ISSN 0872–3672

SUMÁRIO

35.º Encontro do Seminário Nacional de História da Matemática

(continua no verso)

SUMÁRIO (continuação)

SUMÁRIO (continuação)

36.º Encontro do Seminário Nacional de História da Matemática

(continua no verso)

SUMÁRIO (continuação)

35.º Encontro do Seminário Nacional de História da Matemática

Biblioteca Municipal Vergílio Ferreira, Gouveia
Encontro realizado presencialmente e online na plataforma Zoom
17 e 18 de Junho de 2022

Introdução

Luis Saraiva[1]
(Coordenador Nacional do Seminário Nacional de História da Matemática)

Com este Encontro voltámos à normalidade pré-covid, foi já um evento presencial, mas continuou a possibilidade de assistência online.

Os dois convidados estrangeiros deste Encontro fizeram as suas intervenções via Zoom: Philippe Nabonnand, dos Archives Poincaré e da Universidade de Lorraine, e Niccoló Guicciardini, da Universidade de Milão.

Philippe Nabonnand é um especialista sobre a obra e correspondência de Henri Poincaré, jornais matemáticos e sobre a história da geometria nos séculos XIX e XX. Niccolò Guiccciardini tem ultimamente feito a sua investigação sobre a matemática de Isaac Newton, com especial relevância para os seus *Principia*, e sobre a sua recepção no século XVIII.

Houve ainda outras três conferências feitas online, por participantes que por motivos diferentes não puderam deslocar-se a Gouveia : João Tomás do Amaral, da Universidade de S. Paulo, Brasil, Helena Sousa Melo e Maria do Carmo Martins, da Universidade dos Açores, e Rui Candeias, do Agrupamento de Escolas Terras de Larus.

No total, foram proferidas 19 conferências. Sem ter em conta os elementos da organização local, o Encontro teve 49 inscrições, 23 delas presenciais.

O Encontro foi acreditado pelo Conselho Científico Pedagógico da Formação Contínua, como Acção de Formação para Professores de Matemática do Ensino Básico e Secundário (Grupos 230, 500). Participaram como formandos 16 professores.

No decorrer do Encontro foi prestada uma homenagem do SNHM a Ana Rita Ferrer, Sílvia Dias e Teresa Pires, três funcionárias excepcionais que ao longo dos anos de trabalho na SPM foram um apoio essencial para as actividades do Seminário. A cada uma foi oferecida uma placa comemorativa, Essas placas foram pagas pelos 24 membros do Conselho Geral do SNHM

Foi elaborado, como é habitual nos Encontros do SNHM, um caderno de 38 páginas com os resumos das palestras e outras informações referentes ao Encontro e ao SNHM que foi distribuído aos participantes e às entidades que estiveram presentes na sessão de abertura: o Vice-Presidente da Câmara Municipal de Gouveia e o Diretor do Instituto de Gouveia. Posteriormente uma cópia foi entregue na SPM para arquivo.

[1] Agradecimentos institucionais são devidos à *Fundação para a Ciência e a Tecnologia* de Portugal no âmbito do projeto UIBD/00286/2020.

Queremos agradecer a toda a Comissão Organizadora local, e muito especialmente à sua coordenadora, Professora Alexandra Rodrigues, o empenho que colocaram em todos os aspectos da realização do Encontro .Estendemos os nossos agradecimentos à Câmara Municipal de Gouveia, representado na sessão de abertura pelo seu vice-presidente, Dr. Jorge Ferreira, e ao Instituto de Gouveia – Escola Profissional-, na pessoa do seu Diretor, Engenheiro José Torres, que com o seu apoio ajudaram a viabilizar este Encontro. Agradecemos igualmente à Sociedade Portuguesa de Matemática, que nos tem apoiado sempre, desde a nossa constituição como secção autónoma da Sociedade, e em Gouveia esteve representada pelo seu então Presidente, Professor João Araújo. Tivemos igualmente a colaboração de um conjunto de alunos do Instituto de Gouveia, que contribuiram para que o Encontro decorresse sem problemas. A todos agradecemos a boa vontade.

Houve ainda todo um conjunto de instituições de Gouveia que apoiaram o Encontro e a quem são devidos os nossos agradecimentos: Eurosol Hotels Gouveia, Quinta da Espinhosa, Escola Apostólica do Cristo Rei e o Restaurante Albertino, em Folgosinho, onde tivemos um memorável jantar do Encontro que certamente ficará na memória de quantos nele participaram. Por último queremos igualmente agradecer aos nossos colegas da Comissão Científica, João Caramalho Domingues e Fernando Figueiredo, que contribuiram de forma decisiva para o êxito desta realização do SNHM.

As comunicações abrangeram um vasto leque de temas da História da Matemática e do Ensino da Matemática, principalmente incidindo em temas entre o século XVIII e o século XX. Na conferência inaugural foi debatido o que define um jornal matemático, como se faz a circulação do saber matemático pelos jornais e nos jornais. Seguiram-se palestras em que foram referidas figuras significativas da história científica mundial, como Isaac Newton, Gottfried Leibniz, Richard Dedekind, Georg Cantor e Frederick Soddy. Foi abordada a relação entre a matemática e a música ao longo da história, mencionando músicos como Johan Sebastian Bach e Iannis Xenakis. Na base de uma perspectiva histórica, fez-se um estudo comparado do pentágono e do heptágono regulares para se encontrarem algumas relações algébricas e suas visualizações geométricas. Foi lembrado o matemático e historiador da Matemática Eduardo Ortiz, falecido em 2021, que muito escreveu sobre a matemática portuguesa e era colaborador do SNHM, tendo participado nalgumas das suas realizações. Foram analisadas questões da história matemática portuguesa, em particular sobre a geometria da carta de navegar, o *Estudo de Montepios* de Luiz Feliciano Marrecas Ferreira, problemas do Ensino primário e secundário nos séculos XIX e XX, o *Observatório* da

Universidade de Coimbra em Santa Clara, o *Núcleo de Matemática, Física e Química*, Sebastião e Silva e aspetos da introdução da chamada "matemática moderna" em Portugal, compararam-se os projetos de Bento de Jesus Caraça, Amoroso Costa e Jerome Bruner, bem como um relatório da UNESCO para uma melhor abordagem da Matemática e da Educação.

Como é costume terminarmos esta introdução, esperamos que a publicação destes resumos seja útil a todos os que a consultarem, que aumente a curiosidade de saberem mais sobre alguns destas questões, e que constitua um estímulo para futura participação em outros encontros do SNHM, quer como palestrantes quer como assistentes.

O Seminário está aberto a todos e de todos precisa.

Programa

17 de Junho

09.00 *Entrega de pastas*

09.20 *Abertura do Encontro* (representante do Instituto de Gouveia, representante da Câmara Municipal de Gouveia, representante da SPM, Coordenador-Geral do SNHM)

09.40 Philippe Nabonnand (Archives Henri Poincaré e Université de Lorraine) — *What is a mathematical Journal? Mathematical circulation via and in journals*

10.40 Augusto J. Franco de Oliveira (Professor Emérito da Universidade de Évora, CFCUL) — *Richard Dedekind e o princípio de permanência das regras formais*

11.10 *Coffee Break*

11.30 Helmuth R. Malonek (Departamento de Matemática, CIDMA, Universidade of Aveiro) — *Químico, matemático amador e poeta: Frederick Soddy – Nobel 1921*

12.00 Ana Patrícia Martins (Escola Sup. de Educação de Viseu / CIUHCT) — Estudo sobre monte-pios*, por Luiz Feliciano Marrecas Ferreira: uma primeira abordagem*

12.30 Manuel Xavier (CIUHCT/FCUL) — *Renovando Entre a Luta Surda: o Núcleo de Matemática, Física e Química, (1936–1939)*

13.00 *Almoço*

14.30 Helena Sousa Melo e Maria do Carmo Martins (Faculdade de Ciências e Tecnologia – Departamento de Matemática e Estatística, CEHu – Universidade dos Açores) — *Matemática e Música: Histórias de vidas que contam, tocam, cantam e encantam*

15.00 João Caramalho Domingues (Centro de Matemática, Universidade do Minho) — *Construções dos números reais no ensino liceal, c. 1900*

15.30 Ana L. Correia (Academia Militar, CEAFEL), Francisco V. Domingues (Academia Militar) — *O Ensino da Matemática no Século XIX: o exemplo da extracção da raiz cúbica – análise das abordagens em alguns manuais da época*

16.00 Maria Paula Oliveira (Universidade de Aveiro/Departamento de Matemática) — *33 anos do Projecto Matemática Ensino*

16.30 *Coffee Break*

17.00 *Tarde Social*

20.00 *Jantar do Encontro*

Suplemento do Boletim da SPM 82, Dezembro 2024, pp. 7–8

Programa

18 de Junho

09.00 Henrique Guimarães (Instituto de Educação- Universidade de Lisboa) — *Sebastião e Silva e o Seminário de Royaumont (1959) – para um currículo "moderno" de Matemática*

09.30 Alexandra Rodrigues (Centro Interdisciplinar de Ciências Sociais (CICS.NOVA), Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa, UIED) — *Aplicações da Matemática durante o Movimento da Matemática Moderna no Ensino Técnico em Portugal*

10.00 Mária Cristina Almeida (Centro Interdisciplinar de Ciências Sociais (CICS.NOVA), Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa) — *Matemática pela rádio: uma experiência nos anos setenta*

10.30 Rui Candeias (UIED – FCT-UNL / Agrupamento de Escolas Terras de Larus) — *Os números racionais não negativos: análise de contextos de ensino em manuais da formação inicial dos professores do ensino primário (1934–1974)*

11.00 *Coffee Break*

11.30 Parisa Kharazmi (Centro de Investigação e Desenvolvimento em Matemática e Aplicações (CIDMA) Universidade de Aveiro) — *Polígonos Regulares e Proporções – um Capítulo Esquecido na História da Matemática*

12.00 João Tomás do Amaral, (Faculdade de Educação da Universidade São Paulo, Instituto Histórico e Geográfico de São Paulo) — *Cultura Geral e Ideias Fundamentais: Caraça, Bruner e Delors*

12.30 Luís Saraiva (CIUHCT, DM da FCUL) — *Eduardo L. Ortiz, matemático e historiador (1931–2021)*

13.00 *Almoço*

14.30 Niccolò Guicciardini (Departamento de Filosofia «Piero Martinetti», Università degli Studi di Milano) — *Two questions concerning the history of the calculus*

15.30 Sandra Poiarez (Centro de Investigação da Terra e do Espaço da Universidade de Coimbra – CITEUC) — *Seis pavilhões para seis instrumentos: o Plano-Programa do Observatório Astronómico da Universidade de Coimbra, em Santa Clara*

16.00 Bruno Almeida (CIUHCT, Projecto MEDEA-Chart) — *A geometria das cartas de navegar: um debate do século XVI*

16.30 *Encerramento do Encontro*

16.40 *Coffee Break de Encerramento*

Circulations mathématiques dans et par les journaux

Philippe Nabonnand
Archives Henri Poincaré
Université de Lorraine, Université de Strasbourg, CNRS

Depuis quelques temps, les historiens des mathématiques s'intéressent à la circulation des mathématiques ; il est vrai que pour aborder les mathématiques comme une phénomène social, il est difficile d'ignorer les processus de circulation des savoirs mathématiques au sein de la société, entre communautés, entre disciplines, du point de vue des applications et de l'enseignement. Il n'est pas question d'opposer approches focalisées sur la production de savoirs mathématiques mais plutôt de proposer de nouveaux questionnement concernant le fonctionnement du champ mathématique et les ancrages des mathématiques dans la société. Dans ce qui suit, nous aller aborder la question de la circulation mathématique à partir des « journaux mathématiques ». Pour cela, nous commencerons par discuter de ce qu'est un « journal mathématique », puis nous donnerons quelques résultats issus du projet de recherche Cirmath (Circulation des mathématiques par et dans les journaux – histoire, territoires, publics) qui a réuni entre 2014 et 2020 une quarantaine de chercheurs internationaux [1][1].

La circulation mathématique ne concerne pas seulement celle des continus mais tout ce qui relève de la pratique mathématique, méthodes, points de vue, compréhension d'une question, explications, « métaphysique », idées, manières de faire, de présenter ou d'enseigner, informations académiques, professionnelles, vulgarisation... sans oublier des circulations matérielles comme celle des ouvrages, des journaux, des lettres, du matériel pédagogique, des modèles. Les processus de circulation impliquent les agents du champ mathématique qu'ils s'agissent d'individus, de collectifs, de communautés de travail ou de recherche et s'effectuent à travers des vecteurs de circulation comme les correspondances, les publications ou même les discussions ; les « journaux mathématiques »constituent ainsi un « espace de circulation » [8] qui a été l'objet d'étude du projet Cirmath. Dans ce qui suit, il faut entendre la notion de « journal mathématique » au sens le plus large possible, à savoir des publications qui offrent plus ou moins régulièrement à leur lectorat des contenus mathématiques. Avec le choix de la longue

[1]Le projet Cirmath a été financé par l'Agence Nationale de la Recherche française (ANR) et porté par Hélène Gispert (GHDO), Philippe Nabonnand et Jeanne Peiffer (Centre Koyré).

durée (fin du 17e siècle–1940), dans l'intention de saisir le phénomène de la publication dans son extension géographique la plus étendue et de mettre en avant la diversité des publics, le corpus des « journaux mathématiques » s'avère numériquement conséquent : plus de 1850 items, plus de 400 villes dans lesquelles au moins un « journal mathématique » est publié. Le corpus a été organisé dans une base de données dans laquelle les journaux ont été catégorisé en « spécialisés » (uniquement des contenus mathématiques), « scientifiques et techniques » (les mathématiques parmi d'autres contenus scientifiques et/ou techniques), « généralistes » (toutes les formes de savoirs). Les lectorats ont été classés en large sphères exprimant les publics visés par les journaux : les « spécialistes » pour désigner les producteurs de savoirs mathématiques, les « ingénieurs et scientifiques » pour les acteurs qui appliquent des mathématiques (qui peuvent en appliquant les mathématiques proposer des innovations mathématiques), le monde de l'enseignement (« enseignants », « él'eves », ...) et le « grand public » qui réunit les amateurs ou les publics intéressés par des informations ou de la vulgarisation mathématique. Il est clair que ces catégories sont vagues, peuvent se recouvrir, sont historiquement mouvantes — pendant très longtemps, en particulier au 18e siècle, les « spécialistes » sont aussi des « scientifiques et ingénieurs.

	1700	1750	1800	1850	1900	1940
Europe	13	52	91	239	566	614
Oceanie	0	0	1	2	8	12
Amérique du Nord	0	0	3	29	116	149
Asie	0	0	0	1	7	56
Amérique du Sud	0	0	0	1	13	26
Afrique	0	0	0	0	0	7
Moyen Orient	0	0	0	0	0	3
Total	13	52	95	272	712	867

Les effectifs des « journaux mathématiques » par continent

Un premier examen fait apparaître que le phénomène d'édition mathématique est essentiellement européen (plus de 73% du corpus publié en Europe) et que près de 70% des journaux publiés en Europe le sont dans quatre pays : l'Allemagne (plus de 280 journaux recensés), la France (plus de 250 items), l'Italie (près de 210 items) et la Grande Bretagne (plus de 180 items). Pour le reste de l'Europe, à l'exception des Pays-Bas (près d'une centaine d'items), en distinguant des aires qui correspondent plus ou moins à des entités politiques, linguistiques ou culturelles, on peut citer l'Europe centrale (près d'une centaine d'items), l'Europe de l'Est (plus de 80 items), la Scandinavie (près de 70 items) et la péninsule ibérique (une petite quarantaine d'items). À l'échelle des villes, deux dynamiques concomitantes apparaissent, une concentration autour de bibliopoles qui sont des capitales politiques et/ou culturelles ; ainsi, près des 2/3 des journaux britanniques, français et allemands sont respectivement domiciliés éditorialement à Londres, Paris, Berlin et Leipzig. Dans le même temps, le phénomène de publication de « journaux mathématiques » atteint de nombreuses villes de ces pays ; en France, 42 villes sont concernées par ce phénomène, 19 en Grande Bretagne, 37 en Italie et 52 en Allemagne.

L'univers de l'édition de « journaux mathématiques » s'élargit significativement avec l'explosion éditoriale que l'on constate après l'indépendance des États-unis [4, 2, 7]. La seconde internationalisation significative est celle qui affecte l'extrême Orient à la fin du 19e siècle. La plupart des « journaux mathématiques » japonais créés à ce moment sont des journaux « spécialisés » destinés au monde de l'enseignement, une dynamique liée à un bouleversement des programmes dans tous les ordres d'enseignement [5]. Les journaux chinois sont quant à eux plutôt, « généralistes » à destination d'enseignants et du grand public. Les analyses à l'échelle des villes permettent d'approfondir les phénomènes d'internationalisation, de concentration autour de bibliopoles et de dispersion des lieux d'édition de « journaux mathématiques ».

L'analyse de la base de données des « journaux mathématiques » fait apparaitre des dynamiques qui laissent penser qu'elles sont associées à des circulations diverses et pour nombre d'entre elles négligées par l'historiographie. Pour autant, on ne peut pas perdre de vue que les journaux fonctionnent de manière très différente, ne serait-ce qu'en tenant compte que la quantité de mathématiques proposées est variable selon les catégories de journaux (si les journaux « spécialisés » sont intégralement consacrés à celles-ci, nombre de journaux « scientifiques et techniques » ne proposent que peu de mathématiques pour ne pas parler des journaux « généralistes ») et au cours de leur existence. Même très utiles en première approximation et même plus concernant le corpus des journaux « spécialisés » [9], les seules analyses des effectifs de corpus de « journaux mathématiques » ne permettent pas d'atteindre les phénomènes fins de circulation.

Références

[1] Cirmath, *Circulations mathématiques dans et par les journaux*, `https://cirmath.hypotheses.org/`.

[2] Samson Duran, *Des géométries étatsuniennes à partir de l'étude de l'American Mathematical Society : 1888–1920*, Université de Paris-

Saclay, Orsay, 2019.

[3] Jules Henri Greber, Philippe Nabonnand, « Une base de données de journaux mathématiques », *in* C. Benzitoun, M. Rebuschi (éds.), *Les Corpus en sciences humaines et sociales*, PUN-Edulor, Nancy, 2021.

[4] Deborah Kent, « A connected effort? American editors pursue mathematical journal publication, 1804–1878 », *Revue d'Histoire des Mathématiques*, vol. 25, No. 2 (2019), pp. 195–233.

[5] Harald Kümmerle, *Die Institutionalisierung der Mathematik als Wissenschaft im Japan der Meiji- und Taishō-Zeit*, Martin Luther Universität, Halle-Wittenberg, 2019.

[6] Philippe Nabonnand, Jeanne Peiffer, Hélène Gispert, « Circulations et échanges mathématiques (18e–20e siècles) », *Philosophia Scientiae*, Vol. 19, No. 2 (2015), pp. 7–16.

[7] Karen Hunger Parshall, David E. Rowe, *The Emergence of the American Mathematical Research Community, 1876–1900*, American Mathematical Society and London Mathematical Society, Providence, 1994.

[8] Jeanne Peiffer, Hélène Gispert, Philippe Nabonnand, « Interplays between mathematical journals at different scales », *Historia Mathematica*, Vol. 45, No. 4 (2018), pp. 323–333.

[9] Jeanne Peiffer, Hélène Gispert, Philippe Nabonnand, « De l'histoire des journaux mathématiques à l'histoire de la circulation mathématique », *Cahiers François Viete*, Sér. III, Vol. 9 (2020), pp. 123–154.

Richard Dedekind e o princípio de permanência das regras formais

Augusto J. Franco de Oliveira
Professor Emérito da Universidade de Évora
Centro de Filosofia das Ciências da Universidade de Lisboa

1. Alguns precursores. Sob uma forma ou outra, a "permanência das regras formais" é uma ideia pressentida ou intuída e utilizada pelos matemáticos desde a antiguidade, mas a primeira formulação aproximativa é talvez a de Leibniz com o nome de *"lei (ou princípio) da continuidade"*, um princípio heurístico, baseado em trabalhos anteriores de Nicolau de Cusa e Johannes Kepler. Diz ele (1701): «Em qualquer suposta transição contínua, terminando em qualquer término, é lícito instituir um raciocínio geral, no qual o término também pode ser incluído (*Cum Prodiisset*).»

Kepler (*Nova stereometria doliorum vinariorum*, 1615) utilizou a lei da continuidade para calcular a área do círculo, representando-o como um polígono com infinitos lados de comprimento infinitesimal e somando as áreas de infinitos triângulos com bases infinitesimais. Leibniz utilizou o referido princípio para estender conceitos como operações aritméticas de números comuns a infinitesimais, lançando as bases do cálculo infinitesimal. Na *Análise Não-standard* (ver Oliveira e van den Berg [5]) há diversas versões de princípios deste tipo conhecidos por *princípios de transferência.*

Entre os precursores do princípio de permanência há que mencionar Gauss (1819, publicado postumamente, sobre rotações no espaço) e também Johann Peter W. Stein (1795–1831), *Elemente der Algebra* (1828) [9] (citado por Toader [7]). Os principais desenvolvimentos no sentido de formulação de um princípio metodológico, aplicado principalmente no contexto das extensões do conceito de número, dão-se no princípio do séc. XIX, com George Peacock (1930), mas é a Hermann Hankel (1867) que é atribuída a sua formulação mais explícita e moderna. Todavia, já encontramos uma versão daquele princípio na tese de *Habilitation* de Richard Dedekind (1854).

2. Hamilton. Na Ponte de Broome, que atravessa o Canal Real em Cabra, Dublin, Irlanda, está afixada uma placa que diz: «Aqui, enquanto passava no dia 16 de Outubro de 1843 Sir William Rowan Hamilton, num golpe de génio, descobriu a fórmula fundamental para a multiplicação de quaterniões $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$, que ficou gravada numa pedra desta ponte.» Naquele dia, Hamilton vencera a *relutância* que o vinha consumindo desde há, pelo menos, 13 anos: ao procurar *generalizar os complexos ao espaço tridimensional,* esbarrava sempre na dificuldade em definir uma multiplicação apropriada. *Apesar de não conseguir "multiplicar triplos", descobriu uma forma de o fazer para quádruplos.* A multiplicação de quaterniões violava o princípio da permanência das regras de cálculo: ao *prescindir da comutatividade,* pela primeira vez, Hamilton estava a abrir as portas à álgebra abstracta.

3. Princípios de permanência. Antes do advento da matemática moderna e da sua ênfase no método axiomático, o princípio da permanência foi considerado uma ferramenta importante nos raciocínios matemáticos informais, e utilizado como heurística, sobretudo para *descobrir* novas estruturas algébricas, como as Álgebras de Boole.

O princípio foi descrito por George Peacock no seu livro *A Treatise of Algebra* (1830) e foi posteriormente revisto por Hermann Hankel e adoptado por Giuseppe Peano, Ernst Mach, Hermann Schubert e Alfred Pringsheim, entre outros. Em 1821 Augustin-Louis Cauchy publicara o *Cours d'Analyse* (1821), que utilizou o termo "generalidade da álgebra" para descrever (e criticar) um método de argumentação utilizado por matemáticos do século XVIII, como Euler e Lagrange, que era semelhante ao Princípio da Permanência.

4. Peacock. George Peacock (1791–1858), na pág. 59 de *Symbolical Algebra* [6] enuncia o seu "Princípio de Permanência de Formas Equivalentes": «Quaisquer formas algébricas que sejam equivalentes quando os símbolos são gerais na forma mas tomam valores específicos, permanecem equivalentes quando os símbolos são gerais tanto em forma como nos seus valores.»

5. Hankel. Hermann Hankel (1839–1873), no seu *Prinzip der Permanenz der formalen Gesetze* (Cap. I, §3 *in* [3] (1867), enuncia: «Se duas formas expressas em símbolos gerais da aritmética universal são iguais, então devem permanecer iguais se os símbolos deixam de designar quantidades simples e as operações também recebem em consequência algum conteúdo diferente.»

Apraz-nos registar que no *Compêndio de Álgebra* [8], utilizado no ensino liceal nos anos 60, José Sebastião e Silva e José da Silva Paulo referem-se, nas pp. 19–20, ao Princípio de Hankel como *Princípio de Conservação de Propriedades Formais.* [1]

[1] Agradeço ao Professor Helmuth Malonek (Univ. de Aveiro) a indicação exacta das referências às citações do *Compêndio de Álgebra* de José Sebastião e Silva e José da Silva Paulo.

6. Dedekind. O texto da palestra de *Habilitation* de Richard Dedekind (1831–1916), *Über die Einführung neuer Funktionen in der Mathematik,* 1854, foi publicado pela primeira vez em 1932 (*Werke* [1]), e nele enuncia um *Princípio de Permanência das leis formais*, a que chama *princípio fundamental* (Oliveira [4], p. 62): «As leis que emergem das definições iniciais e que são características dos conceitos que designam devem ser consideradas de validade geral.»

Referências

[1] Dedekind, R. *Gesammelte mathematische Werke.* Friedr. Vieweg & Sohn, Brunsvique, 1932).

[2] Ebrahim, A. How Algebra became abstract: George Peacock & the birth of modern algebra (England, 1830), on April 10th, 2020, in `https://mathscitech.org/articles/how-algebra-became-abstract`

[3] Hankel, Hermann. *Theorie der complexen Zahlensysteme*, Leopold Voss, Leipzig, 1867. Ver também `https://www.encyclopedia.com/science/dictionaries-thesauruses-pictures-and-press-releases/hankel-hermann`.

[4] Oliveira, A. J. F. (Edição, organização e tradução) *Dedekind e os Números: Antologia de Textos Fundacionais de Richard Dedekind.* Textos Universitários No. 15, Editora Livraria da Física, S. Paulo, 2022, ISBN 9786555632026.

[5] Oliveira, A. J. F.; e van den Berg, I. *Matemática Não-Standard, Uma Introdução com Aplicações.* Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 2008.

[6] Peacock, George. *Treatise on Algebra*, Cambridge & J. J. Deighton, London, 1930.

[7] Toader, Iulian D. "Permanence as a principle of practice." *Historia Mathematica*, **54** (2021), pp. 77–94.

[8] Silva, J. Sebastião e; e Paulo, J. da Silva. *Compêndio de Álgebra,* 1.º Tomo, 6.º Ano, Livraria Cruz, Braga, 1962.

[9] Stein, J. P. W. *Elemente der Algebra,* 1828.

Químico, matemático amador e poeta: Frederick Soddy — Nobel 1921

Helmuth R. Malonek
Departamento de Matemática, CIDMA, Universidade de Aveiro

Em 1921, no mesmo ano que Albert Einstein, o químico britânico Frederick Soddy (1877–1956) recebeu o Prémio Nobel pela sua teoria dos isótopos (1913) e descobertas sobre a natureza da radioatividade, que contribuíram essencialmente para o surgimento da química nuclear.

Momentos decisivos na carreira profissional de F. Soddy como químico foram a sua colaboração, no ano 1900, com o físico Ernest Rutherford (Prémio Nobel 1908) e no ano 1903 com o químico William Ramsay (Prémio Nobel 1904). Nas atas do 1.º Encontro Nacional de História da Química do ano passado em [Malonek/Kharazmi (2021)], encontram-se mais detalhes biográficos, até ao ano 1936.

Curiosamente, a partir de 1936 F. Soddy abandonou o seu trabalho de químico e dedicou-se às questões sociais e económicas, à Matemática e à Poesia, uma combinação bastante estranha para um vencedor do Prémio Nobel, que foi o primeiro cientista de Oxford a receber esta mais alta distinção. A estranheza de alguns dos seus colegas e antigos colaboradores sobre estas atividades é patente, por exemplo, nas seguintes observações no *Obituário* [Fleck (1956)]:

> *...his time was devoted to riding various hobby horses which it is difficult to imagine will ever find a permanent place in the culture of our times. Economic theory, the closest packing of spheres ....*

É muito importante mencionar que os problemas sociais e económicos de F. Soddy decorreram da sua experiência profissional, tendo de facto sido motivados por preocupações com as consequências da radioatividade e a responsabilidade dos cientistas, fazendo de F. Soddy um profeta do seu tempo [Davies (1992)]. Além disso, o matemático amador Frederick Soddy ainda hoje é citado em publicações matemáticas. Lembramos que o chamado *hobby* do *closest packing of spheres* é um conceito matemático relacionado historicamente com o empacotamento de círculos no plano, com origens no trabalho de Apolónio há mais de 2.000 anos, que inspirou vários matemáticos ao longo dos séculos, particularmente René Descartes no século XVII, cf. [Coxeter (1968)]. Um dos contributos de F. Soddy, que consiste na generalização do resultado de Descartes para o espaço tridimensional, está incluído no Soddy-Gosset-Theorem, [Lagarias (2002)] e continuou a ser referido, juntamente com resultados recentes, por exemplo em [Stephenson (2003), Baragar (2018), Kontorovich (2019)].

Mais concretamente, na geometria do plano euclidiano, um problema de Apolónio de Perga (262–190 a. C.) é construir círculos que sejam tangentes a três círculos dados no plano [Coxeter (1968)]. Em geral, uma configuração de Descartes é uma configuração de quatro círculos mutuamente tangentes no plano, em que três círculos não têm uma tangente comum, incluindo o caso de uma linha reta, considerada como um círculo de raio infinito. Suponha-se que os raios dos círculos são r_1, r_2, r_3, r_4. Os recíprocos destes são as curvaturas (ou "bends", como Soddy lhes chamava) k_i, $i = 1, 2, 3, 4$. No caso particular da inclusão de 3 círculos num quarto círculo de raio r_4, define-se a curvatura orientada do círculo exterior como $-1/r_4$. Neste caso a fórmula de R. Descartes, [Lagarias (2002)], é nada mais do que uma equação quadrática entre as curvaturas de 3 círculos mutuamente tangentes (externamente) com o quarto círculo mutuamente tangente (internamente) da forma:

$$(k_1 + k_2 + k_3 + k_4)^2 = 2(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2).$$

Como F. Soddy demonstrou, as curvaturas de cinco esferas analogamente mutuamente tangentes estão relacionadas por:

$$(k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5)^2 = 3(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2 + k_5^2). \tag{1}$$

O início da atividade de F. Soddy na área da Matemática está marcado por três breves notas na revista *Nature*. A primeira destas notas [Soddy (1936)] foi o poema "The Kiss Precise" sobre círculos e esferas satisfazendo a fórmula (1). Este foi mais tarde seguido de notas sobre uma configuração geométrica tridimensional a que chamou *Hexlet* [Soddy (1937a), (1937b)].

Para isso Soddy considerou o preenchimento de uma esfera oca com esferas de raios mais pequenos, usando a relação (1), mas sem se restringir ao caso de 4 esferas externamente tangentes com a quinta esfera internamente tangente. Partindo de duas esferas C_1 e C_2 mutuamente tangentes (externamente) com uma esfera maior C_3 dentro da qual C_1 e C_2 são internamente tangentes, em seguida, considerou a construção de uma cadeia de esferas tangentes externamente a C_1 e C_2 e internamente a C_3 (de modo que C_3 contém a cadeia, bem como as duas esferas originais). Soddy reparou neste processo que, surpreendentemente, cada cadeia se fecha num "colar"após seis esferas (a que chamou *Hexlet*), independentemente de onde a primeira esfera é colocada [Weisstein2022].

NOTA FINAL: A investigação histórica esclareceu que as descobertas de Soddy eram apenas redescobertas independentes (cf. [Lagarias (2002)]). No entanto, são relevantes e merecem o reconhecimento do seu mérito, pois resultaram de uma experiência física interessante (e não do método habitual de inversão das esferas). Em [Soddy (1937b)] explica-se a origem da ideia do *Hexlet* preenchendo uma esfera oca com esferas de raios mais pequenos:

> *This interesting property was discovered experimentally for some of the hexlets of the model illustrated in NATURE (Jan. 9, 1937, p. 78) by Mr. F. March, the mechanic of the Old Chemistry Department, who constructed it.*

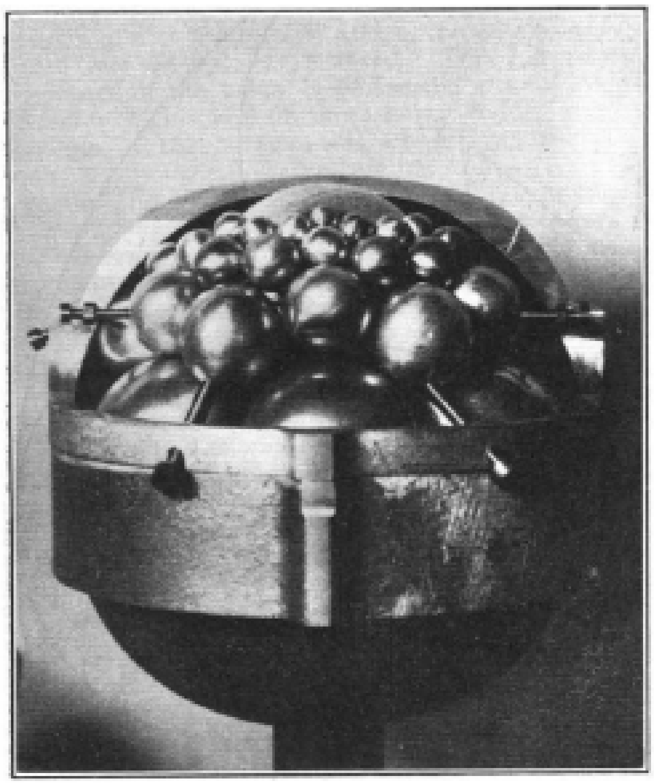


Figura 1: A imagem do empacotamento de esferas mencionada por F. Soddy.

Referências

A. Baragar, "Higher dimensional Apollonian packings, revisited", *Geom. Dedicata*, 195 (2018), 137–161.

H. S. M. Coxeter, "The Problem of Apollonius", *Amer. Math. Monthly*, 75:1 (1968), 5–15.

M. Davies, "Frederick Soddy: The scientist as prophet", *Ann. of Science*, 49:4 (1992), 351–367.

A. Fleck, "Obituary: Prof. Frederick Soddy, F. R. S.", *Nature*, 178 (1956), 893.

A. Kontorovich, "The local-global principle for integral Soddy sphere packings", *J. Mod. Dyn.*, 15 (2019), 209–236.

J. C. Lagarias et al., "Beyond the Descartes Circle Theorem", *Amer. Math. Monthly*, 109:4 (2002), 338–361.

H. R. Malonek, P. Kharazmi, "Frederick Soddy — Nobel 1921, amateur mathematician, and poet", in: *A evolução da química: impactos na sociedade.* (2021), Eds. I. Malaquias and J. Oliveira, 113–121, DOI: 10.48528/y82q-sf85, `http://hdl.handle.net/10773/32109`.

F. Soddy, "The Kiss Precise", *Nature* 137 (1936), 1021.

F. Soddy, "The Bowl of Integers and the Hexlet", *Nature* 139 (1937a), 77–79.

F. Soddy, "The Hexlet", *Nature* 139 (1937b), 154.

K. Stephenson, "Circle packing: A mathematical tale", *Notices AMS*, 50:11 (2003), 1376–1388.

E. W. Weisstein, "Hexlet", *MathWorld* –A Wolfram Web Resource (2022), `https://mathworld.wolfram.com/Hexlet.html`.

Estudo sobre monte-pios, por Luiz Feliciano Marrecas Ferreira: uma primeira abordagem

Ana Patrícia Martins
Escola Superior de Educação de Viseu / CIUHCT

Os *montepios de sobrevivência* (MS) portugueses — associações de socorros mútuos que providenciavam pensões *de sobrevivência* aos herdeiros dos seus sócios, após a sua morte, mediante o pagamento de contribuições tabeladas — assumiram, no século XIX, um papel fundamental na assistência social em Portugal. Os primeiros, militares, foram criados em finais do século XVIII; o Montepio Literário (1815) foi o primeiro montepio civil, mas é na década de 1840 que se assiste a um crescendo dessas instituições. O mais próspero dos MS foi o Montepio Geral (MPG) (1840).

Os fundos de pensões estabelecidos nos MS, durante todo o século XIX, não obedeciam aos princípios da Ciência Actuarial. Muito embora a teoria básica de anuidades Vida estivesse estabelecida desde a primeira metade do século XVIII (por Abraham de Moivre; ampliada por diversos autores britânicos, até meados do século), a falta de estatísticas de mortalidade fidedignas da população portuguesa inviabilizava a construção de tabelas actuariais ajustadas à realidade das associações. O carácter mutualista dos MS legitimava uma assistência abrangente (permitiam-se múltiplos beneficiários e a transmissão de pensões entre eles), o que impossibilitava a previsão de encargos futuros. O problema era reconhecido desde a década de 1830, mas reformas de fundo não foram implementadas. No MPG, comissões diversas estudaram a organização do plano de pensões, pelo menos desde a década de 1860. Na década de 1880, o MPG e o *Montepio Oficial dos Servidores do Estado* (MPO) (os MS mais relevantes), enfrentavam dificuldades de solvabilidade dos seus fundos de pensões. No século XIX, a maior parte dos MS portugueses faliu. Desconhecem-se os princípios usados na elaboração das suas tabelas de pensões e de contribuições. Luiz Feliciano Marrecas Ferreira (1851–1928) graduou-se, em 1875, no curso de Engenharia Militar da Escola do Exército (EE). Em 1880, tornou-se lente da EE e em 1886 ocupava o lugar de lente da 28.ª cadeira, *Operações Financeiras* (OF), do Instituto Industrial e Comercial de Lisboa (IICL). (Ainda no IICL, e no seu sucessor, o Instituto Superior de Comércio (ISC), leccionou cadeiras de matemática.) Compôs textos científicos em temas diversos. Em actuariado, somente um, sendo a investigação nessa área motivada pela filiação ao MPG. Na década de 1880, integrou comissões diversas para o estudo da viabilidade financeira do seu plano de pensões e, nos princípios do século XX, fez parte de comissões que estudaram o cálculo de reservas matemáticas e a reforma de estatutos. Foi um dos autores da regulamentação da indústria de seguros de 1907. E, em 1926, tornou-se um dos sócios fundadores da Associação dos Actuários Portugueses, a primeira associação profissional de actuários nacional.

Estudo sobre Monte-pios é a dissertação que elaborou para o concurso ao lugar de lente proprietário da cadeira de OF do IICL, onde se iniciou o ensino de assuntos de actuariado em Lisboa. O tema poderia ser *escolhido livremente de entre as questões mais importantes das ciências que fazem parte dessa cadeira* (assim se lê na publicitação do concurso) e a sua escolha revela-se perfeitamente ajustada ao estado de prosperidade dos MS. Trata, de forma aprofundada, a problemática da estabilidade financeira dos MS, com especial enfoque no MPG e no MPO. Uma primeira abordagem permite-nos esclarecer que, em meados da década de 1880, os problemas para fundamentar, com bases actuariais, os fundos de pensões instituídos nos MS persistiam — escassez de estatísticas ajustadas à população e dificuldade em torno da construção de tabelas actuariais que contemplassem uma ampla assistência. A ligação de Marrecas Ferreira ao MPG faz-nos equacionar que as suas propostas para ultrapassar esses obstáculos fossem discutidas no seio de comissões que estudavam o plano de pensões da instituição. Destacamos uma proposta de cálculo das pensões legadas que contorna a indefinição dos beneficiários no momento da subscrição pelo sócio, bem como a transmissão de pensões. Assente no princípio de *encargo máximo*, pressupunha as condições mais desvantajosas para o fundo, em termos de encargos futuros no pagamento das pensões — a existência de apenas um beneficiário, uma filha menor, que não casasse (tomando como referência as tábuas de mortalidade inglesas H^{M}, H^{F} e $\mathrm{H}^{\mathrm{M}(5)}$, essa filha teria 10 anos).

A cadeira de OF fazia parte do plano de estudos do 3.º ano do Curso Superior de Comércio criado em 1884 no IICL, um curso técnico-profissional de 5 anos. (Funções de *actuário* seriam exercidas por um *empregado superior de estabelecimentos comerciais e* industriais, uma das saídas profissionais do curso.) O primeiro programa dessa cadeira é de 1888. Contempla assuntos de cálculo financeiro, cálculo de probabilidades e cálculo actuarial (seguros de vida, rendas vitalícias, caixas económicas e montepios, cálculo de risco em operações de bolsa). No que respeita ao tópico *montepios*, especial destaque é dado ao MPG e ao MPO, em estreita correspondência com o *Estudo* de Marrecas Ferreira. O facto desse programa se ter mantido por cerca de três décadas, como expomos de seguida, reforça a pertinência de uma análise detalhada do contributo do engenheiro militar. A instrução em matemática actuarial ministrada entre 1888 e 1919 (primeiramente no IICL e, a partir de 1911, no ISC) não terá sofrido grandes alterações. Os conteúdos programáticos das diversas cadeiras não diferem daqueles extensivamente detalhados (em sete páginas) no programa de 1888 da cadeira de OF. (Já os restantes programas restringem-se a títulos de capítulos.) Foram três os lentes que assumiram esse ensino. Até 1911, no IICL, a cadeira OF foi leccionada por Marrecas Ferreira, Augusto Patrício dos Prazeres (1859–1922) e Caetano Maria Beirão da Veiga (1888–1962); no ISC, sucederam-se as duas cadeiras *Operações financeiras a longo prazo* e *Seguros; Instituições de previdência*; *Contabilidade de seguros*, mantendo-se, na cátedra, Prazeres e Beirão da Veiga. Tentativas de reforma dos estudos em actuariado estão documentados desde a década de 1910. Destaca-se em 1911, a tentativa de introdução de cursos de Estatística e de Matemática Actuarial na Faculdade de Ciências da Universidade de Coimbra, por Sidónio Pais, vice-reitor e professor dessa Faculdade. A proposta foi reprovada, por não se considerar a *teoria matemática dos seguros* assunto *próprio* duma universidade.

Estudo sobre monte-pios, o único texto em assuntos actuariais, publicado, de Marrecas Ferreira, sugere uma estreita relação entre a prática actuarial, a investigação em torno das fundações actuariais de fundos de pensões de MS e a instrução em actuariado. A relevância científica dos métodos propostos e a sua efectiva aplicação em MS, porventura por comercialistas formados nos IICL/ISC, são dois aspectos que merecem um estudo detalhado, permitindo aumentar sobremaneira o nosso conhecimento sobre o progresso dessas instituições em finais do século XIX e princípios do século XX.

Referências

Instituto Industrial e Comercial de Lisboa. 1888. *Programmas das cadeiras approvados por Portaria de 22 de agosto de 1888.* Lisboa: Imprensa Nacional.

Marrecas Ferreira, Luiz Feliciano. 1886. *Estudo sobre Monte-Pios. Dissertação para o concurso da cadeira de Operações Financeiras do Instituto Industrial e Commercial de Lisboa.* Lisboa: Typographia da Viuva Sousa Neves.

Martins, Ana Patrícia. 2011. Matemática actuarial: seu ensino nos Institutos

Superiores, dos seus inícios a 1930. *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática*, Outubro, 7–11.

Martins, Ana Patrícia. 2020. *Para a História do Atuariado em Portugal.* Lisboa: Instituto dos Actuários Portugueses. Cap. “Contributos para a história do actuariado em Portugal anterior à fundação do Instituto dos Actuários Portugueses”, 23–69.

Renovando entre a Luta Surda: o Núcleo de Matemática, Física e Química

Manuel Xavier
CIUHCT–FCUL

O Núcleo de Matemática, Física e Química, fundado em 1936, foi uma iniciativa dinamizada por jovens investigadores europeizados, bolseiros da Junta de Educação Nacional (JEN), que reconheciam as insuficiências do ensino universitário português. O Núcleo organizou cursos extracurriculares e publicou quatro livros, tendo o seu espírito renovador incomodado o *status quo* académico (Gil 2003). A sua missão, nas palavras de um dos seus fundadores, o professor de física do Instituto Superior Técnico (IST) António da Silveira (1904–1985), era contribuir entre a juventude para o "despertar para a investigação científica" (Silveira 1971, 48).

Em 1929, havia sido fundada a JEN. A criação desta instituição foi um marco da maior importância na história da organização científica portuguesa (Lopes 2018). Os bolseiros desta junta, alguns regressados com doutoramentos do estrangeiro, como o matemático António Monteiro (1907–1980) e o físico Manuel Valadares (1904–1982), fundaram o Núcleo. Esta iniciativa, enquanto movimento independente das escolas, curto-circuitou a relação com a tutela universitária, visto que a JEN e depois a sua instituição sucessora — o Instituto para a Alta Cultura (IAC) — subsidiavam-na diretamente. De notar que a JEN e o IAC iam também criando centros de estudos anexos às universidades, espoletando tensões entre a universidade enquanto espaço de reprodução de saberes e os centros enquanto espaço de criação de conhecimento (Salgueiro 2018, cap. 4).

Devido a este tipo de tensões, o Núcleo sofreu de instabilidade e oposições, tanto externas como internas. O professor de matemática e diretor da Faculdade de Ciências de Lisboa (FCUL), Victor Hugo Duarte de Lemos (1894–1959), pretendia anexar o Núcleo à FCUL, destituindo-o assim do seu cariz independente. O Ministro da Educação à data, António Carneiro Pacheco (1887–1957), considerou o Núcleo como ensino superior particular, sobre o qual se devia legislar. E a própria Academia das Ciências de Lisboa parece ter estado envolvida numa intriga que terá prejudicada as atividades. "A oposição tocou a rebate a toda a parte [...] Fomos acoimados de indesejáveis comunistas", disse Silveira (1971, 49–50). Além disso, havia quem preferisse que as atividades decorressem no IST, como Silveira. Já Monteiro e Valadares preferiam a FCUL. A rivalidade IST–FCUL, neste caso plasmada em Valadares e Silveira, cujos laboratórios de física dificilmente colaboravam (Lopes 2018 cap. 4.2.3), também contribuiu para certas desinteligências. Bento de Jesus Caraça (1901–1948) escreveu inicialmente sobre o Núcleo: "Renovar fora das escolas", para logo se referir, contudo, a uma "luta surda".[1] O Núcleo cindiu-se em 1939.

Os ex-membros do Núcleo continuaram os seus trabalhos. Valadares continuou investigando com o seu grupo no Laboratório de Física da Universidade de Lisboa. Monteiro criou o Seminário de Análise Geral e fundou a revista Portugaliae Mathematica (PM). O Movimento Matemático estava no seu auge. Mas os entraves eram grandes. Referindo-se à ala universitária mais conservadora, Valadares escreveu: "os 'matemáticos' daqui estão apostados em sabotar tudo o que seja investigação científica".[2]

Por exemplo, Hugo de Lemos e Francisco Leite Pinto (1902–2000), este último dirigente do IAC, cortaram o subsídio à PM, por não lhes ter sido dado um lugar no quadro editorial da revista. Por esta razão, era a FCUL e seu diretor considerados pelo matemático Hugo Ribeiro (1910–1988) como os "inimigos número 1 da matemática".[3] Um jovem José Sebastião e Silva (1914–1972) dizia-se visado pela "má vontade da mestrança".[4] Alfredo Pereira Gomes (1919–2006), que atuou no Porto no grupo do matemático Ruy Luís Gomes (1905–1984), proferiu, depois do 25 de Abril, que as dificuldades ao trabalho "não era a PIDE", mas sim "os oficiais do mesmo ofício", e que foram esses mesmos colegas que "depois denunciaram as pessoas ativas como tendo ideias subversivas" (Sociedade Portuguesa de Matemática 2009). Este depoimento vai ao encontro das palavras de Silveira de que o Núcleo "foi a causa primeira, remota, das demissões de certas pessoas em junho de 1947" (Silveira 1984–5, 199).

Há ainda que ter em consideração os jogos políticos neste período. Tendo o Partido Comunista Português (PCP) uma preponderância inegável enquanto força agregadora entre os jovens cientistas com simpatias à esquerda, o partido tinha a sua própria agenda. Segundo Maria do Pilar Ribeiro (1911–2011), mulher de Hugo Ribeiro, o PCP também não queria a fundação de um instituto de matemática, porque isso seria "dar glória a Salazar" (Soci-

[1] Notas manuscritas de Bento de Jesus Caraça: Núcleo de Matemática, Física e Química, 1936–1939, Pasta 04399.024, Espólio Bento de Jesus Caraça, Arquivo da Fundação Mário Soares e Maria Barroso.

[2] Manuel Valadares a Armando Gibert, 1/04/1945, Espólio de Armando Gibert, Arquivo Histórico dos Museus da Universidade de Lisboa.

[3] Hugo Ribeiro a José da Silva Paulo, 14/05/1944, Espólio de Hugo Ribeiro, Biblioteca Nacional de Portugal (BNP).

[4] José Sebastião e Silva a Ruy Luís Gomes, 10/08/1942, espólio de Ruy Luís Gomes, Casa-Museu Abel Salazar.

edade Portuguesa de Matemática 2009). Monteiro, apesar de seu parceiro, também criticava Caraça pela sua "influência perniciosa na juventude",[5] possivelmente referindo-se ao intensificar da sua atividade política.

Invejas, más-línguas, rivalidades institucionais e lutas políticas não eram amigas do trabalho continuado e eram o suficiente para, num meio conservador e de fraca tradição científica, coartar qualquer iniciativa inovadora. A desintegração do Núcleo, bem como o declínio dos centros de estudo e as purgas de 1947, são também fenómenos que devem à pequenez do meio científico português e suas frágeis instituições. As universidades também devem ser responsabilizadas por estes entraves. As externalidades como falta de dinheiro e perseguição política, tendo o seu peso inegável, não poderão servir indefinidamente como álibis para desculpar o conservadorismo das elites portuguesas.

Referências

Gil, Fernando Bragança, "Núcleo de Matemática, Física e Química: uma contribuição efémera para o movimento científico português", *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática*, n.º 49 (2003): p. 77–92.

Lopes, Quintino, *A Europeização de Portugal entre Guerras: A Junta de Educação Nacional e a Investigação Científica*, Caleidoscópio, Casal de Cambra, 2018.

Salgueiro, Ângela, *Ciência e Universidade na I República*, Caleidoscópio, Casal de Cambra, 2018.

Silveira, António da, "Elogio Histórico de Luís António Rebelo da Silva", em *Memórias da Academia das Ciências de Lisboa: Classe de Ciências*, tomo XV, 35–57, Academia das Ciências de Lisboa, Lisboa, 1971.

Silveira, António da, "Comentários Imperfeitos como elementos para uma História dos Estabelecimentos Científicos em Portugal", em *Memórias da Academia das Ciências de Lisboa: Classe de Ciências*, tomo XXVI, 143–205, Academia das Ciências de Lisboa, Lisboa, 1984–5.

Sociedade Portuguesa de Matemática, *Memória da Matemática*, DVD, 5 vols., 2009.

[5] António Monteiro a Hugo Ribeiro, 29/11/1947, espólio de Hugo Ribeiro, BNP.

Matemática e Música: Histórias de vidas que contam, tocam, cantam e encantam

Helena Sousa Melo, *Maria do Carmo Martins*
Faculdade de Ciências e Tecnologia e Centro de Estudos Humanísticos,
Universidade dos Açores

Numa divertida e curiosa valsa com diferentes formações, apresentamos, em tom de sinfonia, este par de aparência incongruente: Matemática e Música, numa mistura de rigor, história e sentimento.

A música e a matemática remontam ao início da humanidade. A escola pitagórica considerava a matemática dividida em quatro partes: Aritmética, Geometria, Música e Astronomia, o *Quadrivium*. Pitágoras foi o primeiro a relacionar razões de cordas vibrantes aos intervalos musicais fazendo uso do seu monocórdio. Iniciou a sua escala musical com a nota ***dó***, corda esticada, depois dividiu-a, sucessivamente em 3 partes iguais, obtendo as notas ***sol***, ***ré***, ***lá*** e ***mi***. Quando obteve a nota ***si***, parou de subdividir, desprezando-a por não ter harmonia. Continuando a subdividir em 3, depois do ***si***, obtemos a escala temperada ou cromática com 12 semitons em uma oitava, de ***dó*** a ***dó***. Nesta relação entre duas notas separadas por um semitom, obtemos a razão de uma progressão geométrica, entre as suas frequências, igual a $\sqrt[12]{2} \approx 1{,}05946$. Podemos associar o inverso das potências dessa razão a frações. Por exemplo, considerando a escala de Dó Maior temos:

$$\text{Dó: } 1 \qquad \text{Mi: } \frac{1}{\sqrt[12]{2^4}} \approx \frac{64}{81} \qquad \text{Sol: } \frac{1}{\sqrt[12]{2^7}} \approx \frac{2}{3} \qquad \text{Si: } \frac{1}{\sqrt[12]{2^{11}}} \approx \frac{8}{15}$$

$$\text{Ré: } \frac{1}{\sqrt[12]{2^2}} \approx \frac{8}{9} \qquad \text{Fá: } \frac{1}{\sqrt[12]{2^5}} \approx \frac{3}{4} \qquad \text{Lá: } \frac{1}{\sqrt[12]{2^9}} \approx \frac{16}{27} \qquad \text{Dó}^{8.\text{a}}\text{: } \frac{1}{\sqrt[12]{2^{12}}} = 1$$

Assim, de modo simplificado, podemos atribuir a cada nota uma fração associada ao comprimento da corda inicial, sendo tais frações muito próximas das frações encontradas por Pitágoras no monocórdio.

Os matemáticos e físicos de outrora perceberam e sentiram as analogias entre matemática e música. Os músicos, por sua vez, recorreram à matemática para descrever a sua arte, quer de modo direto, ou indireto.

Durante o século XX, a linguagem musical foi matematizada. Novas ideias matemáticas foram usadas pelos compositores como base de criação. Nesta relação, vamos percorrer as histórias de vida de Bach, Mozart, Beethoven, Xenakis, Smullyan e Scimemi.

Johann Sebastian Bach (1685–1750) foi um compositor alemão, cravista, regente, organista, professor, violinista e violista, do período Barroco, e considerado o melhor representante da ligação música-matemática daquela época. No fim da sua vida, interessou-se pela simetria musical, criando uma série de enigmas com problemas musicais para os seus alunos, os quais estão presentes nos seus *cânones* e *fugas*, que deveriam ser decifrados para serem interpretados corretamente. Numa apreciação da estrutura matemática dos seus temas constatámos o seu intelecto e a dimensão da sua obra.

Wolfgang Amadeus Mozart (1756–1791) foi um prolífico e influente compositor austríaco do período Clássico. As primeiras composições ocorreram aos 5 anos de idade e durante a sua curta vida de 35 anos, entre *óperas*, *sinfonias* e *missas*, totalizou cerca de 600 obras. Influenciado pela numerologia e pela gematria, doutrinas ligadas à Maçonaria, Mozart tinha uma predileção por certos números que frequentemente utiliza nas suas obras, tal como na ópera *A Flauta Mágica*. Observamos também nas suas ***sonatas*** a razão áurea e na sua música, em geral, o uso de simetrias.

Ludwig van Beethoven (1770–1827) foi um compositor germânico do período de transição entre o Classicismo e o Romantismo. Produziu cerca de 200 obras entre *sonatas*, *sinfonias*, concertos e *quartetos* para cordas. Entre 1814 e 1827, já atingido pela surdez, alcançou o auge da sua técnica criativa escrevendo obras de excecional qualidade como a *9.ª Sinfonia*, envolvendo a matemática, apesar de não ter grandes conhecimentos nessa área. A maior proeza matemática na sua música está relacionada com a razão áurea. Por exemplo, a partitura da composição *Für Elise* está dividida nas proporções 24:38 de 62 e são usados padrões matemáticos relacionados com as simetrias de translação.

Iannis Xenakis (1922–2001) foi um compositor greco-romano, arquiteto, diretor artístico e engenheiro. Desde cedo interessou-se por matemática, grego, literatura estrangeira e música. Os seus primeiros estudos musicais ocorreram aos 26 anos, tendo sido o compositor e organista **Olivier Messiaen** quem o encorajou a desenvolver as suas ideias musicais aproveitando o vasto conhecimento que detinha, desde a arquitetura à matemática, e a integrá-los na sua música. Xenakis usou os **processos estocásticos** nas suas composições e introduziu um sistema não-determinista. A sua *música estocástica* apoiava-se em subáreas e estruturas matemáticas, tais como, a teoria dos conjuntos, a teoria dos grupos, a teoria dos jogos, a teoria das probabilidades, ou a álgebra de Boole. Para efetuar os cálculos e produzir as partituras das suas composições Xenakis utilizava **computadores**.

Raymond Merrill Smullyan (1919–2017) foi um matemático estadunidense, filósofo taoista, pianista, lógico e mágico. Iniciou-se profissionalmente com a música depois de ganhar a medalha de ouro numa competição para piano em 1931. Foi professor de piano, mas uma tendinite no braço direito, fez voltar a sua atenção para a matemática, que também amava. Doutorou-se em 1959 em lógica formal, orientado por Alonzo Church. Apesar do humor usado em alguns dos seus livros, teve uma carreira académica muito séria na área de lógica-matemática.

Benedetto Scimemi (n. 1938) formou-se em Física em 1960. Lecionou matemática na Faculdade de Ciências da Universidade de Pádua e sempre teve interesses musicais, estudando piano e flauta. Defende que "a melodia pode ser representada como um gráfico plano onde as alturas das notas são descritas em função do tempo". Em 1999 publica o artigo "Contraponto musical e transformações geométricas" nas atas do *Colóquio/Ciências - Revista Cultural Científica*, 24, 60–68. Se efetivamente aplicarmos as devidas transformações geométricas ao gráfico, podemos obter uma nova melodia que, tocada em simultâneo com a original, produz uma harmonia. Benedetto dedica-se ao estudo matemático das composições de Bach.

Em tom de desfecho invocamos as palavras de dois matemáticos que evidenciam a relação entre matemática e música: "A música é um exercício inconsciente de aritmética" (Leibniz) e "A matemática é a música do raciocínio" (Sylvester).

Referências

Boyer, C. B., *História da Matemática.* Tradução de Elza F. Gomide. Ed. Edgard Blücher Ltda. São Paulo, Brasil, 1974.

Carvalho, H. M., Pompeu Jr., G. & Bassanezi, R. C., *A modelagem matemática aplicada ao estudo de duas formas de representação artística.* VI Conferência sobre Modelagem na Educação Matemática, Londrina, PR, Brasil, 2009.

Sousa, L. G. S. & Taffarello, T., *Simetria e Música.* Revista do Programa de Pós-Graduação em Música da Universidade de Brasília. Ano VII, Vol. 1: 51–74, 2013.

Construções dos números reais no ensino liceal, c. 1900

João Caramalho Domingues
Centro de Matemática da Universidade do Minho

Entre 1869 e 1872, Charles Méray, Eduard Heine, Georg Cantor e Richard Dedekind publicaram as primeiras construções dos números reais a partir dos números racionais: os três primeiros utilizando sucessões de Cauchy de números racionais, o quarto introduzindo o que agora se chamam «cortes de Dedekind» [Epple, 2003, 297–301]. Nos quatro casos o contexto, ou pelo menos a motivação inicial, era a demonstração de teoremas de cálculo infinitesimal.

Em Portugal, a primeira edição (1887) do *Curso d'analyse infinitesimal – Calculo Differencial* de Gomes Teixeira inclui, num apêndice, uma breve «theoria dos numeros irracionaes», definindo estes como limites de sucessões crescentes mas limitadas de números racionais. Na 2.ª edição (1890) essa passagem foi expandida e modificada, num sentido que a aproxima da construção por cortes de Dedekind: são consideradas duas sucessões de racionais (positivos), uma (a_n) crescente e outra (b_n) decrescente, de forma que todos os termos da primeira são menores do que todos os da segunda e a diferença $b_n - a_n$ pode tornar-se tão pequena quanto se queira; se não houver um número racional maior do que todos os a_n e menor do que todos os b_n, estas sucessões definem um número irracional. Claramente, o propósito desta construção é permitir provar o critério de Cauchy.

No entanto, duas construções dos números reais apareceram também em compêndios liceais das décadas de 1890 e 1900, em contextos desligados do cálculo infinitesimal.

Os números irracionais (como números, ou quantidades, «incommensuraveis») aparecem em 1872 no programa de Matemática do 3.º ano do Liceu, no capítulo «Arithmetica»; as «operações sobre numeros incommensuraveis» surgem no mesmo parágrafo que as «Operações sobre radicaes» [Diario do Governo, 11/10/1872]. No muito popular compêndio de aritmética de Serrasqueiro, as explicações são rápidas e vagas: «*Numero irracional* ou *incommensuravel*» é definido como «aquelle, entre o qual e a unidade não ha medida commum», e é também caracterizado como «o limite dos numeros, que medem as grandezas commensuraveis, que se podem aproximar da grandeza correspondente tanto quanto quizermos»; o assunto que torna estas breves explicações necessárias é o cálculo de e com raizes («é [...]

a extracção de raizes que gera estes numeros [irracionais]»), em particular cálculos aproximados.

O primeiro dos compêndios liceais com construções aritméticas dos números reais é o *Tratado Elementar de Arithmetica* de João Figueirinhas, publicado originalmente em 1894. João Simões Ferreira Figueirinhas (1861–1919) era natural de Vouzela (Viseu), formou-se na Escola Médico-Cirúrgica do Porto em 1888 e, para além de exercer medicina, foi professor de Matemática no Liceu Central do Porto. Figueirinhas apresenta uma construção dos números reais claramente inspirada na de Gomes Teixeira. Chamando «série» ao que actualmente se chama sucessão, diz que «Duas series de numeros, uma crescente e outra decrescente, dizem-se convergentes para um limite commum, se todos os numeros da primeira são menores que os da segunda, e se se póde sempre encontrar um numero da segunda e outro da primeira cuja differença seja menor que qualquer numero, por pequeno que seja» [Figueirinhas, 1894, 267]. Depois de provar que esse limite é único, Figueirinhas observa que nem sempre existe (no universo dos racionais). No caso de não existir limite racional, «diz-se, por definição, que ellas admittem para limite commum um novo ente arithmetico, um novo symbolo numerico, a que se dá o nome de *numero irracional* ou *incommensuravel*» [Figueirinhas, 1894, 270]. Figueirinhas apresenta depois definições das operações aritméticas envolvendo números irracionais, bem como demonstrações das suas propriedades básicas. No entanto, não segue exactamente as opções de Gomes Teixeira, e o resultado é, naturalmente, inferior. Em particular, tendo os números negativos sido introduzidos anteriormente, a definição do produtos de dois irracionais [Figueirinhas, 1894, 277] está errada.

O outro compêndio, certamente muito mais influente, foi escrito por Joaquim d'Azevedo Albuquerque (1839–1912). Natural do Porto, Albuquerque tinha o curso de engenheiro civil de pontes e estradas pela Academia Politécnica do Porto (1861), mas foi essencialmente professor de matemática: no Liceu Central do Porto entre 1862 e 1876 e, a seguir, na Academia Politécnica do Porto, onde lecionou Mecânica Racional durante bastante tempo. A partir de 1896 publicou diversos compêndios de Matemática para o liceu, com considerável sucesso: vários foram adoptados como livros únicos. No compêndio que escreveu para o 3.º ano incluiu um apêndice à primeira parte («Arithmetica racional») sobre «Numeros irracionaes» [1897, 213–235]. Já antes, na secção sobre as raizes quadrada e cúbica, Albuquerque tinha falado na existência de grandezas incomensuráveis, e introduzido os números irracionais para as medir; por exemplo:

> «os valores decimaes obtidos pela extracção da raiz quadrada ao

> numero 2 [...], uns cujos quadrados são maiores que 2, outros cujos quadrados são menores que 2, formam, respectivamente, duas classes que servem para definir o numero irracional $\sqrt{2}$ que as separa.» [Albuquerque, 1897, 167]

Mas é no apêndice, cujo estudo Albuquerque diz que pode ser adiado ou mesmo suprimido, que aparece uma construção detalhada dos números irracionais a partir dos racionais (positivos; os números negativos só aparecem mais tarde[1]). Albuquerque segue explicitamente a construção de Dedekind, através da versão do italiano Aureliano Faifofer (1843–1909), um autor de compêndios extremamente influente. O conceito central é o de «classes contiguas»: duas classes contíguas são dois conjuntos de números (racionais) tais que todo o número da primeira é maior do que todo o da segunda, mas a diferença entre um número da primeira e um da segunda é arbitrariamente pequena. Considerando um número racional q, e as classes H formada por todos os números cujos quadrados são maiores do que q e K formada por todos os números cujos quadrados são menores do que q, H e K são classes contíguas. Se q for um quadrado perfeito, $\sqrt{q}$ é o único número racional que não pertence nem a H nem a K; se q não for um quadrado perfeito, H e K compreendem todos os números (racionais). Albuquerque invoca então o «Axioma de Dedekind» (com este nome explícito): interpretando esses números como comprimentos de segmentos de recta marcados a partir de uma origem O, «a *continuidade* da grandeza linear impõe necessariamente a existencia de um *ponto de demarcação, um ponto limite* A»; para que o segmento OA tenha «expressão numerica de medida», deu-se à ideia de número uma nova extensão, chamada *numero irracional*. Em geral, um número α, racional ou irracional, é representado por classes contíguas: $\alpha = (H, K)$. As operações envolvendo números irracionais são apresentadas com detalhe.

Em 1905 os programas do liceu foram reformulados. Boa parte do que era o programa de aritmética do 3.º ano, em particular os números irracionais, passou para o 6.º ano. Joaquim d'Azevedo Albuquerque publicou então um compêndio com o título *Arithmetica Racional* (o primeiro compêndio em Portugal com este título?), adaptação da primeira parte do seu anterior compêndio de *Arithmetica e Geometria* para o 3.º ano (e por isso tinha a indicação de ser uma 5.ª edição). Nesta edição o que era antes um apêndice passou a fazer parte do texto principal, numa secção (quarta e última) que,

[1] O subtítulo da secção sobre «Numeros fraccionarios» é «1.ª extensão da ideia de numero»; o deste apêndice é «2.ª extensão da ideia de numero»; no compêndio para os 4.º e 5.º anos aparecem os números negativos, naturalmente como «3.ª extensão da ideia de numero».

além da «Theoria dos numeros irracionaes, baseada nas classes contiguas», incluía «Calculo dos numeros approximados. Operações abreviadas».

Estes compêndios devem ter tido bastante difusão. [Albuquerque, 1897] foi adoptado como livro único por cinco anos [Diario do Governo, 26/10/1897]. [Albuquerque, 1906] foi o único adoptado, também por cinco anos [Diario do Governo, 09/09/1907], e teve edições póstumas: em 1921 (quando era mais uma vez o único adoptado oficialmente) apareceu uma edição com indicação de ser a 10.ª; em 1934 ainda apareceu outra, esta adaptada por João Chrysostomo de Oliveira Ramos, professor do Liceu Alexandre Herculano.

Referências

Joaquim d'Azevedo Albuquerque. *Arithmetica e Geometria para o ensino da 3.ª classe (3.º anno) dos Lyceus*, Porto: Imprensa Portugueza, 1897.

Joaquim d'Azevedo Albuquerque. *Arithmetica Racional para o ensino da 6.ª classe dos Lyceus*, 5.ª edição, Porto: Typographia Occidental, 1906.

Diario do Governo; `https://digigov.cepese.pt/pt/homepage`.

Moritz Epple. "The end of the science of quantity: foundations of analysis, 1860–1910", H. N. Jahnke (ed.), *A History of Analysis*, American Mathematical Society / London Mathematical Society, 2003, 291–323.

Aureliano Faifofer. *Elementi di Algebra*, 7.ª ed., Venezia: Tipografia Emiliana, 1887; `https://rcin.org.pl/dlibra/doccontent?id=45644`.

João Simões Ferreira Figueirinhas. *Tratado Elementar de Arithmetica*, Porto: Livraria de Magalhães e Moniz, 1894.

Francisco Gomes Teixeira. *Curso de Analyse Infinitesimal – Calculo Differencial*, Porto: Typographia Occidental, 1887 (publicado também, em quatro partes, no *Annuario da Academia Polytechnica do Porto*, 1884–1885 a 1887–1888). 2.ª ed., 1890.

José Adelino Serrasqueiro. *Tratado Elementar de Arithmetica*, 6.ª ed., Coimbra: Livraria Central de J. Diogo Pires, 1885.

O Ensino da Matemática no Século XIX: o exemplo da extracção da raiz cúbica – análise das abordagens em alguns manuais da época

Ana Luísa Correia
CEAFEL – U. Lisboa, Academia Militar – CINAMIL

Francisco Vieira Domingues
Academia Militar

1 Breve introdução histórica

Heron de Alexandria (75 d. C.) foi o primeiro a calcular uma raiz cúbica numericamente, por métodos de aproximação (método da dupla posição falsa). Determinou uma aproximação para $\sqrt[3]{100}$ considerando os dois cubos mais próximos de 100 por defeito e por excesso — ver [10]. Na linguagem actual, para um número N tal que $a^3 \leq N \leq (a+1)^3$, de acordo com Heron,

$$\sqrt[3]{N} = a + \frac{(N - a^3)(a+1)}{(N - a^3)(a+1) + N}.$$

Aryabhata (n. 476 d. C.) calculou raízes quadradas e cúbicas "invertendo" as fórmulas $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ e $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Este método ficou conhecido pelo *método da exaustão.* Foi utilizado pelos árabes e chegou à Europa através dos escritos de Leonardo de Pisa (1180–1250), a quem também se deve uma fórmula de aproximação para raízes cúbicas:

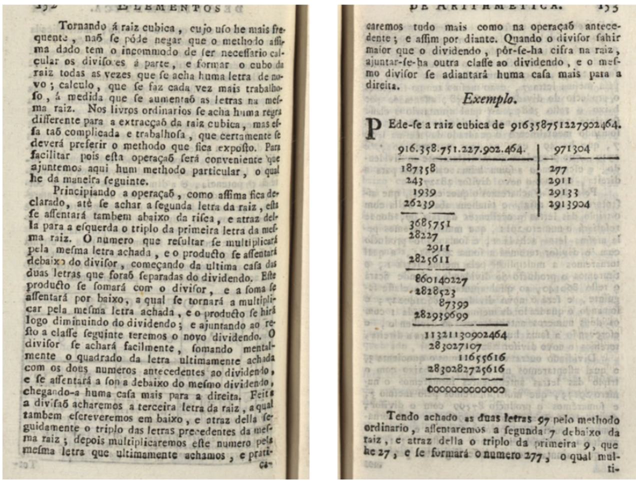
$$\sqrt[3]{a^3 + b} = a + \frac{b}{3a(a+1) + 1}.$$

No século XVI, Viète apresentou um processo sistemático e conciso para resolver qualquer equação por um método de pesquisa sucessiva dos diversos dígitos das raízes. Em particular, Viète também indicou um processo para a extracção da raiz cúbica com muitas semelhanças ao método hindu da exaustão. Em [9], William Horner apresentou um método de exaustão para a resolução de equações numéricas de qualquer grau, baseado na transformação sucessiva de equações (*continuous approximation*), para a determinação dos diversos dígitos das raízes. Um dos exemplos apresentados é o da extracção da raiz cúbica de $N = 48228544$.

2 Extracção da raiz cúbica nos manuais escolares no século XIX

2.1 Métodos de exaustão

No século XVIII o ensino da matemática em Portugal assentava essencialmente em livros de autores franceses e posteriormente nas suas traduções. Em 1773, Monteiro da Rocha na tradução de [2] introduz diversos aditamentos. Em particular, propõe um método para a extracção da raiz cúbica. Em [6] Anastácio da Cunha propõe outro método. Os dois métodos estiveram no cerne de uma célebre polémica (ver [15]). Nas primeiras três décadas



152 ELEMENTOS

Tornando á raiz cubica, cujo uſo he mais frequente, naõ ſe póde negar que o methodo aſſima dado tem o incommodo de ſer neceſſario calcular os diviſores á parte, e formar o cubo da raiz todas as vezes que ſe acha huma letra de novo; calculo, que ſe faz cada vez mais trabalhoſo, á medida que ſe aumentaõ as letras na meſma raiz. Nos livros ordinarios ſe acha huma regra differente para a extracçaõ da raiz cubica, mas eſſa taõ complicada e trabalhoſa, que certamente ſe deverá preferir o methodo que fica expoſto. Para facilitar pois eſta operaçaõ ſerá conveniente que ajuntemos aqui hum methodo particular, o qual he da maneira ſeguinte.

Principiando a operaçaõ, como aſſima fica declarado, até ſe achar a ſegunda letra da raiz, eſta ſe aſſentará tambem abaixo da riſca, e atraz della para a eſquerda o triplo da primeira letra da meſma raiz. O numero que reſultar ſe multiplicará pela meſma letra achada, e o producto ſe aſſentará debaixo do diviſor, começando da ultima caſa das duas letras que foraõ ſeparadas do dividendo. Eſte producto ſe ſomará com o diviſor, e a ſoma ſe aſſentará por baixo, a qual ſe tornará a multiplicar pela meſma letra achada, e o producto ſe hirá logo diminuindo do dividendo; e ajuntando ao reſto a claſſe ſeguinte teremos o novo dividendo. O diviſor ſe achará facilmente, ſomando mentalmente o quadrado da letra ultimamente achada com os dous numeros antecedentes ao dividendo, e ſe aſſentará a ſoma debaixo do meſmo dividendo, chegando-a huma caſa mais para a direita. Feita a diviſaõ acharemos a terceira letra da raiz, a qual tambem eſcreveremos em baixo, e atraz della ſeguidamente o triplo das letras precedentes da meſma raiz; depois multiplicaremos eſte numero pela meſma letra que ultimamente achamos, e prati-

DE ARITHMETICA. 153

caremos tudo mais como na operaçaõ antecedente; e aſſim por diante. Quando o diviſor ſahir maior que o dividendo, pôr-ſe-ha cifra na raiz, ajuntar-ſe-ha outra claſſe ao dividendo, e o meſmo diviſor ſe adiantará huma caſa mais para a direita.

Exemplo.

Pede-ſe a raiz cubica de 916358751227902464.

916.358.751.227.902.464.	971304
187358	277
243	2911
1939	29133
26239	2913904
3685751	
28227	
2911	
2825611	
860140227	
2828523	
87399	
282939699	
11321130902464	
283027107	
11655616	
2830282725616	
0000000000000	

Tendo achado as duas letras 97 pelo methodo ordinario, aſſentaremos a ſegunda 7 debaixo da raiz, e atraz della o triplo da primeira 9, que he 27, e ſe formará o numero 277, o qual multi-

Figura 1: Excertos de [2], pág. 152, 153.

do século XIX, surgem vários autores de manuais nacionais, muitos deles ainda ligados ao ensino militar e na segunda metade a produção cresce. De entre os vários autores consultados, destacamos: [1], [4], [5], [7], [11], [12], [13]. Os diferentes métodos encontrados para a extracção da raiz cúbica, nos manuais citados, são métodos de exaustão com muitas semelhanças aos métodos de Monteiro da Rocha e de Anastácio da Cunha. Supondo que a raiz cúbica é composta por dezenas e por unidades, $\sqrt[3]{N} = 10d + u$, os vários métodos usam, com mais ou menos clareza, a decomposição

$$(10d+u)^3 = 1000d^3 + 300d^2u + 30du^2 + u^3 = 1000d^3 + u(300d^2 + u(30d+u)).$$

O número N é dividido em classes de 3 algarismos e o número de classes dará o número de algarismos da parte inteira da raiz. Com uma formulação actual exemplificamos a extracção da raiz cúbica de $N = 723104521$:

$\sqrt[3]{723.104.521}$	$897,56$
-512	$8^3 = 512 < 723 < 729 = 9^3$
211.104	$300 \times 8^2 = 192.00$
	$a_2 \leq \lfloor \frac{211.104}{19200} \rfloor = 11$
-192.969	$300 \times 8^2 \times 9 + 30 \times 8 \times 9^2 + 9^3 = 192.969$
$18.135.521$	$300 \times 89^2 = 2.376.300$
	$a_3 \leq \lfloor \frac{18.135.521}{2.376.300} \rfloor = 7$
$-16.765.273$	$300 \times 89^2 \times 7 + 30 \times 89 \times 7^2 + 7^3 = 16.765.273$
$1.370.248,000$	$300 \times 897^2 = 241.382.700$
	$a_4 \leq \lfloor \frac{1.370.248.000}{241.382.700} \rfloor = 5$
$-1.207.586,375$	$300 \times 897^2 \times 5 + 30 \times 897 \times 5^2 + 5^3 = 1.207.586.375$
$162.661,625.000$	$300 \times 8975^2 = 24.165.187.500$
	$a_5 \leq \lfloor \frac{162.661.625.000}{24.165.187.500} \rfloor = 6$
$-145.000,818.216$	$300 \times 8975^2 \times 6 + 30 \times 8975 \times 6^2 + 6^3 = 145.000.818.216$
$17.660,806.784$	$\vdots$

Concluiu-se que $723104521 = (897,56)^3 + 17660,806784$. O processo pode continuar.

2.2 Os logaritmos na aproximação de raízes

Vários autores evidenciam a utilidade dos logaritmos no cálculo de raízes:

> "*Para extrair a raiz de um numero qualquer, divide-se o logarithmo d'esse numero pelo grau da raiz; e o numero correspondente ao quociente obtido será a raiz que se pede*" [5], pág. 147.

Para $N = 723104521$ e recorrendo, como nos manuais, a tabelas de logaritmos na base 10 (*logaritmos vulgares*), tem-se

$$N = 723104521 = 23 \times 2113 \times 14879 \qquad \text{(decomposição em primos)}$$
$$\log_{10} \sqrt[3]{723104521} = \frac{\log_{10} 23 + \log_{10} 2113 + \log_{10} 14879}{3} \approx 2,95306702563$$

Recorrendo, de novo, às tabelas, obtém-se $\sqrt[3]{723104521} \approx 897,56$.

3 Conclusão

Em 1895, deu-se a última reforma do ensino no século XIX. No entanto, nas primeiras duas décadas do século XX os programas de aritmética mantiveram-se sem grandes mudanças, como se pode ver em [14], 22.ª edição (1926). Com a reforma de 1947, os programas de matemática sofreram alterações significativas, com a implementação do regime de "livro único", e a extracção da raiz cúbica deixou de fazer parte dos conteúdos programáticos.

Referências

[1] L. Almeida, *Arithmetica ou Noções Elementares da Sciencia dos Números*, 1872.

[2] E. Bezout, *Elementos de Arithmetica*, Coimbra: Real Officina da Universidade, 1784.

[3] C. Boyer e U. Merzbach, *A history of mathematics*, John Wiley & Sons Inc, 2nd ed, 1991.

[4] R. Costa, *Elementos de Arithmetica e Algebra*, 1825.

[5] J. Couceiro da Costa, *Tratado de Arithmetica para servir no Collegio Militar*, 1866.

[6] J. Anastácio da Cunha, *Princípios mathematicos*, Lisboa: Officina de Antonio Rodrigues Galhardo, 1790.

[7] J. Feyo, *Elementos de Aritmética escrito para uso na Escola Politécnica*, 1828.

[8] F. Figueiredo, *José Monteiro da Rocha e a actividade científica da "Faculdade de Mathematica" e do "Real Observatório da Universidade de Coimbra": 1772–1820*, Tese de Doutoramento, Coimbra, 2011.

[9] W. Horner, "A new method of solving numerical equations of all orders by continuous approximation", *Philosophical Transactions*, London: Royal Society, 1819.

[10] M. Nordgaard, *A historical survey of algebraic methods of approximating the roots of numerical higher equations up to the year 1819*, Teachers college, Columbia university, 1922.

[11] R. Osorio, *Elementos de Arithmetica*, 4.ª Ed., 1861.

[12] L. Motta Pegado, *Tratado Elementar de Arithmetica*, 4.ª Ed., 1886.

[13] J. Manso Preto, *Elementos de Álgebra*, 1870.

[14] J. Serrasqueiro, *Tratado Elementar de Arithmetica*, 10.ª Ed., 1891 e 22.ª Ed., 1926.

[15] A. Teixeira, "Questão entre José Monteiro da Rocha e José Anastasio da Cunha". *O Instituto: Revista Scientifica e Litteraria*, vol. XXXVIII, 1890–1891, pág. 518.

33 anos do Projecto Matemática Ensino

Maria Paula Oliveira
Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro

O Projecto Matemática Ensino (PmatE) é um projeto de investigação e desenvolvimento, fundado em 1989 na Universidade de Aveiro (UA) que pretende aliar as tecnologias digitais ao desenvolvimento de conteúdos e eventos para a promoção do sucesso escolar e da cultura científica.

O PmatE e as Competições

Em 1989 a Secção Autónoma de Matemática da Universidade de Aveiro lecionava disciplinas com mais de 1000 estudantes inscritos o que dificultava o processo de avaliação. O computador estava a ser introduzido no ensino em Portugal e o Professor João David Vieira desafia dois colegas mais novos, António Batel Anjo e Maria Paula Carvalho, para criarem um sistema informático de apoio à avaliação [1]. Contudo, as dificuldades eram muitas, quer com o equipamento informático disponível, quer com recursos humanos para elaborar conteúdos para avaliar estes estudantes. Decidiram fazer uma experiência com alunos do 7.º ano de escolaridade sobre o conteúdo Equações de 1.º grau, criando uma competição que se tornou no ex-libris do Projecto – a competição EQUAMAT, cuja primeira edição ocorre em 1991 na Universidade de Aveiro, com conteúdos sobre equações de 1.º grau. O entusiasmo dos alunos que participaram levou à realização de uma segunda edição em 1992. Eram enviadas para as escolas diskettes com os conteúdos das provas, permitindo que os alunos treinassem para as competições ao longo do ano letivo.

Este entusiasmo alastrou a outras escolas e em 2000 (Ano Mundial da Matemática) a EQUAMAT juntou 2000 participantes. Em 2002 as competições passam para o online e inicia-se um novo ciclo, com competições para outros níveis de escolaridade e outras áreas curriculares. Os níveis de participação nas competições (atualmente designadas por Competições Nacionais de Ciência) foram aumentando, rondando atualmente os 8000 participantes.

Uma competição é organizada por níveis, sendo cada nível gerado por um Modelo Gerador de Questões (MGQ)[1] do tipo verdadeiro/falso generalizado. Uma das principais características de um MGQ é a sua aleatoriedade.

[1] Um modelo gerador de questões é um gerador de questões sobre um determinado tema, obedecendo a uma classificação por objetivos científico-didáticos e por níveis de dificuldade. [2]

Desta forma, existem várias concretizações possíveis para um mesmo MGQ de modo que dois computadores lado a lado dificilmente terão a mesma concretização para esse MGQ. Contudo, as afirmações incidirão sobre os mesmos objetivos e terão graus de dificuldade semelhantes [2]. O PmatE dispõe de uma Plataforma de Ensino Assistido, onde disponibiliza, durante todo o ano letivo, provas de treino para as competições. No final de um treino, o aluno pode consultar o seu desempenho e verificar as questões em que errou e um professor consultar o desempenho de todos os seus alunos. Esta interação fomenta nos alunos a vontade de aprender para ir mais longe e alcançar uma boa classificação na competição.

Intervenção escolar

Em 2002 o projeto Exi@mat (exi de exigência e de êxito) foi apresentado à Fundação Calouste Gulbenkian: "Pretendia-se testar as potencialidades do software desenvolvido enquanto instrumento de apoio ao ensino e aprendizagem, via avaliação diagnóstica (auto e hetero) em situação de sala de aula e não apenas em situação de preparação para uma competição." [1] Este projeto foi financiado durante 5 anos e envolveu seis escolas do 3.º ciclo do ensino básico. A vontade de alargar o exi@mat a outros ciclos de ensino e a mais escolas, esteve na génese do projeto Rede de Escolas.[3]

Uma outra vertente a destacar no domínio da intervenção escolar são os Testes Diagnóstico. No início de cada ano letivo o PmatE disponibiliza testes diagnóstico para os alunos dos anos de transição de ciclo (5.º, 7.º e 10.º) nas áreas curriculares fundamentais. Estes testes são realizados online e os resultados são disponibilizados às escolas através de uma tabela dinâmica, constituída por grupos de objetivos didáticos, em que o professor pode criar grupos de alunos, nomeadamente por turma ou por escola.

Cooperação

A cooperação com países africanos de língua oficial portuguesa (PALOP) foi uma vertente explorada pelo PmatE entre 2002 e 2013, destacando-se o projeto Pensas@moz, focado na melhoria da qualidade do ensino em Moçambique, nomeadamente na aprendizagem dos alunos e na qualificação dos professores, através de atividades dedicadas aos estudantes, como as Competições Nacionais de Ciência e de cursos de formação para professores nas áreas de Matemática e Língua Portuguesa [4], e o Programa CPLP nas Escolas, resultante de uma parceria entre a Comunidade de Países de Língua Portuguesa (CPLP) e o PmatE.

Comunicação e divulgação de ciência

A Educação Financeira foi uma aposta do PmatE entre 2009 e 2014. Durante este período realizaram-se 5 conferências internacionais de Educação Financeira que juntaram professores de vários graus de ensino e profissionais da área financeira, e, para os mais jovens, a exposição itinerante EDUCAÇÃO+Financeira [5] (2009/10 a 2013/14), com o apoio da Caixa Geral de Depósitos, circulou pelo país dispondo de três módulos distintos, destinados a diferentes faixas etárias.

O projeto CaixaMat [6] (também em parceria com a Caixa Geral de Depósitos) foi pioneiro no âmbito da divulgação e comunicação de ciência, na modalidade de roadshow, recorrendo a uma infra-estrutura constituída por um camião especialmente preparado para acolher experiências no campo da Física, Biologia e da Matemática, estando devidamente equipado com material informático. Este camião percorreu o país nos anos letivos 2005/06 a 2008/09.

Na divulgação de ciência, apoiados pela Agência Nacional Ciência Viva, os projetos Pais com Ciência e Escolher Ciência (`https://pmate.ua.pt`) foram dois marcos na história do PmatE.

Conclusões

Este trabalho pretendeu apresentar a história resumida de um projeto pioneiro em Portugal na área da educação. Muitas foram as iniciativas do PmatE que ficaram fora deste trabalho, contudo, as suas vertentes fundamentais ao serviço da educação em Portugal (e nos PALOP) foram aqui referidas.

As referências que se encontram nos meios de comunicação, essencialmente locais, a atividades levadas a cabo ao longo do tempo pelo PmatE, são inúmeras e, quiçá, poderão ser um mote para um trabalho de História da Matemática daqui a alguns anos.

Nota: O site do Projecto Matemática Ensino (`https://pmate.ua.pt`) disponibiliza informação sobre os projetos desenvolvidos ao longo dos anos.

Referências

[1] J. David Vieira, “EQUAMAT: notas sobre a origem e primeiros desenvolvimentos”, *Linhas*, Universidade de Aveiro, Vol. 32, (2019), pp. 62–65.

[2] J. David Vieira, P. Carvalho e M. P. Oliveira, "Modelo Gerador de Questões", *IADIS Ibero-Americana WWW/Internet 2004*, Proceedings, 2004, pp. 105–113.

[3] P. Oliveira, A. Bernardes, A. Miranda, A. Neves, A. Santos, A. Tavares, M. Lopes, R. Estrela, R. Simões e S. Silva, "Rede de escolas: uma teia de experiências", *I Bienal de Matemática e Língua Portuguesa*, Proceedings, 2007.

[4] A. Batel Anjo, J. Sousa Pinto e P. Oliveira, "Pensas@moz", *IST-Africa 2006*, Conference Proceedings, Vol. 000, 2012, P. Cunningham e M. Cunningham, pp. 1–6.

[5] E. Barros, "De pequenino... se aprende a gerir o dinheiro", *Dossier Fazer, Gerir e Poupar*, (2010), Eds. Direção Geral da Educação (DGE) pp. 48–51 (`https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/ficheiros/dossier.reporter_estrada.83.pdf`).

[6] A. Carvalho e B. Magina, "Volta a Portugal com a Matemática", *Educação e Matemática*, No. 111 (2011), pp. 42–43.

Este trabalho teve o apoio da Fundação para a Ciência e Tecnologia (FCT) através do Centro de Investigação e Desenvolvimento em Matemática e Aplicações (CIDMA), projeto UID/MAT/04106/2022.

Sebastião e Silva e o Seminário de Royaumont (1959) – para um currículo "moderno" de Matemática

Henrique Guimarães[*]
Instituto de Educação — Universidade de Lisboa

Em meados do século passado, a culminar um interesse muito alargado de modernização do currículo de Matemática não apenas na Europa, a Organização Europeia de Cooperação Económica decidiu promover uma sessão de trabalho visando lançar uma reforma tão generalizada e profunda quanto possível do ensino da Matemática. A sessão de trabalho realizou-se em finais de 1959 no *Cercle Culturel de Royaumont* em França, com a duração de duas semanas e a participação de cerca de cinquenta delegados de dezoito países. Portugal não se fez representar. Esta reunião, que veio a ficar conhecida como o Seminário de Royaumont, é certamente a reunião mais emblemática de todo o movimento reformador que veio a ter enorme influência internacional e que recebeu o nome de reforma da Matemática Moderna.

A proposta da Matemática Moderna é hoje considerada um projeto reformador que, na sua concretização e no seu desenvolvimento, se veio centrar essencialmente numa mudança na estrutura e nos assuntos matemáticos do currículo. No entanto os seus promotores em Royaumont consideravam que a reforma era necessária quer ao nível dos conteúdos matemáticos quer ao nível dos métodos de ensino.

Destaquemos em primeiro lugar alguns aspetos de carácter mais amplo: a ênfase na unidade da Matemática e em conceitos unificadores como as estruturas matemáticas, a orientação axiomática e dedutiva subjacente à organização curricular proposta, a valorização da linguagem e do rigor matemáticos, e a proposta de uma abordagem algébrica, quer para a Aritmética, quer para a Geometria.

Para além destas perspectivas globais, entre as orientações metodológicas mais específicas e mais próximas do acto de ensino e das actividades de aprendizagem estão a valorização da compreensão face à mecanização, o valor atribuído à intuição e ao rigor, e a importância dada à aprendizagem por descoberta.

Nas conclusões do Seminário encontramos a crítica ao modo "rotineiro e mecânico" com que a aritmética até então era ensinada, visando essencialmente a memorização de regras e factos, recomendando-se que a sua

[*]Este resumo alargado foi elaborado por Luís Saraiva a partir de notas escritas por Henrique Guimarães.

aprendizagem resulte "de uma compreensão nascida de uma experimentação bem conduzida e de uma tomada de consciência pessoal, na maior pare das vezes depois da manipulação de objetos materiais de um género ou de outro".

Sobre a importância da intuição diz Dieudonné: "Não podemos desenvolver frutuosamente uma teoria matemática sob a forma axiomática senão quando o aluno está já familiarizado com a questão à qual ela se aplica, trabalhando durante algum tempo numa base experimental ou semi-experimental, isto é, *fazendo constantemente apelo à intuição*" (itálico no original).

Em muitas das recomendações do Seminário de Royaumont pode ver-se uma valorização do papel do aluno na aprendizagem e, igualmente, da componente da descoberta nessa aprendizagem.

Acompanhando o movimento reformador em curso em diversos países da Europa e de fora da Europa, a "Matemática Moderna" chega a Portugal em meados dos anos sessenta do século XX. Em 1963 é criada a Comissão de Estudos para a Modernização do Ensino da Matemática, sendo o Professor José Sebastião e Silva o escolhido para presidir a essa Comissão. Ainda em 1963 o Ministério de Educação Nacional assina um acordo para a criação de "turmas piloto de matemática moderna" do então 3.º ciclo do liceu (actuais 10.º e 11.º anos) que "irão começar a funcionar ainda no ano letivo de 1963/64 "a título de iniciação experimental [...] uma em cada um dos liceus normais do país", número que um ano depois aumentou para onze e se estendeu a diversos liceus em turmas do 6.º ano". Em 1969 havia nos liceus do Portugal europeu 60 turmas-piloto dos antigos 6.º e 7.º anos.

Para os alunos dessas turmas piloto, Sebastião e Silva redigiu "textos piloto", que fez acompanhar de "guias didáticos", dirigidos aos professores, para acompanhar e apoiar a experiência que se iniciava.

O autor não encontrou nos escritos de Sebastião e Silva qualquer referência direta e explícita ao Seminário de Royaumont, mas certamente que ele teve conhecimento das suas principais conclusões e recomendações, e estava de acordo com elas, como é explícito nos seus textos. Damos seguidamente três exemplos em como as suas diretivas estão de acordo com as recomendações de Royaumont:

1. O primeiro ponto das "Normas Gerais" que abrem o primeiro dos Guias Didáticos de Sebastião e Silva começa assim:

   "A modernização do ensino da Matemática terá que ser feita, não só quanto a *programas*, mas também quanto a *métodos*" (itálicos do autor).

É desde logo evidente em Sebastião e Silva que a mudança preconizada teria de passar por uma mudança no papel do professor e do aluno na relação didática no sentido de uma valorização do papel do aluno nessa relação. "O professor deve abandonar, tanto quanto possível, o método expositivo tradicional em que o papel dos alunos é quase cem por cento passivo e procurar, pelo contrário, seguir o método activo, estabelecendo o diálogo com os alunos e estimulando a imaginação destes de modo a conduzi-los, sempre que possível, à redescoberta".

2. A propósito da "questão crucial dos exercícios", como assim referiu Sebastião e Silva, e portanto sobre a questão do binómio mecanização--compreensão na aprendizagem em Matemática, considerava também "indispensável" que os alunos adquirissem "automatismos psicológicos", muito em particular no que diz respeito às "técnicas de cálculo". Todavia:

   "O treino recomendado [. . .] não deve confundir-se de modo nenhum com a mecanização do aluno na resolução de exercícios por meio de receitas, aplicadas sem qualquer conhecimento de causa. Essa prática [. . .] só contribui para desvirtuar completamente a finalidade do ensino da matemática, ensinando o aluno a não pensar e destruindo nele toda a iniciativa e espontaneidade para a resolução de problemas novos, como os que são postos pela ciência, pela técnica e pela vida corrente".

Referências

Jean Dieudonné, Pour une conception nouvelle de l'enseignement des mathématiques, In OECE (org.) *Mathématiques Nouvelles*, OECE : Paris, 1961, p. 31–47.

Henrique Guimarães, "A 'modernização' do ensino da matemática em Portugal – Sebastião e Silva e as perspectivas metodológicas emanadas de Royaumont (1959)", In *XIII CIAEM-IACME*, Recife, 2011, p. 1–10.

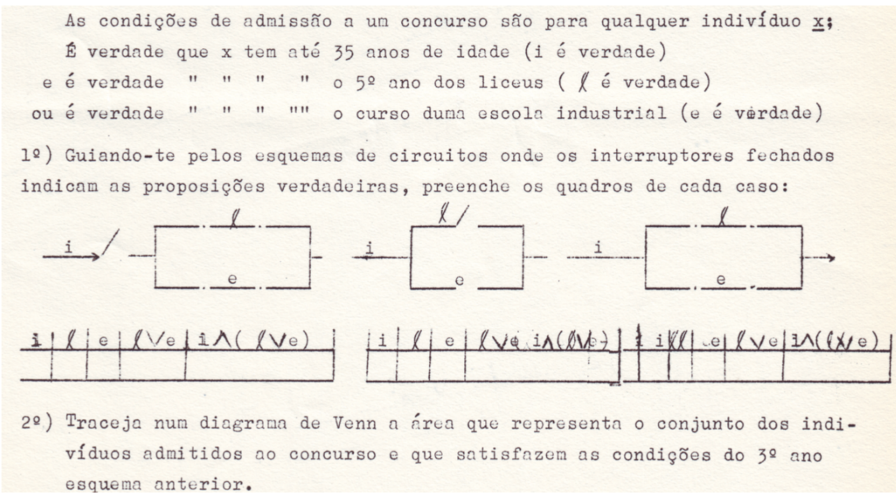
OECE, *Mathématiques Nouvelles*, OECE: Paris, 1961.

Aplicações da Matemática durante o Movimento da Matemática Moderna no Ensino Técnico em Portugal

Alexandra Sofia Rodrigues
Centro Interdisciplinar de Ciências Sociais (CICS.NOVA), Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa, UIED – Portugal

A reforma da Matemática Moderna ocorre entre as décadas de 50 e 70 do século passado, um pouco por todo o mundo e está associada a uma mudança profunda dos conteúdos e a uma alteração das metodologias de ensino e da linguagem matemática escolar. Nesta comunicação analisámos como se instaurou a reforma nas escolas técnicas, usando fontes documentais como jornais, revistas, legislação e outras referências que contribuíram para uma visão alargada do sistema político e económico em Portugal, focando em particular as aplicações da matemática ao contexto educativo do ensino técnico.

No ensino técnico, as primeiras turmas piloto iniciam-se no segundo período do ano letivo 1967/68 e a experiência foi acompanhada pela publicação da Folha Informativa dos Professores do 1.º Grupo (E.T.P), onde foram publicados os programas, abordagens científicas dos conteúdos a ensinar e abordagens metodológicas para o ensino da "nova" matemática.


As condições de admissão a um concurso são para qualquer indivíduo x;
É verdade que x tem até 35 anos de idade (i é verdade)
e é verdade " " " " o 5º ano dos liceus (ℓ é verdade)
ou é verdade " " " "" o curso duma escola industrial (e é verdade)

1º) Guiando-te pelos esquemas de circuitos onde os interruptores fechados indicam as proposições verdadeiras, preenche os quadros de cada caso:

i	ℓ	e	ℓ∨e	i∧(ℓ∨e)

i	ℓ	e	ℓ∨e	i∧(ℓ∨e)

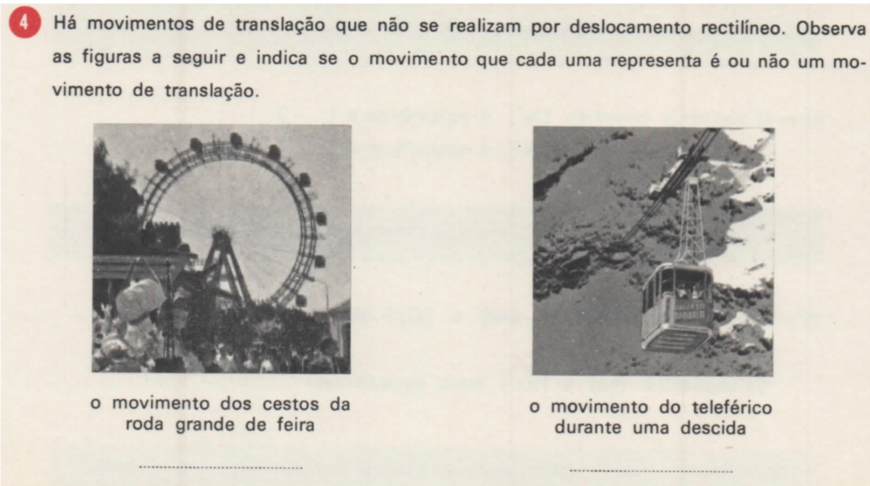
i	ℓ	e	ℓ∨e	i∧(ℓ∨e)

2º) Traceja num diagrama de Venn a área que representa o conjunto dos indivíduos admitidos ao concurso e que satisfazem as condições do 3º esquema anterior.

Figura 1: Exercício de lógica (FI n.º 20, p. 19).

Apesar da linguagem formal e estruturada da Matemática Moderna, salientamos, a clara importância dada à aplicação dos conteúdos lecionados a situações do mundo real ou de acordo com o perfil do curso frequentado. Na comunicação, foram apresentados diferentes exemplos representativos de diferentes anos letivos da experiência e diferentes cursos. Um dos exemplos que destacamos na Figura 1, é um exercício de um ponto do metodólogo Santos Heitor, publicado na Folha Informativa n.º 20, em maio de 1968, dirigido a alunos de uma das turmas piloto.

Exercícios de aplicação são encontrados nos mais diversos conteúdos do programa: teoria de conjuntos, relações, aplicações, translações no plano, trigonometria, áreas, entre outros; publicados pelos professores das turmas piloto que partilhavam os testes aplicados aos alunos. Outros exemplos foram selecionados de manuais de exercícios destinados a acompanhar a experiência, em particular os livros de exercícios de matemática Moderna (Gomes, Nunes e Heitor, s/ data). Na figura 2, encontramos um exemplo retirado do manual de fichas referido sobre os movimentos de translação.


4 Há movimentos de translação que não se realizam por deslocamento rectilíneo. Observa as figuras a seguir e indica se o movimento que cada uma representa é ou não um movimento de translação.

o movimento dos cestos da roda grande de feira

....

o movimento do teleférico durante uma descida

....

Figura 2: Exercício da Ficha de exercícios IV1 (Gomes et al, p. 115).

A reforma irá ter um papel importante na reflexão em torno deste subsistema de ensino, contribuindo para uma reformulação das práticas dos professores de matemática das escolas técnicas, promovendo o trabalho colaborativo, visível nas 66 edições da Folha Informativa dos professores do 1.º Grupo e levando a uma recomposição das práticas no ensino técnico em Portugal.

Referências

Gomes, F., Nunes, M. J. e Heitor, S. *Matemática Moderna 1. Fichas.* Livraria Popular, Lisboa, s/ data.

Gomes, F., Nunes, M. J. e Heitor, S. *Matemática Moderna 2. Fichas.* Livraria Popular, Lisboa, s/ data.

Heitor, S. 2.º ponto de frequência para os alunos da turma piloto. *Folha Informativa dos professores do 1.º Grupo (E. T. P.)*, n.º 20, 1968, p. 19.

Matos, J. M., e Almeida, M. C. A reforma da matemática moderna em Portugal. *Revista De História Da Educação Matemática*, 4(2) (2018), p. 5–30. `http://histemat.com.br/index.php/HISTEMAT/article/view/212`.

Rodrigues, A.; Novaes, B. W. D. & Matos, J. M. A cultura escolar em conflito: ensino técnico e matemática moderna em Portugal, *Revista Diálogo Educacional*, Curitiba, v. 16, n. 48 (2016), p. 381–402. `https://periodicos.pucpr.br/dialogoeducacional/article/view/2023/1942`.

Rodrigues, A. O Movimento da Matemática Moderna no Ensino Técnico em Portugal. Gutiérrez, R. E., & Prieto, J. L. (Comps.). *Memorias del VI Congreso Iberoamericano de Historia de la Educación Matemática*, Asociación Aprender en Red, (2022), p. 607–622. `https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/230722`.

Matemática pela rádio: uma experiência nos anos setenta

Mária Cristina Almeida
Centro Interdisciplinar de Ciências Sociais (CICS.NOVA), Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa

O *Instituto de Meios Audiovisuais de Ensino (IMAVE)* foi criado em 1964 (Decreto-Lei n.º 46 135, de 31 de Dezembro), e tendo atribuições diversas, entre as quais avultava a de promover a realização de programas de rádio e televisão escolares e outros de carácter educativo (Telles, 1965). A *Rádio Escolar* tinha começado a emitir em 1960, em Portugal, na dependência da Direcção-Geral do Ensino Primário, mas depois da criação do IMAVE os seus programas passaram a ser elaborados e supervisionados diretamente pelo Instituto. Este trabalho foca-se numa série de programas radiofónicos para o ensino secundário designada 'Tempo de Estudo', emitida em 1972, que visava especialmente a preparação para o exame, da 2.ª Fase, de várias disciplinas do 2.º e 3.º ciclo do ensino liceal, especialmente na disciplina de Matemática. Apresentaremos uma análise de guiões de lições emitidas e de material relativo a lições do 2.º ciclo, tentando descrever a dinâmica das lições. As fontes utilizadas englobam legislação e fontes manuscritas, complementadas com entrevistas a António Augusto Lopes (1917–2015), que foi o professor que organizou os materiais e apresentou os programas respeitantes às lições da disciplina de Matemática, dos dois ciclos.

O nosso entrevistado António Augusto Lopes (AAL) foi formador de professores desde 1956 até à aposentação em 1985. Teve um papel importante na reforma da Matemática Moderna (MM), em Portugal, como membro da Comissão nomeada em 1963 e como professor nos cursos para professores de Matemática – Cursos de Oeiras. Foi professor na Telescola, onde introduziu a MM no currículo; e autor de livros de texto e de exercícios de Matemática destinados ao ensino liceal, Telescola e CPES. Na primeira entrevista, AAL mencionou que deu 'aulas' de Matemática pela Rádio (AAL, 1/12/2006). Mais tarde, facultou-nos algum do material relativo a essa experiência.

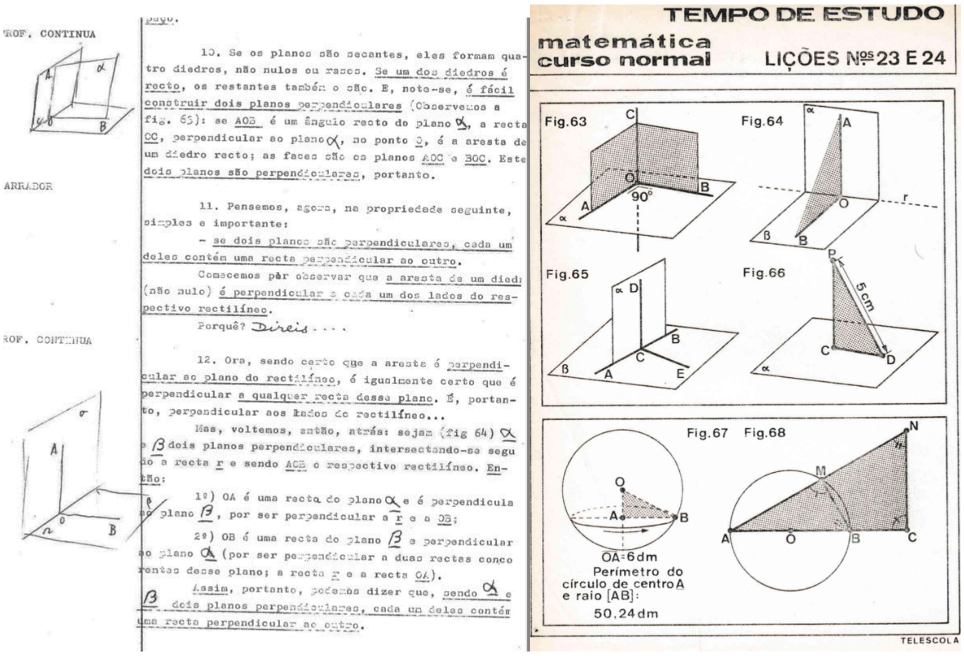
AAL elaborou os documentos que eram enviados aos alunos e os guiões/textos das lições que seriam gravados para emissão em diferido. Encarregou-se, também, das lições emitidas pela rádio. Do material escrito para os alunos, constavam o sumário das lições, uma síntese de figuras destinadas ao acompanhamento das lições e textos de trabalho/exercícios para resolver em casa.

Suplemento do Boletim da SPM 82, Dezembro 2024, pp. 53–55

Pela análise do sumário das lições, observamos que houve 14 lições de Álgebra e 9 de Geometria. Analisando os textos de trabalho/exercícios destinados aos alunos para resolução em casa, verificamos que há 89 exercícios de Álgebra e 45 Geometria. Cada lição tem associado um conjunto de exercícios propostos, que pode conter exercícios de matéria lecionada em lições anteriores.

Ao ler as páginas dos guiões das lições, há um tom coloquial, havendo no decorrer da explanação um encorajamento aos alunos e um estímulo à sua participação individual e ativa na aprendizagem. Por meio de perguntas intercaladas no texto, o professor compele os alunos a acompanhar a exposição e, ao mesmo tempo, orienta o entendimento dos alunos na sequência de conteúdos abordados. Notamos o recurso a exemplos e explicações que favorecem a autonomia do aluno, bem como a materiais do quotidiano dos alunos para ilustrar ou ajudar a compreender conceitos matemáticos.

As sínteses de figuras eram utilizadas durante a lição, pois o professor, no decorrer da emissão, fazia referência a uma determinada figura, que servia para auxiliar um raciocínio ou acompanhava um exercício (Figura 1).


PROF. CONTINUA

10. Se os planos são secantes, eles formam quatro diedros, não nulos ou rasos. Se um dos diedros é recto, os restantes também o são. E, note-se, é fácil construir dois planos perpendiculares (Observemos a fig. 63): se AOB é um ângulo recto do plano α, a recta OC, perpendicular ao plano α, no ponto O, é a aresta de um diedro recto; as faces são os planos AOC e BOC. Este dois planos são perpendiculares, portanto.

ARRADOR

11. Pensemos, agora, na propriedade seguinte, simples e importante:

– se dois planos são perpendiculares, cada um deles contém uma recta perpendicular ao outro.

Comecemos pàr observar que a aresta de um died (não nulo) é perpendicular a cada um dos lados do respectivo rectilíneo.

Porquê? Direis . . . .

PROF. CONTINUA

12. Ora, sendo certo que a aresta é perpendicular ao plano do rectilíneo, é igualmente certo que é perpendicular a qualquer recta desse plano. É, portanto, perpendicular aos lados do rectilíneo...

Mas, voltemos, então, atrás: sejam (fig 64) α e β dois planos perpendiculares, intersectando-se segundo a recta r e sendo AOB o respectivo rectilíneo. Então:

1º) OA é uma recta do plano α e é perpendicular ao plano β, por ser perpendicular a r e a OB;

2º) OB é uma recta do plano β e perpendicular ao plano α (por ser perpendicular a duas rectas concorrentes desse plano; a recta r e a recta OA).

Assim, portanto, podemos dizer que, sendo α e β dois planos perpendiculares, cada um deles contém uma recta perpendicular ao outro.

Figura 1: Parte do programa da lição n.º 23 e síntese de figuras.

Sobre os materiais que elaborou, AAL menciona que os sumários possibilitavam ao aluno saber a matéria a abordar nas diversas lições, pelo que podia preparar-se previamente, se assim o entendesse. Para os textos de trabalho, escolheu um conjunto de exercícios que proporcionassem a uma boa preparação para o exame, como era esperado. Em Álgebra, os pontos exigiam uma certa mecanização da parte dos alunos, assim optou por incluir mais exercícios deste tema do que de Geometria. Em Geometria, os pontos exigiam um maior grau de interpretação e raciocínio, os exercícios propostos visavam ajudar o aluno a melhorar o desempenho nestes campos (AAL, 19/12//2007). Quando questionado sobre a dificuldade da conceção de lições de Matemática que seriam emitidas pela Rádio, o professor referiu "Não foi fácil, mas eu já tinha alguma experiência de trabalhar para a televisão, na Telescola, e isso ajudou-me, por exemplo a marcar os tempos com mais facilidade (AAL, 1/12/2006). AAL refere alguns casos de sucesso, ou seja, de alunos que, já tendo reprovado várias vezes no exame, aprovaram em 1972 depois de terem participado no tempo de estudo.

Apesar das nossas tentativas não encontrámos, nem outro material relativo a esta experiência na Rádio Escolar, nem relatório de avaliação que permitisse saber sobre o seu sucesso ou razões porque não continuou.

Fontes e Bibliografia

Decreto-Lei n.º 46 135, de 31 de Dezembro de 1964.

Telles, I. *O Som e a Imagem ao Serviço do Ensino.* Lisboa: Instituto de Meios Áudio-Visuais de Ensino, 1965.

Tempo de Estudo. Lições do 2.º Ciclo: Matemática. Porto, 1972.

Os números racionais não negativos: análise de contextos de ensino em manuais da formação inicial dos professores do ensino primário (1934–1974)

Rui Candeias
Agrupamento de Escolas Terras de Larus
UIED/CICS.NOVA

Os números racionais não negativos são considerados um dos conteúdos matemáticos mais complexos e onde os alunos apresentam maiores dificuldades nos primeiros anos de escolaridade. Para a compreensão dos números racionais é essencial que os alunos desenvolvam um conhecimento profundo dos conceitos que lhe estão associados. Algumas investigações (por exemplo, Monteiro e Pinto, 2005; Pinto, 2011) têm mostrado que existem algumas componentes essenciais no desenvolvimento do sentido do número racional entre os alunos do ensino básico, como os diferentes contextos onde são trabalhados, a unidade de referência, a densidade, as diferentes representações, a comparação e a ordenação dos números racionais. Nesta comunicação discutimos as propostas apresentadas em dois manuais da formação inicial de professores do ensino primário, Pimentel Filho (1934) e Gonçalves (1972, 1974), para o desenvolvimento do conteúdo dos números racionais não negativos. A análise incide nos contextos e representações que estes dois autores utilizam no trabalho a desenvolver com os futuros professores do ensino primário, para o ensino deste conteúdo.

Os manuais de Pimentel Filho (1934) e de Gonçalves (1974) salientam a importância das situações apresentadas aos alunos no trabalho com os números racionais e apresentam diversos exemplos de situações e contextos a utilizar para o desenvolvimento deste conteúdo com os alunos.

Na obra de Pimentel Filho (1934), as primeiras noções das frações são apresentadas com recurso a situações matemáticas estritamente numéricas, com recurso a representações pictóricas que ilustram a situação. No entanto, este autor também recorre a situações semirreais, principalmente com recurso a problemas de cálculo, que se poderiam resolver com duas ou mais operações aritméticas. Nos exemplos em que são utilizados contextos, Pimentel Filho (1934) recorre essencialmente aos contextos de medidas de comprimento, medidas de capacidade, tempo e dinheiro. Nestes exemplos é de destacar a importância que Pimentel Filho (1934) dá à concretização dos dados do problema ou à sua representação através de desenhos e de esquemas. Pimentel Filho (1934) salienta a importância da ordenação da dificuldade dos problemas a apresentar aos alunos, destacando que os problemas a trabalhar nos primeiros anos se deveriam resolver apenas com uma operação aritmética, ou divididos em tantas partes quantas as operações a realizar, e apenas no último ano do ensino primário deveriam ser utilizados problemas em que o aluno tivesse de destacar no enunciado as diferentes fases da resolução. No entanto, nos exemplos que apresenta na sua obra, Pimentel Filho (1934) apresenta muitas vezes situações mais complexas, em que ao nível elementar a sua resolução implicaria vários passos no processo de resolução. Nas operações com decimais, Pimentel Filho utiliza essencialmente situações com um contexto semirreal, relacionadas com a medida ou com as atividades comerciais. São sobretudo problemas de cálculo que se podem resolver com a utilização de uma ou mais operações aritméticas.

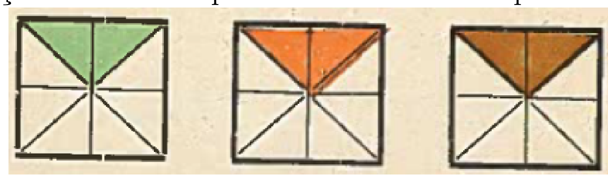
Na obra de Gonçalves (1974), as situações matemáticas e os contextos utilizados ressaltam da sua opção de iniciação aos números racionais através da representação decimal e da relação com as medidas de comprimento. Na primeira abordagem, o autor recorre principalmente a situações matemáticas estritamente numéricas, que ilustra com recurso à representação pictórica e a esquemas. Outras situações privilegiadas por Gonçalves (1974) são as situações com contextos semirreais, utilizando essencialmente as medidas de comprimento, as medidas de capacidade e o dinheiro. São utilizados problemas de cálculo que envolvem uma ou mais das quatro operações aritméticas. São também apresentados por Gonçalves (1974) alguns problemas que se poderão enquadrar nos problemas de processo já que, ao nível elementar, poderiam exigir a utilização de uma ou mais estratégias de resolução. Na obra de Gonçalves (1974) é ainda de destacar a tipificação que o autor apresenta nas situações a apresentar aos alunos tanto com as frações como os decimais. O autor destaca três tipos de problemas que se podem enquadrar nos tipos de problemas de tarefas de identificação de quantidades propostos por Mamede (2008), em que 1) se procura a fração, sendo dada a parte e o todo; 2) identifica-se a parte, sendo dado o todo e a fração; e 3) encontra-se o todo, sendo dada a parte e a fração.

No que diz respeito às representações utilizadas nos manuais analisados, destaca-se nas obras de Pimentel Filho (1934) e Gonçalves (1974) o recurso frequente à representação pictórica com um recurso à cor como forma de ilustrar e destacar o trabalho a realizar com os números racionais. Nestas duas obras também são reiteradas as referências à utilização de representações ativas. São utilizados essencialmente modelos de quantidade contínua

(Mamede, 2008), que os autores utilizam para relacionar com a linguagem verbal escrita e, posteriormente, com a linguagem simbólica matemática.

Na representação simbólica, Pimentel Filho (1934) privilegia inicialmente a representação dos números racionais como fração. Nesta obra a representação decimal é trabalhada posteriormente, numa relação estreita com as frações decimais. Neste trabalho são privilegiados os modelos contínuos de área, como no exemplo seguinte:

Pimentel Filho (1934) estabelece também a relação entre diferentes representações simbólicas. Para algumas das situações onde apresenta propostas de resolução, Pimentel Filho (1934) usa muitas vezes representações pictóricas que façam uma relação direta com a representação simbólica.

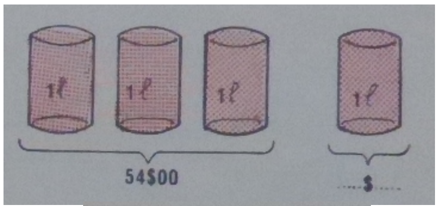
> Que fração formarão as partes coloridas destes quadrados?
>
> 
>
> Dois oitavos, mais dois oitavos, mais dois oitavos, são seis oitavos. Podemos pois escrever $\frac{2}{8}+\frac{2}{8}+\frac{2}{8}=\frac{6}{8}$, o que é uma soma de parcelas iguais e nós já vimos que uma soma nestas condições se poderá transformar em uma multiplicação, na qual o multiplicando é a parcela que queremos repetir e o multiplicador o número de vezes que essa parcela tem de ser repetida. E então $\frac{2}{8}\times 3=\frac{6}{8}$ ou $\frac{2\times 3}{8}$. (p. 172).

Pimentel Filho (1934) também usa modelos contínuos de comprimento, como a reta orientada, tal como é referido em Mamede (2008). Há também no trabalho de Pimentel Filho (1934) referências a um material didático idêntico ao material multibásico, que é usado no trabalho com os números racionais na representação decimal.

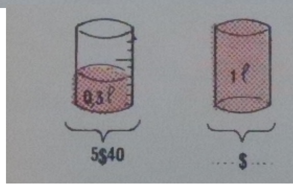
No trabalho de Gonçalves (1974) faz-se um uso frequente da representação pictórica, que depois se relaciona com a representação verbal escrita e representação simbólica matemática. Quanto à representação simbólica matemática privilegia-se inicialmente a representação decimal, mas também se utiliza a fração, o numeral misto e a percentagem, estabelecendo-se uma relação entre estas diferentes representações simbólicas. Um outro aspeto a destacar na obra de Gonçalves (1974) é a utilização muito frequente da representação pictórica para apresentar os problemas e as respetivas propostas de resolução.

Em Gonçalves (1974) são privilegiados os modelos de quantidade contínua, nomeadamente modelos de área e modelos de comprimento, como a representação a reta orientada. Também é de destacar a utilização por parte de Gonçalves (1974) de representações pictóricas de objetos do dia a dia que depois o autor relaciona com representações pictóricas, com o uso de modelos de quantidade contínua, e representações simbólicas. Um exemplo da utilização da representação pictórica é a que Gonçalves (1974) apresenta para a resolução do problema:

> 1) Compraram-se três litros de azeite por 54\$00. A como saiu o litro?



> 2) Compraram-se três decilitros (0,3l) de azeite por 5\$40. A como saiu o litro do mesmo azeite?
> O sentido do 1.º problema é nitidamente partitivo (54\$00 : 3 = 18\$00). (Gonçalves, 1974, p. 80)



Fontes

Gonçalves, G. (1972). *Didáctica do cálculo (apontamentos), 1.º volume.* 2.ª ed. Porto: Porto Editora.

Gonçalves, G. (1974). *Didáctica do cálculo (apontamentos), 2.º volume.* 2.ª ed. Porto: Porto Editora.

Pimentel Filho, A. (1934). *Súmula didáctica.* Lisboa: Livraria Editora.

Referências

Mamede, E. (2008). Às voltas com as frações. In E. Mamede (Coord.). *Matemática: ao encontro das práticas 1.º ciclo.* (pp. 83–92). Braga: Instituto de Estudos da Criança – Universidade do Minho.

Monteiro, C., & Pinto, H. (2005). A aprendizagem dos números racionais. *Quadrante, Revista de Investigação em Educação Matemática*, 14, 89–107. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Pinto, H. (2011). *O desenvolvimento do sentido da multiplicação e da divisão de números racionais.* Tese de doutoramento: Universidade de Lisboa.

Regular Polygons and Proportions — a Forgotten Chapter in the History of Mathematics

Parisa Kharazmi
Departamento de Matemática, CIDMA, Universidade de Aveiro

In the history of mathematics, regular polygons are mostly considered in the context of problems of their construction with ruler and compass [Euclid, B. IV; Heath (1956), Bankoff, Garfunkel (1973)], their use in decorative tiling or paving [Sarhangi (2007)], or of Platonic Solids [Elements, B. XIII; Heath (1956)].

The general question of the construction of regular polygons was definitively answered by C. F. Gauss during his construction of the regular Heptadecagon [Sarhangi (2007), Katz (2010)]: an arbitrary n-gon is constructable by compass and straightedge if and only if n can be factorized by a power of 2 and Fermat's primes *(Gauss–Wentzel theorem)*. Except for the case of the Pentagon and its important connection with the *Golden Section* (coined so only in the 19^{th} century by Martin Ohm) but already described in Euclid's Elements [B. VI; Heath (1956)], other properties like proportions based on ratios between the diagonals and the sides of regular polygons have not received particular attention.

About 30 years ago two papers [Steinbach (1997), (2000)], mainly motivated by questions of quasi-periodicity and new methods of creating tiles, noticed this fact:

> "One of the best-kept secrets in plane geometry is the family of ratios of diagonal to side in the regular polygons".

Our talk aimed to show how a parallel view on the Pentagon and Heptagon easily reveals some of those secrets, leading to interesting applications of algebraic relations and their geometric visualization.

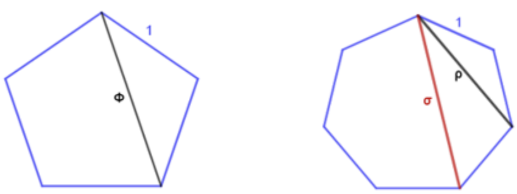


Figure 1: Pentagon and Heptagon with sides of length 1 and their diagonals.

In the introductory part of our talk, we mentioned that several mathematicians of Islamicated countries contributed from the 10^{th} century on with new methods to the solution of problems which have been outside of the attention of the Greeks. This also concerns the consideration of the construction of regular polygons. Without restricting to the use of compass and straightedge (often called Platonic instruments), their use of conic sections like parabola and hyperbola (for example, by Abu Sahl al-Quhi (940–1000) and Omar Khayyam (1048–1131)) explained the possibility of an exact construction of the Heptagon. More historical details concerning the exact and approximate constructions of regular polygons are subject of our contribution to the forthcoming 9^{th} Luso-Brazilian Meeting of the History of Mathematics in Setúbal in October 2022.

After these short historical remarks, we continued to show how the Pentagon and the intersection problem of its diagonals leads us to the consideration of regular polygons from the point of view of proportions. In fact, also these considerations can be historically traced back to Euclid's *Elements*, namely, to Book V on *Ratios and Proportions* and to Book VI on *Geometrical Proportions*. The main tool in this parallel treatment are different types of their so called "vertex-triangles", i. e. triangles in a polygon with all their vertices on the circumscribed circle of the regular n-gon. It is easy to see that all types of *v-triangles* are related to the different partitions of n into three entire numbers, corresponding to the number of arcs over their sides, cf. [Elements, B. VI, Prop. 33; Heath (1956)]. For example, in the case of the Pentagon exist two types of *v-triangles* corresponding to the two possible partitions of 5, namely $5 = 2 + 1 + 2 = 1 + 3 + 1$. But in the case of the Heptagon, we have four *v-triangles* corresponding to $7 = 3+1+3 = 2+3+2 = 1+5+1 = 1+2+4$, three of them isosceles and one of them a scalene triangle (coined *Heptagonal Triangle* [Bankoff, Garfunkel 1973]). These *v-triangles* helped us to prove interesting algebraic relations in the Heptagon that lead immediately to the recognition of the diagonals ρ and σ as cubic irrationalities, i. e. irrational solutions of a cubic equation. This is another reason for the impossibility to construct the Heptagon only by compass and straightedge. (Note that, in the Pentagon, constructable by compass and straightedge, the only diagonal ϕ is a quadratic irrational.) Compared with the well-known ratios and proportions between the side (of unit length) of the Pentagon and its single diagonal ϕ

$$\phi : 1 :: (1 + \phi) : \phi \tag{1}$$

the analogue situation in the Heptagon with its two diagonals led us to

$$\sigma : \rho : 1 :: (1 + \rho + \sigma) : (\rho + \sigma) : \sigma :: (\rho + \sigma) : (1 + \sigma) : \rho. \tag{2}$$

Concluding remarks: Our proof of algebraic relations in the Heptagon based on (2) and including only 4 detections of similar triangles with the help of *v-triangles* (reduced to partitions of 7!) can be used as starting point for interesting applications in teaching constructive and algebraic geometry in the classroom. Since the use of geometrical software like GeoGebra, The Geometer's Sketchpad or Cinderella (to mention only a few) in teaching the construction of polygons, the historical approach by using compass and straightedge is almost neglected as well as the discussion of approximate constructions. Using some historical background about the Heptagon could be one more contribution to teaching the cultural dimension of Mathematics. Moreover, the mentioned geometric approach to the properties of the algebraic field $\mathbb{Q}(1, \rho, \sigma)$ built by the side and the diagonals of the Heptagon also show a wide range of applications in undergraduate university studies like in number theory, algebraic structures, complex analysis, etc.

References

L. Bankoff, J. Garfunkel: "The Heptagonal Triangle", *Mathematics Magazine*, Vol. 46, No. 1 (1973).

Euclid, *The Thirteen Books of The Elements* (Transl. S. T. L. Heath; 2nd. Ed.), Dover Publication, 1956.

V. Katz, *História da Matemática*, (Transl. of *A History of Mathematics*, Addison Wiley, 2nd ed, 1998), Fundação Calouste Gulbenkian, 2010.

R. Sarhangi, "Geometric Constructions and their Arts in Historical Perspective", *Bridges Donostia: Mathematics, Music, Art, Architecture, Culture* (2007), 233–240.

P. Steinbach, "Golden Fields: A Case for the Heptagon", *Mathematics Magazine*, Vol. 70, No. 1 (1997), 22–31.

P. Steinbach, "Sections Beyond Golden", *Bridges: Mathematical Connections in Art, Music, and Science* (2000), 35–44.

A. Wünsche, "Delight and Frustration with Number 'Seven' in Plane Geometry and the Regular Heptagon", *Advances in Pure Mathematics*, Vol. 11, No. 1 (2021), 63–100.

Cultura Geral e Ideias Fundamentais: Caraça, Bruner e Delors

João Tomás do Amaral
Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo
Instituto Histórico e Geográfico de São Paulo

Introdução

O processo educativo tem se constituído em um significativo campo de interesse quanto ao ensino e a aprendizagem nos vários níveis de escolaridade e nas diversas áreas do conhecimento, principalmente no âmbito da Matemática. Há, de fato, farta quantidade de estudos de investigação com o objetivo de diagnosticar as causas que promovem os desvios tanto no ensino quanto na aprendizagem, no âmbito da Matemática e de outros ramos do conhecimento e, também, de apresentar propostas no sentido de amenizar e/ou resolver tais problemas. Esses diagnósticos e propostas de resolução ocorrem, de forma sistemática, por organismos nacionais e internacionais.

Dentre várias possibilidades para sanar essa questionada defasagem, certamente, encontraremos uma trajetória pedagógica fundamentada na ampliação da cultura geral por meio das noções/ideias/conceitos fundamentais. Essa proposta encontra amparo em reflexões e argumentos apresentados ao longo do século XX para a melhoria da abordagem em Matemática e da Educação para o século XXI. Assim, enfocaremos as referenciais posições propostas por Bento de Jesus Caraça (1901–1948), e utilizadas por Jerome Bruner (1915–2016) e, também, preconizadas pela Comissão Internacional sobre a Educação para o Século XXI, em 1996, no Relatório para a UNESCO — Relatório Delors.

A importância da cultura geral

O termo *Cultura*, ao longo do tempo e nas mais variadas circunstâncias, esteve exposto a um processo de ajustamento quanto ao seu sentido, significado e utilização. Nesse percurso, certamente, temos uma longa trajetória, e ainda, a ser percorrida no sentido de não questionarmos a sua importância, mas trilharmos para a conquista sólida da essência e estética da natureza da cultura — afinal, o que é a cultura? Nesse contexto, apresentaremos o pensamento de Bento de Jesus Caraça, por sua incansável intervenção no âmbito ampliação da cultura para todos, no tocante à noção de que o:

> Homem culto é aquele que tem consciência: 1.º) da sua posição no cosmos e, em particular na sociedade a que pertence; 2.º) da sua personalidade e da dignidade que é inerente à existência como ser humano; 3.º) da importância do aperfeiçoamento interior, fazendo-o como preocupação máxima e fim último de sua vida. (CARAÇA, 1970, p. 51)

Entretanto, é no século XIX, que surge uma forma de cultura que passou a ser denominada de Cultura Geral, conforme esclarece António Eduardo Lobo Vilela (1902–1965), em seu livro PERSPECTIVAS, ao afirmar que:

> O século XIX concebeu, com o nome de *cultura geral*, um tipo de cultura que abrange o conjunto de ideias, de noções, de formas de pensar que resumem as conclusões da ciência e da moral, os princípios diretores das artes e do pensamento, susceptíveis de formar uma concepção ampla e quanto possível completa do Mundo, da vida e da sociedade humana, sempre enriquecida e valorizada com novos subsídios. [...] os progressos alcançados nos diversos ramos do saber e da investigação. (LOBO VILELA, 2011, p. 22 e p. 40, grifo nosso).

A convicção Caraciana está presente no prefácio do livro "O Homem e o Livro", de M. Iline, publicada em 1941, a obra inicial da Biblioteca Cosmos, quando propõe as seguintes questões: "É possível pôr ao alcance de todos a cultura geral? Não existe, por ventura, no conjunto das ideias fundamentais da estruturação intelectual, domínios não acessíveis, ou só acessíveis aos iniciados? Não é verdade, como se vê afirmar com frequência, vulgarizar [popularizar] é sempre abaixar?". E responde que "em cada ramo do conhecimento há o que é do domínio do especialista [para poucos] e o que é do domínio geral [para todos]", e acrescenta "o que se pretende vulgarizar é, precisamente, o que pertence ao domínio geral [cultura geral], e aí não há nada que não possa ser aprendido pelo comum dos homens [para todos]". (1941, p. 7, acréscimos nossos)

Curiosamente, no final de anos 50, do século XX, nos Estados Unidos da América, o psicólogo Jerome Bruner e seu grupo de especialistas, visando a melhoria do processo educativo para os estudantes da América, apresenta respostas às questões semelhantes às propostas por Bento Caraça. Essas respostas, alavancadas em questões similares às enfrentadas por Caraça, propõem, que:

> [...] os *fundamentos* de qualquer assunto podem, de alguma forma, ser ensinados a quem quer que seja, em qualquer idade.

> Embora essa proposição posssa parecer de início surpreendente, sua intenção é sublinhar um ponto essencial [...] o de que as idéias básicas [fundamentais] que se encontram no âmago de todas as Ciências e da Matemática, e os temas básicos [fundamentais] que dão forma à vida e à literatura, são tão simples quanto poderosos. Ter essas idéias básicas [fundamentais] ao seu dispor, e usá-las eficientemente, exige constante aprofundamento da compreensão que delas se tem, o que se pode conseguir aprendendo a utilizá-las em formas progressivamente mais complexas. (BRUNER, 1978, p. 11–12, grifos e acréscimos nossos).

A Comissão Internacional sobre a Educação para o século XXI, coordenada por Jacques Delors, ao final dos nos 90, século XX, após os trabalhos realizados de março de 1993 a setembro de 1996, apresentou o Relatório para a UNESCO, conhecido como Relatório Delors. Nesse relatório, constam reflexões e argumentos que revisitam e reforçam para todos, especialistas ou não, as propostas Caracianas ao assegurar que:

> A *cultura geral, enquanto abertura a outras linguagens e outros conhecimentos, permite antes de tudo comunicar-se.* Fechado na sua própria ciência, o especialista corre o risco de se desinteressar pelo que fazem os outros. Sentirá dificuldade em cooperar, quaisquer que sejam as circunstâncias. [...] *em matéria de pesquisa*, determinados avanços do conhecimento dão-se nos pontos de intersecção [*ideias fundamentais*] das diversas áreas disciplinares. (2001, p. 91–92, grifos e acréscimo nosso).

O Relatório Delors ao afirmar que "*A especialização, porém, mesmo para os futuros pesquisadores, não deve excluir a cultura geral*" (2001, p. 91), propõe a urgente necessidade de uma articulação. Essa articulação, certamente, deve ocorrer por intermédio das idéias fundamentais de cada ramo do conhecimento, e que têm como caracteristicas identificadoras: o uso da *linguagem corrente*, a *articulação interna* com outras partes da sua especificidade e, ainda, a *articulação externa* por conexão e transbordamento com outros ramos de conhecimento.

Considerações finais

Está aberta uma incrível possibilidade aos agentes envolvidos com o processo educativo para que se inspirem e se motivem a partir das, então, inovadoras reflexões e ações de Bento Caraça, e também reforçadas por Jerome Bruner e atualmente propostas pelo Relatório Delors para a nossa Educação frente aos desafios do século XXI — especilização e cultura geral articuladas pelas idéias fundamentais. Nesse sentido, será importante uma imersão cuidadosa sobre o pensamento e a ação de Bento Caraça para a elaboração de uma pormenorizada reflexão, que objetive o desenvolvimento consciente de ações para a melhoria da qualidade da Educação.

Referências bibliográficas

AMARAL, J. T. *Bento de Jesus Caraça — Uma Visão Sobre o Valor Humano e o Valor Social da Matemática e Suas Implicações no Ensino.* Tese de Doutoramento. Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo. 2014.

BRUNER, J. S. *O Processo da Educação.* 7.ª edição. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1978.

CARAÇA, B. J. Prefácio. In: ILINE, M. *O Homem e o Livro.* 4.ª Edição. Lisboa: Edições Cosmos, 1947.

CARAÇA, B. J. *Conferências e Outros Escritos.* Lisboa: Editora e Livraria Sá da Costa, 1970.

DELORS, J. et al. *Educação: Um tesouro a descobrir.* Relatório para a UNESCO da Comissão Internacional sobre Educação para o século XXI. 5.ª Edição. São Paulo: Editora Cortez: Brasília: DF: MEC: UNESCO, 2001.

VILELA, A. E. L. *Perspectivas.* 2.ª Edição. Lisboa: Editor Antonio da Costa Lobo Vilela, 2011.

Eduardo L. Ortiz, matemático e historiador (1931–2021)

Luís Saraiva
CIUHCT, DM da FCUL

Eduardo Leopoldo Ortiz nasceu em Buenos Aires em 1931. Licenciou-se em Ciências Físico-Matemáticas na Universidade de Buenos Aires em 1956. Durante o seu curso conheceu António Aniceto Monteiro (1907–1980), então professor na Universidade Nacional de Cuyo, em San Juan. Concluiu o seu doutoramento em 1961, sob a orientação do matemático Micha Cotlar (1913–2007), com a tese *Continuity of Potential Operators in Spaces with weighted measures*. Em 1962 tem um artigo em colaboração com o seu orientador, "On some inequalities of potential operators", nas publicações da *Faculdade de Ciências e Físico-Matemática da Universidade de La Plata*.

Trabalhou um ano no *Institute for Advance Studies* de Dublin, instituto fundado em 1940, englobando a *School of Theoretical Physics*, que teve por primeiro director Erwin Schrödinger (1887–1961) e que foi dirigida a partir de 1955 pelo matemático e físico teórico húngaro Cornelius Lanczos (1873–1974), com cujos trabalhos Ortiz se familiariza, em particular com o método Tau. Inicialmente foi um instrumento para a aproximação de funções especiais da física matemática, mas que se transformou num poderoso auxiliar para a solução numérica de equações diferenciais e funcionais complexas. Ortiz irá formular este método de forma mais abstrata e geral. Após um ano de estada em Londres, no Imperial College, regressa, à Argentina, começando a sua carreira docente na Universidade de Buenos Aires. Contudo a instabilidade política naquele país nos anos 60, culminada com um golpe militar em 1966, seguido de invasão da sua Universidade por forças militares, agredindo professores e alunos, fez Ortiz, em conjunto com muitos outros docentes, demitir-se da Universidade. Saiu da Argentina, primeiro para o Peru, onde lecionou brevemente na Universidade de Lima, e depois para outros países. Fixou-se em Londres em 1967, e aí centrou o resto da sua vida. Fez a sua carreira académica no Imperial College, de Londres.

Uma síntese geral de alguns dos aspetos académicos mais relevantes:

Em 1990 foi-lhe atribuído pelo Departamento Argentino de Ciência e Tecnologia e pelo CONICET (*Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas*) o primeiro *Prémio José Babini*, pelo conjunto da sua obra em história da ciência na Argentina; em 1992–1993 foi professor visitante na *Universidade de Orléans*; em 1993 foi nomeado professor catedrático no *Imperial College*; de 1996 a 1998 foi nomeado *Guggenheim Research Fellow*, e nessa qualidade trabalhou no Departamento de História da *Universidade de Harvard*.

Foi igualmente professor visitante na *Universidade de Rouen*, no *Massachusetts Institute of Technology* (MIT), na *Universidade Nacional de Córdoba* e na *Universidade Nacional de Buenos Aires*, ambas na Argentina.

Foi eleito sócio da *Real Academia das Ciências de Espanha*; da *Academia de Ciências Exactas, Físicas e Naturais* da Argentina; da *Academia das Ciências*, da Argentina; do *Instituto de Matemática e suas Aplicações* da Grã-Bretanha; da *Sociedade Mexicana de História das Ciências*.

Foi o Editor em Chefe da *Humboldt Library*, de Londres, e nesse cargo realizou a edição das obras completas de Julio Rey Pastor em 8 volumes (1988) e de António Aniceto Monteiro em CD-ROM (2008), esta em colaboração com Alfredo Pereira Gomes.

Em matemática fez investigação em Análise Numérica, Equações com Derivadas Parciais, Funções Especiais, Teoria dos Espaços de Sobolev e Teoria da Aproximação e suas aplicações.

Tem pelo menos 86 artigos publicados em matemática entre 1962 e 2007, sendo mais de metade em análise numérica e na teoria da aproximação. A revista onde mais publicou foi a *Computers & Mathematics with Applications*, com 19 artigos. Orientou com êxito 7 doutoramentos.

O interesse de Ortiz pela história da Matemática foi iniciado na Universidade de Buenos Aires pela influência directa de Rey Pastor. O periodo que afirmava mais lhe agradar trabalhar era o da transição do século XVIII para o XIX, quando considerava que as ideias matemáticas e a filosofia estavam muito interligadas. Entre as áreas analisadas contam-se o desenvolvimento da Matemática na Argentina e em Espanha, e a relação entre ambas nos séculos XIX e XX, a transmissão da matemática para a área cultural latino-americana, e o estudo de matemáticos pouco conhecidos do século XIX, como Henrique de Figueiredo em Portugal, Mendoza Ríos em Espanha e José Balbín na Argentina. Tem (pelo menos) 84 artigos publicados em História da Matemática entre 1962 e 2021. Analisa igualmente aspetos da história matemática na Península Ibérica e as relações com a América Latina.

Participações em Portugal ou relativas a Portugal:

Eduardo Ortiz participou em Portugal em diversos Encontros de História da Matemática, ou ainda fora de Portugal em Encontros co-organizados por portugueses em que se abordavam temas relativos à nossa história matemática. Publicou, em revistas ou em livro, artigos relativos a aspetos da matemática portuguesa. Damos em seguida um levantamento cronológico de alguns desses eventos:

1980. *Portugaliae Mathematica* n.º 39, número de homenagem a António Monteiro. Artigo: "Professor António Monteiro and contemporary mathematics in Argentina";

1993, Lisboa, Faculdade de Ciências. *5.º Encontro do SNHM*. É o conferencista convidado;

1996. Livro *L'Europe Mathématique*. Artigo: "The 19th century international mathematics community and its connection with those on the Iberian periphery";

1999. *Historia Mathematica* vol. 26, n.º 1. Com Jeremy Gray, artigo: "On the transmission of Riemann's ideas to Portugal";

2000, Óbidos. Encontro Internacional *A Prática da Matemática em Portugal*. Artigo: "António A. Monteiro on the Practice of Mathematics" (publicado em 2004);

2001, Porto. Encontro *Um dia com o Centro de Estudos Matemáticos do Porto*. Artigo: "Transferências de Matemática Pura y Física Teórica de Portugal a Argentina en 1943–58";

2005, Porto. *Colóquio Internacional do Centenário do Nascimento de Ruy Luís Gomes*. Artigo com Edgardo Stacco e Luiz Monteiro: "Ruy Luís Gomes en la Argentina: 1958–1961", (*Boletim da SPM*, 2006);

2006, Madrid. Sessão do International Committee for the History of Mathematics no *XXIII Congresso Internacional de Matemáticos*, "Ibero-American mathematics in the 19th and 20th centuries". Apresentação da edição das obras completas de António A. Monteiro;

2007, Lisboa. Colóquio Internacional *António Aniceto Monteiro*. Artigo: "António A. Monteiro, Birkoff, Von Neumann y Stone: Matemáticas en Portugal y en Brasil en la década de 1940" (*Boletim da SPM*, 2008);

2015, Lisboa. Encontro Internacional "Mathematical Sciences and 20th century dictatorships", celebrando os 75 anos da SPM. Artigo: "Mathematicians in Latin America, in times of anxiety: 1965–1985" (publicado em 2018);

2019, Coimbra, Museu da Ciência da UC. Colóquio *Bento de Jesus Caraça e a actualidade da Cultura Integral*. Artigo: "Mathematician Bento de Jesus Caraça and the Cosmos library: books for the people" incorporado nas Actas do Colóquio *Bento de Jesus Caraça e o Projeto Cosmos* (publicado em 2021).

Referências

Ortiz, E. L., Mathematicians in Latin-America, in times of anxiety: 1966–1985, *Proceedings of the International Conference "Mathematical Sciences and 20th Century Dictatorships"*, SPM, 2018, p. 219–25.

Saraiva, L., In Memoriam: Eduardo Ortiz (1921–2022), para publicação em *Archives Internationales d'Histoire des Sciences*.

Two questions concerning the history of the calculus

Niccolò Guicciardini
Departamento de Filosofia «Piero Martinetti», Università degli Studi di Milano

Most histories of mathematical analysis describe the 18th century as a transition period in between two phases of radical innovation: the 17th century with the advent of the 'common' and the 'new' analyses, namely analytic geometry and calculus, and the 19th century with the development of real and complex analysis, abstract algebra, and the non-Euclidean geometries. Contrary to this view, the 18th century was an extremely creative period in which new concepts and methods were developed. In the first part of my talk, I will present the Newtonian and the Leibnizian versions of the calculus. Most notably, I will ask a question concerning the Newtonian calculus that deserves our attention. In the second part, I will give a general outline of the reception and profound transformation of these two mathematical heritages in the 18th century. I will propose another question concerning the development of calculus during the Enlightenment.

The first question concerns the boundaries of the discipline of mathematics as practiced by Newton. When Whiteside began the gigantic enterprise of editing Newton's mathematical papers in the 1960s, this question was not that problematic.[3] Historians of mathematics nowadays are much more sensitive to viewing disciplinary geographies as culturally and locally determined. In these last years, we have come to appreciate that the extension of the term 'mathematics' was much broader than it is nowadays. In the Seventeenth Century, the term included Euclidean geometry, specious algebra, the methods of series, the infinitesimal calculus, organic geometry, mechanics, astronomy, optics, music, and more. Should we, therefore, include texts where the young Newton deals with optics or astronomy as in several pages of the so-called "Waste Book" (CUL Ms Add. 4004)? Indeed, Whiteside chose a selection of some optical and astronomical manuscripts for his edition. Yet, while he aimed at completeness as far as pure mathematics is concerned, the many calculations that Newton carried out in applied fields are often not included in his edition. A bias for pure mathematics that somewhat oriented Whiteside in his edition offers us a view of Newton the mathematician that is more compatible with the traditional image of the pure scientist whose lonely mind is celebrated in Wordsworth's verses. We tend so easily to forget what in the 1950s Eva Taylor reminded us by including Newton in her prosopography of the mathematical practitioners in Tudor and Stuart England: namely, that Newton was deeply concerned with research on mathematical astronomy, optics, cubature of barrels, logarithm and trigonometric tables, which were the province of cartographers, opticians, gaugers, astronomers and land surveyors.[5] It is a polymath, Christiaan Huygens, that Newton held as his model, and it is with men professionally occupied in astronomy, such as John Flamsteed, Robert Hooke and Edmond Halley, that he was deeply engaged while writing his *Principia*. The third book of the magnum opus is clearly addressed to the professional astronomer. Briefly said, the excisions and the boundaries that Whiteside so naturally drew, construct an image of Newton that might be worth questioning.

The second question concerns the different trajectories taken by 18C calculus in Britain and on the Continent. As a matter of fact, the great innovations in the development of Continental calculus took place almost exclusively thanks to mathematicians based in three academies: the academies of Paris, Berlin, and St. Petersburg. These academies were founded with practical concerns in mind: as venues in which mathematics could be pursued in the interest of the State, for example in the field of cartography. Another prominent aim was that of conferring prestige to the patron, namely the Court. Unlike the Royal Society, the Continental Academies "resembled a civil service strictly organised in its patterns of recruitment and reward". Academicians were paid and ranked into a hierarchical structure: their ethos became soon elitist and based on competition. The abstract discipline in vogue in the Continental academies, the new analysis as practiced by Euler for example, was the perfect tool that allowed academicians to develop a "strong sense of membership in the profession of science" and to endow prestige to those who excelled in it.[1, 503] In Britain, on the contrary, mathematics remained a language subservient to teaching, natural philosophy, and practical concerns in applied fields.[2] The analysis of Continental academic mathematicians could not but appear to many — and not only in Britain but even in France in certain quarters — as remote from 'useful knowledge' and vitiated by an elitist French agenda. The fellows of the Royal Society considered themselves 'gentlemen of science' remote from the bureaucratic status of Continental academicians. British mathematicians, whether they championed symbolism or geometry, highly valued the integration of mathematics into the natural philosophers' agenda. In contrast to Continental academicians, the British did not value the independence from interpretation allowed by the kind of algebraic manipulations that was promoted in part by Euler, and systematically by Lagrange. While some Continental mathematicians could feel secure in pursuing an autonomous discipline whose justification was thought to reside in the functioning of its algorithms, the British felt compelled to defend the intelligibility and practical usefulness of their procedures. The highly abstract Continental calculus, as pursued by the top academicians, was thus foreign to the values defended in British universities and at the Royal Society, and this might at least partly explain the chasm separating British and Continental mathematicians in the second half of the eighteenth century. There was also no equivalent to Fontenelle in Britain, a similarly royally pensioned public spokesperson who from 1697 to 1740 sustained a systematic and persistent public propaganda campaign that explained to the wider public the value of the new abstract mathematics, and the reasons for the academy's lucrative support of its practitioners. Lavishly supported by the French crown in this way, and possessing a justification for its elevated scientific position that was re-iterated with unwavering eloquence every year in the annual publications of the Royal Academy in Paris, the practitioners of the new analysis acquired by 1740 an identity as the theoretical avant-garde of the new mathematical physics, which was itself positioned as the leading edge of modern science overall.[4]

References

[1] K. M. Baker, "Science and the Social Order in the Old Regime", *Minerva*, Vol. 10 (1972), pp. 502–508.

[2] N. Guicciardini, "Dot-Age: Newton's Mathematical Legacy in the Eighteenth Century", *Early Science and Medicine*, Vol. 9, No. 3 (2004), pp. 218–56.

[3] I. Newton, *The Mathematical Papers of Isaac Newton*, Whiteside, D. T. W. (ed.), 8 vols., Cambridge University Press, Cambridge, 1967–1981.

[4] J. B. Shank, *Before Voltaire: the French Origins of "Newtonian" Mechanics, 1680–1715*, The University of Chicago Press, Chicago, 2018.

[5] E. G. Taylor, *The Mathematical Practitioners of Tudor & Stuart England*, for the Institute of Navigation at the University Press, Cambridge, 1954.

Seis pavilhões para seis instrumentos: o plano-programa do Observatório Astronómico da Universidade de Coimbra, em Santa Clara

Sandra Poiarez
Centro de Investigação da Terra e do Espaço da Universidade de Coimbra / Doutoranda em História da Ciência e Educação científica[1], Instituto de Investigação Interdisciplinar da UC

O atual Observatório Astronómico da Universidade de Coimbra (OAUC), inaugurado em 1951, foi edificado na sequência da implementação do plano da Nova Cidade Universitária de Coimbra, que implicava a demolição do antigo Observatório do Pátio das Escolas, construído entre 1791 e 1799, durante a direção de José Monteiro da Rocha (1734–1819). Manuel dos Reis (1900–1992), diretor da instituição entre 1934 e 1970, irá mediar o processo, entre a Comissão Administrativa do Plano de Obras da Cidade Universitária de Coimbra (CAPOCUC) e a Faculdade de Ciências da Universidade de Coimbra (UC), para a escolha do local do novo OAUC. Será também o responsável pela definição do seu plano-programa que acabará por estabelecer a opção tipológica dos edifícios, tendo em conta as duas secções dedicadas à investigação astronómica que o Observatório já detinha: a secção de astronomia de posição e mecânica celeste, estabelecida desde a sua fundação, e a secção de astrofísica, dedicada ao estudo do sol, iniciada em 1925 pelo anterior diretor, Francisco da Costa Lobo (1864–1945).

Manuel dos Reis, depois de avaliar a hipótese de implantar o novo OAUC em Montes Claros, a Nordeste da Alta da cidade, em 1942, rejeitada pela CAPOCUC, acaba por sugerir a localização atual, no Alto de Santa Clara, na margem oposta do Mondego, em dezembro de 1944 (Costa et al, s. d.). Para a sua escolha identifica critérios de altitude, isolamento e de boa visibilidade para a prática científica (AUC, CAPUCOC, Proc. 95, cópia do ofício n.º 49/44). O diretor do OAUC expressa ainda, com propriedade, que se deverá delimitar e "regular convenientemente", uma zona de proteção ao estabelecimento (AUC, CAPUCOC, Proc. 95, cópia do ofício n.º 49/44).

Após a aceitação desta proposta por parte da CAPOCUC, o diretor apresenta, por ofício, em 1945, a justificação da área de implementação necessária, cerca de 75.886 m^2, reiterando a preocupação de se regulamentar a zona de proteção do OAUC. Descreve, em seguida, o plano-programa para

[1]Esta investigação foi financiada pela Fundação para a Ciência e Tecnologia, no âmbito da Bolsa de Doutoramento FCT UI/BD/151472/2021.

a construção do novo estabelecimento, constituído por vários edifícios edificados “a uma dezena de metros uns dos outros” e localizados na planta da área definida para a implantação do novo Observatório (AUC, CAPUCOC, Proc. 95, Cópia do Ofício n.º 31/45). O Diretor traça como proposta, que acabaria por se concretizar, a construção de um edifício central, seis “pavilhões de instrumentos” (assim designados por Manuel dos Reis), uma oficina e residências para os astrónomos, ajudantes de astrónomo, maquinista e para o guarda da instituição, bem como o muro que rodeia todo o terreno da instituição.

Manuel dos Reis ao elaborar o seu plano-programa apresenta uma vontade de manter a investigação que, contudo, apenas se faria com instrumentos científicos previamente existentes na instituição (Bonifácio, 2009). Os seis “pavilhões de instrumentos”, com cúpulas ou telhados amovíveis propostos e que foram efetivamente construídos, destinavam-se a instrumentos de ambas as secções científicas do OAUC. Os pavilhões designados pelos nomes de cada instrumento serão o “Círculo Meridiano”, o “Equatorial”, o “Universal de Repsold” e o “Fotoheliográfo”, instrumentos que haviam entrado no Observatório durante o século XIX. Os restantes pavilhões destinavam-se ao “Espectógrafo Estelar” e ao “Espectoheliográfo”, este previamente instalado no recinto do Instituto Geofísico da UC, na Cumeada, aparelhos adquiridos na década de 1920 (MOP, 1951: 2,3).

O plano-programa, que estabelece orientações específicas para a implantação dos edifícios no terreno e dos próprios edifícios, descreve os critérios definidos por Castro Tirado como fundamentais à construção de Observatórios Astronómicos durante o seculo XX (Castro Tirado, 2021: 6,7). Esses critérios essencialmente técnicos e funcionais definem a implantação dos edifícios, a colocação correta dos instrumentos, e soluções que permitissem a estabilidade térmica e estrutural dos edifícios, para evitar a transmissão de qualquer tipo de vibração aos instrumentos de observação, ao mesmo tempo que deveriam proporcionar condições favoráveis, tanto de trabalho, como de acomodação, aos observadores.

O modelo de observatório astronómico constituído por vários edifícios independentes uns dos outros, equacionado por Manuel dos Reis, desde o primeiro momento, é aquele que Abraham Waumans designa de “complete split” ou de separação total dos seus componentes (Waumans, 2013). Segundo este autor, o observatório que pela primeira vez apresentou essa disposição, foi o do Monte Wilson, na Califórnia (E. U. A.), levantado entre 1908 e 1917.

Manuel dos Reis não terá saído do país com o objetivo de visitar outros observatórios para traçar o novo plano do OAUC, ao contrário do que sucedeu na preparação do plano dos restantes edifícios da nova UC. Sabemos, no entanto, que durante a sua direção, como aliás na anterior, o Observador--Chefe do Observatório, José António Madeira (1896–1976), havia saído em missões científicas aos Observatórios Astronómicos de Greenwich (Londres), Uccle (Bruxelas) e Meudon (Paris), patrocinadas pela Junta de Educação Nacional, em 1933 (Madeira, 1933), e pelo Instituto para a Alta Cultura, em 1937 (Madeira, 1938). Podemos notar que os observatórios que José António Madeira visitou na Europa, embora não tenham sido concebidos originalmente com uma ideia de separação total dos seus edifícios, incluíam já, em menor ou maior grau, desenvolvimentos nesse sentido. A proposta de Manuel dos Reis para o novo OAUC segue, portanto, um modelo de observatório definido por uma estruturação própria da ciência astronómica, quer do ponto de vista técnico, quer do ponto vista funcional. Foi a este modelo que a arquitetura dos edifícios teve de dar resposta. O projeto arquitetónico dos edifícios do novo OAUC foi entregue ao arquiteto Edgard Duarte de Almeida (1903–?), que elaborou o projeto do edifício central. O facto deste arquiteto se ter ausentado de País levou a CAPOCUC a contratar o arquiteto Álvaro da Fonseca (?–1973?), para desenhar os restantes edifícios.

O processo de construção do novo OAUC, apesar da diligência e do acompanhamento do então diretor, não decorreu sem problemas. Manuel dos Reis chegou mesmo a pedir a suspensão das obras "antes de nelas fazerem mais despesas", pois não tinham sido garantidas as necessárias condições de estabilidade para a colocação dos instrumentos, em particular ao nível das fundações. Também as cúpulas tinham problemas nos seus mecanismos de abertura. No entanto, o novo OAUC seria inaugurado, conjuntamente com o edifício da Faculdade de Letras da UC, em 22 de novembro de 1951. Os seis pavilhões dos instrumentos encontravam-se ainda em vias de conclusão. Mas o término das obras iria arrastar-se no tempo. Dezassete longos anos decorridos após a inauguração do OAUC, o *Espectroheliógrafo* será o primeiro instrumento a ser efetivamente instalado no seu respetivo edifício, em 1968, um ano após a sua transferência do Observatório Geofísico para Santa Clara.

A construção do novo OAUC revela, em certa medida, que os projetistas, a empresa construtora e a própria fiscalização da CAPOCUC, não estavam preparados para a realização de uma obra desta complexidade. Nesse sentido, o novo OAUC de Santa Clara representou um relativo insucesso, do ponto de vista do seu esperado contributo para a observação e investigação astronómica em Coimbra.

Referências

Bonifácio, Victor, *Da Astronomia à Astrofísica. A perspetiva portuguesa (1850–1940)*, Dissertação de Doutoramento em Física, Universidade de Aveiro, 2009.

Costa, Cecília, Mariano, Emília e Vitória, José, "Manuel dos Reis e a Mudança do Observatório Astronómico da Universidade de Coimbra, do Paço das Escolas para o Alto de Santa Clara. Uma primeira notícia", *ENAA XIII*, 2003, s. d. (artigo não publicado).

Castro Tirado, M. A., "Astronomical Observatories: Consolidation of the Modern Observatory Between the XVIII$^{\text{th}}$ and the XX$^{\text{th}}$ Centuries", *Revista Mexicana de Astronomía y Astrofísica. Serie de Conferencias*, Vol. 53 (2021), p. 1–7. `https://doi.org/10.22201/ia.14052059p.2021.53.02`

Madeira, José A., "Missão de estudo nos observatórios astronómicos de Greenwich e Paris em 1932 e 1933: Relatório apresentado à Junta de Educação Nacional", *Revista da Faculdade de Ciências*, Vol. 3, n.º 4 (1933), p. 361–416.

Madeira, António, "Relatório Apresentado ao Instituto de Alta Cultura da Missão de Estudo nos Observatórios Astronómicos de Greenwich, Uccle e Paris, em 1937", *Revista da Faculdade de Ciências*, Vol. 7, n.º 1, (1938), p. 10–38.

Ministério das Obras Publicas – MOP (Ed.). *Cidade Universitária de Coimbra. Edifícios do Observatório Astronómico*, Bertrand Irmãos, Lisboa Lda, 1951.

Waumans, Abraham A., *The Typology of Astronomical Observatories*, Tese de mestrado, Explore Lab studio of Delft University of Technology's Department of Architecture, Delft, Países Baixos, 2013.

Fontes primárias

Arquivo da Universidade de Coimbra (AUC): Arquivo da Comissão Administrativa do Plano de Obras da Cidade Universitária de Coimbra, Processo 95.

A GEOMETRIA DA CARTA DE NAVEGAR: UMA DISCUSSÃO CIENTÍFICA DO SÉCULO XVI

Bruno Almeida
Centro Interuniversitário de História das Ciências e da Tecnologia

As cartas de navegar produzidas entre os séculos XIII e XVII são objectos de enorme relevância histórica. Além da sua importância para a navegação da época, foi através da cartografia náutica que os europeus acederam a uma imagem geográfica mais exacta e pormenorizada das costas do Velho Mundo e, em primeira mão, de novas terras, até então, suas desconhecidas. Do ponto de vista da história da ciência, estes objectos estão ligados ao desenvolvimento de vários tópicos da navegação, geografia, matemática e geofísica, ao longo do século XVI, resultantes da reunião de saberes artesanais e eruditos.

Chegaram até aos dias de hoje centenas de cartas de navegar feitas na Europa até ao final do século XVI, no entanto, as origens medievais e as primeiras fases do seu desenvolvimento são mal conhecidas. A inexistência de fontes escritas no período medieval alimenta incertezas em relação aos métodos de recolha de dados geográficos, às técnicas de desenho e mesmo ao uso das mais antigas cartas conhecidas (séculos XIII e XIV). Não obstante estas dificuldades, a investigação histórica mostrou que as cartas reflectem as técnicas de navegação praticadas na época e nas zonas geográficas em que foram produzidas: as primeiras cartas do Mediterrâneo (cartas-portulano), foram desenhadas a partir de informação geográfica compilada ao longo de muitos anos de viagens marítimas, com base em distâncias estimadas e rumos magnéticos (não corrigidos da declinação magnética); as cartas do Atlântico (cartas de latitude), mais tardias, foram construídas recorrendo às mesmas variáveis, e também à latitude, determinada através de métodos astronómicos. Estes dados geográficos eram posteriormente transferidos para o pergaminho, sem ter em conta a curvatura da superfície terrestre, o que acarretou consequências geométricas singulares.

As propriedades geométricas das cartas de navegar comuns não eram evidentes para os pilotos, cartógrafos, cosmógrafos e matemáticos medievais e renascentistas. O interesse pela sua compreensão só surgiu, de forma generalizada, ao longo do século XVI. Entre outras, as razões que motivaram essa atenção foram de ordem prática, intelectual e geopolítica, sendo que a sua real extensão está ainda por avaliar. Na primeira metade de seiscentos, boa parte das pessoas que primeiro se interessaram por estas questões mantinham uma ligação a instituições ibéricas de gestão e controlo das navegações ultramarinas. Estes organismos eram espaços de confluência, onde os artesãos e os cosmógrafos trocavam ideias e experiências sobre os vários problemas da navegação da época. Entre os temas mais debatidos pontuavam os problemas geométricos da cartografia náutica, cujo impacto não se limitava à navegação prática. Por exemplo, foi neste contexto que a cartografia das ilhas Molucas teve uma enorme importância na disputa, entre Portugal e Espanha, sobre a prioridade do comércio das suas especiarias.

As primeiras conclusões sobre a geometria das cartas náuticas circularam em textos sobre cosmografia e sobre a arte de navegar (uma parte considerável desses textos foi escrita em vernáculo e os mais relevantes circularam na forma impressa). Numa primeira fase, os autores recorreram às prescrições dadas na importante *Geografia* de Ptolemeu (fl. séc. II d. C.), e equipararam as cartas a mapas geográficos, acreditando que a sua exactidão dependia do correcto posicionamento das terras em latitude e longitude. Ecos desta concepção registam-se no século XV, no texto do ragusano Benedetto Cotrugli (1464); identificam-se também no famoso manuscrito *Quatri partitu en cosmographia practica*, escrito pelo cosmógrafo Alonso de Chaves entre 1520 e 1538. Chaves comparou a carta de navegar a um mappamundi, desenhado com base numa malha "plana cuadrangular" de paralelos e meridianos. No entanto, as terras representadas nas cartas de navegar não foram desenhadas com base nestas prescrições, e o primeiro autor a mostrá-lo foi o cosmógrafo Pedro Nunes, em 1537.

O trabalho pioneiro de Pedro Nunes clarificou que os mapas elaborados a partir das prescrições ptolemaicas, baseados nas latitudes e longitudes dos lugares, eram objectos cartográficos diferentes das cartas náuticas comuns, não sendo, por isso, adequados às navegações. Em particular, Nunes observou que o posicionamento das terras desenhadas nas cartas dependia das rotas usadas pelos navegadores na sua exploração. Verificou que a carta de navegar não se mostrava numa projecção "quadrada", provando que, em geral, as terras que apareciam alinhadas num mesmo meridiano na carta, não estariam, na realidade, na direcção norte-sul. Em breve, autores como Pedro de Medina (1545) e Martín Cortés (1551), mesmo não atingindo a profundidade com que Nunes tratou este assunto, publicaram comentários sobre o tema, nomeadamente a propósito dos problemas de conformidade geométrica entre o globo e o plano, de onde resultava a não-convergência dos meridianos nas cartas.

Apesar destes primeiros avanços, um factor que teve influência no desenho das terras foi, de certa forma, subvalorizado: a declinação magnética.

Com efeito, a bordo, os rumos mostrados pela bússola não eram compensados da declinação magnética; a informação assim recolhida era usada no desenho das costas nas cartas, originando distorções geométricas que, na época, não eram evidentes. As primeiras observações sistemáticas da declinação magnética local foram feitas por D. João de Castro, e escritas no seu *Roteiro de Lisboa a Goa* (c. 1538–39). A partir dos dados reunidos, Castro intuiu, entre outras coisas, que as cartas comuns mostravam a costa africana, no hemisfério Sul, desviada para leste, em função do efeito combinado da declinação magnética no Atlântico (onde o desvio das agulhas era para nordeste) e no Índico (onde o desvio das agulhas era para noroeste). O exame da influência da declinação magnética na cartografia teve mais atenção na segunda metade de seiscentos e no século XVII, principalmente por parte de autores ingleses.

Pedro Nunes defendeu que a carta de navegar comum poderia continuar a ser utilizada a bordo, desde que se percebessem as suas características e limitações. Não obstante, o cosmógrafo compreendia que existiriam projecções cartográficas mais adequadas à navegação. Neste sentido, propôs uma solução em que a carta se dividia em tiras delimitadas em latitude, paralelas ao equador terrestre e na extensão da longitude. Essas tiras seriam desenhadas na projecção cilíndrica equidistante, e agregadas num atlas. Ao longo do século XVI, outros autores como Fernando Oliveira, John Davis, William Barlow, Thomas Blundeville, e Edward Wright propuseram outras soluções cartográficas nos seus textos, procurando responder aos problemas geométricos que afectavam as cartas comuns. Destaca-se entre estas a *paradoxal chart*, desenhada com base numa projecção polar, que foi utilizada a bordo, nomeadamente em expedições ocorridas nas latitudes mais elevadas do hemisfério norte.

O século XVI terminaria com um contributo fundamental para o desenvolvimento da cartografia náutica. Em 1599, Edward Wright explicou matematicamente a construção da carta de latitudes crescidas. Esta solução fora sugerida por Gerard Mercator em 1569, para obter uma carta de navegar a partir das coordenadas geográficas reais e que, ao mesmo tempo, mostrasse as linhas de rumo constante (linhas loxodrómicas) como linhas rectas. Wright demonstrou que, nesta proposta cartográfica, o espaçamento entre paralelos aumentava em função da secante da latitude. O trabalho matemático de Wright constituiu o culminar de uma importantíssima discussão em torno da geometria das cartas de navegar, que atravessou quase todo o século XVI, que envolveu vários actores, contextos laborais e sociais, e foi difundida através de textos que circularam por toda a Europa.

Referências

Almeida, B., *A Carta de Navegar: antologia de textos, 1464–1599*, Althum, Lisboa, 2022.

Gaspar, J. A., "A Matemática da Navegação e da Cartografia no Tempo das Descobertas", In F. P. da Costa, J. T. Pinto, & J. Buescu (Eds.), *Matemática do Planeta Terra*, Lisboa, IST Press, 2013, pp. 29–58.

Gaspar, J. A. e Leitão, H., "What is a nautical chart, really? Uncovering the geometry of early modern nautical charts", *Journal of Cultural Heritage*, Vol. 29, (2018), pp. 130–136.

Gaspar, J. A. e Leitão, H., "Early Modern Nautical Charts and Maps: Working Through Different Cartographic Paradigms", *Journal of Early Modern History*, Vol. 23, 1 (2019), pp. 1–28.

Leitão, H. e Sánchez, A., "Artisanal culture in early modern Iberian and Atlantic worlds", *Centaurus*, Vol. 60, (2018), pp. 135–140.

Pujades i Bataller, R. J., *Les cartes portolanes: La representació medieval d'una mar solcada / Portolan Charts: The Medieval Representation of a Ploughed Sea*, Institut Cartogràfic de Catalunya, Institut d'Estudis Catalans, & Institut Europeu de la Mediterrània (Eds.), Lunwerg Editores, Barcelona, 2007.

36.º Encontro do Seminário Nacional de História da Matemática

Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

20 e 21 de Outubro de 2023

Introdução

Luis Saraiva[1]
(Coordenador Nacional do SNHM, CIUHCT, DM da FCUL)

Esta foi a 4.ª vez que um Encontro do SNHM se realizou em Aveiro, no seu Departamento de Matemática. Os três primeiros tiveram lugar em 1999 (o 11.º Encontro do SNHM), em 2006 (o 19.º) e em 2013 (o 26.º). Podemos ver que, um pouco involuntariamente, estávamos a realizar estes encontros em Aveiro de 7 em 7 anos. E foi por isso que se pensou organizar o de 2020 igualmente em Aveiro. Contudo a pandemia, entre outros fatores, veio interromper esta sequência, pelo que este Encontro acabou só por se realizar 10 anos após o de 2013. Aveiro é, após Lisboa (8) e Coimbra (7), o local onde mais Encontros do SNHM se realizaram.

Soubemos reagir face à adversidade que foi a pandemia covid, e conseguimos manter a regularidade anual dos nossos Encontros, realizando em 2020 o 33.º Encontro online, com centro no Politécnico de Leiria, e o 34.º, já com o carácter misto online/presencial, em 2021, em Santiago do Cacém. Em 2022 voltámos à normalidade dos Encontros presenciais em Gouveia, só tendo havido intervenção por Zoom de 3 convidados estrangeiros.

Com este Encontro fechamos um biénio extremamente complicado e trabalhoso, pois além dos dois Encontros Nacionais tivemos a organização e realização de dois Encontros internacionais: em Outubro de 2022 o *9.º Encontro Luso Brasileiro de História da Matemática* em Setúbal, e o *4.º Encontro Ibérico de História da Matemática* em Leiria, em Junho de 2023, com um total de mais de 80 palestras e cerca de 120 participantes. A isso há a adicionar as 37 palestras dos dois últimos Encontros nacionais e os cerca de 70 participantes nesses Encontros.

Em números redondos, tivemos nestes dois anos cerca de 120 palestras e 200 participantes. É um elogio para todos os envolvidos na organização e efetivação destes Encontros e em primeiro lugar para os seus palestrantes, que tudo tenha corrido da melhor forma, e os quatro Encontros tenham deixado gratas memórias nos seus participantes.

Neste Encontro tivemos quatro convidados para realizarem conferências plenárias. Três deles estiveram em Aveiro graças ao apoio conjunto dado às suas deslocações pelo *CIDMA – Universidade de Aveiro* e pela *Sociedade Portuguesa de Matemática (SPM).* Foram eles os Professores Reinhard Siegmund-Schultze, da *Universidade de Agder*, em Kristiansand, na

[1] Agradecimentos institucionais são devidos à *Fundação para a Ciência e a Tecnologia* de Portugal no âmbito do projeto UIBD/00286/2020.

Noruega, June Barrow-Green, da *Open University* em Milton Keynes, Reino Unido, e Marc Moyon, da *Universidade de Limoges*, França. O quarto convidado, o Professor Clóvis Pereira da Silva, da *Universidade Federal do Paraná*, Brasil, fez a sua intervenção por Zoom, a única conferência não presencial deste Encontro. O Professor Siegmund-Schultze já tinha estado em Portugal, pois tinha participado no Encontro "*Mathematical Sciences and 20th Century Dictatorships*" realizado em Lisboa em 2015, na celebração dos 75 anos da SPM. Igualmente o Professor Clóvis Pereira da Silva esteve presente nos primeiros *Encontros Luso-Brasileiros*, sendo um dos palestrantes do 1.º Encontro, realizado em Coimbra em 1993.

Tivemos igualmente como conferencistas dois usuais participantes nos Encontros Luso-Brasileiros, a Professora Circe Mary Silva da Silva, da *Universidade Federal de Pelotas*, uma das três personalidades convidadas do 8.º Encontro do SNHM, realizado no Porto em 1996, e o Professor Wagner Valente, da *Universidade Federal de S. Paulo*, um dos quatro conferencistas convidados do 26.º Encontro do SNHM, realizado em 2013 em Aveiro.

No total foram apresentadas 18 comunicações. Foi igualmente elaborado um caderno com 34 páginas, com os resumos das palestras e outras informações referentes ao Encontro e ao SNHM que foi distribuído aos participantes e às entidades que estiveram presentes na sessão de abertura. Uma cópia, como é usual, foi entregue para os Arquivos da SPM. Houve 35 inscritos no Encontro. Os docentes e alunos de mestrado do *Departamento de Matemática* da *Universidade de Aveiro* puderam assistir ao Encontro sem necessidade de inscrição.

O Encontro foi acreditado pelo Conselho Científico Pedagógico da Formação Contínua, como Acção de Formação para Professores de Matemática do Ensino Básico e Secundário (Grupos 230, 500). Participaram como formandos dois professores.

Queremos agradecer a toda a Comissão Organizadora local, e muito especialmente ao seu coordenador, Professor Helmuth Malonek, o empenho que colocaram em todos os aspectos da realização do Encontro. Estendemos os nossos agradecimentos ao *Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro*, representado na sessão de abertura pelo seu Diretor, Professor Alexandre Almeida, ao *CIDMA*, representado na mesma sessão pelo seu coordenador adjunto, Professor Ricardo Almeida, e a todas as restantes instituições que contribuiram para o êxito deste Encontro: a *Fundação para a Ciência e a Tecnologia*, a *Escola Profissional de Anadia* e o *Turismo Centro Portugal.* Agradecemos igualmente e muito em especial à *Sociedade Portuguesa de Matemática*, que nos tem apoiado sempre, desde a nossa constituição

como secção autónoma da Sociedade, e que em Aveiro esteve representada pelo Professor Fernando Pestana da Costa. Tivemos igualmente a colaboração de um conjunto de alunos da *Universidade de Aveiro* que contribuiram para que o Encontro decorresse sem problemas. A todos agradecemos a boa vontade.

Por último queremos igualmente agradecer aos nossos colegas da Comissão Científica, João Caramalho Domingues e Fernando Figueiredo, que em muito contribuiram para o êxito desta realização do SNHM.

O Encontro não tinha tema pré-definido, pelo que não foi de admirar que as palestras fossem desde questões do século XVII até assuntos do século XX, quer da História da Matemática quer da História do Ensino da Matemática.

Na conferência inaugural foi analisado o *Congresso dos Matemáticos de Oslo*, de 1936, perspetivado no seu contexto histórico. Notemos que se realizou três anos antes do começo da Segunda Guerra Mundial, quando esta já parecia inevitável.

Houve palestras em que se deram perspectivas gerais sobre certos temas, como sobre os começos e desenvolvimentos do conceito de função, sobre a polémica da Companhia de Jesus com Galileu, sobre o modo como historicamente foram representadas as mulheres que fizeram matemática, ou ainda uma análise dos livros de textos franceses no modo como se tentou implementar a história da matemática na sala de aula. Tivemos intervenções mais localizadas sobre figuras notáveis da história da matemática, como François Viète e Gottlob Frege. Tivemos igualmente palestras relativas à matemática portuguesa: sobre António Carvalho da Costa, Gago Coutinho, Ruy Luis Gomes e a *Gazeta de Matemática.*

Houve duas palestras sobre aspetos da História Matemática e do Ensino da Matemática no Brasil respetivamente relativas à formação da comunidade matemática no Brasil e ao processo de criação no Brasil de um campo disciplinar sobre o ensino.

Tivemos igualmente uma secção de debate de questões de história do Ensino e da divulgação da Matemática: Os *Elementos* de Euclides e o *GeoGebra*; História da Matemática na sala de aula; vultos da história matemática portuguesa no *Dicionário Histórico* de Esteves Pereira e Guilherme Rodrigo, as "*Questões Propostas*" no *Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas* de Gomes Teixeira; Sebastião e Silva e a modernização da matemática em Portugal;

Como é costume terminarmos esta introdução, esperamos que a publicação destes resumos seja útil a todos os que a consultarem, que aumente a curiosidade de saberem mais sobre alguns destas questões, e que constitua um estímulo para futura participação em outros encontros do SNHM, quer como palestrantes quer como assistentes.

O Seminário está aberto a todos e de todos precisa.

Programa

20 de Outubro

09.00 *Inscrições e entrega de pastas*

09.30 Abertura

10.00 Reinhard Siegmund-Schultze (Univ. Agder, Noruega) — *Meeting under the integral sign? The Oslo Congress of Mathematicians on the eve of the Second World War*

11.00 *Coffee Break*

11.30 Circe Mary Silva da Silva (UFPEL, Brasil) — *Infância e maturidade do conceito de função*

12.00 Reinhard Kahle e Isabel Oitavem (DM-UNL) — *Frege's axiomatization of implication and the proof of the tautology "A implies A"*

12.30 Parisa Kharazmi (CIDMA, DM-UA) — *François Viète e o método de inserção no seu Supplementum Geometricae*

13.00 *Almoço*

15.00 Clóvis Pereira da Silva (UFPR, Brasil) — *A formação da comunidade matemática brasileira*

16.00 Luís Saraiva (CIUHCT, DM-FCUL) — *Ruy Luís Gomes, um importante matemático da Geração de 40*

16.30 Wagner Valente (UNIFESP/GHEMAT, Brasil) — *A Educação Matemática no Brasil: debates e propostas para a criação de um campo disciplinar sobre o ensino*

17.00 *Coffee Break*

17.30 *Tarde Social*

20.00 *Jantar do Encontro*

Programa

21 de Outubro

09.00 June Barrow-Green (Open University, Milton Keynes, Reino Unido) — *The historical representation of women in mathematics*

10.00 Ana Bastião (Escola Naval) — *Carvalho da Costa: a latitude por duas alturas do Sol*

10.30 António Canas (Escola Naval) — *Navegação astronómica na travessia aérea do Atlântico Sul*

11.00 *Coffee Break*

11.30 Luis Miguel Carolino (ISCTE - IU de Lisboa / CIES-IUL) — *Os Jesuítas no rescaldo da polémica com Galileu: revisitando o Cosmos Aristotélico no Collegio Romano (1618–1667)*

12.00 Fernando Figueiredo (CITEUC, DM-UC), Jaime Carvalho e Silva (CMUC, DM-UC) e Anabela Teixeira (E. Secundária de Camões) — *O percurso singular da Gazeta de Matemática: 200 números em 83 anos*

12.30 Jaime Carvalho e Silva (CMUC, DM-UC) e Cecília Costa (CIDTFF, UTAD) — *Vultos da História Matemática Portuguesa no Dicionário Histórico de Esteves Pereira e Guilherme Rodrigo (1904)*

13.00 *Almoço*

15.00 Marc Moyon (Univ. de Limoges, França) — *History of Mathematics "in potentiality" versus History of Mathematics "in actuality": an analysis of French textbooks to implement history of mathematics in the classroom*

16.00 Hélder Pinto (I. Piaget, RECI e CIDMA-UA) — *Os Elementos de Euclides e a GeoGebra*

16.30 Teresa Clain (GHMEM, CIDMA-UA) — *Episódios da História da Matemática na sala de aula: aprender com os erros de Gaspar Nicolas*

17.00 *Coffee Break*

17.30 Inês Martins (CEAFEL) e Pedro Freitas (CIUHCT) — *As "Questões propostas" no Jornal de Gomes Teixeira*

18.00 Anabela Teixeira (E. Secundária de Camões) e Jaime Carvalho e Silva (CMUC, DM-UC) — *Sebastião e Silva face a algumas controvérsias contemporâneas à volta da modernização do Ensino da Matemática em Portugal*

18.30 Encerramento do Encontro

The Oslo Congress of Mathematicians on the Eve of the Second World War

Reinhard Siegmund-Schultze
University of Agder, Kristiansand, Norway

The Oslo ICM of 1936 appears as a mathematical and political melting pot, standing between the academic fall-out of the First World War and the further disruptions of the Second. In my talk I have described the ways in which the political situation shaped the staging of the congress, and the consequences that this had for the development of mathematics in the 1930s. The congress itself provides us with a snapshot of the mathematics of that decade, made the more interesting by the fact that this was the first ICM at which the now well-established Fields Medals were awarded.

The talk is related to a joint book with Christopher D. Hollings and the author.

We found the following four major strategies for international scientific communication manifesting themselves in the organization and the staging of the congress in Oslo. These were exemplified by the actions of several nations, and by various members of the international mathematical community as a whole:

- the newcomer strategy of the ambitious and developing nation [Norway];
- the expansionist and propagandistic strategy of the (mathematically) established nation [Germany];
- the isolationist and often fearful strategy of the (politically) ousted nation [Soviet Union, Italy];
- the scientific, for the most part internationalist, strategy of the research mathematician.

The Norwegian Carl Størmer, well known for his mathematical theory, physical observation, and description of the Northern Lights, was the president of the congress. He had presented his theory repeatedly on the ICMs from 1908, ironically without his real mathematical innovation, the multistep numerical method. Also in Oslo he talked about aurora borealis. While the congress was performed in a pre-computer age Størmer could refer to new technical progress in the realm of analogue computers (Vannevar Bush's differential analyzer) which allowed the calculation of orbits even without recourse to his numerical method.

> “I hope you will agree with me, that the methods of numerical and mechanical integration of differential equations are very important not only in the applications but also in pure mathematics.”

At the same time the congress took place under tense political conditions with several refugees from Nazi Germany attending who were looking for jobs and had to confront colleagues from Germany who in most cases had not behaved bravely during their expulsion. The book contains in its appendix interviews which several of the refugees (A. A. Fraenkel, E. J. Gumbel, F. Noether and others) gave to journalists from Norwegian dailies, such as *Aftenposten* and *Arbeiderbladet*.

There was an internal mathematical and political report on the congress sent to the Nazi-authorities by Walther Lietzmann, an educator and historian of mathematics in Göttingen. The Nazi ministry had nominated him as “leader (Führer)” of the German delegation. Lietzmann had to acknowledge important mathematical work being done by Polish mathematicians at the time. Many of them were discriminated against by Germans; during the war from 1939 they were even killed in great numbers. In 1939 Lietzmann reported:

> “At a social gathering it was stressed with regard to the attending Polish mathematician S. Banach (Lemberg), how admirable it was that Poland had developed such a broad and strong mathematical school of peculiar orientation in a very short period of time. ... We should improve our contacts with Poland, which is still largely oriented towards France in the scientific respect. However, certain problems may arise, since many Polish mathematicians seem to be non-Aryans.”

The real scientific leader of the German delegation was the Berlin mathematician Erhard Schmidt who revealed his illusions about the political situation with the following words:

> “When I left Berlin, everything was resounding with the joyful preparations for the Olympic Games. Everybody was prepared to welcome the gathering peoples with honour and to celebrate the spectacle of their peaceful competition.”

Schmidt called the congress in Oslo an "Olympia of the Intellect" and continued:

> "Here [at the mathematical congress] everybody is thrilled by the successes of the others. Because in the bright and pure atmosphere of the intellect one more easily understands that the wealth and the rise of one people is no disadvantage, but only a great fortune for all other peoples."

Resistance to the racist theories of mathematics of the Nazis is palpable during the congress. This for instance in the plenary talk given by Otto Neugebauer who related the specific qualities of Babylonian mathematics to the "special blend of different peoples down there". Even Lietzmann had to admit in his internal report:

> "There is one thing that many foreigners have real problems in understanding: our [sic] notion of the national peculiarity of science, regardless of the universal validity of its results."

The reasons for the boycott of the congress by Russian and Italian mathematicians (Luzin affair in the Soviet Union, boycott of Italy by the League of Nations due to their war in Ethiopia) are also discussed.

Looking for traces of a participation of Portuguese mathematicians in the Oslo Proceedings I was unfortunately not successful. However, I found one remark in Maurice Fréchet's plenary talk pointing to the recent defence in July 1936 of the dissertation of his Portuguese student A. Monteiro with respect to its relation to probability theory.

References

Ch. D. Hollings and R. Siegmund-Schultze: Meeting under the Integral Sign? The Oslo Congress of Mathematicians on the Eve of the Second World War, AMS, Providence 2020.

Conceito de Função de Bernoulli a Bourbaki

Circe Mary Silva da Silva
Universidade Federal de Pelotas, Brasil

O objetivo da pesquisa é historicizar e problematizar as diferentes definições do conceito de função formuladas por matemáticos desde Johann Bernoulli (1667–1748) até o século XX, com a definição formalista do grupo Bourbaki. A definição matemática mais antiga de função, foi dada por Bernoulli, no artigo *Remarques sur ce qu'on a donné juisqu'ici de solutions des problemes sur les isoperimetres.* Ele colocou a ideia de função como associada a uma variável. "Chama-se uma função de uma magnitude variável uma quantidade composta de alguma maneira daquela magnitude e de constantes" (Bernoulli, 1718, p. 241). O matemático introduziu uma notação geral para função φx que se aproxima da moderna $\varphi(x)$. Em 1748, Leonard Euler (1707–1783) escreveu: "uma função de uma quantidade variável é uma expressão analítica composta de qualquer maneira que seja, desta mesma quantidade ou de quantidades constantes" (Euler, 1988, v. 1, p. 3; v. 2, s/p).

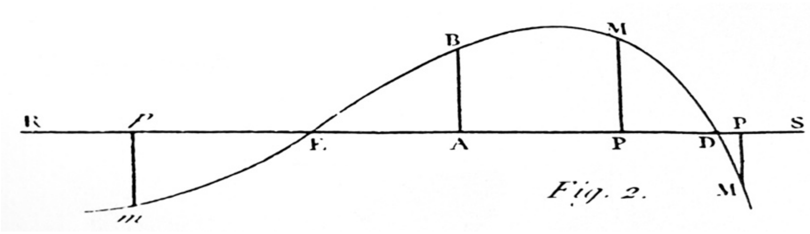


Figura 1: representação de função por Euler

Na obra *Princípios Mathematicos*, José Anástacio da Cunha (1744–1787), matemático português, apresentou a definição: "Se o valor de uma expressão A depender de outra expressão B, chamar-se-á A função de B" (Cunha, 1790, p. 193). Joseph Louis Lagrange (1736–1813), em 1798, publicou o livro *Leçons de Calcul de Fonctions* em que estendeu um pouco mais a definição de função de Euler.

> Denomina-se função de uma ou mais grandezas toda expressão de cálculo na qual essas grandezas estiverem presentes de algum modo, estejam elas separadas ou ligadas a outras grandezas, que são consideradas como dadas ou invariáveis, ao passo que as

> grandezas das funções podem adquirir todos os valores possíveis (Lagrange, 1798, p. 1).

Lagrange manteve o status que Euler atribuiu a esse conceito e ainda o colocou no título de seu livro. Durante o século XVIII, função foi entendida como uma expressão analítica. Associada ao conceito de função, surgiu a simbologia φx, y e, posteriormente, f_x, $f(x)$. No século XIX, sua popularização atingiu as escolas. Na França, no século XIX, Sylvestre Lacroix (1765–1843) incluiu a seguinte definição para função:

> Para exprimir que uma quantidade depende de uma ou de várias outras, seja por operações quaisquer, seja mesmo pelas relações impossíveis de assinalar algebricamente, mas cuja existência é determinada por certas condições, diz-se que a primeira é função das outras. (Lacroix, 1861, p. 1).

Lacroix tratou função como dependência entre variáveis, e lhe concedeu um caráter mais geral que aquele do século XVIII. No século XIX, vários autores contribuíram para uma maior precisão da definição de função, entre eles Lejeune Dirichlet (1805–1859) que não se restringiu a funções contínuas como Euler e nem a uma única lei de formação: "[...] se uma variável y está relacionada com uma variável x de tal modo que, sempre que é dado um valor numérico a x, existe uma regra segundo a qual um valor único de y fica determinado, então diz-se que y é uma função da variável independente x " (Dirichlet, 1829, p. 157–159). Georg Cantor (1845–1918) ao divulgar sua teoria dos conjuntos transfinitos, estabeleceu uma definição de função em termos de conjuntos.

> Dizemos que uma lei, que para cada elemento n de N faz corresponder um elemento determinado de M, o mesmo elemento podendo ser usado várias vezes; realiza-se uma representação do conjunto N sobre os elementos do conjunto M, ou mais simplesmente uma representação em M. (Cantor, 1899, p. 350).

As primeiras definições estavam atreladas a fenômenos da natureza, a partir de Cantor não há quaisquer preocupações com aplicações. Funções são relações entre conjuntos — objetos matemáticos abstratos. No século XX, a definição do grupo Nicolas Bourbaki, em 1939, no livro *Theorie des Ensembles*, é a seguinte:

> [...] uma correspondência $f = (\mathrm{F}, \mathrm{A}, \mathrm{B})$ é uma função se, para todo x pertencente ao conjunto de partida A de f, a relação $(x, y) \in \mathrm{F}$ é funcional em y; o objeto único correspondente a x por f é chamado o valor de f para o elemento x de A, e se designa por $f(x)$ ou f_x (ou $\mathrm{F}(x)$ ou F_x. Se f é uma função, F seu grafo e x um elemento do conjunto de definição de f, a relação $y = f(x)$ é equivalente a $(x, y) \in \mathrm{F}$. (Bourbaki, 1970, p. 64).

A definição de função sofreu transformações, a princípio entendida como uma relação entre quantidades sujeita a uma lei de formação, passou por uma ampliação deixando precisos o domínio de definição e as possibilidades das leis que a formam, até finalmente, no século XX, chegar a uma formalização tal, que pode ser expressa praticamente apenas por símbolos. A definição de função a princípio é bastante discursiva, mas aos poucos as palavras tornam-se mais precisas e os símbolos integram-se a ela. Torna-se um conjunto de pares ordenados — um objeto matemático.

Referências

BERNOULLI, J. *Opera Omnia.* Tommus Secundus. Anno 1714–1726. Lausanne & Geneve: Marci-Michaelis Bousquet, 1742.

BOURBAKI, N. *Théorie des Ensemble.* Diffusion: Paris, 1970.

CANTOR, G. Sur les fondements de la théorie des ensembles transfinis. *Memoires de La Société des Sciences physiques et naturelles de Bourdeaux*, v. III, 1899, 343–437.

DIRICHLET, L. Sur la convergence des series trigonometriques qui servent à représenter une founction arbitraire entre des limites données. *Journal für die reine und angewandte mathematik.* v. 4, 1829,157–169.

EULER, L. *Introduction a l'analyse infinitésimale.* Paris: ACL-Editions, 1988.

LACROIX, S. *Traité élémentaire du calcul différentiel et du calcul intégral.* Tome 1. 7.ª ed. Paris: Mallet-Bachelier, 1861.

LAGRANGE, J. L. *Theorica das funções analyticas, que contem os principios do Calculo Diferencial.* Lisboa: Officina de João Procopio Correa da Silva, 1798.

Frege's axiomatization of implication and the proof of the tautology $\varphi \to \varphi$

Reinhard Kahle
Carl Friedrich von Weizsäcker-Zentrum, Universität Tübingen, Germany
NovaMath, FCT, Universidade Nova de Lisboa, Portugal

Isabel Oitavem
Center for Mathematics and Applications (NOVA Math), NOVA, FCT
Department of Mathematics, NOVA FCT, 2829 Caparica, Portugal

The modern axiomatization of Logic goes back to Gottlob Frege (1848–1925). In his semanal booklet *Begriffsschrift* of 1879 [1], he proposed the following three axioms for implication which read in modern notation:

$$\vdash \varphi \to (\psi \to \varphi) \tag{F1}$$

$$\vdash (\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)) \tag{F2}$$

$$\vdash (\theta \to (\psi \to \varphi)) \to (\psi \to (\theta \to \varphi)) \tag{F3}$$

Frege does not give any heuristics for his choice, and the motivation is restricted to arguments for the correctness and to examples from Mathematics which give sound instances of the two axiom schemata.

It leaps to the eye, that $\varphi \to \varphi$ is not an axiom in this axiomatization. But it is, of course, provable. And Frege provided a proof which, however, made use of his axiom (F3).

Interestingly, the axiomatization of the *Begriffsschrift* was not taken up immediately. Even Frege himself used another form of axiomatization in his (ill-fated) *Grundgesetze der Arithmetik* [2] which, in fact, used $\varphi \to \varphi$ as an axiom!

Whitehead and Russell, in the *Principia Mathematica* [6], start with disjunction as basic connective next to implication. Thus, the full proof of $\varphi \to \varphi$ (formula $*2{\cdot}08$) is already quite long, as it makes use of earlier derived formulas. (F1), for instance, is derived as formulas $*2{\cdot}02$.

In their seminal textbook *Grundzüge der theoretischen Logik* [3], Hilbert and Ackermann use, as Whitehead and Russells, disjunction as a basic connective in the first edition of 1928. Only in the second edition of 1938, they start with a optimized version of Frege's axiomatization form the *Begriffsschrift*, which uses only (F1) and (F2).

This optimization is due to Łukasiewicz [4] who noticed that Frege's third axiom could be dropped – it was used, by Frege, in connection with his axioms for negation, and another form to axiomatize negation allows to dispense with (F3).

Thus, the standard axiomatization of implication uses, today, only (F1) and (F2):

$$\vdash \varphi \to (\psi \to \varphi) \tag{F1}$$

$$\vdash (\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)) \tag{F2}$$

In this case, however, we need another proof for $\varphi \to \varphi$, as Frege's proof made use of (F3).

The standard proof, as it can be found in many textbooks reads as follows:

1	$\vdash (\varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi)) \to ((\varphi \to (\varphi \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi))$	(F2)
2	$\vdash \varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi)$	(F1)
3	$\vdash (\varphi \to (\varphi \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi)$	MP[1,2]
4	$\vdash \varphi \to (\varphi \to \varphi)$	(F1)
5	$\vdash \varphi \to \varphi$	MP[3,4]

It is not clear, however, who was providing the proof first. Here, we only mention that it was already implicitely present in Schönfinkel's work on Combinatory Logic [5] of 1924, through the (later discovered) *Curry-Howard correspondence*.

Combinatory Logic can be considered as the "computational counterpart" of the Hilbert-style calculus with Frege's axioms for implication.

Combinatory terms are defined inductively:

- Variables $x, y, \ldots$ are combinatory terms;
- the constants K and S are combinatory terms;
- if M and N are combinatory terms, then so is $(M \cdot N)$ (*application*).

Combinatory terms serve as a kind of programming language, when one considers the following equalities:

- $\mathsf{K}\, M\, N = M$;
- $\mathsf{S}\, M\, N\, O = M\, O\, (N\, O)$

The combinators can be *typed* by formulas, such that the combinatory terms represent proofs.

For the axioms (F1) and (F2) we have the constants K and S:

- $\mathsf{K}^{\varphi\to(\psi\to\varphi)}$;
- $\mathsf{S}^{(\varphi\to(\psi\to\chi))\to((\varphi\to\psi)\to(\varphi\to\chi))}$.

Application relates to (an application of) *modus ponens*: For (typed) combinatory terms $M^{\varphi\to\psi}$ and N^{φ} the application $M\,N$ has the type ψ.

Thus, if a combinatory term M can be typed by a formula φ, we also say that M *denotes a proof of* φ.

The identity combinator $\mathsf{I}^{\varphi\to\varphi}$ defined as $\mathsf{S}\,\mathsf{K}\,\mathsf{K}$ satisfies $\mathsf{I}\,M = M$ for every combinatorial term M of the appropriate type. And by the Curry-Howard correspondence we have $\mathsf{I}^{\varphi\to\varphi}$ denoting the standard proof of $\varphi\to\varphi$ via the following typification:

$$\mathsf{S}^{(\varphi\to((\varphi\to\varphi)\to\varphi))\to(\varphi\to(\varphi\to\varphi))\to(\varphi\to\varphi)}\,\mathsf{K}^{\varphi\to((\varphi\to\varphi)\to\varphi)}\,\mathsf{K}^{\varphi\to(\varphi\to\varphi)}$$

Schönfinkel, in 1924 [5, footnote 3], attributes the definition of I in terms of S and K to Boskowitz who, thus, might have been the person discovering the standard derivation of $\varphi\to\varphi$, albeit through combinatory terms.

References

[1] Gottlob Frege, *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*, Louis Nebert, Halle, 1879.

[2] Gottlob Frege, *Grundgesetze der Arithmetik. Begriffsschriftlich abgeleitet*, vol. I–II, Hermann Pohle, Jena, 1893/1903.

[3] David Hilbert and Wilhelm Ackermann, *Grundzüge der theoretischen Logik*, Springer, Berlin ^{1}1928, ^{2}1938.

[4] Jan Lukasiewicz and Alfred Tarski, "Untersuchungen über den Aussagenkalkül", *C. R. Soc. Sci.*, Varsovie, vol. 23, Klass III (1930).

[5] Moses Schönfinkel, "Über die Bausteine der mathematischen Logik", *Mathematische Annalen*, vol. 92 (1924), pp. 305–316.

[6] Alfred North Whitehead and Bertrand Russell, *Principia Mathematica*, Cambridge University Press, ^{2}1925.

Acknowledgment. Research supported by national funds through the FCT – Fundação para a Ciência e a Tecnologia, I.P., under the scope of the project UIDB/00297/2020 (Center for Mathematics and Applications) and by the Udo Keller Foundation. The talk is based on joint work with Paulo Guilherme Santos.

François Viète and the Method of Insertion in His *Supplementum Geometriae*

Parisa Kharazmi
Departamento de Matemática, CIDMA, Universidade de Aveiro

Since ancient times, mathematics has been an area of applying analogies, denoting "similarity, kinship, extension of a rule to similar cases." Notable among the mathematicians recognizing the "*prominent role of analogy in the discovery of new mathematical truths*," as mentioned (Knobloch, 1991), are Kepler, Wallis, Leibniz, Newton, Euler, and Laplace. François Viète (1540–1603), an amateur mathematician and astronomer, deserves a place among them. Best known for his book *In Artem Analyticen Isagoge* (Tours 1591), Viète was the first to consistently introduce symbolic algebraic notation, (Witmer, 2006). Noteworthy are also the works *Effectionum Geometricarum Canonica Recensio and Supplementum Geometriae,* published in Tours in 1593, along with *Ad Angularium Sectionum Analyticen Theoremata*, published and provided with proofs by A. Anderson in 1615 (Witmer, 2006).

The *Supplementum Geometriae* is dedicated to the geometric solutions of equations of the 3rd and 4th degree. Curiously, Viète derives geometric problems from solutions obtained with the methods of his *arte analytica*, emphasizing the historical role of geometry as the foundation of algebra. While the exclusive use of a ruler and compass in Euclidean geometric constructions is considered a consequence of the first three postulates of the Elements, Viète explicitly introduces an additional postulate at the beginning of the *Supplementum Geometriae.* This postulate allows the use of a *marked ruler* for the execution of the so-called insertion (or verging; gre. νεύσις – Neusis (Knorr, 1986)). As a result, he successfully trisects an arbitrary angle using the marked ruler (relying on Archimedes (Knorr, 1986)) and concludes with the exact construction of a heptagon (similar to Abu´I-Jud (Knorr, 1986)), all in complete analogy to the construction of the Pentagon in Euclid's Elements (IV, 10, 11).

This research aims to highlight Viète's method in *Supplementum Geometriae*, specifically the Method of Insertion (neusis), and explore his analogy application to geometric problems, on regular polygon construction and ancient unsolvable problems. François Viète, described himself: "*I, who do not profess to be a mathematician, but who, whenever there is leisure, delight in mathematical studies ...*" In 1592, he lectured at Tours, discussing antiquity's problems, solving algebraic equations, finding solutions to geometric problems, and using the marked straightedge as neusis constructions. He introduced the first symbolic algebraic notation, earning him the title of the father of modern algebra. The title "Isagoge" suggests Viète's algebraic techniques, known as the "analytic art," and seventeenth-century algebra became known as "analysis". This process was followed by "synthesis," where one begins with knowns and uses logical mathematical arguments to conclude. Viète's work provides a foundation for investigating the role of analogies in the work of mathematicians who go beyond Platonic construction limitations. A recent book by George Polya, Volume I, *Induction and Analogy in Mathematics*, is well-known among teachers. Analogy plays a crucial role in mathematics, representing the process of discovering and exploring new mathematical ideas between two mathematical fields. Viète's analysis in algebra involves naming a quantity (denoted by x) and calculating its value until an equation is obtained. Subsequently, synthesis calculates its value. Historically, Viète is mainly remembered for the utility of his symbolic algebra and the solution of algebraic equations by trigonometry, forming the foundation of Descartes' analytic geometry. *Supplementum Geometriae* (1593) focuses on solving geometric problems using algebraic techniques, playing a significant role in the development of analytic geometry by R. Descartes. It contains twenty-five propositions and proofs on geometry, many showcasing geometries done by the ancient Greeks. Viète deduces geometric problems from solutions obtained with the methods of analytic art, emphasizing the historical role of geometry as the basis of algebra. He succeeds in using the exact trisection of an arbitrary angle by the marked ruler (Neusis) to finish with an exact construction of a heptagon, analogously to the construction of the Pentagon in Euclid's Elements (IV, 10, 11). The most significant step by Viète in his *Supplementum Geometriae* is illustration a), showing the idea of insertion or NEUSIS, in a more general form introduced by Pappus, as seen in b) and c) (Pappus' Mathematical Collection, published in manuscripts in Europe before Viète's time, in 1588.)

Viète's 4th postulate overcomes the notion of impossible solutions to the trisection of an angle and the construction of the heptagon. It is noteworthy that Viète's construction uses a proportion between ratios of segments and squares, where he uses r as the radius and an unknown distance as X. With this proportion, he obtains a formula, and the equation demonstrates the geometrical solution of proportions as equivalent to the solution of a cubic equation, solvable with trigonometric tools, as explained in his

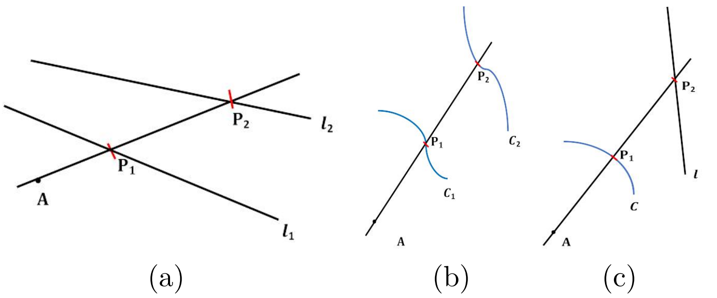


Figure 1: (a) Viète, (b) , (c) Pappus (about 240 AC).

supplements. The construction of the Heptagon in Viete's work, with an isosceles triangle and proportion of Δ7: 3:1:3, is in analogy to the construction of the Pentagon by the Greek, Euclid, which started from an isosceles triangle and proportion of Δ5: 2:1:2. This Greek mathematical technical term (αναλογία) designated equality of proportions, already during the 5th century (a:b :: c:d) . A modern construction of a heptagon that appeared in 1975 by Crockett Johnson (1906–1975), the pen name of the American cartoonist and children's book illustrator David Johnson Leisk. Johnson integrated mathematics into his art, producing over a hundred (117 or more) mathematically inspired paintings. The result of his discovery, explained in the article "A Construction for a Regular Heptagon," published four months before his death, details how a heptagon can be constructed with Neusis. Johnson's construction, while pleasing the ancient Greeks, employs a modern proof, requiring the law of cosines and several trigonometric identities.

References

Euclid, *The Thirteen Books of The Elements* (Transl. S. T. L. Heath; 2nd. Ed.), Dover, 1956.

E. Knobloch, *Analogy and mathematical thought*, in Roshdi Rashed (Ed.). Mathématiques et philosophie de l'antiquité à Vage Classique, 217–37, Paris, 1991.

T. R. Witmer, *Analytic art*, Translation of *Opera Mathematica* of Viète, edited by Frans van Schooten, Leyden, 1646. Dover, 2006 (re-publ.).

W. R. Knorr, *The Ancient Tradition of Greek Geometric Problems*, Birkhäuser, Boston, 1986.

C. Johnson, "A Construction for a Regular Heptagon", *The Mathematical Gazette,* Vol. 59, No. 407, (1975), p. 17–21.

A Formação da Comunidade Matemática Brasileira

Clóvis Pereira da Silva
UFPR, Brasil

O objetivo deste texto é divulgar os elementos que contribuíram para produzir a fase inicial, e seguintes, de formação da comunidade matemática brasileira. O início do processo de formação da comunidade matemática brasileira, como conhecemos nos dias atuais, pode ser estabelecido logo após a criação em 1934, da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras, da Universidade de São Paulo — FFCL-USP. Decreto Estadual n.º 6.283, de 25/01/1934 que criou a FFCL-USP, a primeira Faculdade de Ciências no Brasil. A FFCL-USP que passou a ofertar, dentre seus cursos, um curso de graduação bacharelado em Matemática, um curso com três anos de duração. Posteriormente, foi criado o curso de graduação licenciatura em Matemática, com quatro anos de duração, destinado à formação de professores para o ensino fundamental e médio. O organizador das disciplinas — do curso bacharelado — com seus programas e suas referências bibliográficas, foi o Prof. Dr. Luigi Fantappiè, especialista em Funcionais Analíticos e Análise Funcional. Ele foi o criador, em 1925, da Teoria dos Funcionais Analíticos, importante subárea da Análise Matemática

L. Fantappiè foi contratado em 1934, pelo Prof. Theodoro A. Ramos para reger a cátedra de Análise Matemática da FFCL-USP. O Prof. Dr. Theodoro A. Ramos primeiro Diretor da FFCL-USP, designou dois assistentes para L. Fantappiè, que foram o engenheiro Omar Catunda, que tinha muito interesse em estudar e ensinar matemática, e Cândido Lima da Silva Dias, depois que este se graduou pela FFCL-USP. Cândido Lima da Silva Dias foi aluno da primeira turma do curso bacharelado em Matemática da FFCL--USP.

L. Fantappiè criou um bom ambiente de estudos e pesquisa em matemática na FFCL, e formou a primeira geração de matemáticos brasileiros residentes em São Paulo, entre os quais citamos: Omar Catunda, Cândido Lima da Silva Dias, Benedito Castrucci, Fernando Furquim de Almeida. Como decorrência do desenvolvimento da 2.ª Guerra Mundial, em 1939, o Reitor da USP rescindiu o contrato de trabalho de L. Fantappiè, e ele regressou à Itália. Seu assistente Omar Catunda assumiu interinamente a cátedra de Análise Matemática da FFCL-USP.

A pesquisa em Matemática no Brasil, na forma institucionalizada, foi iniciada nesta instituição a partir dos anos 1940, quando em 1942 foi criado na FFCL-USP um concurso para a obtenção do doutorado em Ciências. Decreto-Lei Estadual n.º 12.511, de 21 de janeiro de 1942, que reorganiza a FFCL-USP. O candidato interessado em obter o doutorado, estudava durante dois anos, se preparando, sob orientação do catedrático responsável pela cadeira onde a tese seria defendida. Para a Matemática, foi decido que o título de doutor seria concedido em Ciências (Matemática).

O primeiro doutor titulado em Ciências (Matemática) pela FFCL-USP foi o Prof. Cândido Lima da Silva Dias, que em 11/12/1942, defendeu a tese intitulada *Sobre a Regularidade dos Funcionais Definidos no Campo das Funções Localmente Analíticas*. Subárea: Análise Matemática. Orientador: Prof. Omar Catunda. Como catedrático interino de Análise Matemática, o Prof. Omar Catunda estava legalmente constituído para ser orientador de teses. A tese acima citada foi influenciada cientificamente pelos ensinamentos de L. Fantappiè. O Prof. Cândido Lima da Silva Dias orientou várias teses de doutorado de seus alunos. Alunos que também orientaram teses de seus alunos de doutorado, promovendo assim, a primeira fase na cadeia de formação da comunidade matemática brasileira a partir do estado de São Paulo.

A segunda tese de doutorado em Ciências (Matemática) defendida na FFCL-USP, foi a tese do Prof. Omar Catunda, defendida em 3/9/1944, intitulada *Sobre os fundamentos da teoria dos funcionais analíticos*, subárea: Análise Matemática. Tese defendida em concurso para provimento da cátedra de Análise Matemática, do Departamento de Matemática da FFCL-USP. Nesta época no Brasil, e até muitos anos depois, o concurso para cátedra em uma Universidade, concedia ao aprovado o título de doutor. Este trabalho foi inspirado nos ensinamentos científicos de L. Fantappiè. O Prof. Omar Catunda orientou diversas teses de doutorado de seus alunos. Estes também orientaram várias teses de doutorado de seus alunos, continuando assim com o processo de formação da comunidade matemática brasileira, a partir do estado de São Paulo.

O segundo centro de ensino e pesquisa em Matemática no Brasil foi a Faculdade Nacional de Filosofia, da Universidade do Brasil, FNFi-UB, na cidade do Rio de Janeiro, criada em 1939; Decreto n.º 1.190, de 04/4/1939. Nesta instituição foi criado o curso de graduação bacharelado em Matemática, com duração de três anos. No final dos anos 1930, o Departamento de Matemática da FNFi-UB contratou como Professores Visitantes, os matemáticos italianos: Achille Bassi para a Cátedra de Geometria; Gabrielle Mamanna para a Cátedra de Análise Matemática e Superior e Luigi Sobrero físico matemático que trabalhava em Teoria Matemática da Elasticidade

Linear (Mecânica do Contínuo). Esses matemáticos estimularam também alunos talentosos da Escola de Engenharia da UB, para os estudos de matemática, como: Leopoldo Nachbin e Maurício M. Peixoto, que assistiam, como ouvintes, aulas desses professores italianos. Com o prosseguimento da 2.ª Guerra Mundial, a UB rescindiu o contratato de trabalho desses professores, que regressaram à Itália, exceto Achille Bassi que ficou no Brasil.

Em 1945 o Departamento de Matemática da FNFi-UB contratou como Professor Visitante, o matemático português António Monteiro. António Monteiro ao fazer contatos com vários jovens professores e com estudantes brasileiros por meio de cursos e Seminários, contribuiu para os períodos de efervescências e formação do ambiente matemático na cidade do Rio de Janeiro e no Brasil. António Monteiro introduziu seus alunos em assuntos da matemática que eram atuais para a época, tais como: Espaços de Hilbert, Análise Funcional, Conjuntos Ordenados, Reticulados e Álgebra de Boole, Filtros e Ideais, Topologia Geral. Seus Seminários influenciaram cientificamente muitos dos estudantes. Leopoldo Nachbin e Maurício M. Peixoto participaram dos seminários realizados com António Monteiro. Nesse período, António Monteiro criou na FNFi a publicação não periódica *Notas de Matemática.*

Nos anos 1950 trabalharam no Instituto de Física e Matemática – IFM, da Universidade de Recife como professores visitantes, os matemáticos portugueses: Alfredo Pereira Gomes, José Morgado, Manuel Augusto Zaluar Nunes e Ruy Luis Gomes). Alfredo Pereira Gomes criou no IFM a publicação não periódica intitulada *Textos de Matemática.* Eles dinamizaram, em Recife-PE, os estudos da matemática, e formaram vários discípulos. Elaboraram, inclusive um projeto para criação de um curso de mestrado em Ciências (Matemática) no IFM. Em 1952 a Universide do Paraná – UPR contratou, como professor visitante, o matemático português João Remy Teixeira Freire. Ele dinamizou, em Curitiba, os estudos e ensino da matemática e da probabilidade/estatística. Em 1953 ele criou na UPR a Sociedade Parananse de Matemática – SPM. Atualmente esta associação científica está sob responsabilidade da Universidade Estadual de Maringá – UEM.

Referência

SILVA, Clovis Pereira da. Avanços da Matemática no Brasil, 2.ª ed. Revista e Ampliada, São Paulo: Editora Blucher, 2023.

Ruy Luís Gomes, um importante matemático da geração de 40

Luís Saraiva
CIUHCT, DM da FCUL

Ruy Luís Gomes (1905–1984) foi um dos matemáticos portugueses que, a partir da segunda metade dos anos 30, tentaram modificar a situação da matemática em Portugal, quer a nível de ensino quer a nível de investigação. Procuraram trazer para a prática dos matemáticos portugueses os temas então actuais da matemática e simultaneamente integrar Portugal na rede internacional dos matemáticos.

Concluiu a sua licenciatura em Matemática na *Faculdade de Ciências da Universidade de Coimbra* em 1926, entrando nesse ano para esta Faculdade, como 2.º Assistente do 2.º Grupo (*Mecânica e Astronomia*) da 1.ª Secção da *Faculdade de Ciências* (*Matemática*). Doutorou-se em 1928, com a tese "Sobre o desvio das trajetórias dum sistema holónomo", utilizando trabalhos do matemático italiano Levi-Civitta (1873–1941) e de Aureliano Mira Fernandes (1884–1958), um dos dinamizadores da *Geração de 40.* Em 1929 passou a Assistente da *Faculdade de Ciências do Porto*, sendo regente da cadeira de Física Matemática em 1930 e Professor Catedrático em 1933.

O primeiro grupo português de investigação matemática no século XX foi o *Núcleo de Matemática, Física e Química*, fundado em 1936 por bolseiros portugueses que tinham regressado do estrangeiro decididos a modificar qualitativamente o curso da ciência em Portugal. Um desses elementos tinha assistido no *Institut Poicaré* em Paris a uma conferência de Louis de Broglie (1892–1987) em que este mencionou trabalhos de Ruy Luis Gomes. Deste modo, uma vez criado o *Núcleo*, foi feito um convite a Ruy Luis Gomes para vir fazer um conjunto de quatro conferências a Lisboa sobre a Teoria da Relatividade. A vinda de Ruy Luis Gomes a Lisboa foi importante por vários motivos, um deles por proporcionar o contacto direto com António Aniceto Monteiro (1907–1980), o grande dinamizador das actividades da Geração de 40. Entre as importantes realizações dos elementos deste grupo, podemos mencionar a criação da revista internacional *Portugaliae Mathematica* em 1937, do C*entro de Estudos Matemáticos Aplicados à Economia* em 1938, do *Seminário de Análise Geral* em 1939, e, em 1940, *do Centro de Estudos Matemáticos de Lisboa*, da *Gazeta de Matemática*, revista de divulgação e ligação com os estudantes universitários e pré-universitários e, em Dezembro desse ano, a fundação da *Sociedade Portuguesa de Matemática.*

Em 1942 Ruy Luis Gomes foi o principal impulsionador da criação do *Centro de Estudos Matemáticos do Porto.* Anexo a este Centro funcionou um *Seminário de Física Teórica*, inicialmente dirigido pelo físico austríaco Guido Beck (1903–1988) e, a partir de Julho de 1943, pelo físico nuclear francês de origem romena Alexandru Proca (1897–1955). Para além da actividade de pesquisa dos seus membros, foram dados cursos livres com o objetivo de interessar os jovens pela investigação científica. Foi igualmente criada a coleção de publicações do Centro de Estudos Matemáticos do Porto, para divulgação dos trabalhos, cursos e conferências dos seus membros.

Em 1943 Ruy Luis Gomes, conjuntamente com António Monteiro e Mira Fernandes, e com o apoio financeiro de António Luís Gomes, irmão de Ruy Luís Gomes e então Ministro da Fazenda Pública, criaram a *Junta de Investigação Matemática* (JIM), para subsidiar o trabalho dos matemáticos portugueses na investigação e na publicação, uma vez que o apoio que tinham tido até então das entidades oficiais fora retirado. Entre os mais importantes apoios dados pela JIM está o dado à continuação da publicação da *Portugaliae Mathematica* e aos *Cadernos de Análise Geral*, cadernos de introdução ao estudo das modernas correntes do pensamento matemático, como eram então apresentados

Com o fim da 2.ª Guerra Mundial na Europa em Maio de 1945 pensou-se ingenuamente que os regimes totalitários da Península Ibérica seriam também depostos. O regime português receou que os seus dias estivessem contados, e por isso encenou um simulacro de abertura democrática, com a dissolução da *Assembleia Nacional* e a marcação de eleições. Mas em breve se viu que não havia condições para eleições credíveis, e o *Movimento de Unidade Democrática* (*MUD*), entretanto formado, desistiu de nelas participar, mas continuou o seu trabalho enquanto organização. Ruy Luis Gomes foi presidente da Comissão Distrital do Porto do MUD.

Em 1946 deu-se o primeiro doutoramento de um elemento do CEMP, Alfredo Pereira Gomes (1919–2006), orientado por António Monteiro, desde 1945 no Rio de Janeiro.

O regime, vendo que se tinha desvanecido a possibilidade de intervenção dos aliados na Península Ibérica, regressou à sua política repressiva. Foram demitidos da Universidade nesse ano dois Professores Catedráticos, Bento de Jesus Caraça e Mário Azevedo Gomes, membros da Comissão Central do MUD. Em 1947 outra vaga de 26 expulsões ou demissões da Universidade, motivadas principalmente pelas ideias e atitudes políticas dos visados. Cinco eram do CEMP, incluindo Ruy Luis Gomes, por terem escrito uma carta contra a prisão de uma estudante pela polícia política. As actividades da SPM não foram interditas, mas o Ministério da Educação proibiu a utilização das suas instalações para a realização de conferências ou seminários. A solução encontrada foi realizar essas sessões em casa dos matemáticos: na área de Lisboa em casa de Hugo Ribeiro (1910–1988), no Murtal (denominada "Universidade do Murtal") e no Porto em casa de Luis Neves Real (1910–1985) (denominada "Universidade da Rua do Almada"). Em 1948 o governo ilegalizou o MUD. Ruy Luis Gomes investiu fortemente no combate político ao regime, tendo sido preso várias vezes pela polícia política. Em 1951 foi candidato à Presidência da República mas após ter legalizado a sua candidatura o regime ilegalmente alterou a legislação, conferindo ao Conselho de Estado poderes para a rejeitar.

Em 1953 A Academia das Ciências atribuiu-lhe o Prémio Artur Malheiros pelo trabalho "Sobre as relações entre o integral de Riemann e o integral de Lebesgue" (António Monteiro tinha sido premiado em 1938).

Em 1959 a convite de António Monteiro foi para a Universidade del Sur, na Argentina, onde Monteiro dirigia o seu Instituto de Matemática. Deu cursos de Teoria de funções de variável real e organizou seminários onde se estudaram os *Elements de Mathématique* de Bourbaki publicados até então.

Em Janeiro de 1962 partiu para a *Universidade de Recife*, onde já se encontravam Alfredo Pereira Gomes, Manuel Zaluar Nunes (1907–1967) e José Morgado (1921–2003). Ainda em 1962 Pereira Gomes partiu para a Universidade Nancy em França. Em 1965 Ruy Luís Gomes e Morgado fundaram e dirigiram duas coleções: *Notas e Comunicações de Matemática,* para a publicação preliminar de artigos de pesquisa, e *Notas de Curso*, para a publicação de cursos avançados. Em 1967 a *Universidade de Recife* passou a *Universidade Federal de Pernambuco* (UFPE). Ruy Luís Gomes e Morgado iniciaram um curso de mestrado em Matemática. Em 1970, o Conselho Nacional de Pesquisas reconheceu a UFPE como Centro de Excelência para este mestrado. Com a revolução de 25/04/1974, Ruy Luis Gomes regressou ao Porto, sendo nomeado Reitor da sua Universidade. Jubilou-se em 1975, e foi-lhe atribuído o título de *Reitor Honorário da Universidade do Porto.*

Referências

L. Saraiva, "The beginnings of the Portuguese Society of Mathematics (1936–1945)", *Archives Internationales d'Histoire des Sciences*, vol. 66, n.º 176 (2016), p. 171–199.

L. Saraiva, "A actividade dos matemáticos portugueses no Recife, 1953–1974". *Anais do XVº Seminário Nacional de História da Matemática*, Universidade Federal de Alagoas, Maceió, Brasil. Cavalari, Mariana, e Santos, Viviane, eds. 2023, `https://snhm.com.br/anais/article/view/122/1` ISSN 2236-4102, p. 1–20.

A Educação Matemática no Brasil: debates e propostas para a criação de um campo disciplinar sobre o ensino

Wagner Rodrigues Valente
UNIFESP/GHEMAT, Brasil

A comunicação tem por objetivo analisar as propostas surgidas na década de 1970, relativamente à criação de cursos de pós-graduação em Ensino de Matemática. Essa década representa momento de consolidação dos cursos de pós-graduação no Brasil. Até então, havia poucos deles no país. Ainda: não existiam cursos onde a pesquisa sobre o ensino de matemática pudesse ser desenvolvida.

Esse momento de consolidação da pós-graduação no Brasil é cercado de turbulências. Elas repercutem como tema na grande imprensa do país. Manchetes de jornais há que indicam polêmicas sobre o uso do dinheiro público na educação e a negativa de investir-se recursos na pós-graduação, diante do estado ruim da educação básica brasileira.

Esse era um tempo onde tão somente vinte por cento dos professores universitários brasileiros tinham feito alguma especialização, algum curso pós cursos de graduação. A absoluta maioria dos docentes das universidades do país havia tido um curso de formação, porém não apresentava titulação de mestres ou doutores nas respectivas áreas de atuação.

Os debates sobre o papel da pós-graduação a esse tempo também incluíam discussões diante da iminência de afastamento dos professores universitários para fazerem as suas especializações. Haveria que "importar" professores para suprirem as demandas de cursos e aulas a serem ministradas aos graduandos, com a ausência dos professores brasileiros, que estariam fazendo pesquisas no país ou no exterior, buscando título de mestre ou doutor.

É esse o quadro e contexto sobre a pós-graduação no Brasil, em tempos em que se cria o primeiro curso de mestrado em Ensino de Ciências e Matemática. Neste caso, a atuação do professor Ubiratan D'Ambrosio é determinante. Este professor esteve nos EUA, no período de 1964 a 1972, trabalhando ativamente na reorganização de cursos de pós-graduação em universidades que não tinham maior expressão. D'Ambrosio, ao retornar ao Brasil, reunindo tal experiência, logo manteria contato com o Ministério da Educação, juntando em seu redor figuras que buscavam criar um campo de pesquisa sobre o ensino, sobre o ensino de Ciências e Matemática.

Desse modo, meados da década de 1970, sob iniciativa de D'Ambrosio, tem-se a criação de um mestrado em Ensino de Ciências e Matemática.

Passados mais de quarenta anos, de instalação desse mestrado, o próprio D'Ambrosio (2014) detalha a existência pioneira do Programa Experimental de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática da UNICAMP/OEA/MEC, que se desenvolveu no período de 1975 a 1984. Diz-nos o autor:

> O Curso de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática ocorrido na Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP, no período de 10 de fevereiro de 1975 a 29 de fevereiro de 1984, foi um projeto com características sui generis, patrocinado conjuntamente pelo Ministério da Educação e Cultura (MEC), supervisionado pelo Programa para a Melhoria do Ensino (PREMEN) e pela Organização dos Estados Americanos (OEA), como parte de seu Projeto Multinacional para a Melhoria do Ensino de Ciências e Matemática. (PROMULMEC) (D'Ambrosio, 2014, p. 56).

O projeto centrava-se em uma distribuição de tempo maior para a apresentação de seminários, restringindo a duração das aulas tradicionais. O currículo contava também com a valorização de atividades por meio de conferências e pouca utilização dos espaços formais como a sala de aula, sendo que as atividades propostas serviram como motivacionais para o desenvolvimento da aprendizagem.

Como relata o próprio D'Ambrosio, esse curso de mestrado teve características muito diferentes daquelas que estavam sendo consolidadas pelos demais programas já existentes de pós-graduação no Brasil. Esse fato e o término das bolsas de estudos aos pós-graduandos contribuiu enormemente para o encerramento dessa primeira iniciativa.

Uma segunda tentativa de institucionalização de um curso sobre o ensino de matemática surgiu em 1977, durante mesmo a vigência do curso Promulmec. Tratava-se de proposta do professor Osvaldo Sangiorgi.

Em meio aos documentos do Arquivo Pessoal Ubiratan D'Ambrosio (APUA) encontram-se documentos que atestam a existência dessa segunda iniciativa. Há correspondências trocadas entre Sangiorgi e D'Ambrosio, ricas em detalhes sobre essa proposta. Sangiorgi envia a D'Ambrosio um projeto completo a ser submetido como curso de pós-graduação em Ensino de Matemática. D'Ambrosio critica o projeto em carta-resposta, aludindo ao fato de que o projeto nada mais é que um curso avançado em matemática para professores, pouco representando um curso sobre educação matemática. Ainda:

indica que no exterior já há muita literatura a respeito de como deveria ser organizado tal curso, informando que uma das disciplinas fundamentais que poderia constar na grade curricular deveria ser a modelagem matemática. Era preciso que Sangiorgi buscasse atualizar-se sobre o que se estava fazendo em termos internacionais.

Diante dessa avaliação ruim feita por D'Ambrosio, Sangiorgi, mesmo tendo espírito bastante empreendedor e interessado na criação de um mestrado próprio ao ensino de matemática, abandona o projeto, a partir da negativa da Universidade Mackenzie, onde ele era professor, de apoiar a iniciativa.

Conclui-se que, em momento de consolidação da pós-graduação no Brasil, na década de 1970, as propostas de criação da especialidade Ensino de Matemática não atendiam as normativas acadêmicas já estabelecidas, caso do Promulmec; e pouco dialogavam com iniciativas internacionais, caso do projeto elaborados por Sangiorgi, fatos que contribuíram para o fracasso do processo de institucionalização da nova área no país a esse tempo.

Referências

Ambrosio, U. A Uma síntese do Programa Experimental de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática da UNICAMP/OEA/MEC (1975 a 1984). In: Nardi, R.; Gonçalves, T. V. O. (Orgs.) *A Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática no Brasil.* São Paulo: Livraria e Editora da Física, 2014, p. 56–84.

APUA – Arquivo Pessoal Ubiratan D'Ambrosio. Centro de Documentação do GHEMAT-Brasil. Santos, SP.

Bourdieu, P. *Para uma sociologia da ciência.* Lisboa: Edições 70, 2001.

Hofstetter, R.; Schneuwly, B. Disciplinarização e disciplinação: as ciências da educação e as didáticas das disciplinas sob análise In: Hofstetter, R. Valente, W. R. (Org.). *Saberes em (trans) formação: tema central a formação de professores.* 1.ª ed. São Paulo: Editora da Física, 2017, p. 21–54.

Miranda, G. A. A pesquisa em Educação Matemática no Brasil: contribuições do primeiro mestrado em Ensino de Ciências e Matemática da UNICAMP (1975–1984). *Anais* do III Congresso Ibero-americano de História da Educação Matemática. Belém, PA: UFPA, 04 a 07 de novembro de 2015 – p. 387–399

Prochasson, C. Les correspondances : sources et lieux de mémoire de l'histoire intellectuelle. *Les Cahiers du Centre de Recherches Historiques*, 8, 1991. https://doi.org/10.4000/ccrh.2824

Touati, P. De la médiation épistolaire dans la construction du savoir scientifique: Le cas d'une correspondance entre phonéticiens. *Revue d'anthropologie des connaissances*, V. 4, N. 3, 2010 – p. 451–457.

The Historical Representation of Women in Mathematics

June Barrow-Green
The Open University & The London School of Economics, UK

My talk stemmed from work I have been doing on the history of the gender gap in mathematics in Britain. The fact that women are not going into or staying in mathematics at the same rate as men means that mathematical talent is going missing. While strenuous efforts are being made to counter this, it is evident that a negative attitude towards women doing mathematics is still present in parts of British society. Research has shown not only the deep roots of this negative view, but also the extent to which historical negative representations are still in evidence. Looking at these representations and the context in which they were created provides us with a new way to open up the discussion about women in mathematics.

To give some context: Within mathematics in Britain today, women account for about 40% of A-level students, 37% of undergraduates, 21% of PhD students, and 12% of Professors. There has been some improvement, but these numbers have shifted little in the last decade.

I discussed pictorial and verbal images of women mathematicians, showing examples of how women mathematicians were viewed by others and how women mathematicians viewed themselves. I adopted a chronological approach, giving sparse biographical details to focus on the representations.

Hypatia (c. 355–415 CE) is generally believed to have written commentaries on the works of the great Hellenistic mathematicians, but she is probably most famous for her brutal death at the hands of a mob which has led to her becoming an icon for various causes. Although no true image of Hypatia exists, a Google search on her name throws up plenty of wildly differing images dating from pre-79AD to the modern day. I showed four of these to illustrate the importance of knowing the origin/reliability of an image, and to show how women mathematicians have been imagined across the ages.

In the medieval and renaissance periods, one finds images in which women are depicted as the muses for mathematicians representing the mathematical arts of the quadrivium. Here the women are not mathematicians but facilitators. Such images can be found easily on the web, but it can be difficult to find the original sources and authenticate the images. As an exemplar, I showed one in which four images had been digitally manipulated from a 14$^{\text{th}}$ century manuscript depicting the seven liberal arts.

Suplemento do Boletim da SPM 82, Dezembro 2024, pp. 121–124

Maria Agnesi (1718–1799) was the first woman in the modern period to make a substantial contribution to mathematics (*Instituzioni Analitiche*, 1748). I included her not because of the portraits of her (which are worth discussing) but because of a remark by the French historian of mathematics, Jean-Étienne Montucla:

> "I must cite here with praise the *Institutions analytiques* of Mademoiselle Maria Gaetana Agnesi, a work that a French lady mathematician (for we have them here too) should have translated into our language. It is not without astonishment that we see a person of a sex so little made to brave the thorns of science able to penetrate so deeply into all parts of analysis, either ordinary or transcendental."

At first glance this may be thought complimentary but the suggestion that Agnesi's book should have been translated by a woman—it had been translated by a man in 1775—implies that women do mathematics differently from men and in a way that women themselves best understand. The claim that women are "so little made to brave the thorns of science", implies that women's mathematical ability is naturally inferior to that of men. By singling out Agnesi, Montucla underlines his prejudice.

Émilie du Châtelet (1706–1749) is well-known for her masterly translation of Newton's *Principia.* Different images of her reveal her in different ways: how she saw herself (as a mathematician), how she was represented by Voltaire (as his muse) and how she was represented by Algarotti (as his student), the latter image being a travesty of the truth.

In the case of Sophie Germain (1776–1831), I quoted from a letter to her from Gauss about her work in number theory. Distinct from Montucla, he praised her for overcoming "infinitely more obstacles than men" and acknowledging her "extraordinary talent, and superior genius", i. e., it was external obstacles that got in the way of women doing mathematics, not women's lack of natural talent.

For Mary Somerville (1780–1872), I began with a quote from William Whewell who praised her, but in comparison with other women, and who considered only two other women "as worthy of entirely honorable notice—Hypatia and Agnesi". He dismissed du Châtelet because her "whole character and conduct have not attracted to her the interest which belongs to the other two", a reference to her relationship with Voltaire, imposing on her a standard of behaviour not imposed on men. In the portraits of Somerville, in contrast to those of du Châtelet, it is conspicuous that there is no indication of her academic interests. This is telling both about her own view of herself and the British attitude towards women in science and mathematics.

Ada Lovelace (1815–1852), who was mentored by Mary Somerville, is one of the most written about women in mathematics. I showed quotes about her mathematical ability which ranged from the very positive to the very negative, much of which was based on misunderstanding or incomplete textual evidence. I then showed how recent scholarship by historians of mathematics has produced a more balanced and nuanced assessment of her talents.

In Cambridge in the 19^{th} century, mathematics was considered a masculine subject and not suitable for women, or at least not suitable for women who wanted to get married! Among the women I discussed were Charlotte Scott (1858–1931) and Philippa Fawcett (1868–1948), whose triumphs in the Cambridge Mathematical Tripos in 1880 and 1890 respectively made them subject to a wide range of comments and cartoons.

Negative images of female mathematicians are also evident in 19^{th}/early 20^{th} century English literature. Examples I showed included Jules Verne's 1889 novel *Sans dessus dessous*, translated as 'Purchase of the North Pole' or 'Topsy Turvy', George Bernard Shaw's play *Mrs Warren's Profession* of 1893 (first performed 1902) and Virginia Woolf's novel *Night and Day* (1919).

To conclude, I looked at some 20^{th} and 21^{st} century images, with an emphasis on role models. In the preface of Margot Lee Shetterly's impressive book *Hidden Figures: The untold story of the African American Women who helped win the space race* (2016), the author makes a very powerful statement about the importance of role models for her both as a woman and as an African American.

Mathematicians come in many guises, and while the stereotypical solitary figure, male or female, sitting at a desk, may be one of them, most don't fall into this category. To be a mathematician and enjoy it doesn't mean winning a Fields Medal. For aspiring women mathematicians, it is important to see a variety of women mathematicians both in terms of the type of mathematics and the environments in which it is being done. When we look at women mathematicians from the past, we mostly see women who achieved against the odds. Often the way they have been represented makes for uncomfortable viewing or reading and is sometimes shocking to our 21^{st} century gaze. But as I said earlier, I believe that we can use these representations to initiate discussions about women in mathematics, and counter some of the still prevalent stereotyping. In this way we can contribute towards making mathematics a subject equally welcoming to everyone.

References

J. E. Barrow-Green, "The historical context of the gender gap in mathematics", *World Women in Mathematics 2018*, Springer, 2019, Eds. C. Araujo, G. Benkart, C. E. Praeger, B. Tanbay, p. 129–145.

J-E. Montucla, *Histoire des Mathématiques*, Volume 2, 1799–1802, p. 171.

R. Laubenbacher, D. Pengelley, ""Voici ce que j'ai trouvé:" Sophie Germain's grand plan to prove Fermat's Last Theorem", *Historia Mathemtica*, Vol. 37, p. 641–692, p. 644.

W. Whewell, "Review of *On the Connexion of the Physical Sciences*", *Quarterly Review*, Vol. 51, (1834), p. 54–68, p. 66.

Carvalho da Costa: a latitude por duas alturas iguais do sol

Ana Mafalda Bastião
Escola Naval, CINAV

O método do cálculo da latitude por duas alturas do sol tem sido amplamente estudado por diversos autores ao longo da história. Pedro Nunes (1502–1578) estudou este assunto baseando-se na observação de duas alturas do Sol e na diferença de azimute entre elas, processo que resolvia graficamente, sobre um globo.

Diego Ramirez de Arellano (1580–1624) navegador e cosmógrafo espanhol, na sua obra *Reconocimiento de los estrechos de Magallanes...* (1621), identifica vários autores que estudaram a latitude por extrameridianas, analisando os métodos por eles usados. Arellano aponta os inconvenientes dos autores que estudou e procura resolvê-los. Para isso, propõe uma resolução analítica, utilizando as regras dos senos, sendo este o primeiro método analítico conhecido.

Valentim Estancel (1621–1705) propõe ainda uma resolução analítica do problema, usando também regras dos senos, para os triângulos esféricos, mas sem utilizar logaritmos (1614). Não se conhece a data do texto de Estancel mas pensa-se que seja da década de 1660, ou posterior.

Um outro autor contemporâneo de Estancel, Carvalho da Costa (1650–1715), utiliza para determinar a latitude, um método diferente dos utilizados até então e utilizando já logaritmos.

António Carvalho da Costa nasceu em Lisboa, em 1650. Autor de uma vasta e diversificada obra, apresenta-se como padre diocesano e matemático, nas dedicatórias que faz nos seus livros a membros da monarquia e da nobreza.

Da sua obra fazem parte várias obras de cariz matemático como a *Via Astronómica*, a *Astronomia Metódica* e o *Compêndio Geográfico*, mas também uma obra de descrição topográfica, histórica e genealógica, a *Corografia Portugueza*.

No *Compêndio Geográfico*, Costa propõe que se determine a latitude através da observação de duas alturas iguais do sol. O matemático propõe que se meçam várias alturas do sol, antes e depois do meio-dia, até que se encontrem duas alturas iguais (uma vez que o movimento do sol é simétrico em relação ao meio-dia), que se meça o intervalo de tempo e que se encontre a declinação a partir do lugar do Sol.

Suplemento do Boletim da SPM 82, Dezembro 2024, pp. 125–127

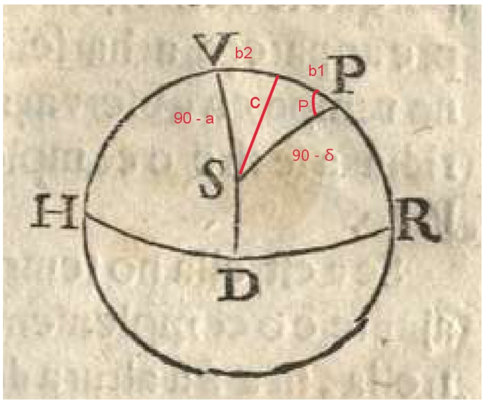


Figura 1: *Compêndio Geográfico*, p. 6.

Com os dados recolhidos (a altura, o intervalo de tempo e a declinação) Costa constrói o triângulo esférico SVP, da figura 1, do qual se conhece o lado VS (complemento da altura do Sol), o lado SP (a distância do Sol ao Polo) e o ângulo VPS (metade do intervalo de tempo, convertido em graus), com os quais se encontrará o lado VP, complemento da altura do Polo.

Em seguida, o matemático propõe a divisão deste triângulo em dois triângulos retângulos, que irá resolver usando as fórmulas de Neper.

Para resolver o primeiro triângulo retângulo, Costa procura determinar o lado b_1. Através da regra dos senos, o cosseno de P é igual ao produto das tangentes de b_1 e δ.

$$\cos P = \operatorname{tg} \delta \cdot \operatorname{tg} b_1 \Leftrightarrow \operatorname{tg} b_1 = \cos P \cdot \operatorname{cotg} \delta$$

Em seguida, resolva-se o segundo triângulo retângulo usando, mais uma vez, as regras dos senos:

1. $\cos(90 - \delta) = \cos b_1 \cdot \cos c$
2. $\cos(90 - a) = \cos b_2 \cdot \cos c$
3. $\cos c = \dfrac{\cos(90 - \delta)}{\cos b_1} = \dfrac{\cos(90 - a)}{\cos b_2}$

Assim: $\cos b_2 = \dfrac{\operatorname{sen} a \cdot \cos b_1}{\operatorname{sen} \delta}$

À medida que explica o processo, Costa apresenta-nos um exemplo concreto de como o fazer, usando uma regra de três simples e logaritmos.

Como o seno da declinação do Sol	
7 gr. 41 min. 30 seg.	9,126592
para o seno da altura do Sol 20 gr.	9,534052
Assim o seno do complemento da primeira base	9,376003
Para o seno do complemento da segunda base, que	
se achará de 52 gr. 36 min	9,783463

Isto é, pelas propriedades dos logaritmos, à soma do logaritmo da altura do sol com o logaritmo do cosseno de b_1 (primeira base), subtrai-se o logaritmo do seno da declinação do sol, obtendo-se o logaritmo do cosseno de b_2 (segunda base), a que corresponde um ângulo de 52 gr. 36 min.

O processo de determinação da latitude por duas alturas iguais do sol proposto pelo padre António da Costa é um processo mais simples que os apresentadados por autores como Pedro Nunes ou Estancel, entre outros. De realçar que António da Costa utiliza em todas as suas obras de cariz matemático as fórmulas de Neper, para triângulos esféricos retângulos e é o primeiro autor conhecido a publicar obras impressas utilizando logaritmos.

Referências

[1] A. C. da Costa, *Compendio geographico distribuido em tres tratados…*, João Galrão, Lisboa, 1686.

[2] A. C. Canas, “A latitude pelo Sol a qualquer hora do dia”, *Anais Da Universidade de Évora*, No. 12 (2002), pp. 63–86.

[3] B. J. Almeida, A influência da obra de Pedro Nunes na Náutica dos séculos XVI e XVII: um estudo de transmissão de conhecimento, Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa, Portugal, 2011.

[4] J. J. Pires, Determinação da Latitude por alturas Extrameridianas do Sol, Evolução Histórica do Processo, Tese de Mestrado, Escola Naval, Portugal, 2021.

Navegação astronómica na travessia aérea do Atlântico Sul

António Costa Canas
Escola Naval—CINAV & CHist-UL

Um processo simples de conhecer a posição de um navio no mar baseia-se na marcação da direção em que se navegou e na distância percorrida, desde a última posição conhecida. Foi este o método usado pelos primeiros navegadores portugueses da época dos Descobrimentos. Contudo, existem diversos erros associados a este método, devido à existência de correntes no mar e a erros de leitura, ou instrumentais. Para minimizar estes erros, que poderiam ser elevados, nas longas viagens oceânicas, foram desenvolvidas técnicas de navegação astronómica.

Quando surgiu a navegação aérea, foram adaptados muitos dos procedimentos usados no mar, uma vez que existem várias semelhanças entre esta e a navegação marítima. Inicialmente usava-se o conhecimento da direção e distância percorrida, mas para as longas viagens oceânicas, tal era insuficiente, tendo sido adaptados processos astronómicos de navegação, para reduzir os erros. No entanto, existem algumas diferenças na navegação aérea, nomeadamente o facto de a velocidade ser geralmente mais elevada. Tal implica uma necessidade de realizar os cálculos mais rapidamente, uma vez que o consumo de combustível é bastante rápido. Por outro lado, na navegação aérea não é necessário tanto rigor nos cálculos, pois do ar é mais fácil identificar o destino a uma maior distância do que no mar.

No início do século XX, quando nasceu a aviação, usavam-se vários métodos de navegação astronómica. Aquele que acabou por prevalecer foi o método de Marcq de Saint-Hilaire, desenvolvido no último quartel do século anterior. Este método foi o preferido por Gago Coutinho para a travessia aérea do Atlântico Sul. Baseava-se na comparação entre a altura observada, de um determinado astro, e a altura que esse mesmo astro deveria ter, na posição estimada do navio. Cada altura observada permitia calcular uma linha de posição, cruzando duas, ou mais, linhas de posição, obtinha-se a posição do navio, ou da aeronave. Para tal, deveria observar-se a altura do astro, com um sextante, registando igualmente a hora da observação. À altura observada aplicavam-se algumas correções, para obter a altura verdadeira. Para calcular a altura “estimada” bastava conhecer a posição estimada e a hora da observação, obtendo-se a altura pela seguinte fórmula:

$$\operatorname{sen} a = \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos P$$

onde (**a**) é a altura, (φ) a latitude estimada, (δ) a declinação do astro (lida em tabelas) e (**P**) o ângulo no Polo, o qual era função da longitude e da hora. Era ainda necessário calcular o azimute (**Z**) do astro, recorrendo à fórmula:

$$\operatorname{cosec} Z = \sec\delta \operatorname{cosec} P \cos a$$

A partir da posição estimada traçava-se uma linha com a direção do azimute e media-se a distância em milhas correspondente à diferença entre a altura verdadeira e a altura estimada. Neste ponto traçava-se a perpendicular à direção do azimute, ficando assim marcada a linha de posição.

As fórmulas acima apresentadas implicavam a realização de cálculos demorados, uma vez que consistiam em multiplicações e divisões de números geralmente com cinco algarismos cada. Um recurso para reduzir o tempo de cálculo era o uso de logaritmos, que "transformavam" multiplicações em somas e divisões em subtrações. Mas no caso da primeira das fórmulas, a mesma consistia na soma de dois produtos, facto que implicava um número mais elevado de cálculos e consulta de tabelas, mesmo usando logaritmos. Um dos grandes contributos de Gago Coutinho para a navegação aérea foi a simplificação dessas fórmulas, reduzindo significativamente o tempo de cálculo das linhas de posição astronómicas. Seguidamente será explicado, sinteticamente, o procedimento usado por Gago Coutinho para calcular e traçar as retas.

Outro dos problemas a resolver era a escolha da projeção da carta a usar. Na navegação marítima usa-se a projeção de Mercator, a qual não tem sempre a mesma escala, ao longo de toda a carta, variando a escala em função da latitude, facto que tornava mais demorada a marcação das linhas de posição, ainda para mais num espaço exíguo como era aquele que ele tinha disponível no avião. Gago Coutinho desenhou, sobre cartões, as cartas que usou, tendo optado por uma projeção cónica secante, a qual permite uma escala praticamente constante ao longo de todo o percurso da travessia. Nesses cartões, escolheu um conjunto de pontos, a intervalos regulares de latitude e de longitude, os quais considerou como pontos estimados a usar para os cálculos.

De modo a realizar o menor número possível de cálculos durante a viagem, Gago Coutinho calculava previamente uma série de valores, reduzindo assim as operações a realizar durante o voo. Partindo da fórmula da altura:

$$\operatorname{sen} a = \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos P$$

realizava as seguintes operações:

Multiplicar e dividir o segundo termo por: $\operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\delta$:

$$\operatorname{sen} a = \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\delta \left(\frac{\operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos P}{\operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\delta} \right)$$

Pôr em evidência: $\operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\delta$:

$$\operatorname{sen} a = \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\delta \left(\frac{\operatorname{cotg}\varphi \operatorname{cotg}\delta}{\sec P} + 1 \right)$$

Fazendo: $\operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\delta = S$ e $\operatorname{cotg}\varphi \operatorname{cotg}\delta = C$, fica:

$$\operatorname{sen} a = S \left(\frac{C}{\sec P} \pm 1 \right)$$

nesta última fórmula, os termos **S** e **C** podiam ser previamente calculados, pois só dependem da latitude estimada, valor fixo, escolhido pelo navegador e da declinação da Sol, a qual varia muito lentamente com o tempo, podendo considerar-se um valor fixo para cada dia de viagem. Restava o termo em **P** o qual depende da longitude estimada, a qual era conhecida, mas depende também da hora da observação, a qual só se poderia conhecer depois de medida a altura do astro, pois a altura estimada tinha que ser calculada para o mesmo instante em que se obtinha a altura verdadeira.

Em jeito de conclusão, pode afirmar-se que na travessia aérea do Atlântico Sul, em 1922, se praticou pela primeira vez navegação astronómica aérea. Tal só foi possível graças a diversas inovações, sendo Gago Coutinho o protagonista destas. Só assim foi possível encontrar os minúsculos Rochedos de São Pedro e São Paulo, após uma viagem com duração superior a 11 horas, na qual se percorreram mais de 900 milhas, sem observar terra.

Referências

Coutinho, Gago, 1922. “A Navegação Aérea”, *Anais do Clube Militar Naval*, vol. 10 a 12, pp. 301–422.

Coutinho, Gago, & Cabral, Sacadura, 1922. *Relatório da viagem aérea Lisboa–Rio de Janeiro*, Lisboa, Centro de Estudos da Marinha.

Pereira, J. Malhão, 2015. “Os Céus de Gago Coutinho e Sacadura Cabral” *Memórias*, vol. xlii, Lisboa, Academia de Marinha, pp. 263–321.

Os Jesuítas no rescaldo da polémica com Galileu: Revisitando o Cosmos Aristotélico no Collegio Romano (1618–1677)

Luís Miguel Carolino
ISCTE – Instituto Universitário de Lisboa, CIES-IUL

Ao estudar a controvérsia que decorreu entre Galileu e os jesuítas sobre os cometas de 1618, os historiadores tenderam a concentrar-se nas obras que levaram à publicação do *Il Saggiatore,* em 1623, considerando que este livro de Galileu pôs fim à célebre controvérsia. Como afirmaram, por exemplo, Ofer Gal e Raz Chen-Morris, "with *The Assayer* the controversy comes to its virtual end" (2011, p. 38). Contudo, uma análise do ensino de matemática e filosofia natural no Collegio Romano, com base em material manuscrito e impresso, revela que esta famosa polémica teve um profundo impacto nesta instituição até ao final da década de 1670.

Apesar de ser um centro de referência nos estudos matemáticos, o Collegio Romano afirmou-se como um bastião da ortodoxia filosófica ao longo do século XVII. No passado, os ecos das diferentes disputas filosóficas do final do Renascimento tinham ressoado no colégio. Os debates sobre o estatuto epistemológico da matemática também animaram o ambiente intelectual do colégio, acabando por moldar o próprio currículo matemático dos jesuítas. No entanto, o generalato de Claudio Acquaviva inaugurou uma nova fase na defesa do princípio da *uniformitas et soliditas doctrinae* entre os jesuítas, numa época em que a questão copernicana ganhava relevo no seio da Igreja Católica. Foi neste cenário que três cometas brilhantes cruzaram os céus no final de 1618, dando origem a um aceso debate sobre os próprios fundamentos da filosofia aristotélica e da astronomia ptolemaica.

A disputa foi particularmente intensa em Roma, opondo os professores do Collegio Romano a Galileu e aos membros da Academia dos Lincei. Em jogo estava não só o prestígio intelectual dos contendores, mas sobretudo a validade explicativa dos sistemas astronómicos de Copérnico e Tycho Brahe e dos fundamentos da filosofia natural aristotélica. Assim, à medida que se chegava a um consenso segundo o qual os cometas de 1618 se moviam acima da Lua, os princípios da solidez celeste e da incorruptibilidade ficavam em sério risco.

No início, os jesuítas esforçaram-se por tornar as observações cometárias compatíveis com a tese da solidez celeste. Em vésperas da controvérsia com Galileu, os filósofos do Collegio Romano propuseram a tese engenhosa segundo a qual os cometas eram o resultado ótico de um agregado de estrelas situadas em epiciclos diferentes. Mesmo que a tese fosse tão engenhosa quanto fantasiosa, tinha uma grande vantagem: permitia continuar a afirmar os princípios da solidez e da incorruptibilidade celeste. Devido ao seu carácter ortodoxo, este argumento manteve-se no ensino da filosofia natural no Colégio Romano até à década de 1640, tendo sido defendido, entre outros, por Giacomo Lampugnano. Do ponto de vista historiográfico, esta tese é particularmente interessante pois demonstra que, para alguns intelectuais do início da Idade Moderna, a observação de cometas na região celeste não conduziu necessariamente ao colapso da astronomia ptolemaica.

Contudo, os matemáticos jesuítas que ensinavam no Collegio Romano seguiram um caminho diferente. Para além de demonstrar que o terceiro cometa de 1618 se situava entre a Lua e o Sol, Orazio Grassi argumentou que este se movia de acordo com a teoria de Tycho Brahe. Isto levou-o, bem como à maioria dos jesuítas que o seguiram nas cadeiras de matemática e filosofia do Collegio Romano, entre os quais se encontrava Gabriele Beati, a reconhecer que os céus eram fluidos. Mais uma vez, esta ideia estava em plena sintonia com o sistema geo-heliocêntrico proposto por Tycho Brahe.

Galileu, uma vez proibido de seguir o modelo heliocêntrico na sequência da proibição do copernicanismo por parte da Igreja Católica em 1616, rapidamente reconheceu esta mudança operada pelos jesuítas, acusando-os de aderirem veladamente às ideias de Tycho Brahe. Tal teve lugar ainda antes da aceitação do astrónomo luterano por parte das autoridades jesuítas. O empenho oficial dos jesuítas em seguir a filosofia aristotélica estava, portanto, em questão. Galileu, por sua vez, propôs uma tese cometária que reconhecia a corruptibilidade celeste e, como tal, opunha-se à divisão ontológica em que se baseava a filosofia natural de Aristóteles.

A análise do ensino da cosmologia no Collegio Romano ao longo do século XVII prova que a controvérsia continuou a ter impacto entre os jesuítas deste colégio muito depois da publicação de *Il Saggiatore* de Galileu em 1623. Os argumentos utilizados na controvérsia reverberaram nas aulas do Collegio Romano durante décadas, com professores de filosofia e matemática como Silvestro Mauro e Ottavio Cattaneo a empenharem-se — contra Galileu — na sustentação da tese de que os céus eram ontologicamente diferentes da região terrestre e, portanto, imunes à corrupção. Mesmo após a adesão ao sistema planetário de Tycho Brahe, estes professores continuaram a defender a incorruptibilidade celeste. Assim, a receção de Tycho Brahe não correspondeu necessariamente, como por vezes se afirma, ao colapso da cosmologia aristotélica na ótica do Collegio Romano.

Os jesuítas do Collegio Romano continuaram, portanto, a proclamar a autoridade de Aristóteles na filosofia durante a segunda metade do século XVII, acabando esta instituição por se afirmar como um guardião ortodoxia filosófica na rede educativa jesuíta. Esta foi certamente a última consequência do célebre debate que opôs os jesuítas e Galileu sobre os cometas e o seu significado cosmológico.

Referências

Ugo Baldini, *Legem impone subactis. Studi su filosofia e scienza dei Gesuiti in Italia, 1540—1632*, Roma, Bulzoni Editore, 1992.

Luís Miguel Carolino, “The burden of Galileo’s controversy: The Jesuit revisiting of the Aristotelian cosmos in Collegio Romano (1618–1677)”, *Galilæana*, Vol. 20, No. 2 (2023): p. 33–60.

Michel-Pierre Lerner, “L’entrée de Tycho Brahe chez les jésuites ou le chant du cygne de Clavius”, *Les Jésuites à la Renaissance. Système éducatif et production du savoir*, Paris, Presses Unversitaires de France, 1995, Ed. Luce Giard, p. 145–185.

Ofer Gal e Raz Chen-Morris, “Galileo, the Jesuits, and the controversy over the comets. What was *The Assayer* really about?”, *Controversies Within the Scientific Revolution,* Amsterdão e Filadélfia, John Benjamins Publishing Company, 2011, Ed. Marcelo Dascal e Victor D. Boantza, p. 33–52.

O PERCURSO SINGULAR DA GAZETA DE MATEMÁTICA: 200 NÚMEROS EM 83 ANOS

Fernando B. Figueiredo
Departamento de Matemática, CITEUC, Universidade de Coimbra

Anabela Teixeira
Escola Secundária de Camões, de Lisboa

Jaime Carvalho e Silva
Departamento de Matemática, CMUC, Universidade de Coimbra

Durante a segunda metade do século XIX, a ciência começou a expandir os seus horizontes, abrangendo novas áreas de interesse e investigação. Na viragem do século XX, a matemática, tradicionalmente ligada com questões da física, experimentou um avanço significativo. Diversas subdisciplinas emergiram e começaram a ser exploradas de maneira autónoma, marcando uma era de especialização e profundidade sem precedentes na investigação matemática.

Neste contexto de efervescência intelectual, assistiu-se ao fortalecimento da comunidade matemática global. Muitos países testemunharam o surgimento de sociedades matemáticas e periódicos especializados, refletindo um movimento em direção a um empreendimento colectivo e internacional. A matemática, agora mais do que nunca, passa a estar interligada com a troca global de ideias e investigações.

Paralelamente, o desenvolvimento explosivo do ensino secundário e superior obrigava a uma atenção renovada à formação de professores. As disciplinas, em especial a matemática, estavam em constante evolução, exigindo profissionais atualizados com os avanços mais recentes e capazes de transmitir esse conhecimento complexo e dinâmico.

Além disso, a ciência e a prática científica começaram a infiltrar-se no discurso quotidiano e na vida do cidadão comum. Começam a surgir publicações destinadas ao grande público, buscando desmistificar e disseminar conceitos de ciência e matemática, tornando-os acessíveis e compreensíveis.

Portugal, imerso neste cenário global de ensino e investigação, também vivenciou transformações significativas. A reforma do ensino superior em 1911, que culminou na criação das novas Universidades de Lisboa e Porto e na reestruturação da de Coimbra, marcou o início de uma nova era na educação portuguesa. Com esta reforma, emergiram novos cursos e disciplinas, refletindo a expansão e diversificação do conhecimento.

Suplemento do Boletim da SPM 82, Dezembro 2024, pp. 137–140

A matemática, pedra angular dos cursos científicos e tecnológicos, não só ganhou destaque no âmbito académico, como também se expandiu no sistema de ensino com a introdução de novas matérias curriculares e disciplinas. Paralelamente, a investigação começou a ser reconhecida como um pilar fundamental na construção do mundo moderno.

Este dinamismo é eloquentemente descrito num relatório de 1939 por Aniceto Monteiro, um jovem matemático, ao Instituto de Alta Cultura. Monteiro fazia notar que a "investigação científica é um dos fatores determinantes da estruturação do mundo moderno", e salientava a crescente importância atribuída à ciência, evidenciada pelo aumento exponencial de investigadores, institutos de investigação, universidades, laboratórios e publicações.

A partir dos finais da década de 30, em Portugal, testemunhou-se o surgimento de vários centros de investigação matemática importantes. Estes centros refletiam a tendência para o trabalho colaborativo e coletivo, manifestando-se na formação contínua de grupos de trabalho, encontros e seminários.

Foi neste contexto de renovação e avanço científico que Gazeta de Matemática foi fundada em 1939 por um distinto grupo de matemáticos preocupados seriamente com o estado do ensino e da investigação que as ciências matemáticas portuguesas enfrentaram à época. O primeiro número assinado por António Monteiro, Bento de Jesus Caraça, Silva Paulo, Hugo Ribeiro e Zaluar Nunes, sairia em Janeiro de 1940, embora legalmente fosse iniciativa de uma "sociedade por cotas" com capital avançado por Bento de Jesus Caraça, Silva Paulo e Zaluar Nunes (Rezende, 2012). Na "Apresentação" do primeiro número está escrito que a Gazeta de Matemática pretendia ser "um instrumento de trabalho e um guia para os estudantes de Matemática das Escolas Superiores portuguesas" e que em cada número pretendia publicar "um artigo de carácter didáctico, sobre um assunto de matemáticas elementares ou superiores".

Com a publicação do seu 200.º número em 2023, a Gazeta de Matemática não apenas comemora um marco histórico, mas também reafirma o seu compromisso inabalável com a disseminação e o enriquecimento da matemática. Este é um testemunho da sua relevância ininterrupta e do seu papel essencial no apoio a todos os que se dedicam ao estudo e à prática desta ciência fundamental.

Este resumo pretende apresentar uma investigação em curso sobre a notável trajetória da Gazeta de Matemática, uma iniciativa que emergiu de um movimento matemático prolífico e deixou um legado que ainda perdura.

Um projecto editorial, concebido com a visão de elevar o ensino e a literacia matemática em Portugal, que se mostrou não apenas ambicioso, mas também resiliente e influente ao longo dos anos. Este estudo, que celebra e analisa a história da Gazeta, será publicado nas páginas da própria Gazeta.

Com uma abordagem que atravessa várias décadas, o nosso estudo pretende destacar os momentos-chave da evolução da Gazeta, destacando as personalidades que foram instrumentais na sua trajectória de 83 anos, e examinar como os debates e discussões pedagógicas na revista influenciaram o ensino e a prática da matemática em Portugal.

Questões-chave que orientam a nossa investigação incluem:

- como os temas e o foco da Gazeta de Matemática evoluíram ao longo do tempo? Há alguma tendência ou mudança significativa que reflita os desenvolvimentos matemáticos ou sociais/políticos globais?
- houve algum artigo ou série de artigos na Gazeta que foi particularmente influente ou controverso na comunidade matemática? Quais foram as repercussões a longo prazo?
- qual foi o impacto tangível da Gazeta na educação matemática em Portugal, tanto a nível universitário como no secundário, e possivelmente, em níveis de ensino mais baixos?
- quais foram os maiores desafios enfrentados pela Gazeta ao longo dos anos (censura, financiamento, falta de interesse/submissões, etc.) e como foram superados?
- como a Gazeta se compara a outros periódicos similares internacionais? Existem características únicas ou uma abordagem distinta adotada pela Gazeta?
- como a Gazeta lidou com questões de representação? Há uma diversidade visível entre os autores, nos tópicos abordados, ou nas escolas matemáticas representadas?

Referências

Bilhoto, Z. (1995), *A Gazeta de Matemática*, Tese de Mestrado em Matemática, Especialização em Ensino, Universidade do Minho.

Morgado, J. (1996) Para a História da Sociedade Portuguesa de Matemática. In http://www.mat.uc.pt/~jaimecs/indexhspm.html. Acedido em 20-07-2023.

Rezende, J. (2012). Sociedades «Gazeta de Matemática, Limitada» e «Tipografia Matemática, Limitada» (8 de Outubro de 1945. Jornal do Comércio, 23 de Outubro de 1945). In Blogue "ANTÓNIO ANICETO MONTEIRO" http://antonioanicetomonteiro.blogspot.com/2012/12/sociedades-gazeta-de-matematica.html. Acedido em 20-07-2023.

SPM (2023). Gazeta de Matemática. https://gazeta.spm.pt/pagina. Acedido em 20-07-2023.

Vultos da História da Matemática portuguesa no *Dicionário Histórico* de Esteves Pereira e Guilherme Rodrigues (1904–1915)

Jaime Carvalho e Silva
Universidade de Coimbra, CMUC, Departamento de Matemática

Cecília Costa
Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro e CIDTFF

Como assinalaram Catarina Mota e outros "O nosso século XIX é fértil na investigação em História da Matemática e no ensino da Matemática" (Mota, Ralha & Estrada, 2011). Em anterior trabalho concluímos que a Matemática e a sua História ocupavam um lugar razoável nos conteúdos no *Diccionario Popular* de Manoel Pinheiro Chagas (Pinheiro Chagas, 1890), e no *Diccionario Universal de Educação e Ensino* de E. M. Campagne traduzido (e alargado) por Camilo Castelo Branco (Campagne, 1873); e que a sua presença contribuiu, certamente, para disseminar na época o conhecimento da Matemática e da sua História (Carvalho e Silva & Costa, 2022).

Neste estudo analisamos o impacto do que foi publicado no século XIX sobre o *Diccionario Historico* de Esteves Pereira e Guilherme Rodrigues (Esteves Pereira & Rodrigues, 1904–15), em particular no tratamento dos principais vultos da nossa história como Álvaro Tomás, D. Francisco de Melo, Pedro Nunes e José Anastácio da Cunha. Com esse objetivo, analisamos: i) em que medida a História da Matemática ocupa aí um lugar significativo e como esse tratamento se compara com o das duas enciclopédias referidas (Pinheiro Chagas, 1890) e (Campagne, 1873), tentando identificar as razões para as diferenças de tratamento; e ii) em que medida a obra pioneira de Stockler sobre a História da Matemática em Portugal (Saraiva, 1993) serviu de fonte para as entradas do *Diccionario Historico*.

Este *Diccionario Historico* encontra-se acessível e integralmente digitalizado, o que possibilita a perscrutação do mesmo através de ferramentas de pesquisa. Assim pudemos identificar diversas entradas cuja análise nos permitiu obter os resultados que adiante apresentamos.

Começamos por uma breve nota biográfica dos autores do *Diccionario Historico*, personalidades de relevo, mas cuja vida e obra é hoje pouco conhecida. Sobre João Manuel Esteves Pereira (1872–1944) sabe-se que frequentou a Academia de Belas-Artes de Lisboa e o Instituto Industrial e Comercial, tendo concluído o Curso Superior de Letras, em 1896 (Assembleia da República, 2021; Cabral, 2014). Interessou-se pela história da indústria, tendo publicado numerosos trabalhos e sido professor desta área no Instituto 19 de Setembro (Lisboa). Foi amanuense na secretaria da Junta do Crédito Público e Secretário de Estado do Ministério do Comércio e Comunicações, no governo presidido por Álvaro Xavier de Castro (Assembleia da República, 2021). De Guilherme Augusto Rodrigues (1841–?) tivemos nota através de Esteves Pereira (1909) que o considera "um escriptor contemporâneo, cheio de valor e de modéstia", dos poucos que, à época, era escritor de profissão. Deixou uma obra vasta e diversificada (artigos literários, estudos históricos, traduções, peças teatrais, operetas, entre outros). Pertenceu à administração do *Diário de Notícias* e do *Diário Illustrado*, colaborou na *Gazeta Commercial* e foi Secretário do Conselheiro António José Teixeira.

No *Diccionario Historico* a História da Matemática ocupa um lugar significativo, contendo entradas relativas a muitos Matemáticos (e. g. José Maria Dantas Pereira, Francisco de Borja Garção-Stockler, Francisco Gomes Teixeira, João Manuel d'Abreu, José Monteiro da Rocha), e bastante desenvolvidas, bem como relativas a instituições e publicações (e. g. Academia Real das Ciências, O Instituto). Não encontramos referência a Álvaro Tomás, tal como também acontece em (Pinheiro Chagas, 1890) e em (Campagne, 1873). As entradas relativas a D. Francisco de Melo, Pedro Nunes e Anastácio da Cunha são extensas (respetivamente, 1 coluna e ½, 1 coluna e ½ e 2 colunas) e focam aspetos como: dados biográficos, formação académica, percurso de vida e profissional, referência à obra escrita (publicada ou não).

Comparativamente com as enciclopédias de Pinheiro Chagas (1890) e de E. M. Campagne (1873) as diferenças não são substanciais, mas aumenta claramente a quantidade de Matemáticos tratados. Trata-se de obras com objetivos e público alvo distintos. A enciclopédia de Campagne (1873) é um dicionário escolar para ajudar os professores e as mães a encontrar o melhor material possível para ensinar os jovens; a de Pinheiro Chagas (1890) é uma obra dirigida ao público em geral incluindo questões especificamente relativas aos portugueses e a Portugal; e a de Esteves Pereira e Guilherme Rodrigues (1904–15), como escreve o seu editor Romano Torres na nota ao leitor do dicionário, no vol. 1: "O diccionario historico Portugal substitue e unifica, com a vantagem da sua disposição lexicographica, um avultadissimo numero de publicações das especialidades de que trata, cuja consulta, nem sempre facil, é offerecida ao leitor nos seus tópicos mais interessantes".

A obra pioneira de Garção-Stockler sobre a História da Matemática em Portugal serviu de fonte explícita em quatro entradas do *Diccionario Historico*. Uma vez que há muitas mais referências a Matemáticos, podemos conjeturar que tal pode ser influência da obra de Stockler, não só da obra sobre a História da Matemática, mas também dos diversos Elogios Históricos que escreveu. Garção Stockler é mesmo apelidado no *Diccionario Historico* de "o célebre mathematico Stockler" (vol. 1, p. 296).

No *Diccionario Historico* há casos, como na entrada relativa a D. Francisco de Mello, em que repete Pinheiro Chagas (1890). Nas entradas relativas a Pedro Nunes e Anastácio da Cunha não é feita referência à obra de Stockler, pois obviamente já existiam outros textos sobre estes matemáticos.

Podemos pois concluir que o *Diccionario Historico* dá um lugar importante à História da Matemática em Portugal e a obra de Garção-Stockler sobre a História da Matemática em Portugal contribuiu positivamente para essa visibilidade.

Referências

Assembleia da República, *ComunicAR*, jun 2021.

A. R. Cabral, *João Manuel Esteves Pereira*, 2014, em SITE Romano Torres `https://romanotorres.fcsh.unl.pt`.

E. M. Campagne, *Dicionário Universal de Educação e Ensino. Trasladado a portuguez por Camillo Castello Branco*, 2 volumes, Liv. Intern. Ernesto Chardron, Porto, 1873.

J. Carvalho e Silva e C. Costa, "A Divulgação da História da Matemática através das Enciclopédias", *9.º Encontro Luso-Brasileiro de História da Matemática*, Atas do ELBHM, 2022 (no prelo).

J. M. Esteves Pereira, "Guilherme Rodrigues", *Revista OCCIDENTE*, 30/3/1909.

J. M. Esteves Pereira e G. A. Rodrigues, *Portugal: diccionario historico, chorographico, heraldico, biographico, bibliographico, numismatico e artistico / obra illustrada com centenares de photogravuras e regida segundo os trabalhos dos mais notaveis escriptores, por Esteves Pereira e Guilherme Rodrigues.* 7 volumes, J. Romano Torres, Lisboa, 1904–15.

C. Mota, E. Ralha e M. F. Estrada, "Matemática em Portugal: episódios da história do ensino e do ensino da história", Comunicação ao I Congresso Iberoamericano de História da Educação Matemática, Covilhã, 2011.

M. Pinheiro Chagas, *Diccionario popular historico, geographico, mythologico, biographyco, artistico, bibliographico e litterario*. 16 volumes, Lallemant frères, Lisboa, 1876–1890.

L. M. R. Saraiva "On the first history of Portuguese mathematics". *Historia Mathematica*, Vol. 20, No. 4 (1993), p. 415–427.

History of mathematics 'in potentiality' *vs.* history of mathematics 'in actuality': a study of textbooks to implement the history of maths in the classroom

Marc Moyon,
Université de Limoges, XLIM – UMR CNRS 7252

Many international studies empirically focus on implementing the history of mathematics (HoM) into mathematics education[1]. Over the last two decades, some studies have also explored theoretical elements concerning the implementation of learning sessions and/or their didactical analysis and effectiveness. In [2], we recently complemented these empirical studies with a more systematic approach in the French context.

Advocated for decades within the French network of IREM, the HoM is now officially included in the French curriculum (2019). However, is it sufficient for teachers to change their habits by implementing the HoM into their practices? I present a survey conducted with French secondary school mathematics teachers (who instruct students aged 10 to 18), regarding the introduction of the HoM into their classes [2]. This survey allows for the comparison of teachers' aspirations ('HoM in potentiality') and the realities in classrooms ('HoM in actuality'), taking into account the well-known Aristotelian concept [3, θ, 6, 1048a-1048b, italicization is mine]:

> 'Actuality' means the presence of the thing, not in the sense which we mean by 'potentially'. We say that a thing is present potentially as Hermes is present in the wood, or the half-line in the whole, because it can be separated from it; and as we call even a man who is not studying 'a scholar' if he is capable of studying. That which is present in the opposite sense to this is present actually. What we mean can be plainly seen in the particular cases by induction; we need not seek a definition for every term, but must comprehend the analogy: that as that which is actually building is to that which is capable of building, so is that which is awake to that which is asleep; and that which is seeing to that which has the eyes shut, but has the power of sight [...]. *Let actuality be defined by one member of this antithesis, and the potential by the other.*

[1]Refer to [1] for the latest synthesis on this topic.

I would add, in Plato's style, one analogy about maths teachers: *that which is implementing the HoM into his or her classroom to that which is not but has the desire and skills to do so.* That is my own purpose.

Next, my focus shifts to French mathematics textbooks designed for students aged 15 to 18, where I aim to assess their effectiveness as tools for the introduction of a historical perspective in maths teaching[2].

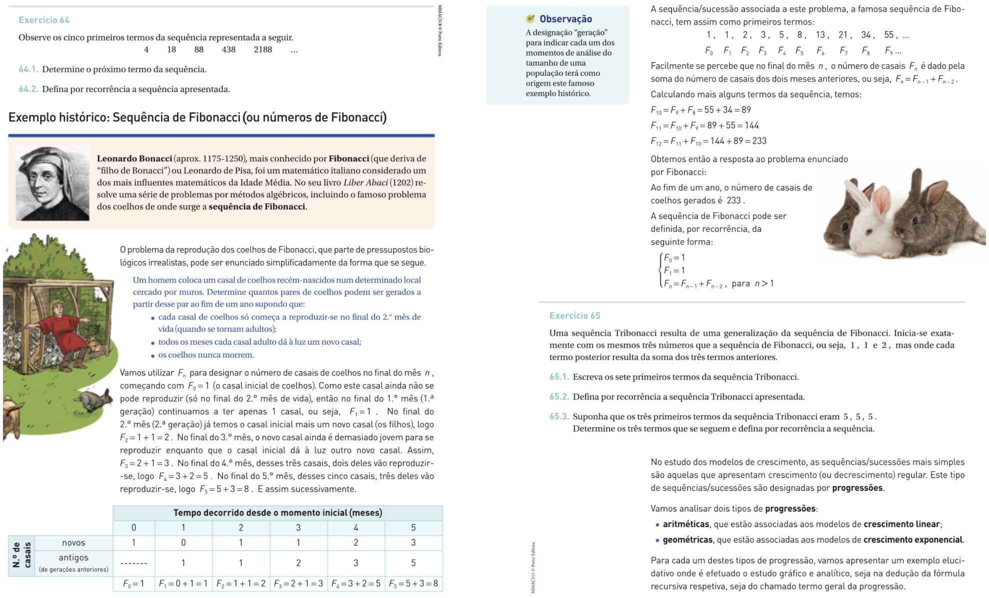
The aforementioned survey has persuaded me that French mathematics teachers express a desire to implement the HoM into their teaching. However, regrettably, there is still a considerable distance to cover to encourage the realization of inherent possibilities (to promote *entelechy*, in Plato's sense). The survey indicates that, more often than not, we encounter mere intentions. Even when these intentions are translated into action, the implementation appears to be confined to *historical snippets* (as referenced in [8]), lacking substantial didactic depth.

Additionally, I describe historical/mathematical tasks found in these textbooks using the Schorcht's categorization ([9] reviewed in [2]), specifically focusing on their reference to Fibonacci (a subject of personal research for me). I elaborate on this point using the three following excerpts (figs. 1, 2), drawn from Portuguese textbooks (tab. 1).

Excerpts	Attributes	Types of tasks
fig. 1	Linkage to the present Historical information Personalization Mathematical information Mathematical acting	Acting present type Informative present type Mention type
fig. 2 (left)	Personalization Mathematical information Mathematical acting	Mention type
fig. 2 (right)	Linkage to the present Mathematical information Historical information Personalization	Informative present type

Table 1: Types of tasks for 3 Portuguese excerpts (with their attributes)

[2]In particular, it is intriguing to compare the historical accounts of mathematics by historians with what we encounter in textbooks (read, for example, [7] on Egyptian fractions).



Exercício 64

Observe os cinco primeiros termos da sequência representada a seguir.

4 18 88 438 2188 …

64.1. Determine o próximo termo da sequência.

64.2. Defina por recorrência a sequência apresentada.

MMACS10 © Porto Editora

Exemplo histórico: Sequência de Fibonacci (ou números de Fibonacci)

Leonardo Bonacci (aprox. 1175-1250), mais conhecido por **Fibonacci** (que deriva de "filho de Bonacci") ou Leonardo de Pisa, foi um matemático italiano considerado um dos mais influentes matemáticos da Idade Média. No seu livro *Liber Abaci* (1202) resolve uma série de problemas por métodos algébricos, incluindo o famoso problema dos coelhos de onde surge a **sequência de Fibonacci**.

O problema da reprodução dos coelhos de Fibonacci, que parte de pressupostos biológicos irrealistas, pode ser enunciado simplificadamente da forma que se segue.

Um homem coloca um casal de coelhos recém-nascidos num determinado local cercado por muros. Determine quantos pares de coelhos podem ser gerados a partir desse par ao fim de um ano supondo que:

- cada casal de coelhos só começa a reproduzir-se no final do 2.º mês de vida (quando se tornam adultos);
- todos os meses cada casal adulto dá à luz um novo casal;
- os coelhos nunca morrem.

Vamos utilizar F_n para designar o número de casais de coelhos no final do mês n, começando com $F_0 = 1$ (o casal inicial de coelhos). Como este casal ainda não se pode reproduzir (só no final do 2.º mês de vida), então no final do 1.º mês (1.ª geração) continuamos a ter apenas 1 casal, ou seja, $F_1 = 1$. No final do 2.º mês (2.ª geração) já temos o casal inicial mais um novo casal (os filhos), logo $F_2 = 1 + 1 = 2$. No final do 3.º mês, o novo casal ainda é demasiado jovem para se reproduzir enquanto que o casal inicial dá à luz outro novo casal. Assim, $F_3 = 2 + 1 = 3$. No final do 4.º mês, desses três casais, dois deles vão reproduzir-se, logo $F_4 = 3 + 2 = 5$. No final do 5.º mês, desses cinco casais, três deles vão reproduzir-se, logo $F_5 = 5 + 3 = 8$. E assim sucessivamente.

		Tempo decorrido desde o momento inicial (meses)					
		0	1	2	3	4	5
N.º de casais	novos	1	0	1	1	2	3
	antigos (de gerações anteriores)	-------	1	1	2	3	5
		$F_0 = 1$	$F_1 = 0 + 1 = 1$	$F_2 = 1 + 1 = 2$	$F_3 = 2 + 1 = 3$	$F_4 = 3 + 2 = 5$	$F_5 = 5 + 3 = 8$

Observação

A designação "geração" para indicar cada um dos momentos de análise do tamanho de uma população terá como origem este famoso exemplo histórico.

A sequência/sucessão associada a este problema, a famosa sequência de Fibonacci, tem assim como primeiros termos:

$$\begin{array}{cccccccccc} 1, & 1, & 2, & 3, & 5, & 8, & 13, & 21, & 34, & 55, \ldots \\ F_0 & F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & F_5 & F_6 & F_7 & F_8 & F_9 \ldots \end{array}$$

Facilmente se percebe que no final do mês n, o número de casais F_n é dado pela soma do número de casais dos dois meses anteriores, ou seja, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.

Calculando mais alguns termos da sequência, temos:

$F_{10} = F_9 + F_8 = 55 + 34 = 89$

$F_{11} = F_{10} + F_9 = 89 + 55 = 144$

$F_{12} = F_{11} + F_{10} = 144 + 89 = 233$

Obtemos então a resposta ao problema enunciado por Fibonacci:

Ao fim de um ano, o número de casais de coelhos gerados é 233.

A sequência de Fibonacci pode ser definida, por recorrência, da seguinte forma:

$$\begin{cases} F_0 = 1 \\ F_1 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \text{ para } n > 1 \end{cases}$$

Exercício 65

Uma sequência Tribonacci resulta de uma generalização da sequência de Fibonacci. Inicia-se exatamente com os mesmos três números que a sequência de Fibonacci, ou seja, 1, 1 e 2, mas onde cada termo posterior resulta da soma dos três termos anteriores.

65.1. Escreva os sete primeiros termos da sequência Tribonacci.

65.2. Defina por recorrência a sequência Tribonacci apresentada.

65.3. Suponha que os três primeiros termos da sequência Tribonacci eram 5, 5, 5. Determine os três termos que se seguem e defina por recorrência a sequência.

No estudo dos modelos de crescimento, as sequências/sucessões mais simples são aquelas que apresentam crescimento (ou decrescimento) regular. Este tipo de sequências/sucessões são designadas por **progressões**.

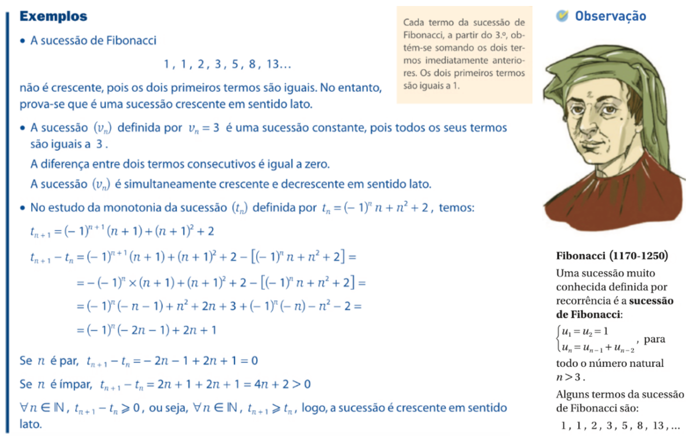
Vamos analisar dois tipos de **progressões**:

- **aritméticas**, que estão associadas aos modelos de **crescimento linear**;
- **geométricas**, que estão associadas aos modelos de **crescimento exponencial**.

Para cada um destes tipos de progressão, vamos apresentar um exemplo elucidativo onde é efetuado o estudo gráfico e analítico, seja na dedução da fórmula recursiva respetiva, seja do chamado termo geral da progressão.

MMACS11 © Porto Editora

Figure 1: Excerpt on Fibonacci in [4, p. 29].



Exemplos

- A sucessão de Fibonacci

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13\ldots$$

não é crescente, pois os dois primeiros termos são iguais. No entanto, prova-se que é uma sucessão crescente em sentido lato.

Cada termo da sucessão de Fibonacci, a partir do 3.º, obtém-se somando os dois termos imediatamente anteriores. Os dois primeiros termos são iguais a 1.

- A sucessão (v_n) definida por $v_n = 3$ é uma sucessão constante, pois todos os seus termos são iguais a 3.

  A diferença entre dois termos consecutivos é igual a zero.

  A sucessão (v_n) é simultaneamente crescente e decrescente em sentido lato.

- No estudo da monotonia da sucessão (t_n) definida por $t_n = (-1)^n n + n^2 + 2$, temos:

$t_{n+1} = (-1)^{n+1}(n+1) + (n+1)^2 + 2$

$$\begin{aligned} t_{n+1} - t_n &= (-1)^{n+1}(n+1) + (n+1)^2 + 2 - \left[(-1)^n n + n^2 + 2\right] = \\ &= -(-1)^n \times (n+1) + (n+1)^2 + 2 - \left[(-1)^n n + n^2 + 2\right] = \\ &= (-1)^n(-n-1) + n^2 + 2n + 3 + (-1)^n(-n) - n^2 - 2 = \\ &= (-1)^n(-2n-1) + 2n + 1 \end{aligned}$$

Se n é par, $t_{n+1} - t_n = -2n - 1 + 2n + 1 = 0$

Se n é ímpar, $t_{n+1} - t_n = 2n + 1 + 2n + 1 = 4n + 2 > 0$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $t_{n+1} - t_n \geqslant 0$, ou seja, $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_{n+1} \geqslant t_n$, logo, a sucessão é crescente em sentido lato.

Observação

Fibonacci (1170-1250)

Uma sucessão muito conhecida definida por recorrência é a **sucessão de Fibonacci**:

$\begin{cases} u_1 = u_2 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \end{cases}$, para todo o número natural $n > 3$.

Alguns termos da sucessão de Fibonacci são:

$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$

Figure 2: Excerpts on Fibonacci in [5, p. 12] (left), in [6, p. 165] (right)

Finally, I propose a framework for implementing the HoM into mathematics education, beginning with textbooks commonly used in the classroom. The objective is to support mathematics teachers in reimagining and enhancing the relevance of tasks within their textbooks (from, for example, *informative tasks* to *acting tasks*), while considering original sources from the HoM.

References

[1] R. Chorlay, K. M. Clark and C. Tzanakis, "History of mathematics in mathematics education: Recent developments in the field", *ZDM – Mathematics Education*, Vol. 54 (2022), pp. 1407–1420.

[2] M. Moyon, "Desire of teachers and realities in textbooks: dealing with history of mathematics in the new French curriculum and its impact on teacher training", *ZDM – Mathematics Education*, Vol. 54 (2022), pp. 1613–1630.

[3] Aristotle, *The Metaphysics*, W. Heinemann, ltd., G. P. Putnam's sons, London, New York, 1935.

[4] B. Costa and E. Rodrigues, *Novo Espaço Parte 2 Matemática A 11.º ano*, Porto, 2019.

[5] C. Andrade, P. Pinto Pereira and P. Pimenta, *Novo Ípsilon 11, Matemática A 11.º ano*, vol. 2, Lisboa, 2023.

[6] M. A. Ferreira, N. L. Guerreiro and A. Pinto Silva, *Máximo Parte 1 Matemática A 11.º ano*, Porto, 2019.

[7] M. Moyon, "Frações egipticas e o algoritmo de fibonacci : história da matemática versus livros didáticos atuais", *ACERVO – Boletim do Centro de Documentação do GHEMAT-SP*, Vol. 5 (2023), pp. 1–36.

[8] C. Tzanakis, A. Arcavi & *alii* "Integrating history of mathematics in the classroom: an analytic survey", *History in Mathematics Education: The ICMI Study*, 2000, Eds. J. Fauvel and J. Van Maanen, Dordrecht, pp. 201-240.

[9] S. Schorcht, *Typisierung mathematikhistorischer Beispiele in deutschen Mathematikschulbüchern der Klassenstufen 1 bis 7*, Münster, 2018.

Os Elementos de Euclides e o *GeoGebra*

Hélder Pinto
Instituto Piaget, RECI e CIDMA-UA

A História da Matemática (HM) e a Tecnologia são duas ferramentas bastante utilizadas no contexto da Educação Matemática (para as potencialidades da HM no ensino, consultar, por exemplo, Jankvist (2009)). Contudo, a utilização simultânea destes dois instrumentos é ainda extremamente residual (um exemplo pode ser encontrado em Isoda (2004)). Neste artigo iremos apresentar um exemplo de como utilizar a tecnologia, em particular, o *Geogebra*, para abordar um livro marcante na HM: *Os Elementos* de Euclides e, em particular, o Livro I que termina com o bem conhecido Teorema de Pitágoras e seu recíproco.

Os Elementos de Euclides (c. 300 a. C.) têm sido objeto, ao longo dos séculos, de variadíssimas edições, sendo um sucesso editorial até aos dias de hoje. Por exemplo, em 1855 eram (parcialmente) publicados sob a chancela da Universidade de Coimbra (Commandino, 1855); no início do século XX (1908) foi publicada uma nova versão comentada por T. Heath (fac-simile da Dover em 1956); já neste século, no Brasil, foi publicada uma nova versão pelo professor Irineu Bicudo (2009, com nova tiragem em 2018). Para além destas versões, destacam-se ainda outras utilizações desta obra: os "azulejos que ensinam" (Simões e Duarte, 2007) do antigo Colégio dos Jesuítas em Coimbra (séc. XVI) e que reproduzem as figuras da versão de André Tacquet e a belíssima edição de Oliver Byrne (1847) onde as letras são substituídas por diagramas coloridos, tornando as demonstrações visualmente mais atrativas. Esta versão foi adaptada para o contexto *web*, mantendo o grafismo original em várias línguas (espanhol, grego, inglês atual e antigo), num projeto de N. Rougeux (sd). Na *web* é ainda possível encontrar versões interativas d'*Os Elementos* onde as figuras que acompanham as demonstrações são interativas, isto é, podem ser modificadas pelo utilizador ao movimentar certos pontos. Uma versão completa e profusamente comentada pode ser encontrada em (Joyce, 1996–98), embora atualmente a interatividade não se encontre funcional. Assim, surgiu a ideia de se criarem novos conteúdos interativos, em língua portuguesa (a partir de (Commandino, 1855), acessível online), para as demonstrações de Euclides.

No trabalho aqui apresentado escolheu-se utilizar o Geogebra por ser um software gratuito e de utilização ampla no ensino. Utilizando este software de geometria dinâmica é possível novas abordagens às demonstrações de Euclides, permitindo que os estudantes tenham acesso a imagens construídas

Suplemento do Boletim da SPM 82, Dezembro 2024, pp. 149–152

«passo a passo» e não apenas a uma imagem final estática como acontece num livro ou num *pdf*. Por exemplo, na Fig. 1, apresenta-se o sexto passo da demonstração de Elementos I,2. Nestas demonstrações utiliza-se ainda o seguinte sistema de cores: a preto estão os objetos iniciais, a azul os objetos que foram contruídos ao longo da demonstração e a vermelho o objeto que está a ser construído/analisado no passo apresentado. Neste momento trata-se de um projeto em curso estando terminadas apenas algumas das demonstrações do primeiro livro.

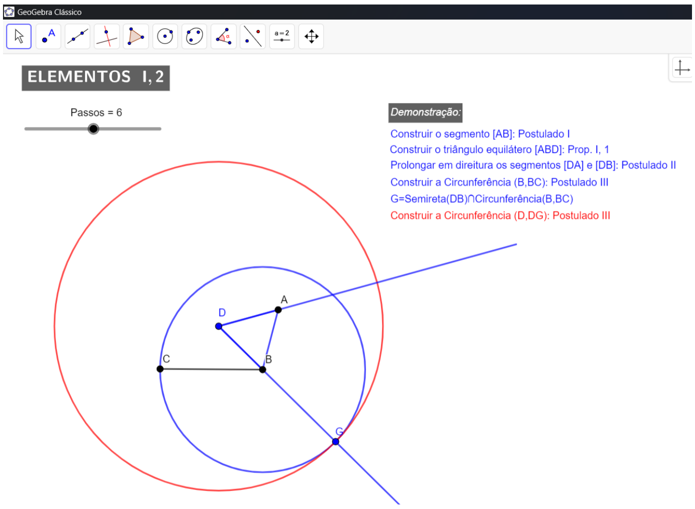


Figura 1: Parte da demonstração de Elementos I, 2. Passo 6: construir a circunferência de centro D e raio $\overline{\mathrm{DG}}$, que é possível pelo Postulado 3.

Para finalizar, note-se que *Os Elementos* foram um sucesso pois apresentam conteúdos que continuam, até aos dias de hoje, essenciais na geometria plana elementar dos primeiros anos: por exemplo, o critério de igualdade de triângulos LAL (I,4); ângulos verticalmente opostos são iguais (I,15); num triângulo, ao lado maior opõe-se o ângulo interno maior e vice-versa (I,18 e I,19); desigualdade triangular (I,20); a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° (I,32) e o Teorema de Pitágoras (I,47).

Além disso, continua a ser um bom exemplo de como funciona o «edifício matemático» (o que é uma demonstração matemática, o que deve ser o rigor de uma demonstração, onde cada passo deve ser devidamente justificado com resultados previamente demonstrados); note-se ainda que as proposições estão encadeadas de tal modo que, em geral, cada resultado utiliza a proposição anterior (consultar (Silva e Pinto, 2011, p. 217) para a estrutura de dependências das primeiras proposições d'Os *Elementos*).

Com a tecnologia atual, a interatividade e a geometria dinâmica, é possível dar uma nova «roupagem» e novas abordagens para dissipar parte da dificuldade em ler um texto «original» do passado. Por outro lado, consideramos que esta abordagem poderá ser útil no ensino, mostrando aos alunos a «força» das demonstrações matemáticas e das suas justificações, podendo ser complementada, por exemplo, por fichas de trabalho como a apresentada em (Pinto, 2011, pp. 45–61).

Referências

BICUDO, I. (Trad.) *Os elementos Euclides.* São Paulo: Editora UNESP, 2009.

BYRNE, O. *The First Six Books of the Elements of Euclid in which coloured diagrams and symbols are used instead of letters for the greater ease of learners.* London: William Pickering, 1847.

COMMANDINO, F. (Tradução portuguesa). *Elementos de Euclides. Dos seis primeiros livros, do undécimo e duodécimo da versão latina de Frederico Commandino.* Coimbra: Imprensa da Universidade, 1855. `http://www.mat.uc.pt/~jaimecs/euclid/elem.html`

HEATH, T. *Euclid, The Thirteen Books of The Elements* (Vol. 1, 2 e 3). New York: Dover, 1956.

ISODA, M. Why we use historical tools and computer software in Mathematics Education: mathematics activity as a human endeavor project for secondary school. In: *Proceedings HPM & ESU4*, pp. 132–141. Uppsala: Upsala Univ, 2004.

JANKVIST, U. A categorization of the "whys" and "hows" of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, v. 71, n. 3, pp. 235–261, 2009. `https://doi.org/https://doi.org/10.1007/s10649-008-9174-9`

JOYCE, D. *Euclid's Elements* (website), 1996–1998. `http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/toc.html`

PINTO, H. (2.ª ed.). *História da Matemática na Sala de Aula.* Lisboa: Ludus, 2011.

ROUGEUX, N. *Byrne's Euclid The First Six Books of The Elements of Euclid With Coloured Diagrams And Symbols* (website), s. d. `https://www.c82.net/euclid/`

SILVA, J. N.; PINTO, H. The Elements of Euclid: The Cornerstone of Modern Mathematics. In: *Alexandrea Ad Aegyptum — The Legacy of Multiculturalism in Antiquity*, pp. 211–220. Porto: Afrontamento, 2013.

SIMÕES, C.; DUARTE, A. L. *Azulejos que ensinam.* Coimbra: Universidade de Coimbra, 2007. `https://www.academia.edu/42978739/Azulejos_que_Ensinam`

Episódios da História da Matemática na sala de aula: aprender com os erros de Gaspar Nicolas

Teresa Costa Clain
Grupo de História da Matemática e Educação Matemática,
CIDMA-Universidade de Aveiro, Portugal

Os benefícios que a História da Matemática pode desempenhar na educação matemática têm vindo a ser reconhecidos e [Fauvel e Maanen, 2020] assim o referem. Por outro lado, os docentes dos ensinos básico e secundário, sentem-se pouco à vontade com uma abordagem da matemática através da sua história. No sentido de recrear ambientes históricos, através da inclusão de textos originais e da resolução de problemas, com o saber matemático do passado, propomos a abordagem de dois problemas, ambos do *Tratado da Prática d'Arismética* de Gaspar Nicolas, publicado em 1519. Esta obra é rica em problemas/conteúdos valiosos para a sala de aula. As atividades que vamos descrever inserem-se no projeto *Which are some errors made by mathematicians in the Middle Age and what can students learn from them?* em parceria com Josip Slisko.[1]

Na Gazeta da Matemática, Paulo Saraiva escreve sobre a "Frustração e resiliência na aprendizagem da matemática" e diz que "(...) quando se trata da Matemática temos medo de cometer erros."[2]. Ao propormos problemas de Gaspar Nicolas na sala de aula, queremos levar os alunos a serem capazes de manter emoções positivas e motivação perante os erros cometidos. O que vamos descrever parte de dois enunciados, designados por o problema 1 e problema 2. O primeiro foi destinado aos alunos do 10.º ano[3] e o segundo aos alunos do 11.º ano[4], ambos previstos como atividade em grupo. Como estratégia de implementação tivemos em conta as etapas seguintes: apresentar a formulação original ou adaptada dos enunciados; analisar a solução original do autor; após a transformação do enunciado na linguagem atual, os alunos resolveram os problemas, utilizando a estratégia que lhes parecia adequada e avaliaram o(s) erro(s) presente(s) ou esclareceram os tópicos enunciados; compararam e avaliaram as duas estratégias (a sua e a original) e tiraram conclusões.

[1]Facultad de Ciencias Físico Matemáticas Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, México.
[2]Gazeta da Matemática n.º 200, p. 2 (Editorial).
[3]Escola Secundária José Falcão, Coimbra.
[4]Escola Secundária D. Maria II, Braga.

Problema 1: *São duas torres não iguais de altura. Uma tem 20 braças*[5] *de altura e a outra tem 15 (braças). E estão separadas uma da outra 4 braças. Pergunto, lançando uma linha de ponta a ponta qual o comprimento dessa linha?*[6] [Nicolas, 1963, f. 88 v].

Questões para os alunos: 1) A solução apresentada por Nicolas está incorreta. Como teria o autor chegado a esta resposta?; 2) Descrever verbalmente um plano para encontrar a boa solução; 3) Traduzir o raciocínio em linguagem matemática; 4) Indicar a solução correta; 5) Será importante saber que mesmo os matemáticos famosos cometeram erros? Numa linha, justificar a resposta. Antes da questão 3) deve proceder-se à correção do enunciado. Na época visada, os enunciados presentes em certas obras poderiam apresentar-se incompletos ou pouco claros tendo presente as figuras que os acompanhavam e as etapas da resolução.

Problema 2: *Huũ homem espalhou .100. laranjas e dyz ha outro que as apanha huũa a huũa todas em huũa pinha. Ora eu demando em quantos passos apanhara aquella pinha aquellas laranjas.* [Nicolas, 1963, f. 72 f][7].

Nesta atividade, as etapas percorridas foram idênticas às do problema 1. Registámos algumas dificuldades por parte dos alunos em ler o português de outra época, o que foi rapidamente superado gerando algum entusiasmo entre os discentes. Foram identificados os elementos seguintes: Gaspar Nicolas diz que a solução do problema é 10100 passos[8], as duas primeiras linhas do enunciado remetem-nos para outra possibilidade; Nicolas discorda da solução 9900. O enunciado alerta para condições que permitam considerar a segunda resposta 9900 incorreta? (sugerir, entre pares, uma correção do enunciado)[9].

A fórmula atual da soma dos termos da progressão aritmética foi analisada na resposta de Nicolas e verificou-se a equivalência entre o que escreveu o autor e a fórmula atual. Sobre a questão: "É importante saber que mesmo os matemáticos famosos "cometeram erros"?" Temos algumas respostas dos alunos: "É engraçado o problema, humanizamos e mostramos que não há problema em errar"; "Aprendemos com os erros a tentar boas soluções"; "Sim, já que mostra que mesmo cometendo erros podemos ser bons a matemática"; "Com os erros aprendemos a explorar novos métodos"; "Saber que

[5]Braça é uma antiga medida de comprimento equivalente a 2,20 metros linearmente.

[6]Tradução para linguagem atual do problema que consta no fólio 88 do *Tratado da Prática d'Arismética*, ordenado por Gaspar Nicolas em 1519 (edição fac-similada de 1963, Livraria Civilização Editora, Porto.

[7]Escrito em português da época (*Tratado da Prática d'Arismética*, publicado em 1519).

[8]Recomenda-se a consulta de [Nicolas, 1963, f. 72 f].

[9]Recomenda-se a consulta de [Nicolas, 2022, pp. 176, 177].

mentes brilhantes também falharam é de certa forma reconfortante"; "Não sei o que dizer, pois para além de matemáticos famosos, eles também são humanos, logo é normal que eles errem".

Quando os alunos se envolveram com a fonte, a maioria tem dúvidas (sobre terminologia ou procedimentos matemáticos). Contudo, será importante ultrapassar, com confiança, esta etapa. Tendo presente as atividades anteriormente descritas e as palavras dos alunos visados, entende-se que, aprender é um processo de tentativas entre acertar e errar, conjeturando, deduzindo e chegando a resultados válidos. Ter presente que matemáticos famosos também erraram motivou o desenvolvimento de estratégias destinadas à superação do erro e despertou a curiosidade de "mergulhar" em épocas anteriores onde o próprio saber matemático conheceu as suas "limitações". Expor os alunos a diversos projetos didáticos de aprendizagem, com problemas nos quais os matemáticos da Idade Média cometeram um ou mais erros ou apresentaram enunciados pouco claros, poderá ajudá-los a desenvolver diversas competências, tais como o pensamento crítico e criativo, a comunicação e a colaboração. As experiências descritas podem reduzir enormemente as crenças erradas como, "cometer erros é vergonhoso e deve ser evitado", "somente os alunos cometem erros, os matemáticos nunca cometem erros". O objetivo de tarefas desta natureza é confrontar os alunos com a uma nova conceção do erro: *Os erros são uma parte necessária da aprendizagem, especialmente quando se é confrontado com novas ideias e conceitos.*

Referências

J. Fauvel e J. Maanen (Eds.), *History in mathematics education – The ICMI study.* Dordrecht: Kluwer, 2000.

G. Nicolas, *Tratado da Pratica d'Arismetica*, Edição fac-similada da edição de 1519. Livraria Civilização, Porto, 1963.

J. Slisko, *What students can learn from Fibonacci's error in solving "The lion in the pit" problem".* Góndola, Enseñanza y Aprendizaje de las Ciencias, Vol. 15, No. 2 (may–ago 2020), pp. 216–238, Universidade Distrital Francisco José Calda, 2020. `http://doi.org/10.14483/23464712.16041` (acedido em 01/07/2023)

J. Silva e P. Freitas (Coord.), *Tratado da Prática de Aritmética* (1519), Fundação Calouste Gulbenkian, 2022.

As "Questões Propostas" no *Jornal* de Gomes Teixeira

Pedro J. Freitas[1]
Centro Interuniversitário de História das Ciências e Tecnologia, Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa, Portugal

Inês Legatheaux Martins[2]
Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa e Centro de Análise Funcional, Estruturas Lineares e Aplicações

Em 1877, face ao isolamento que considerava existir na comunidade científica portuguesa, Francisco Gomes Teixeira (1851–1933) fundou o *Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronómicas*. Era seu intuito que viesse a ser uma revista dedicada a artigos de investigação e de cariz internacional. Porém, no prefácio, afirma que pretende que o jornal seja lido não só por um público especializado mas também por "pessoas que conhecem só as mathematicas, que se ensinam nos nossos cursos de instrucção secundaria." Nesse sentido, os primeiros volumes incluem 24 "Questões propostas" que constituem problemas abertos a respostas dos leitores.

Esta opção é explicada no prefácio, que estabelece com clareza os objectivos iniciais do *Jornal*. Trata-se de uma particularidade que o inscreve numa categoria situada entre a revista de investigação e o jornal "intermédio", definição de E. Ortiz [1] que cita o *Journal de mathématiques élémentaires* (1877, J. Bourget) como um dos mais bem sucedidos jornais desta tipologia.

> Começamos hoje a publicação de um Jornal dedicado ás Sciencias Mathematicas e Astronomicas. Quasi todos os paizes da Europa, ainda os mais pequenos, sustentam (...) jornaes de iniciativa particular dedicados exclusivamente ás Sciencias Mathematicas ou ás Sciencias Astronomicas. Em Portugal não existe nenhum d'este segundo genero. (...)
>
> Em cada numero haverá duas secções, uma relativa a questões de Mathematicas superiores, outra destinada ás pessoas que conhecem só as mathematicas, que se ensinam nos nossos cursos de instrucção secundaria, na qual publicaremos artigos sobre Mathematicas elementares, Noticias astronomicas, etc., para cujo bom

[1]Financiado pela Fundação para a Ciência e a Tecnologia, I.P./MCTES através de fundos nacionais (PIDDAC): UIDB/00286/2020 e UIDP/00286/2020

[2]Financiado pela Fundação para a Ciência e a Tecnologia, I.P./MCTES através de fundos nacionais (PIDDAC): UIDB/04721/2020

> exito esperamos que concorrerão os professores dos nossos Lyceus com seus artigos.

Embora o *Jornal* inclua apenas 24 questões propostas e que este formato seja interrompido no Volume 5, pode considerar-se que foi uma experiência bem sucedida. De facto, estes problemas promoveram várias participações, tanto de autores portugueses como de alguns estrangeiros.

Por outro lado, as questões propostas apresentam grande variedade. São usualmente problemas de nível intermédio com pontes para a matemática avançada, sendo alguns de âmbito pedagógico. Também são propostas questões que pretendem desenvolver novos resultados, necessitando a sua resolução de alguma formação matemática, e outras mais próximas da matemática recreativa. Seguem-se alguns exemplos de problemas destas duas categorias.

Questão 12: "Dados dois pontos, determinar com o compasso ordinario o ponto medio da distancia que os separa. L. F. Marrecas Ferreira (Vol. 2)"

Este problema, relacionado com o Teorema de Mohr-Mascheroni, suscitou duas soluções da autoria de Giusto Bellavitis e Alfredo Schiappa Monteiro. Deu igualmente origem a um artigo de comentário de Alfredo Schiappa Monteiro, no qual este apresenta mais quatro soluções (ver Figura 1).

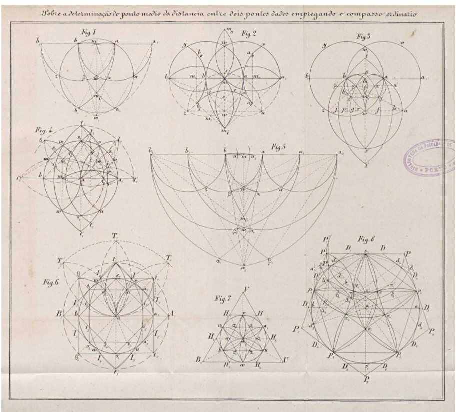


Figura 1: Ilustrações de resoluções da Questão Proposta 12.

Questão 15: "Dada uma figura plana composta de um hexagono regular, sobre os lados da qual estão seis outros hexagonos regulares congruentes ao primeiro, quer-se saber como se póde cortar esta figura por tres linhas rectas que a dividam em partes congruentes ou não congruentes, de modo que com estas partes se possa formar um hexagono regular. sr. Birger Hansted (Vol. 2)"

Este problema de matemática recreativa inclui-se na família dos problemas de dissecção, problemas ainda considerados na actualidade. A Figura 2 ilustra a solução desta questão apresentada por Alfredo Schiappa Monteiro.

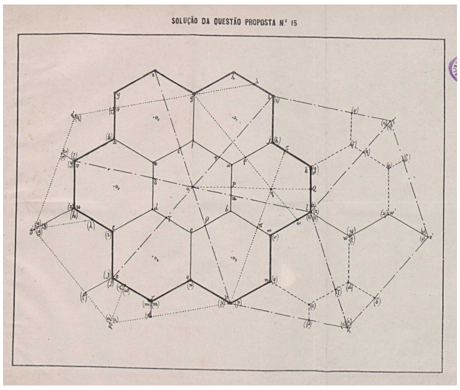


Figura 2: Ilustração da resolução da Questão Proposta 15.

Em conclusão, parece-nos que a secção das "Questões propostas" constituiu um meio bem sucedido de incentivar a participação, tanto nacional como internacional, no *Jornal*. Ainda que a publicação se tenha afirmado ao longo do tempo como uma revista de investigação, esta secção deu origem a contribuições que perduraram enquanto o *Jornal* foi publicado.

Referências

[1] Ortiz, Eduardo, "The nineteenth-century international mathematical community and its connection with those on the Iberian periphery", *L'Europe Mathématique – Histoires, Mythes, Identités*, Catherine Goldstein, Jeremy Gray et Jim Ritter, eds. (1996) pp. 323–343.

[2] Peiffer, Jeanne; Gispert, Hélène; Nabonnand, Philippe, "Interplay between mathematical journals on various scales 1850–1950". *Historia Mathematica*, Vol. 45, no. 4 (November 2018) pp. 323-333.

[3] Saraiva, Luís. "A decisive journal in Portuguese mathematics: Gomes Teixeira's Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas (1877–1905)", *L'émergence de la presse mathématique en Europe au 19ème siècle*, Christian Gerini et Norbert Verdier, eds. London: College Publications (2014) pp. 67–95.

Sebastião e Silva face a algumas controvérsias contemporâneas à volta da modernização do ensino da matemática em Portugal

Jaime Carvalho e Silva
Departamento de Matemática, CMUC, Universidade de Coimbra

Anabela Teixeira
Escola Secundária de Camões, Lisboa

Muitas controvérsias acompanharam a experiência de modernização do ensino da Matemática em Portugal que se desenrolou em Portugal a partir de 1963 sob a direção de José Sebastião e Silva e que teve o apoio da OCDE. Conseguimos identificar, entre outras, a escolha das escolas, dos professores e dos alunos para as turmas piloto, assim como o tipo e a profundidade dos temas a tratar.

O processo de experimentação iniciou confinado a um número relativamente restrito de intervenientes. É criada uma comissão de estudos para a modernização do ensino da Matemática, constituída por: José Sebastião e Silva, professor catedrático da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa (presidente); Jaime Furtado Leote, professor metodólogo do Liceu Pedro Nunes; Manuel Augusto da Silva, professor metodólogo do Liceu D. João III; António Augusto Lopes, professor metodólogo do Liceu D. Manuel II (Portaria de 17 de julho de 1963, *Diário do Governo*). À qual, pouco depois, se integrou um inspetor do ensino liceal.

No ano letivo de 1963/64, começou-se com uma experiência de carácter preliminar em três turmas piloto nesses liceus. Nos anos seguintes, informou o *Diário de Notícias* em 1968, em entrevista a Sebastião e Silva, que o número de turmas-piloto foi aumentando pelo alargamento do projeto aos vários liceus; estas turmas eram regidas por professores preparados em cursos de férias e com a ajuda de textos-piloto e guias sucessivamente melhorados: 11 turmas em 1964/65; 30 em 1965/66; 44 em 1966/67; cerca de 60 turmas em 1967/68, entre as quais duas a funcionar no Colégio Militar e três, já num maior alargamento geográfico, na província ultramarina de Angola, em Luanda.

Apesar desta dinâmica restritiva, no campo da educação e a uma disciplina do plano curricular dos estudos do ensino secundário, o desenvolvimento deste projeto era alvo de atenção da imprensa periódica da época (muitas das notícias encontram-se transcritas e podem ser consultadas em

M. Almeida, J. Matos e A. Almeida, 2022). São várias as entrevistas a Sebastião e Silva, reportagens e notícias sobre os cursos de formação de professores, que decorriam, sobre reuniões nomeadamente com especialistas estrangeiros, sobre textos normativos e artigos de opinião.

Por exemplo, relativamente à seleção dos alunos que constituíram as turmas piloto, o procedimento era o seguinte: quando se abria uma nova turma piloto, o liceu recebia um ofício do Ministério da Educação Nacional com a indicação do professor que a ia reger e as normas do seu funcionamento. Cada turma piloto deveria ser constituída "por não mais de 25 alunos" (Norma 1.ª) e dever-se-ia "dar preferência absoluta aos alunos mais classificados e evitar-se a inclusão de alunos repetentes ou que tenham transitado do 2.º ciclo com deficiência em Matemática" (Norma 2.ª). Este número reduzido de alunos por turma e a forma como deviam ser selecionados geraram muitos comentários e críticas, que Sebastião e Silva foi esclarecendo, nomeadamente em entrevistas que dava à imprensa, como a que deu em 23/1/1968, ao *Diário de Notícias*. Por outro lado, num relatório redigido por Sebastião e Silva em 14/06/1969, intitulado "Projecto de modernização do ensino da matemática no 3.º ciclo dos liceus portugueses", aponta ainda que:

> "[...] na prática, este critério não tem podido ser aplicado com rigor num grande número de casos, não só porque o número de turmas-piloto tem vindo a aumentar (o que restringe as possibilidades de escolha), como ainda é praticamente inaplicável em pequenos liceus da província. Daqui se infere que é destituída de fundamento a crítica segundo o qual os resultados do projecto são viciados pelo facto de as turmas-piloto serem constituídas só por bons alunos".

Nos arquivos históricos dos antigos liceus encontram-se, na correspondência recebida, pedidos de encarregados de educação para que os seus educandos fizessem parte de turmas-piloto. Solicitações que são também referidas por Sebastião e Silva nesse relatório:

> "A organização das turmas-piloto, em cada ano lectivo tem sido baseada em convites dirigidos a encarregados de educação dos alunos. Isso tem permitido, desde logo, efectuar uma avaliação espontânea da experiência. O que se tem verificado, cada vez mais, é que não só esses convites são geralmente aceites, num regime de plena liberdade de escolha, como ainda surgem numerosos pedidos de encarregados de educação, para que alunos não

> convidados sejam incluídos nessas turmas. Este índice espontâneo de êxito do projecto vem, ao mesmo tempo, criar dificuldades, na medida em que obriga a aumentar o número de alunos previsto para cada turma (25), como até a criar novas turmas que não estavam previstas."

Outras referências críticas, que se encontram em diversas publicações, são, por exemplo:

> "[...] a designação Matemática «moderna» é, antes de mais, um equívoco, cuja responsabilidade, aliás cabe exclusivamente, ou quase exclusivamente, a certos compêndios redigidos em língua francesa que as livrarias exibem nos seus escaparates." (Luís de Albuquerque, *Diário de Lisboa*, 18/10/1968)

> "E é necessário também que os professores não escolhidos até agora para reger turmas-piloto compreendam as dificuldades existentes e não fiquem melindrados por esse facto." (*Diário de Lisboa*, 30/7/1966)

> "O RELATÓRIO [de 1968] É UMA CONSTRUÇÃO FORJADA, DE EMBUSTE GROSSEIRO, DESTINADO A ABATER O PROF. Sebastião e Silva." (António Augusto Lopes, referido em M. Almeida e J. Matos, 2021)

Nesta comunicação foram apresentadas algumas respostas de Sebastião e Silva às questões levantadas e foram discutidos os constrangimentos à ação de modernização do ensino desenvolvida nessa época. A análise detalhada destas questões será feita em posteriores publicações.

Referências

A. Teixeira (comp. e coord.), *José Sebastião e Silva (1914–1972), O Homem, O Cientista, O Professor*. Lisboa: Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, 2015.

H. Guimarães, "A «modernização» do ensino da matemática em Portugal — Sebastião e Silva e as perspectivas metodológicas emanadas de Royaumont (1959)", *XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática*, Recife, Brasil (2011), p. 1–10.

J. Sebastião e Silva, "Projecto de modernização do ensino da matemática no 3.º ciclo dos liceus portugueses", 14/06/1969, Arquivo de José Sebastião e Silva.

M. Almeida e J. Matos, "A avaliação da experiência de Matemática Moderna nos liceus portugueses, *Revista de Matemática, Ensino e Cultura – REMATEC*, Belém/PA, Vol. 16 (2021), p. 43–58.

M. Almeida, J. Matos e A. Almeida, *Transcrição das notícias sobre matemática moderna publicadas nos jornais diários de Lisboa*, Coleção História e Memória do Ensino da Matemática, APM, 2022.

M. Silva e W. Valente, "A matemática moderna em Portugal: o que dizem os cadernos escolares dos alunos?", *Quadrante*, Vol. 17, No. 1 (2008), p. 78–92.