(1)



(2)



(3)

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & \vdots & & & & \vdots & & & \\ \cdots & \circ & \bullet & \bullet & \cdots & \rightsquigarrow & \cdots & \bullet & \circ & \circ & \cdots \\ & & & \vdots & & & & \vdots & & & \\ & & & X & & & & Y & & & \end{array}$$

$$(4)$$

É também fácil ver que, em qualquer um desses tipos de jogada, se tem

$$A(Y) = A(X) \quad \text{e} \quad B(Y) = B(X).$$

Por exemplo, numa jogada do tipo (1), se supusermos que o berlinde a movimentar está inicialmente na posição (i, j) (e portanto, após a conclusão da jogada, vai ficar na posição $(i, j+2)$), então

$$A(X) - A(Y) = \alpha^{i+j} + \alpha^{i+j+1} - \alpha^{i+j+2} = \alpha^{i+j}(1 + \alpha + \alpha^2) = 0$$

e

$$B(X) - B(Y) = \alpha^{i-j} + \alpha^{i-j-1} - \alpha^{i-j-2} = \alpha^{i-j}(1 + \beta + \beta^2) = 0.$$

Portanto, o par $(A(X), B(X))$ é invariante ao longo do jogo.

Assim, se o jogo terminar com um só berlinde no tabuleiro, na posição (i, j), teremos necessariamente

$$A(\{(i, j)\}) = 1 \quad \text{e} \quad B(\{(i, j)\}) = 1,$$

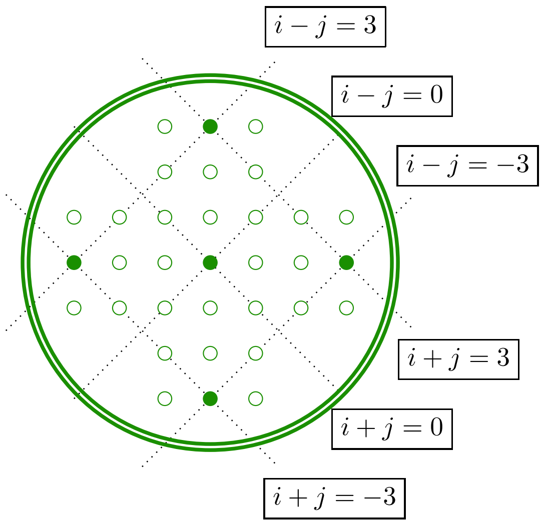
isto é, $\alpha^{i+j} = 1$ e $\alpha^{i-j} = 1$. Como as sucessivas potências de α são

$$\alpha^{-4} = \beta, \quad \boxed{\alpha^{-3} = 1}, \quad \alpha^{-2} = \alpha, \quad \alpha^{-1} = \beta, \quad \boxed{\alpha^0 = 1},$$

$$\alpha^1 = \alpha, \quad \alpha^2 = \beta, \quad \boxed{\alpha^3 = 1}, \quad \alpha^4 = \alpha,$$

então a posição (i, j) do berlinde final terá que satisfazer as condições

$$i + j \in \{-3, 0, 3\}, \quad i - j \in \{-3, 0, 3\} :$$



Em conclusão, as únicas posições finais possíveis são $(-3, 0)$, $(0, -3)$, $(0, 0)$, $(0, 3)$ e $(3, 0)$.

Claro que o que acabámos de fazer apenas prova que encontrámos um limite superior para o número de posições que o último berlinde pode ocupar. Contudo, por experimentação, jogando, é possível concluir que todas elas podem ser, de facto, obtidas (basta para isso mostrar que se consegue atingir a posição $(0, 0)$; a maneira de atingir as outras é depois evidente).

Terminamos com alguns desafios:

(1) Se mudarmos a posição inicial vazia (sem berlinde), *quais serão as correspondentes posições finais possíveis para o último berlinde?*

(2) Leibniz escreveu algures [3, pg. 817]: "O jogo chamado Solitário agrada-me muito. Jogo-o por ordem inversa. Isto é, em vez de fazer um movimento de acordo com as regras, que é saltar para uma posição vazia e remover o berlinde sobre o qual se salta, pensei que seria melhor reconstruir o que tinha sido destruído, preenchendo um lugar vazio sobre o qual se saltou.". Contrariamente ao que Leibniz julgava, jogar por ordem inversa é exactamente o mesmo jogo: o Solitário jogado para trás é simplesmente o Solitário jogado para a frente, com as noções "buraco vazio" e "buraco preenchido" trocadas! *Mostre porquê.*

(3) Começando com duas posições vazias, *será possível terminar precisamente com dois berlindes nessas posições?*

Referências

[1] J. D. Beasley, *The Ins & Outs of Peg Solitaire*, Oxford University Press, 1985.

[2] G. I. Bell, A fresh look at peg solitaire, *Mathematics Magazine* 80 (2007) 16–28.

[3] E. R. Berlekamp, J. H. Conway e R. K. Guy, *Winning Ways for your Mathematical Plays*, Vol. 4, A K Peters, 2004.

[4] N. de Bruijn, A solitaire game and its relation to a finite field, *J. Recreational Math.* 5 (1972) 133–137.