Problemas

Editor:
Jorge Nuno Silva

Notas sobre o Problema anterior e *Os Problemas Infantis de Arnold*

Jorge Nuno Silva

Os leitores são convidados a enviar, para eventual publicação, soluções, comentários, propostas de problemas, etc. Essa correspondência deve ser enviada para a SPM, ao cuidado do editor desta secção. Há livros da Gradiva para sortear entre as soluções recebidas em cada número.

Relembremos o problema do número anterior.

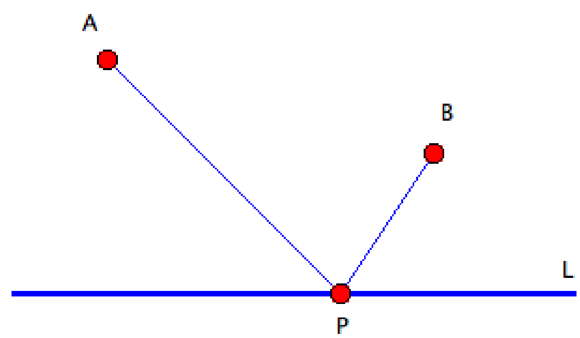
Novos horizontes em Geometria

A Mathematical Association of America publicou em 2012 um livro da dupla Tom Apostol & Mamikon Mnatsakanian intitulado *New horizons in Geometry*. A contracapa esclarece o conteúdo: *Classical calculus problems generalized and solved by innovative elementary geometric methods. With 1000 color illustrations.* A capa é já profusamente ilustrada com imagens retiradas dos diversos capítulos. Aqui encontramos um cilindro a intersectar um cone, uma esfera fatiada, áreas varridas por segmentos, etc.

Apesar desta obra coligir muitos trabalhos já dados à estampa, é um prazer enorme ter na mão uma obra tão inovadora e, ao mesmo tempo, tão belamente apresentada. As mil ilustrações são da autoria de Mamikon e constituem parte essencial da obra.

A génese desta colaboração, que já deu origem a uma vasta bibliografia, bem como a história pessoal de Mamikon, astrofísico arménio surpreendido pelo desmembramento da URSS quando visitava os EUA, onde permaneceu desde então, merecem ser conhecidas. Antes de iniciar colaboração estreita com Apostol, que o auxiliou a encontrar uma posição permanente em Caltech, Mamikon trabalhou para o Departamento de Educação Elementar da Califórnia, numa escola básica, etc. Uma procura rápida na *www* leva-nos sem demoras à página pessoal do inventor do *Visual Calculus*.

De tão vasta e profunda obra deixo dois problemas clássicos sobre distâncias no plano.

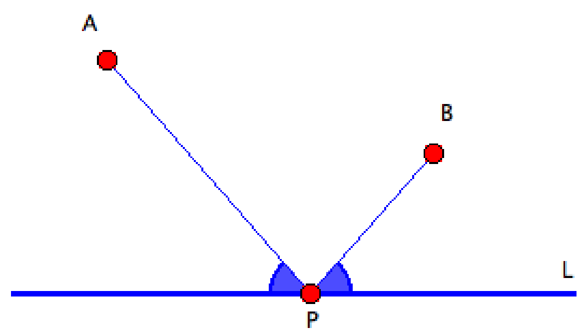


Sabendo que o ponto P está restringido ao segmento L, como determinar a sua posição exacta de forma a que

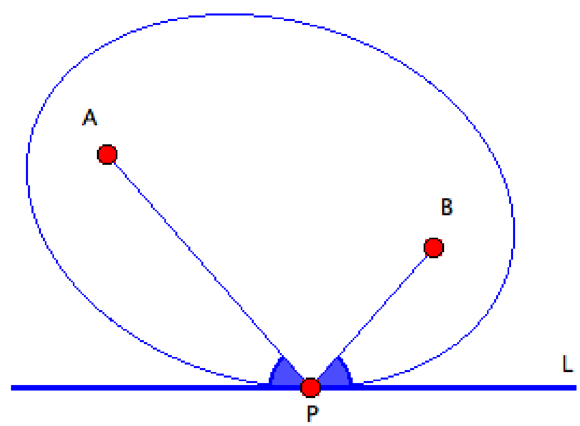
1. A soma das distâncias $AP + PB$ seja mínima.

2. A soma dos quadrados das distâncias $AP^2 + PB^2$ seja mínima.

1. É bem sabido que o ponto em questão se determina com um argumento de reflexão, caracterizado pela igualdade dos ângulos assinalados na figura seguinte.



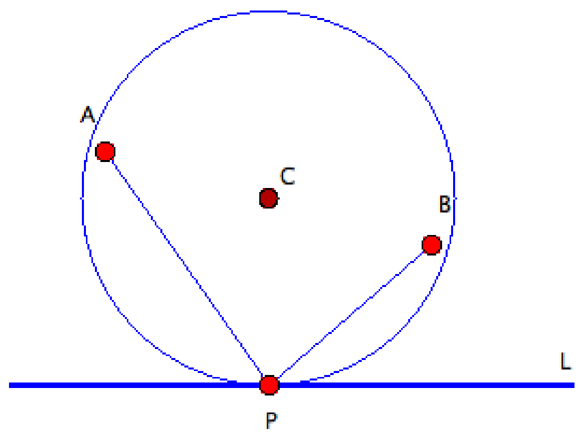
Como o lugar geométrico dos pontos cuja soma de distâncias a dois pontos fixos é constante é uma elipse, o ponto P deve corresponder à tangência de uma elipse com focos em A e B com L.



A igualdade dos ângulos assinalados ilustra a conhecida propriedade reflectora das elipses.

2. Este problema é tratado de forma semelhante, dado que os autores provam que o lugar geométrico dos pontos cuja soma dos quadrados das

distâncias a n pontos fixos é constante é uma circunferência centrada no centróide desses pontos. Assim, dado que o centróide de dois pontos é o seu ponto médio (C na figura abaixo), a localização do ponto P é dada pela tangência de uma circunferência centrada em C e L.



Os Problemas Infantis de Arnold

Esta pequena colecção, *Problemas para crianças dos 5 aos 15*, foi coligida por V.I. Arnold em 2004. Várias vezes publicada em russo, esgotou sempre. Existem agora versões electrónicas, também em inglês, disponíveis online. Da pequena introdução do autor retiramos estas linhas, que nos dão uma ideia das suas intenções:

> Publiquei estes problemas em Paris em 2004, quando alguns parisienses, oriundos da Rússia, me pediram que ajudasse os seus filhos a ganhar a cultura de pensamento tradicional nesse país. Estou profundamente convencido de que essa cultura deve ser cultivada desde cedo mediante reflexão independente sobre questões simples, mas difíceis.

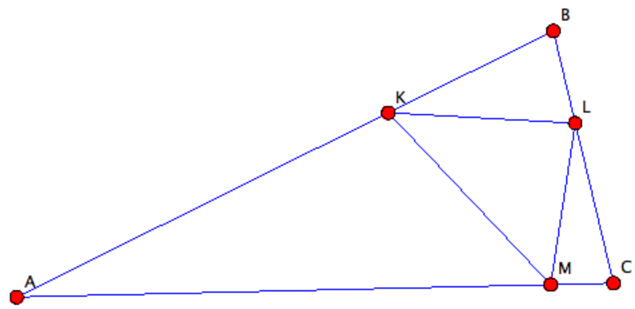
Os problemas estão numerados de 1 a 77, por ordem crescente de escalão etário a que se destinam. Entre eles encontramos clássicos da Matemática Recreativa que podemos já encontrar em Alcuíno ou Fibonacci. Alguns são teoremas importantes, como a identidade de Euler para a função ζ. Entre fracções continuadas e aproximações de integrais, os leitores não me levarão a mal ter seleccionado três questões de índole muito elementar: a primeira, a sexta e a sexagésima quarta.

1. O António e a Beatriz querem comprar um lápis. Ao António faltam 7 cêntimos, à Beatriz falta um cêntimo. Se juntarem o dinheiro que têm também não conseguem comprar um lápis para partilhar. Quanto custa o lápis?

6. A hipotenusa de um triângulo rectângulo mede 10cm e altura baixada sobre si mede 6cm. Qual é a área do triângulo?

   Arnold conta que este problema, durante dez anos usado regularmente nos USA em testes, não conseguia ser resolvido pelos estudantes que chegavam de Moscovo. Isto é, estes não obtinham o mesmo resultado. Porquê?

64. Dado um triângulo acutângulo, inscreva nele um triângulo de perímetro mínimo (K em AB, L em BC, M em AC).


B
K
L
A
M
C