35.º Encontro

DO SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

GOUVEIA

17 e 18 JUN 2022

09h00–18h30

Biblioteca Municipal Vergílio Ferreira

presencial e on-line Zoom

Conferencistas Convidados

Philippe Nabonnand
Archives Henri Poincaré e Université de Lorraine

Niccolò Guicciardini
Università degli Studi di Milano

spm
SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA
SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Encontro acreditado pelo Conselho Científico-Pedagógico da Formação Contínua de Professores como 12 horas de formação para os grupos 230 e 500.

Instituto de Gouveia Escola Profissional | Município de Gouveia | Eurosol Hotels Gouveia | Quinta da Espinhosa Dão | Escola Apostólica de Cristo Rei | O Albertino

ISSN 0872–3672

SUMÁRIO

35.º Encontro do Seminário Nacional de História da Matemática

(continua no verso)

SUMÁRIO (continuação)

35.º Encontro do Seminário Nacional de História da Matemática

Biblioteca Municipal Vergílio Ferreira, Gouveia
Encontro realizado presencialmente e online na plataforma Zoom
17 e 18 de Junho de 2022

Introdução

Luis Saraiva[1]
(Coordenador Nacional do Seminário Nacional de História da Matemática)

Com este Encontro voltámos à normalidade pré-covid, foi já um evento presencial, mas continuou a possibilidade de assistência online.

Os dois convidados estrangeiros deste Encontro fizeram as suas intervenções via Zoom: Philippe Nabonnand, dos Archives Poincaré e da Universidade de Lorraine, e Niccoló Guicciardini, da Universidade de Milão.

Philippe Nabonnand é um especialista sobre a obra e correspondência de Henri Poincaré, jornais matemáticos e sobre a história da geometria nos séculos XIX e XX. Niccolò Guiccciardini tem ultimamente feito a sua investigação sobre a matemática de Isaac Newton, com especial relevância para os seus *Principia*, e sobre a sua recepção no século XVIII.

Houve ainda outras três conferências feitas online, por participantes que por motivos diferentes não puderam deslocar-se a Gouveia : João Tomás do Amaral, da Universidade de S. Paulo, Brasil, Helena Sousa Melo e Maria do Carmo Martins, da Universidade dos Açores, e Rui Candeias, do Agrupamento de Escolas Terras de Larus.

No total, foram proferidas 19 conferências. Sem ter em conta os elementos da organização local, o Encontro teve 49 inscrições, 23 delas presenciais.

O Encontro foi acreditado pelo Conselho Científico Pedagógico da Formação Contínua, como Acção de Formação para Professores de Matemática do Ensino Básico e Secundário (Grupos 230, 500). Participaram como formandos 16 professores.

No decorrer do Encontro foi prestada uma homenagem do SNHM a Ana Rita Ferrer, Sílvia Dias e Teresa Pires, três funcionárias excepcionais que ao longo dos anos de trabalho na SPM foram um apoio essencial para as actividades do Seminário. A cada uma foi oferecida uma placa comemorativa, Essas placas foram pagas pelos 24 membros do Conselho Geral do SNHM

Foi elaborado, como é habitual nos Encontros do SNHM, um caderno de 38 páginas com os resumos das palestras e outras informações referentes ao Encontro e ao SNHM que foi distribuído aos participantes e às entidades que estiveram presentes na sessão de abertura: o Vice-Presidente da Câmara Municipal de Gouveia e o Diretor do Instituto de Gouveia. Posteriormente uma cópia foi entregue na SPM para arquivo.

[1]Agradecimentos institucionais são devidos à *Fundação para a Ciência e a Tecnologia* de Portugal no âmbito do projeto UIBD/00286/2020.

Queremos agradecer a toda a Comissão Organizadora local, e muito especialmente à sua coordenadora, Professora Alexandra Rodrigues, o empenho que colocaram em todos os aspectos da realização do Encontro .Estendemos os nossos agradecimentos à Câmara Municipal de Gouveia, representado na sessão de abertura pelo seu vice-presidente, Dr. Jorge Ferreira, e ao Instituto de Gouveia – Escola Profissional-, na pessoa do seu Diretor, Engenheiro José Torres, que com o seu apoio ajudaram a viabilizar este Encontro. Agradecemos igualmente à Sociedade Portuguesa de Matemática, que nos tem apoiado sempre, desde a nossa constituição como secção autónoma da Sociedade, e em Gouveia esteve representada pelo seu então Presidente, Professor João Araújo. Tivemos igualmente a colaboração de um conjunto de alunos do Instituto de Gouveia, que contribuiram para que o Encontro decorresse sem problemas. A todos agradecemos a boa vontade.

Houve ainda todo um conjunto de instituições de Gouveia que apoiaram o Encontro e a quem são devidos os nossos agradecimentos: Eurosol Hotels Gouveia, Quinta da Espinhosa, Escola Apostólica do Cristo Rei e o Restaurante Albertino, em Folgosinho, onde tivemos um memorável jantar do Encontro que certamente ficará na memória de quantos nele participaram. Por último queremos igualmente agradecer aos nossos colegas da Comissão Científica, João Caramalho Domingues e Fernando Figueiredo, que contribuiram de forma decisiva para o êxito desta realização do SNHM.

As comunicações abrangeram um vasto leque de temas da História da Matemática e do Ensino da Matemática, principalmente incidindo em temas entre o século XVIII e o século XX. Na conferência inaugural foi debatido o que define um jornal matemático, como se faz a circulação do saber matemático pelos jornais e nos jornais. Seguiram-se palestras em que foram referidas figuras significativas da história científica mundial, como Isaac Newton, Gottfried Leibniz, Richard Dedekind, Georg Cantor e Frederick Soddy. Foi abordada a relação entre a matemática e a música ao longo da história, mencionando músicos como Johan Sebastian Bach e Iannis Xenakis. Na base de uma perspectiva histórica, fez-se um estudo comparado do pentágono e do heptágono regulares para se encontrarem algumas relações algébricas e suas visualizações geométricas. Foi lembrado o matemático e historiador da Matemática Eduardo Ortiz, falecido em 2021, que muito escreveu sobre a matemática portuguesa e era colaborador do SNHM, tendo participado nalgumas das suas realizações. Foram analisadas questões da história matemática portuguesa, em particular sobre a geometria da carta de navegar, o *Estudo de Montepios* de Luiz Feliciano Marrecas Ferreira, problemas do Ensino primário e secundário nos séculos XIX e XX, o *Observatório* da

Universidade de Coimbra em Santa Clara, o *Núcleo de Matemática, Física e Química*, Sebastião e Silva e aspetos da introdução da chamada “matemática moderna” em Portugal, compararam-se os projetos de Bento de Jesus Caraça, Amoroso Costa e Jerome Bruner, bem como um relatório da UNESCO para uma melhor abordagem da Matemática e da Educação.

Como é costume terminarmos esta introdução, esperamos que a publicação destes resumos seja útil a todos os que a consultarem, que aumente a curiosidade de saberem mais sobre alguns destas questões, e que constitua um estímulo para futura participação em outros encontros do SNHM, quer como palestrantes quer como assistentes.

O Seminário está aberto a todos e de todos precisa.

Programa

17 de Junho

09.00 *Entrega de pastas*

09.20 *Abertura do Encontro* (representante do Instituto de Gouveia, representante da Câmara Municipal de Gouveia, representante da SPM, Coordenador-Geral do SNHM)

09.40 Philippe Nabonnand (Archives Henri Poincaré e Université de Lorraine) — *What is a mathematical Journal? Mathematical circulation via and in journals*

10.40 Augusto J. Franco de Oliveira (Professor Emérito da Universidade de Évora, CFCUL) — *Richard Dedekind e o princípio de permanência das regras formais*

11.10 *Coffee Break*

11.30 Helmuth R. Malonek (Departamento de Matemática, CIDMA, Universidade of Aveiro) — *Químico, matemático amador e poeta: Frederick Soddy – Nobel 1921*

12.00 Ana Patrícia Martins (Escola Sup. de Educação de Viseu / CIUHCT) — Estudo sobre monte-pios*, por Luiz Feliciano Marrecas Ferreira: uma primeira abordagem*

12.30 Manuel Xavier (CIUHCT/FCUL) — *Renovando Entre a Luta Surda: o Núcleo de Matemática, Física e Química, (1936–1939)*

13.00 *Almoço*

14.30 Helena Sousa Melo e Maria do Carmo Martins (Faculdade de Ciências e Tecnologia – Departamento de Matemática e Estatística, CEHu – Universidade dos Açores) — *Matemática e Música: Histórias de vidas que contam, tocam, cantam e encantam*

15.00 João Caramalho Domingues (Centro de Matemática, Universidade do Minho) — *Construções dos números reais no ensino liceal, c. 1900*

15.30 Ana L. Correia (Academia Militar, CEAFEL), Francisco V. Domingues (Academia Militar) — *O Ensino da Matemática no Século XIX: o exemplo da extracção da raiz cúbica – análise das abordagens em alguns manuais da época*

16.00 Maria Paula Oliveira (Universidade de Aveiro/Departamento de Matemática) — *33 anos do Projecto Matemática Ensino*

16.30 *Coffee Break*

17.00 *Tarde Social*

20.00 *Jantar do Encontro*

Programa

18 de Junho

09.00 Henrique Guimarães (Instituto de Educação- Universidade de Lisboa) — *Sebastião e Silva e o Seminário de Royaumont (1959) – para um currículo "moderno" de Matemática*

09.30 Alexandra Rodrigues (Centro Interdisciplinar de Ciências Sociais (CICS.NOVA), Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa, UIED) — *Aplicações da Matemática durante o Movimento da Matemática Moderna no Ensino Técnico em Portugal*

10.00 Mária Cristina Almeida (Centro Interdisciplinar de Ciências Sociais (CICS.NOVA), Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa) — *Matemática pela rádio: uma experiência nos anos setenta*

10.30 Rui Candeias (UIED – FCT-UNL / Agrupamento de Escolas Terras de Larus) — *Os números racionais não negativos: análise de contextos de ensino em manuais da formação inicial dos professores do ensino primário (1934–1974)*

11.00 *Coffee Break*

11.30 Parisa Kharazmi (Centro de Investigação e Desenvolvimento em Matemática e Aplicações (CIDMA) Universidade de Aveiro) — *Polígonos Regulares e Proporções – um Capítulo Esquecido na História da Matemática*

12.00 João Tomás do Amaral, (Faculdade de Educação da Universidade São Paulo, Instituto Histórico e Geográfico de São Paulo) — *Cultura Geral e Ideias Fundamentais: Caraça, Bruner e Delors*

12.30 Luís Saraiva (CIUHCT, DM da FCUL) — *Eduardo L. Ortiz, matemático e historiador (1931–2021)*

13.00 *Almoço*

14.30 Niccolò Guicciardini (Departamento de Filosofia «Piero Martinetti», Università degli Studi di Milano) — *Two questions concerning the history of the calculus*

15.30 Sandra Poiarez (Centro de Investigação da Terra e do Espaço da Universidade de Coimbra – CITEUC) — *Seis pavilhões para seis instrumentos: o Plano-Programa do Observatório Astronómico da Universidade de Coimbra, em Santa Clara*

16.00 Bruno Almeida (CIUHCT, Projecto MEDEA-Chart) — *A geometria das cartas de navegar: um debate do século XVI*

16.30 *Encerramento do Encontro*

16.40 *Coffee Break de Encerramento*

Circulations mathématiques dans et par les journaux

Philippe Nabonnand
Archives Henri Poincaré
Université de Lorraine, Université de Strasbourg, CNRS

Depuis quelques temps, les historiens des mathématiques s'intéressent à la circulation des mathématiques ; il est vrai que pour aborder les mathématiques comme une phénomène social, il est difficile d'ignorer les processus de circulation des savoirs mathématiques au sein de la société, entre communautés, entre disciplines, du point de vue des applications et de l'enseignement. Il n'est pas question d'opposer approches focalisées sur la production de savoirs mathématiques mais plutôt de proposer de nouveaux questionnement concernant le fonctionnement du champ mathématique et les ancrages des mathématiques dans la société. Dans ce qui suit, nous aller aborder la question de la circulation mathématique à partir des « journaux mathématiques ». Pour cela, nous commencerons par discuter de ce qu'est un « journal mathématique », puis nous donnerons quelques résultats issus du projet de recherche Cirmath (Circulation des mathématiques par et dans les journaux – histoire, territoires, publics) qui a réuni entre 2014 et 2020 une quarantaine de chercheurs internationaux [1][1].

La circulation mathématique ne concerne pas seulement celle des continus mais tout ce qui relève de la pratique mathématique, méthodes, points de vue, compréhension d'une question, explications, « métaphysique », idées, manières de faire, de présenter ou d'enseigner, informations académiques, professionnelles, vulgarisation... sans oublier des circulations matérielles comme celle des ouvrages, des journaux, des lettres, du matériel pédagogique, des modèles. Les processus de circulation impliquent les agents du champ mathématique qu'ils s'agissent d'individus, de collectifs, de communautés de travail ou de recherche et s'effectuent à travers des vecteurs de circulation comme les correspondances, les publications ou même les discussions ; les « journaux mathématiques »constituent ainsi un « espace de circulation » [8] qui a été l'objet d'étude du projet Cirmath. Dans ce qui suit, il faut entendre la notion de « journal mathématique » au sens le plus large possible, à savoir des publications qui offrent plus ou moins régulièrement à leur lectorat des contenus mathématiques. Avec le choix de la longue

[1]Le projet Cirmath a été financé par l'Agence Nationale de la Recherche française (ANR) et porté par Hélène Gispert (GHDO), Philippe Nabonnand et Jeanne Peiffer (Centre Koyré).

durée (fin du 17e siècle–1940), dans l'intention de saisir le phénomène de la publication dans son extension géographique la plus étendue et de mettre en avant la diversité des publics, le corpus des « journaux mathématiques » s'avère numériquement conséquent : plus de 1850 items, plus de 400 villes dans lesquelles au moins un « journal mathématique » est publié. Le corpus a été organisé dans une base de données dans laquelle les journaux ont été catégorisé en « spécialisés » (uniquement des contenus mathématiques), « scientifiques et techniques » (les mathématiques parmi d'autres contenus scientifiques et/ou techniques), « généralistes » (toutes les formes de savoirs). Les lectorats ont été classés en large sphères exprimant les publics visés par les journaux : les « spécialistes » pour désigner les producteurs de savoirs mathématiques, les « ingénieurs et scientifiques » pour les acteurs qui appliquent des mathématiques (qui peuvent en appliquant les mathématiques proposer des innovations mathématiques), le monde de l'enseignement (« enseignants », « él'eves », ...) et le « grand public » qui réunit les amateurs ou les publics intéressés par des informations ou de la vulgarisation mathématique. Il est clair que ces catégories sont vagues, peuvent se recouvrir, sont historiquement mouvantes — pendant très longtemps, en particulier au 18e siècle, les « spécialistes » sont aussi des « scientifiques et ingénieurs.

	1700	1750	1800	1850	1900	1940
Europe	13	52	91	239	566	614
Oceanie	0	0	1	2	8	12
Amérique du Nord	0	0	3	29	116	149
Asie	0	0	0	1	7	56
Amérique du Sud	0	0	0	1	13	26
Afrique	0	0	0	0	0	7
Moyen Orient	0	0	0	0	0	3
Total	13	52	95	272	712	867

Les effectifs des « journaux mathématiques » par continent

Un premier examen fait apparaître que le phénomène d'édition mathématique est essentiellement européen (plus de 73% du corpus publié en Europe) et que près de 70% des journaux publiés en Europe le sont dans quatre pays : l'Allemagne (plus de 280 journaux recensés), la France (plus de 250 items), l'Italie (près de 210 items) et la Grande Bretagne (plus de 180 items). Pour le reste de l'Europe, à l'exception des Pays-Bas (près d'une centaine d'items), en distinguant des aires qui correspondent plus ou moins à des entités politiques, linguistiques ou culturelles, on peut citer l'Europe centrale (près d'une centaine d'items), l'Europe de l'Est (plus de 80 items), la Scandinavie (près de 70 items) et la péninsule ibérique (une petite quarantaine d'items). À l'échelle des villes, deux dynamiques concomitantes apparaissent, une concentration autour de bibliopoles qui sont des capitales politiques et/ou culturelles ; ainsi, près des 2/3 des journaux britanniques, français et allemands sont respectivement domiciliés éditorialement à Londres, Paris, Berlin et Leipzig. Dans le même temps, le phénomène de publication de « journaux mathématiques » atteint de nombreuses villes de ces pays ; en France, 42 villes sont concernées par ce phénomène, 19 en Grande Bretagne, 37 en Italie et 52 en Allemagne.

L'univers de l'édition de « journaux mathématiques » s'élargit significativement avec l'explosion éditoriale que l'on constate après l'indépendance des États-unis [4, 2, 7]. La seconde internationalisation significative est celle qui affecte l'extrême Orient à la fin du 19e siècle. La plupart des « journaux mathématiques » japonais créés à ce moment sont des journaux « spécialisés » destinés au monde de l'enseignement, une dynamique liée à un bouleversement des programmes dans tous les ordres d'enseignement [5]. Les journaux chinois sont quant à eux plutôt, « généralistes » à destination d'enseignants et du grand public. Les analyses à l'échelle des villes permettent d'approfondir les phénomènes d'internationalisation, de concentration autour de bibliopoles et de dispersion des lieux d'édition de « journaux mathématiques ».

L'analyse de la base de données des « journaux mathématiques » fait apparaitre des dynamiques qui laissent penser qu'elles sont associées à des circulations diverses et pour nombre d'entre elles négligées par l'historiographie. Pour autant, on ne peut pas perdre de vue que les journaux fonctionnent de manière très différente, ne serait-ce qu'en tenant compte que la quantité de mathématiques proposées est variable selon les catégories de journaux (si les journaux « spécialisés » sont intégralement consacrés à celles-ci, nombre de journaux « scientifiques et techniques » ne proposent que peu de mathématiques pour ne pas parler des journaux « généralistes ») et au cours de leur existence. Même très utiles en première approximation et même plus concernant le corpus des journaux « spécialisés » [9], les seules analyses des effectifs de corpus de « journaux mathématiques » ne permettent pas d'atteindre les phénomènes fins de circulation.

Références

[1] Cirmath, *Circulations mathématiques dans et par les journaux*, `https://cirmath.hypotheses.org/`.

[2] Samson Duran, *Des géométries étatsuniennes à partir de l'étude de l'American Mathematical Society : 1888–1920*, Université de Paris-

Saclay, Orsay, 2019.

[3] Jules Henri Greber, Philippe Nabonnand, « Une base de données de journaux mathématiques », *in* C. Benzitoun, M. Rebuschi (éds.), *Les Corpus en sciences humaines et sociales*, PUN-Edulor, Nancy, 2021.

[4] Deborah Kent, « A connected effort? American editors pursue mathematical journal publication, 1804–1878 », *Revue d'Histoire des Mathématiques*, vol. 25, No. 2 (2019), pp. 195–233.

[5] Harald Kümmerle, *Die Institutionalisierung der Mathematik als Wissenschaft im Japan der Meiji- und Taishō-Zeit*, Martin Luther Universität, Halle-Wittenberg, 2019.

[6] Philippe Nabonnand, Jeanne Peiffer, Hélène Gispert, « Circulations et échanges mathématiques (18e–20e siècles) », *Philosophia Scientiae*, Vol. 19, No. 2 (2015), pp. 7–16.

[7] Karen Hunger Parshall, David E. Rowe, *The Emergence of the American Mathematical Research Community, 1876–1900*, American Mathematical Society and London Mathematical Society, Providence, 1994.

[8] Jeanne Peiffer, Hélène Gispert, Philippe Nabonnand, « Interplays between mathematical journals at different scales », *Historia Mathematica*, Vol. 45, No. 4 (2018), pp. 323–333.

[9] Jeanne Peiffer, Hélène Gispert, Philippe Nabonnand, « De l'histoire des journaux mathématiques à l'histoire de la circulation mathématique », *Cahiers François Viete*, Sér. III, Vol. 9 (2020), pp. 123–154.

Richard Dedekind e o princípio de permanência das regras formais

Augusto J. Franco de Oliveira
Professor Emérito da Universidade de Évora
Centro de Filosofia das Ciências da Universidade de Lisboa

1. Alguns precursores. Sob uma forma ou outra, a "permanência das regras formais" é uma ideia pressentida ou intuída e utilizada pelos matemáticos desde a antiguidade, mas a primeira formulação aproximativa é talvez a de Leibniz com o nome de *"lei (ou princípio) da continuidade"*, um princípio heurístico, baseado em trabalhos anteriores de Nicolau de Cusa e Johannes Kepler. Diz ele (1701): «Em qualquer suposta transição contínua, terminando em qualquer término, é lícito instituir um raciocínio geral, no qual o término também pode ser incluído (*Cum Prodiisset*).»

Kepler (*Nova stereometria doliorum vinariorum*, 1615) utilizou a lei da continuidade para calcular a área do círculo, representando-o como um polígono com infinitos lados de comprimento infinitesimal e somando as áreas de infinitos triângulos com bases infinitesimais. Leibniz utilizou o referido princípio para estender conceitos como operações aritméticas de números comuns a infinitesimais, lançando as bases do cálculo infinitesimal. Na *Análise Não-standard* (ver Oliveira e van den Berg [5]) há diversas versões de princípios deste tipo conhecidos por *princípios de transferência.*

Entre os precursores do princípio de permanência há que mencionar Gauss (1819, publicado postumamente, sobre rotações no espaço) e também Johann Peter W. Stein (1795–1831), *Elemente der Algebra* (1828) [9] (citado por Toader [7]). Os principais desenvolvimentos no sentido de formulação de um princípio metodológico, aplicado principalmente no contexto das extensões do conceito de número, dão-se no princípio do séc. XIX, com George Peacock (1930), mas é a Hermann Hankel (1867) que é atribuída a sua formulação mais explícita e moderna. Todavia, já encontramos uma versão daquele princípio na tese de *Habilitation* de Richard Dedekind (1854).

2. Hamilton. Na Ponte de Broome, que atravessa o Canal Real em Cabra, Dublin, Irlanda, está afixada uma placa que diz: «Aqui, enquanto passava no dia 16 de Outubro de 1843 Sir William Rowan Hamilton, num golpe de génio, descobriu a fórmula fundamental para a multiplicação de quaterniões $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$, que ficou gravada numa pedra desta ponte.» Naquele dia, Hamilton vencera a *relutância* que o vinha consumindo desde há, pelo menos, 13 anos: ao procurar *generalizar os complexos ao espaço tridimensional,* esbarrava sempre na dificuldade em definir uma multiplicação apropriada. *Apesar de não conseguir "multiplicar triplos", descobriu uma forma de o fazer para quádruplos.* A multiplicação de quaterniões violava o princípio da permanência das regras de cálculo: ao *prescindir da comutatividade,* pela primeira vez, Hamilton estava a abrir as portas à álgebra abstracta.

3. Princípios de permanência. Antes do advento da matemática moderna e da sua ênfase no método axiomático, o princípio da permanência foi considerado uma ferramenta importante nos raciocínios matemáticos informais, e utilizado como heurística, sobretudo para *descobrir* novas estruturas algébricas, como as Álgebras de Boole.

O princípio foi descrito por George Peacock no seu livro *A Treatise of Algebra* (1830) e foi posteriormente revisto por Hermann Hankel e adoptado por Giuseppe Peano, Ernst Mach, Hermann Schubert e Alfred Pringsheim, entre outros. Em 1821 Augustin-Louis Cauchy publicara o *Cours d'Analyse* (1821), que utilizou o termo "generalidade da álgebra" para descrever (e criticar) um método de argumentação utilizado por matemáticos do século XVIII, como Euler e Lagrange, que era semelhante ao Princípio da Permanência.

4. Peacock. George Peacock (1791–1858), na pág. 59 de *Symbolical Algebra* [6] enuncia o seu "Princípio de Permanência de Formas Equivalentes": «Quaisquer formas algébricas que sejam equivalentes quando os símbolos são gerais na forma mas tomam valores específicos, permanecem equivalentes quando os símbolos são gerais tanto em forma como nos seus valores.»

5. Hankel. Hermann Hankel (1839–1873), no seu *Prinzip der Permanenz der formalen Gesetze* (Cap. I, §3 *in* [3] (1867), enuncia: «Se duas formas expressas em símbolos gerais da aritmética universal são iguais, então devem permanecer iguais se os símbolos deixam de designar quantidades simples e as operações também recebem em consequência algum conteúdo diferente.»

Apraz-nos registar que no *Compêndio de Álgebra* [8], utilizado no ensino liceal nos anos 60, José Sebastião e Silva e José da Silva Paulo referem-se, nas pp. 19–20, ao Princípio de Hankel como *Princípio de Conservação de Propriedades Formais.* [1]

[1] Agradeço ao Professor Helmuth Malonek (Univ. de Aveiro) a indicação exacta das referências às citações do *Compêndio de Álgebra* de José Sebastião e Silva e José da Silva Paulo.

6. Dedekind. O texto da palestra de *Habilitation* de Richard Dedekind (1831–1916), *Über die Einführung neuer Funktionen in der Mathematik,* 1854, foi publicado pela primeira vez em 1932 (*Werke* [1]), e nele enuncia um *Princípio de Permanência das leis formais*, a que chama *princípio fundamental* (Oliveira [4], p. 62): «As leis que emergem das definições iniciais e que são características dos conceitos que designam devem ser consideradas de validade geral.»

Referências

[1] Dedekind, R. *Gesammelte mathematische Werke.* Friedr. Vieweg & Sohn, Brunsvique, 1932).

[2] Ebrahim, A. How Algebra became abstract: George Peacock & the birth of modern algebra (England, 1830), on April 10th, 2020, in `https://mathscitech.org/articles/how-algebra-became-abstract`

[3] Hankel, Hermann. *Theorie der complexen Zahlensysteme*, Leopold Voss, Leipzig, 1867. Ver também `https://www.encyclopedia.com/science/dictionaries-thesauruses-pictures-and-press-releases/hankel-hermann`.

[4] Oliveira, A. J. F. (Edição, organização e tradução) *Dedekind e os Números: Antologia de Textos Fundacionais de Richard Dedekind.* Textos Universitários No. 15, Editora Livraria da Física, S. Paulo, 2022, ISBN 9786555632026.

[5] Oliveira, A. J. F.; e van den Berg, I. *Matemática Não-Standard, Uma Introdução com Aplicações.* Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 2008.

[6] Peacock, George. *Treatise on Algebra*, Cambridge & J. J. Deighton, London, 1930.

[7] Toader, Iulian D. "Permanence as a principle of practice." *Historia Mathematica*, **54** (2021), pp. 77–94.

[8] Silva, J. Sebastião e; e Paulo, J. da Silva. *Compêndio de Álgebra,* 1.º Tomo, 6.º Ano, Livraria Cruz, Braga, 1962.

[9] Stein, J. P. W. *Elemente der Algebra,* 1828.

Químico, matemático amador e poeta: Frederick Soddy — Nobel 1921

Helmuth R. Malonek
Departamento de Matemática, CIDMA, Universidade de Aveiro

Em 1921, no mesmo ano que Albert Einstein, o químico britânico Frederick Soddy (1877–1956) recebeu o Prémio Nobel pela sua teoria dos isótopos (1913) e descobertas sobre a natureza da radioatividade, que contribuíram essencialmente para o surgimento da química nuclear.

Momentos decisivos na carreira profissional de F. Soddy como químico foram a sua colaboração, no ano 1900, com o físico Ernest Rutherford (Prémio Nobel 1908) e no ano 1903 com o químico William Ramsay (Prémio Nobel 1904). Nas atas do 1.º Encontro Nacional de História da Química do ano passado em [Malonek/Kharazmi (2021)], encontram-se mais detalhes biográficos, até ao ano 1936.

Curiosamente, a partir de 1936 F. Soddy abandonou o seu trabalho de químico e dedicou-se às questões sociais e económicas, à Matemática e à Poesia, uma combinação bastante estranha para um vencedor do Prémio Nobel, que foi o primeiro cientista de Oxford a receber esta mais alta distinção. A estranheza de alguns dos seus colegas e antigos colaboradores sobre estas atividades é patente, por exemplo, nas seguintes observações no *Obituário* [Fleck (1956)]:

> *. . . his time was devoted to riding various hobby horses which it is difficult to imagine will ever find a permanent place in the culture of our times. Economic theory, the closest packing of spheres . . . .*

É muito importante mencionar que os problemas sociais e económicos de F. Soddy decorreram da sua experiência profissional, tendo de facto sido motivados por preocupações com as consequências da radioatividade e a responsabilidade dos cientistas, fazendo de F. Soddy um profeta do seu tempo [Davies (1992)]. Além disso, o matemático amador Frederick Soddy ainda hoje é citado em publicações matemáticas. Lembramos que o chamado *hobby* do *closest packing of spheres* é um conceito matemático relacionado historicamente com o empacotamento de círculos no plano, com origens no trabalho de Apolónio há mais de 2.000 anos, que inspirou vários matemáticos ao longo dos séculos, particularmente René Descartes no século XVII, cf. [Coxeter (1968)]. Um dos contributos de F. Soddy, que consiste na generalização do resultado de Descartes para o espaço tridimensional, está incluído no Soddy-Gosset-Theorem, [Lagarias (2002)] e continuou a ser referido, juntamente com resultados recentes, por exemplo em [Stephenson (2003), Baragar (2018), Kontorovich (2019)].

Mais concretamente, na geometria do plano euclidiano, um problema de Apolónio de Perga (262–190 a. C.) é construir círculos que sejam tangentes a três círculos dados no plano [Coxeter (1968)]. Em geral, uma configuração de Descartes é uma configuração de quatro círculos mutuamente tangentes no plano, em que três círculos não têm uma tangente comum, incluindo o caso de uma linha reta, considerada como um círculo de raio infinito. Suponha-se que os raios dos círculos são r_1, r_2, r_3, r_4. Os recíprocos destes são as curvaturas (ou "bends", como Soddy lhes chamava) k_i, $i = 1, 2, 3, 4$. No caso particular da inclusão de 3 círculos num quarto círculo de raio r_4, define-se a curvatura orientada do círculo exterior como $-1/r_4$. Neste caso a fórmula de R. Descartes, [Lagarias (2002)], é nada mais do que uma equação quadrática entre as curvaturas de 3 círculos mutuamente tangentes (externamente) com o quarto círculo mutuamente tangente (internamente) da forma:

$$(k_1 + k_2 + k_3 + k_4)^2 = 2(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2).$$

Como F. Soddy demonstrou, as curvaturas de cinco esferas analogamente mutuamente tangentes estão relacionadas por:

$$(k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5)^2 = 3(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2 + k_5^2). \tag{1}$$

O início da atividade de F. Soddy na área da Matemática está marcado por três breves notas na revista *Nature*. A primeira destas notas [Soddy (1936)] foi o poema "The Kiss Precise" sobre círculos e esferas satisfazendo a fórmula (1). Este foi mais tarde seguido de notas sobre uma configuração geométrica tridimensional a que chamou *Hexlet* [Soddy (1937a), (1937b)].

Para isso Soddy considerou o preenchimento de uma esfera oca com esferas de raios mais pequenos, usando a relação (1), mas sem se restringir ao caso de 4 esferas externamente tangentes com a quinta esfera internamente tangente. Partindo de duas esferas C_1 e C_2 mutuamente tangentes (externamente) com uma esfera maior C_3 dentro da qual C_1 e C_2 são internamente tangentes, em seguida, considerou a construção de uma cadeia de esferas tangentes externamente a C_1 e C_2 e internamente a C_3 (de modo que C_3 contém a cadeia, bem como as duas esferas originais). Soddy reparou neste processo que, surpreendentemente, cada cadeia se fecha num "colar"após seis esferas (a que chamou *Hexlet*), independentemente de onde a primeira esfera é colocada [Weisstein2022].

NOTA FINAL: A investigação histórica esclareceu que as descobertas de Soddy eram apenas redescobertas independentes (cf. [Lagarias (2002)]). No entanto, são relevantes e merecem o reconhecimento do seu mérito, pois resultaram de uma experiência física interessante (e não do método habitual de inversão das esferas). Em [Soddy (1937b)] explica-se a origem da ideia do *Hexlet* preenchendo uma esfera oca com esferas de raios mais pequenos:

> *This interesting property was discovered experimentally for some of the hexlets of the model illustrated in NATURE (Jan. 9, 1937, p. 78) by Mr. F. March, the mechanic of the Old Chemistry Department, who constructed it.*

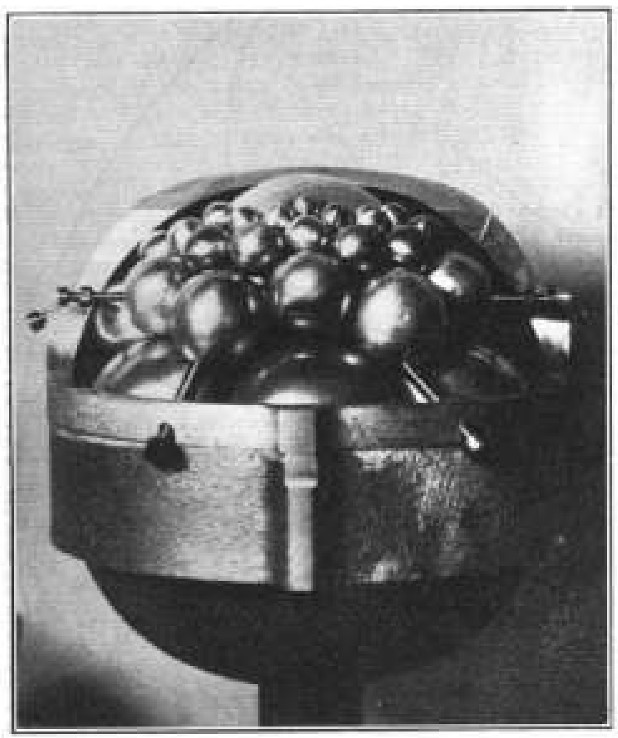


Figura 1: A imagem do empacotamento de esferas mencionada por F. Soddy.

Referências

A. Baragar, "Higher dimensional Apollonian packings, revisited", *Geom. Dedicata*, 195 (2018), 137–161.

H. S. M. Coxeter, "The Problem of Apollonius", *Amer. Math. Monthly*, 75:1 (1968), 5–15.

M. Davies, "Frederick Soddy: The scientist as prophet", *Ann. of Science*, 49:4 (1992), 351–367.

A. Fleck, "Obituary: Prof. Frederick Soddy, F. R. S.", *Nature*, 178 (1956), 893.

A. Kontorovich, "The local-global principle for integral Soddy sphere packings", *J. Mod. Dyn.*, 15 (2019), 209–236.

J. C. Lagarias et al., "Beyond the Descartes Circle Theorem", *Amer. Math. Monthly*, 109:4 (2002), 338–361.

H. R. Malonek, P. Kharazmi, "Frederick Soddy — Nobel 1921, amateur mathematician, and poet", in: *A evolução da química: impactos na sociedade.* (2021), Eds. I. Malaquias and J. Oliveira, 113–121, DOI: 10.48528/y82q-sf85, `http://hdl.handle.net/10773/32109`.

F. Soddy, "The Kiss Precise", *Nature* 137 (1936), 1021.

F. Soddy, "The Bowl of Integers and the Hexlet", *Nature* 139 (1937a), 77–79.

F. Soddy, "The Hexlet", *Nature* 139 (1937b), 154.

K. Stephenson, "Circle packing: A mathematical tale", *Notices AMS*, 50:11 (2003), 1376–1388.

E. W. Weisstein, "Hexlet", *MathWorld* –A Wolfram Web Resource (2022), `https://mathworld.wolfram.com/Hexlet.html`.

Estudo sobre monte-pios, por Luiz Feliciano Marrecas Ferreira: uma primeira abordagem

Ana Patrícia Martins
Escola Superior de Educação de Viseu / CIUHCT

Os *montepios de sobrevivência* (MS) portugueses — associações de socorros mútuos que providenciavam pensões *de sobrevivência* aos herdeiros dos seus sócios, após a sua morte, mediante o pagamento de contribuições tabeladas — assumiram, no século XIX, um papel fundamental na assistência social em Portugal. Os primeiros, militares, foram criados em finais do século XVIII; o Montepio Literário (1815) foi o primeiro montepio civil, mas é na década de 1840 que se assiste a um crescendo dessas instituições. O mais próspero dos MS foi o Montepio Geral (MPG) (1840).

Os fundos de pensões estabelecidos nos MS, durante todo o século XIX, não obedeciam aos princípios da Ciência Actuarial. Muito embora a teoria básica de anuidades Vida estivesse estabelecida desde a primeira metade do século XVIII (por Abraham de Moivre; ampliada por diversos autores britânicos, até meados do século), a falta de estatísticas de mortalidade fidedignas da população portuguesa inviabilizava a construção de tabelas actuariais ajustadas à realidade das associações. O carácter mutualista dos MS legitimava uma assistência abrangente (permitiam-se múltiplos beneficiários e a transmissão de pensões entre eles), o que impossibilitava a previsão de encargos futuros. O problema era reconhecido desde a década de 1830, mas reformas de fundo não foram implementadas. No MPG, comissões diversas estudaram a organização do plano de pensões, pelo menos desde a década de 1860. Na década de 1880, o MPG e o *Montepio Oficial dos Servidores do Estado* (MPO) (os MS mais relevantes), enfrentavam dificuldades de solvabilidade dos seus fundos de pensões. No século XIX, a maior parte dos MS portugueses faliu. Desconhecem-se os princípios usados na elaboração das suas tabelas de pensões e de contribuições. Luiz Feliciano Marrecas Ferreira (1851–1928) graduou-se, em 1875, no curso de Engenharia Militar da Escola do Exército (EE). Em 1880, tornou-se lente da EE e em 1886 ocupava o lugar de lente da 28.ª cadeira, *Operações Financeiras* (OF), do Instituto Industrial e Comercial de Lisboa (IICL). (Ainda no IICL, e no seu sucessor, o Instituto Superior de Comércio (ISC), leccionou cadeiras de matemática.) Compôs textos científicos em temas diversos. Em actuariado, somente um, sendo a investigação nessa área motivada pela filiação ao MPG. Na década de 1880, integrou comissões diversas para o estudo da viabilidade financeira do seu plano de pensões e, nos princípios do século XX, fez parte de comissões que estudaram o cálculo de reservas matemáticas e a reforma de estatutos. Foi um dos autores da regulamentação da indústria de seguros de 1907. E, em 1926, tornou-se um dos sócios fundadores da Associação dos Actuários Portugueses, a primeira associação profissional de actuários nacional.

Estudo sobre Monte-pios é a dissertação que elaborou para o concurso ao lugar de lente proprietário da cadeira de OF do IICL, onde se iniciou o ensino de assuntos de actuariado em Lisboa. O tema poderia ser *escolhido livremente de entre as questões mais importantes das ciências que fazem parte dessa cadeira* (assim se lê na publicitação do concurso) e a sua escolha revela-se perfeitamente ajustada ao estado de prosperidade dos MS. Trata, de forma aprofundada, a problemática da estabilidade financeira dos MS, com especial enfoque no MPG e no MPO. Uma primeira abordagem permite-nos esclarecer que, em meados da década de 1880, os problemas para fundamentar, com bases actuariais, os fundos de pensões instituídos nos MS persistiam — escassez de estatísticas ajustadas à população e dificuldade em torno da construção de tabelas actuariais que contemplassem uma ampla assistência. A ligação de Marrecas Ferreira ao MPG faz-nos equacionar que as suas propostas para ultrapassar esses obstáculos fossem discutidas no seio de comissões que estudavam o plano de pensões da instituição. Destacamos uma proposta de cálculo das pensões legadas que contorna a indefinição dos beneficiários no momento da subscrição pelo sócio, bem como a transmissão de pensões. Assente no princípio de *encargo máximo*, pressupunha as condições mais desvantajosas para o fundo, em termos de encargos futuros no pagamento das pensões — a existência de apenas um beneficiário, uma filha menor, que não casasse (tomando como referência as tábuas de mortalidade inglesas H^{M}, H^{F} e $H^{M(5)}$, essa filha teria 10 anos).

A cadeira de OF fazia parte do plano de estudos do 3.º ano do Curso Superior de Comércio criado em 1884 no IICL, um curso técnico-profissional de 5 anos. (Funções de *actuário* seriam exercidas por um *empregado superior de estabelecimentos comerciais e* industriais, uma das saídas profissionais do curso.) O primeiro programa dessa cadeira é de 1888. Contempla assuntos de cálculo financeiro, cálculo de probabilidades e cálculo actuarial (seguros de vida, rendas vitalícias, caixas económicas e montepios, cálculo de risco em operações de bolsa). No que respeita ao tópico *montepios*, especial destaque é dado ao MPG e ao MPO, em estreita correspondência com o *Estudo* de Marrecas Ferreira. O facto desse programa se ter mantido por cerca de três décadas, como expomos de seguida, reforça a pertinência de uma análise detalhada do contributo do engenheiro militar. A instrução em matemática actuarial ministrada entre 1888 e 1919 (primeiramente no IICL e, a partir de 1911, no ISC) não terá sofrido grandes alterações. Os conteúdos programáticos das diversas cadeiras não diferem daqueles extensivamente detalhados (em sete páginas) no programa de 1888 da cadeira de OF. (Já os restantes programas restringem-se a títulos de capítulos.) Foram três os lentes que assumiram esse ensino. Até 1911, no IICL, a cadeira OF foi leccionada por Marrecas Ferreira, Augusto Patrício dos Prazeres (1859–1922) e Caetano Maria Beirão da Veiga (1888–1962); no ISC, sucederam-se as duas cadeiras *Operações financeiras a longo prazo* e *Seguros; Instituições de previdência*; *Contabilidade de seguros*, mantendo-se, na cátedra, Prazeres e Beirão da Veiga. Tentativas de reforma dos estudos em actuariado estão documentados desde a década de 1910. Destaca-se em 1911, a tentativa de introdução de cursos de Estatística e de Matemática Actuarial na Faculdade de Ciências da Universidade de Coimbra, por Sidónio Pais, vice-reitor e professor dessa Faculdade. A proposta foi reprovada, por não se considerar a *teoria matemática dos seguros* assunto *próprio* duma universidade.

Estudo sobre monte-pios, o único texto em assuntos actuariais, publicado, de Marrecas Ferreira, sugere uma estreita relação entre a prática actuarial, a investigação em torno das fundações actuariais de fundos de pensões de MS e a instrução em actuariado. A relevância científica dos métodos propostos e a sua efectiva aplicação em MS, porventura por comercialistas formados nos IICL/ISC, são dois aspectos que merecem um estudo detalhado, permitindo aumentar sobremaneira o nosso conhecimento sobre o progresso dessas instituições em finais do século XIX e princípios do século XX.

Referências

Instituto Industrial e Comercial de Lisboa. 1888. *Programmas das cadeiras approvados por Portaria de 22 de agosto de 1888.* Lisboa: Imprensa Nacional.

Marrecas Ferreira, Luiz Feliciano. 1886. *Estudo sobre Monte-Pios. Dissertação para o concurso da cadeira de Operações Financeiras do Instituto Industrial e Commercial de Lisboa.* Lisboa: Typographia da Viuva Sousa Neves.

Martins, Ana Patrícia. 2011. Matemática actuarial: seu ensino nos Institutos

Superiores, dos seus inícios a 1930. *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática*, Outubro, 7–11.

Martins, Ana Patrícia. 2020. *Para a História do Atuariado em Portugal.* Lisboa: Instituto dos Actuários Portugueses. Cap. "Contributos para a história do actuariado em Portugal anterior à fundação do Instituto dos Actuários Portugueses", 23–69.

Renovando entre a Luta Surda: o Núcleo de Matemática, Física e Química

Manuel Xavier
CIUHCT–FCUL

O Núcleo de Matemática, Física e Química, fundado em 1936, foi uma iniciativa dinamizada por jovens investigadores europeizados, bolseiros da Junta de Educação Nacional (JEN), que reconheciam as insuficiências do ensino universitário português. O Núcleo organizou cursos extracurriculares e publicou quatro livros, tendo o seu espírito renovador incomodado o *status quo* académico (Gil 2003). A sua missão, nas palavras de um dos seus fundadores, o professor de física do Instituto Superior Técnico (IST) António da Silveira (1904–1985), era contribuir entre a juventude para o "despertar para a investigação científica" (Silveira 1971, 48).

Em 1929, havia sido fundada a JEN. A criação desta instituição foi um marco da maior importância na história da organização científica portuguesa (Lopes 2018). Os bolseiros desta junta, alguns regressados com doutoramentos do estrangeiro, como o matemático António Monteiro (1907–1980) e o físico Manuel Valadares (1904–1982), fundaram o Núcleo. Esta iniciativa, enquanto movimento independente das escolas, curto-circuitou a relação com a tutela universitária, visto que a JEN e depois a sua instituição sucessora — o Instituto para a Alta Cultura (IAC) — subsidiavam-na diretamente. De notar que a JEN e o IAC iam também criando centros de estudos anexos às universidades, espoletando tensões entre a universidade enquanto espaço de reprodução de saberes e os centros enquanto espaço de criação de conhecimento (Salgueiro 2018, cap. 4).

Devido a este tipo de tensões, o Núcleo sofreu de instabilidade e oposições, tanto externas como internas. O professor de matemática e diretor da Faculdade de Ciências de Lisboa (FCUL), Victor Hugo Duarte de Lemos (1894–1959), pretendia anexar o Núcleo à FCUL, destituindo-o assim do seu cariz independente. O Ministro da Educação à data, António Carneiro Pacheco (1887–1957), considerou o Núcleo como ensino superior particular, sobre o qual se devia legislar. E a própria Academia das Ciências de Lisboa parece ter estado envolvida numa intriga que terá prejudicada as atividades. "A oposição tocou a rebate a toda a parte [...] Fomos acoimados de indesejáveis comunistas", disse Silveira (1971, 49–50). Além disso, havia quem preferisse que as atividades decorressem no IST, como Silveira. Já Monteiro e Valadares preferiam a FCUL. A rivalidade IST–FCUL, neste caso plasmada em Valadares e Silveira, cujos laboratórios de física dificilmente colaboravam (Lopes 2018 cap. 4.2.3), também contribuiu para certas desinteligências. Bento de Jesus Caraça (1901–1948) escreveu inicialmente sobre o Núcleo: "Renovar fora das escolas", para logo se referir, contudo, a uma "luta surda".[1] O Núcleo cindiu-se em 1939.

Os ex-membros do Núcleo continuaram os seus trabalhos. Valadares continuou investigando com o seu grupo no Laboratório de Física da Universidade de Lisboa. Monteiro criou o Seminário de Análise Geral e fundou a revista Portugaliae Mathematica (PM). O Movimento Matemático estava no seu auge. Mas os entraves eram grandes. Referindo-se à ala universitária mais conservadora, Valadares escreveu: "os 'matemáticos' daqui estão apostados em sabotar tudo o que seja investigação científica".[2]

Por exemplo, Hugo de Lemos e Francisco Leite Pinto (1902–2000), este último dirigente do IAC, cortaram o subsídio à PM, por não lhes ter sido dado um lugar no quadro editorial da revista. Por esta razão, era a FCUL e seu diretor considerados pelo matemático Hugo Ribeiro (1910–1988) como os "inimigos número 1 da matemática".[3] Um jovem José Sebastião e Silva (1914–1972) dizia-se visado pela "má vontade da mestrança".[4] Alfredo Pereira Gomes (1919–2006), que atuou no Porto no grupo do matemático Ruy Luís Gomes (1905–1984), proferiu, depois do 25 de Abril, que as dificuldades ao trabalho "não era a PIDE", mas sim "os oficiais do mesmo ofício", e que foram esses mesmos colegas que "depois denunciaram as pessoas ativas como tendo ideias subversivas" (Sociedade Portuguesa de Matemática 2009). Este depoimento vai ao encontro das palavras de Silveira de que o Núcleo "foi a causa primeira, remota, das demissões de certas pessoas em junho de 1947" (Silveira 1984–5, 199).

Há ainda que ter em consideração os jogos políticos neste período. Tendo o Partido Comunista Português (PCP) uma preponderância inegável enquanto força agregadora entre os jovens cientistas com simpatias à esquerda, o partido tinha a sua própria agenda. Segundo Maria do Pilar Ribeiro (1911–2011), mulher de Hugo Ribeiro, o PCP também não queria a fundação de um instituto de matemática, porque isso seria "dar glória a Salazar" (Soci-

[1] Notas manuscritas de Bento de Jesus Caraça: Núcleo de Matemática, Física e Química, 1936–1939, Pasta 04399.024, Espólio Bento de Jesus Caraça, Arquivo da Fundação Mário Soares e Maria Barroso.

[2] Manuel Valadares a Armando Gibert, 1/04/1945, Espólio de Armando Gibert, Arquivo Histórico dos Museus da Universidade de Lisboa.

[3] Hugo Ribeiro a José da Silva Paulo, 14/05/1944, Espólio de Hugo Ribeiro, Biblioteca Nacional de Portugal (BNP).

[4] José Sebastião e Silva a Ruy Luís Gomes, 10/08/1942, espólio de Ruy Luís Gomes, Casa-Museu Abel Salazar.

edade Portuguesa de Matemática 2009). Monteiro, apesar de seu parceiro, também criticava Caraça pela sua “influência perniciosa na juventude”,[5] possivelmente referindo-se ao intensificar da sua atividade política.

Invejas, más-línguas, rivalidades institucionais e lutas políticas não eram amigas do trabalho continuado e eram o suficiente para, num meio conservador e de fraca tradição científica, coartar qualquer iniciativa inovadora. A desintegração do Núcleo, bem como o declínio dos centros de estudo e as purgas de 1947, são também fenómenos que devem à pequenez do meio científico português e suas frágeis instituições. As universidades também devem ser responsabilizadas por estes entraves. As externalidades como falta de dinheiro e perseguição política, tendo o seu peso inegável, não poderão servir indefinidamente como álibis para desculpar o conservadorismo das elites portuguesas.

Referências

Gil, Fernando Bragança, “Núcleo de Matemática, Física e Química: uma contribuição efémera para o movimento científico português”, *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática*, n.º 49 (2003): p. 77–92.

Lopes, Quintino, *A Europeização de Portugal entre Guerras: A Junta de Educação Nacional e a Investigação Científica*, Caleidoscópio, Casal de Cambra, 2018.

Salgueiro, Ângela, *Ciência e Universidade na I República*, Caleidoscópio, Casal de Cambra, 2018.

Silveira, António da, “Elogio Histórico de Luís António Rebelo da Silva”, em *Memórias da Academia das Ciências de Lisboa: Classe de Ciências*, tomo XV, 35–57, Academia das Ciências de Lisboa, Lisboa, 1971.

Silveira, António da, “Comentários Imperfeitos como elementos para uma História dos Estabelecimentos Científicos em Portugal”, em *Memórias da Academia das Ciências de Lisboa: Classe de Ciências*, tomo XXVI, 143–205, Academia das Ciências de Lisboa, Lisboa, 1984–5.

Sociedade Portuguesa de Matemática, *Memória da Matemática*, DVD, 5 vols., 2009.

[5] António Monteiro a Hugo Ribeiro, 29/11/1947, espólio de Hugo Ribeiro, BNP.

Matemática e Música: Histórias de vidas que contam, tocam, cantam e encantam

Helena Sousa Melo, *Maria do Carmo Martins*
Faculdade de Ciências e Tecnologia e Centro de Estudos Humanísticos, Universidade dos Açores

Numa divertida e curiosa valsa com diferentes formações, apresentamos, em tom de sinfonia, este par de aparência incongruente: Matemática e Música, numa mistura de rigor, história e sentimento.

A música e a matemática remontam ao início da humanidade. A escola pitagórica considerava a matemática dividida em quatro partes: Aritmética, Geometria, Música e Astronomia, o *Quadrivium.* Pitágoras foi o primeiro a relacionar razões de cordas vibrantes aos intervalos musicais fazendo uso do seu monocórdio. Iniciou a sua escala musical com a nota ***dó***, corda esticada, depois dividiu-a, sucessivamente em 3 partes iguais, obtendo as notas ***sol***, ***ré***, ***lá*** e ***mi***. Quando obteve a nota ***si***, parou de subdividir, desprezando-a por não ter harmonia. Continuando a subdividir em 3, depois do ***si***, obtemos a escala temperada ou cromática com 12 semitons em uma oitava, de ***dó*** a ***dó***. Nesta relação entre duas notas separadas por um semitom, obtemos a razão de uma progressão geométrica, entre as suas frequências, igual a $\sqrt[12]{2} \approx 1{,}05946$. Podemos associar o inverso das potências dessa razão a frações. Por exemplo, considerando a escala de Dó Maior temos:

$$\begin{array}{llll} \text{Dó: } 1 & \text{Mi: } \dfrac{1}{\sqrt[12]{2^4}} \approx \dfrac{64}{81} & \text{Sol: } \dfrac{1}{\sqrt[12]{2^7}} \approx \dfrac{2}{3} & \text{Si: } \dfrac{1}{\sqrt[12]{2^{11}}} \approx \dfrac{8}{15} \\ \text{Ré: } \dfrac{1}{\sqrt[12]{2^2}} \approx \dfrac{8}{9} & \text{Fá: } \dfrac{1}{\sqrt[12]{2^5}} \approx \dfrac{3}{4} & \text{Lá: } \dfrac{1}{\sqrt[12]{2^9}} \approx \dfrac{16}{27} & \text{Dó}^{8.\text{a}}\text{: } \dfrac{1}{\sqrt[12]{2^{12}}} = 1 \end{array}$$

Assim, de modo simplificado, podemos atribuir a cada nota uma fração associada ao comprimento da corda inicial, sendo tais frações muito próximas das frações encontradas por Pitágoras no monocórdio.

Os matemáticos e físicos de outrora perceberam e sentiram as analogias entre matemática e música. Os músicos, por sua vez, recorreram à matemática para descrever a sua arte, quer de modo direto, ou indireto.

Durante o século XX, a linguagem musical foi matematizada. Novas ideias matemáticas foram usadas pelos compositores como base de criação. Nesta relação, vamos percorrer as histórias de vida de Bach, Mozart, Beethoven, Xenakis, Smullyan e Scimemi.

Johann Sebastian Bach (1685–1750) foi um compositor alemão, cravista, regente, organista, professor, violinista e violista, do período Barroco, e considerado o melhor representante da ligação música-matemática daquela época. No fim da sua vida, interessou-se pela simetria musical, criando uma série de enigmas com problemas musicais para os seus alunos, os quais estão presentes nos seus *cânones* e *fugas*, que deveriam ser decifrados para serem interpretados corretamente. Numa apreciação da estrutura matemática dos seus temas constatámos o seu intelecto e a dimensão da sua obra.

Wolfgang Amadeus Mozart (1756–1791) foi um prolífico e influente compositor austríaco do período Clássico. As primeiras composições ocorreram aos 5 anos de idade e durante a sua curta vida de 35 anos, entre *óperas*, *sinfonias* e *missas*, totalizou cerca de 600 obras. Influenciado pela numerologia e pela gematria, doutrinas ligadas à Maçonaria, Mozart tinha uma predileção por certos números que frequentemente utiliza nas suas obras, tal como na ópera *A Flauta Mágica*. Observamos também nas suas ***sonatas*** a razão áurea e na sua música, em geral, o uso de simetrias.

Ludwig van Beethoven (1770–1827) foi um compositor germânico do período de transição entre o Classicismo e o Romantismo. Produziu cerca de 200 obras entre *sonatas*, *sinfonias*, concertos e *quartetos* para cordas. Entre 1814 e 1827, já atingido pela surdez, alcançou o auge da sua técnica criativa escrevendo obras de excecional qualidade como a *9.ª Sinfonia*, envolvendo a matemática, apesar de não ter grandes conhecimentos nessa área. A maior proeza matemática na sua música está relacionada com a razão áurea. Por exemplo, a partitura da composição *Für Elise* está dividida nas proporções 24:38 de 62 e são usados padrões matemáticos relacionados com as simetrias de translação.

Iannis Xenakis (1922–2001) foi um compositor greco-romano, arquiteto, diretor artístico e engenheiro. Desde cedo interessou-se por matemática, grego, literatura estrangeira e música. Os seus primeiros estudos musicais ocorreram aos 26 anos, tendo sido o compositor e organista **Olivier Messiaen** quem o encorajou a desenvolver as suas ideias musicais aproveitando o vasto conhecimento que detinha, desde a arquitetura à matemática, e a integrá-los na sua música. Xenakis usou os **processos estocásticos** nas suas composições e introduziu um sistema não-determinista. A sua *música estocástica* apoiava-se em subáreas e estruturas matemáticas, tais como, a teoria dos conjuntos, a teoria dos grupos, a teoria dos jogos, a teoria das probabilidades, ou a álgebra de Boole. Para efetuar os cálculos e produzir as partituras das suas composições Xenakis utilizava **computadores**.

Raymond Merrill Smullyan (1919–2017) foi um matemático estadunidense, filósofo taoista, pianista, lógico e mágico. Iniciou-se profissionalmente com a música depois de ganhar a medalha de ouro numa competição para piano em 1931. Foi professor de piano, mas uma tendinite no braço direito, fez voltar a sua atenção para a matemática, que também amava. Doutorou-se em 1959 em lógica formal, orientado por Alonzo Church. Apesar do humor usado em alguns dos seus livros, teve uma carreira académica muito séria na área de lógica-matemática.

Benedetto Scimemi (n. 1938) formou-se em Física em 1960. Lecionou matemática na Faculdade de Ciências da Universidade de Pádua e sempre teve interesses musicais, estudando piano e flauta. Defende que "a melodia pode ser representada como um gráfico plano onde as alturas das notas são descritas em função do tempo". Em 1999 publica o artigo "Contraponto musical e transformações geométricas" nas atas do *Colóquio/Ciências - Revista Cultural Científica*, 24, 60–68. Se efetivamente aplicarmos as devidas transformações geométricas ao gráfico, podemos obter uma nova melodia que, tocada em simultâneo com a original, produz uma harmonia. Benedetto dedica-se ao estudo matemático das composições de Bach.

Em tom de desfecho invocamos as palavras de dois matemáticos que evidenciam a relação entre matemática e música: "A música é um exercício inconsciente de aritmética" (Leibniz) e "A matemática é a música do raciocínio" (Sylvester).

Referências

Boyer, C. B., *História da Matemática.* Tradução de Elza F. Gomide. Ed. Edgard Blücher Ltda. São Paulo, Brasil, 1974.

Carvalho, H. M., Pompeu Jr., G. & Bassanezi, R. C., *A modelagem matemática aplicada ao estudo de duas formas de representação artística.* VI Conferência sobre Modelagem na Educação Matemática, Londrina, PR, Brasil, 2009.

Sousa, L. G. S. & Taffarello, T., *Simetria e Música.* Revista do Programa de Pós-Graduação em Música da Universidade de Brasília. Ano VII, Vol. 1: 51–74, 2013.

Construções dos números reais no ensino liceal, c. 1900

João Caramalho Domingues
Centro de Matemática da Universidade do Minho

Entre 1869 e 1872, Charles Méray, Eduard Heine, Georg Cantor e Richard Dedekind publicaram as primeiras construções dos números reais a partir dos números racionais: os três primeiros utilizando sucessões de Cauchy de números racionais, o quarto introduzindo o que agora se chamam «cortes de Dedekind» [Epple, 2003, 297–301]. Nos quatro casos o contexto, ou pelo menos a motivação inicial, era a demonstração de teoremas de cálculo infinitesimal.

Em Portugal, a primeira edição (1887) do *Curso d'analyse infinitesimal – Calculo Differencial* de Gomes Teixeira inclui, num apêndice, uma breve «theoria dos numeros irracionaes», definindo estes como limites de sucessões crescentes mas limitadas de números racionais. Na 2.ª edição (1890) essa passagem foi expandida e modificada, num sentido que a aproxima da construção por cortes de Dedekind: são consideradas duas sucessões de racionais (positivos), uma (a_n) crescente e outra (b_n) decrescente, de forma que todos os termos da primeira são menores do que todos os da segunda e a diferença $b_n - a_n$ pode tornar-se tão pequena quanto se queira; se não houver um número racional maior do que todos os a_n e menor do que todos os b_n, estas sucessões definem um número irracional. Claramente, o propósito desta construção é permitir provar o critério de Cauchy.

No entanto, duas construções dos números reais apareceram também em compêndios liceais das décadas de 1890 e 1900, em contextos desligados do cálculo infinitesimal.

Os números irracionais (como números, ou quantidades, «incommensuraveis») aparecem em 1872 no programa de Matemática do 3.º ano do Liceu, no capítulo «Arithmetica»; as «operações sobre numeros incommensuraveis» surgem no mesmo parágrafo que as «Operações sobre radicaes» [Diario do Governo, 11/10/1872]. No muito popular compêndio de aritmética de Serrasqueiro, as explicações são rápidas e vagas: «*Numero irracional* ou *incommensuravel*» é definido como «aquelle, entre o qual e a unidade não ha medida commum», e é também caracterizado como «o limite dos numeros, que medem as grandezas commensuraveis, que se podem aproximar da grandeza correspondente tanto quanto quizermos»; o assunto que torna estas breves explicações necessárias é o cálculo de e com raizes («é [...]

a extracção de raizes que gera estes numeros [irracionais]»), em particular cálculos aproximados.

O primeiro dos compêndios liceais com construções aritméticas dos números reais é o *Tratado Elementar de Arithmetica* de João Figueirinhas, publicado originalmente em 1894. João Simões Ferreira Figueirinhas (1861–1919) era natural de Vouzela (Viseu), formou-se na Escola Médico-Cirúrgica do Porto em 1888 e, para além de exercer medicina, foi professor de Matemática no Liceu Central do Porto. Figueirinhas apresenta uma construção dos números reais claramente inspirada na de Gomes Teixeira. Chamando «série» ao que actualmente se chama sucessão, diz que «Duas series de numeros, uma crescente e outra decrescente, dizem-se convergentes para um limite commum, se todos os numeros da primeira são menores que os da segunda, e se se póde sempre encontrar um numero da segunda e outro da primeira cuja differença seja menor que qualquer numero, por pequeno que seja» [Figueirinhas, 1894, 267]. Depois de provar que esse limite é único, Figueirinhas observa que nem sempre existe (no universo dos racionais). No caso de não existir limite racional, «diz-se, por definição, que ellas admittem para limite commum um novo ente arithmetico, um novo symbolo numerico, a que se dá o nome de *numero irracional* ou *incommensuravel*» [Figueirinhas, 1894, 270]. Figueirinhas apresenta depois definições das operações aritméticas envolvendo números irracionais, bem como demonstrações das suas propriedades básicas. No entanto, não segue exactamente as opções de Gomes Teixeira, e o resultado é, naturalmente, inferior. Em particular, tendo os números negativos sido introduzidos anteriormente, a definição do produtos de dois irracionais [Figueirinhas, 1894, 277] está errada.

O outro compêndio, certamente muito mais influente, foi escrito por Joaquim d'Azevedo Albuquerque (1839–1912). Natural do Porto, Albuquerque tinha o curso de engenheiro civil de pontes e estradas pela Academia Politécnica do Porto (1861), mas foi essencialmente professor de matemática: no Liceu Central do Porto entre 1862 e 1876 e, a seguir, na Academia Politécnica do Porto, onde lecionou Mecânica Racional durante bastante tempo. A partir de 1896 publicou diversos compêndios de Matemática para o liceu, com considerável sucesso: vários foram adoptados como livros únicos. No compêndio que escreveu para o 3.º ano incluiu um apêndice à primeira parte («Arithmetica racional») sobre «Numeros irracionaes» [1897, 213–235]. Já antes, na secção sobre as raizes quadrada e cúbica, Albuquerque tinha falado na existência de grandezas incomensuráveis, e introduzido os números irracionais para as medir; por exemplo:

> «os valores decimaes obtidos pela extracção da raiz quadrada ao

> numero 2 [...], uns cujos quadrados são maiores que 2, outros cujos quadrados são menores que 2, formam, respectivamente, duas classes que servem para definir o numero irracional $\sqrt{2}$ que as separa.» [Albuquerque, 1897, 167]

Mas é no apêndice, cujo estudo Albuquerque diz que pode ser adiado ou mesmo suprimido, que aparece uma construção detalhada dos números irracionais a partir dos racionais (positivos; os números negativos só aparecem mais tarde[1]). Albuquerque segue explicitamente a construção de Dedekind, através da versão do italiano Aureliano Faifofer (1843–1909), um autor de compêndios extremamente influente. O conceito central é o de «classes contiguas»: duas classes contíguas são dois conjuntos de números (racionais) tais que todo o número da primeira é maior do que todo o da segunda, mas a diferença entre um número da primeira e um da segunda é arbitrariamente pequena. Considerando um número racional q, e as classes H formada por todos os números cujos quadrados são maiores do que q e K formada por todos os números cujos quadrados são menores do que q, H e K são classes contíguas. Se q for um quadrado perfeito, $\sqrt{q}$ é o único número racional que não pertence nem a H nem a K; se q não for um quadrado perfeito, H e K compreendem todos os números (racionais). Albuquerque invoca então o «Axioma de Dedekind» (com este nome explícito): interpretando esses números como comprimentos de segmentos de recta marcados a partir de uma origem O, «a *continuidade* da grandeza linear impõe necessariamente a existencia de um *ponto de demarcação, um ponto limite A*»; para que o segmento OA tenha «expressão numerica de medida», deu-se à ideia de número uma nova extensão, chamada *numero irracional*. Em geral, um número α, racional ou irracional, é representado por classes contíguas: $\alpha = (H, K)$. As operações envolvendo números irracionais são apresentadas com detalhe.

Em 1905 os programas do liceu foram reformulados. Boa parte do que era o programa de aritmética do 3.º ano, em particular os números irracionais, passou para o 6.º ano. Joaquim d'Azevedo Albuquerque publicou então um compêndio com o título *Arithmetica Racional* (o primeiro compêndio em Portugal com este título?), adaptação da primeira parte do seu anterior compêndio de *Arithmetica e Geometria* para o 3.º ano (e por isso tinha a indicação de ser uma 5.ª edição). Nesta edição o que era antes um apêndice passou a fazer parte do texto principal, numa secção (quarta e última) que,

[1] O subtítulo da secção sobre «Numeros fraccionarios» é «1.ª extensão da ideia de numero»; o deste apêndice é «2.ª extensão da ideia de numero»; no compêndio para os 4.º e 5.º anos aparecem os números negativos, naturalmente como «3.ª extensão da ideia de numero».

além da «Theoria dos numeros irracionaes, baseada nas classes contiguas», incluía «Calculo dos numeros approximados. Operações abreviadas».

Estes compêndios devem ter tido bastante difusão. [Albuquerque, 1897] foi adoptado como livro único por cinco anos [Diario do Governo, 26/10/1897]. [Albuquerque, 1906] foi o único adoptado, também por cinco anos [Diario do Governo, 09/09/1907], e teve edições póstumas: em 1921 (quando era mais uma vez o único adoptado oficialmente) apareceu uma edição com indicação de ser a 10.ª; em 1934 ainda apareceu outra, esta adaptada por João Chrysostomo de Oliveira Ramos, professor do Liceu Alexandre Herculano.

Referências

Joaquim d'Azevedo Albuquerque. *Arithmetica e Geometria para o ensino da 3.ª classe (3.º anno) dos Lyceus*, Porto: Imprensa Portugueza, 1897.

Joaquim d'Azevedo Albuquerque. *Arithmetica Racional para o ensino da 6.ª classe dos Lyceus*, 5.ª edição, Porto: Typographia Occidental, 1906.

Diario do Governo; https://digigov.cepese.pt/pt/homepage.

Moritz Epple. "The end of the science of quantity: foundations of analysis, 1860–1910", H. N. Jahnke (ed.), *A History of Analysis*, American Mathematical Society / London Mathematical Society, 2003, 291–323.

Aureliano Faifofer. *Elementi di Algebra*, 7.ª ed., Venezia: Tipografia Emiliana, 1887; https://rcin.org.pl/dlibra/doccontent?id=45644.

João Simões Ferreira Figueirinhas. *Tratado Elementar de Arithmetica*, Porto: Livraria de Magalhães e Moniz, 1894.

Francisco Gomes Teixeira. *Curso de Analyse Infinitesimal – Calculo Differencial*, Porto: Typographia Occidental, 1887 (publicado também, em quatro partes, no *Annuario da Academia Polytechnica do Porto*, 1884–1885 a 1887–1888). 2.ª ed., 1890.

José Adelino Serrasqueiro. *Tratado Elementar de Arithmetica*, 6.ª ed., Coimbra: Livraria Central de J. Diogo Pires, 1885.

O Ensino da Matemática no Século XIX: o exemplo da extracção da raiz cúbica – análise das abordagens em alguns manuais da época

Ana Luísa Correia
CEAFEL – U. Lisboa, Academia Militar – CINAMIL

Francisco Vieira Domingues
Academia Militar

1 Breve introdução histórica

Heron de Alexandria (75 d. C.) foi o primeiro a calcular uma raiz cúbica numericamente, por métodos de aproximação (método da dupla posição falsa). Determinou uma aproximação para $\sqrt[3]{100}$ considerando os dois cubos mais próximos de 100 por defeito e por excesso — ver [10]. Na linguagem actual, para um número N tal que $a^3 \leq N \leq (a+1)^3$, de acordo com Heron,

$$\sqrt[3]{N} = a + \frac{(N - a^3)(a+1)}{(N - a^3)(a+1) + N}.$$

Aryabhata (n. 476 d. C.) calculou raízes quadradas e cúbicas "invertendo" as fórmulas $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ e $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Este método ficou conhecido pelo *método da exaustão*. Foi utilizado pelos árabes e chegou à Europa através dos escritos de Leonardo de Pisa (1180–1250), a quem também se deve uma fórmula de aproximação para raízes cúbicas:

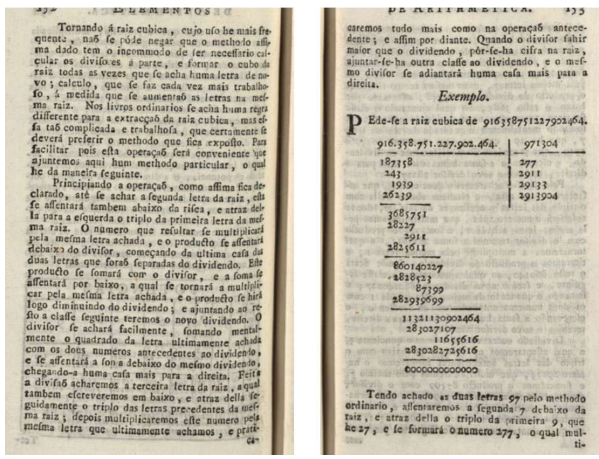
$$\sqrt[3]{a^3 + b} = a + \frac{b}{3a(a+1) + 1}.$$

No século XVI, Viète apresentou um processo sistemático e conciso para resolver qualquer equação por um método de pesquisa sucessiva dos diversos dígitos das raízes. Em particular, Viète também indicou um processo para a extracção da raiz cúbica com muitas semelhanças ao método hindu da exaustão. Em [9], William Horner apresentou um método de exaustão para a resolução de equações numéricas de qualquer grau, baseado na transformação sucessiva de equações (*continuous approximation*), para a determinação dos diversos dígitos das raízes. Um dos exemplos apresentados é o da extracção da raiz cúbica de $N = 48228544$.

2 Extracção da raiz cúbica nos manuais escolares no século XIX

2.1 Métodos de exaustão

No século XVIII o ensino da matemática em Portugal assentava essencialmente em livros de autores franceses e posteriormente nas suas traduções. Em 1773, Monteiro da Rocha na tradução de [2] introduz diversos aditamentos. Em particular, propõe um método para a extracção da raiz cúbica. Em [6] Anastácio da Cunha propõe outro método. Os dois métodos estiveram no cerne de uma célebre polémica (ver [15]). Nas primeiras três décadas


152 ELEMENTOS

Tornando á raiz cubica, cujo uſo he mais frequente, naõ ſe póde negar que o methodo aſſima dado tem o incommodo de ſer neceſſario calcular os diviſores á parte, e formar o cubo da raiz todas as vezes que ſe acha huma letra de novo; calculo, que ſe faz cada vez mais trabalhoſo, á medida que ſe augmentaõ as letras na meſma raiz. Nos livros ordinarios ſe acha huma regra differente para a extracçaõ da raiz cubica, mas eſſa taõ complicada e trabalhoſa, que certamente ſe deverá preferir o methodo que fica expoſto. Para facilitar pois eſta operaçaõ ſerá conveniente que ajuntemos aqui hum methodo particular, o qual he da maneira ſeguinte.

Principiando a operaçaõ, como aſſima fica declarado, até ſe achar a ſegunda letra da raiz, eſta ſe aſſentará tambem abaixo da riſca, e atraz della para a eſquerda o triplo da primeira letra da meſma raiz. O numero que reſultar ſe multiplicará pela meſma letra achada, e o producto ſe aſſentará debaixo do diviſor, começando da ultima caſa das duas letras que foraõ ſeparadas do dividendo. Eſte producto ſe ſomará com o diviſor, e a ſoma ſe aſſentará por baixo, a qual ſe tornará a multiplicar pela meſma letra achada, e o producto ſe hirá logo diminuindo do dividendo; e ajuntando ao reſto a claſſe ſeguinte teremos o novo dividendo. O diviſor ſe achará facilmente, ſomando mentalmente o quadrado da letra ultimamente achada com os dous numeros antecedentes ao dividendo, e ſe aſſentará a ſoma debaixo do meſmo dividendo, chegando-a huma caſa mais para a direita. Feita a diviſaõ acharemos a terceira letra da raiz, a qual tambem eſcreveremos em baixo, e atraz della ſeguidamente o triplo das letras precedentes da meſma raiz; depois multiplicaremos eſte numero pela meſma letra que ultimamente achamos, e prati-

DE ARITHMETICA. 153

caremos tudo mais como na operaçaõ antecedente; e aſſim por diante. Quando o diviſor ſahir maior que o dividendo, pôr-ſe-ha cifra na raiz, ajuntar-ſe-ha outra claſſe ao dividendo, e o meſmo diviſor ſe adiantará huma caſa mais para a direita.

Exemplo.

Pede-ſe a raiz cubica de 916358751227902464.

916.358.751.227.902.464.	971304
187358	277
243	2911
1939	29133
26239	2913904
3685751	
28227	
2911	
2825611	
860140227	
2828523	
87399	
282939699	
11321130902464	
283027107	
11655616	
2830282725616	
0000000000000	

Tendo achado as duas letras 97 pelo methodo ordinario, aſſentaremos a ſegunda 7 debaixo da raiz, e atraz della o triplo da primeira 9, que he 27, e ſe formará o numero 277, o qual multi-

Figura 1: Excertos de [2], pág. 152, 153.

do século XIX, surgem vários autores de manuais nacionais, muitos deles ainda ligados ao ensino militar e na segunda metade a produção cresce. De entre os vários autores consultados, destacamos: [1], [4], [5], [7], [11], [12], [13]. Os diferentes métodos encontrados para a extracção da raiz cúbica, nos manuais citados, são métodos de exaustão com muitas semelhanças aos métodos de Monteiro da Rocha e de Anastácio da Cunha. Supondo que a raiz cúbica é composta por dezenas e por unidades, $\sqrt[3]{N} = 10d + u$, os vários métodos usam, com mais ou menos clareza, a decomposição

$$(10d+u)^3 = 1000d^3 + 300d^2u + 30du^2 + u^3 = 1000d^3 + u(300d^2 + u(30d+u)).$$

O número N é dividido em classes de 3 algarismos e o número de classes dará o número de algarismos da parte inteira da raiz. Com uma formulação actual exemplificamos a extracção da raiz cúbica de $N = 723104521$:

$\sqrt[3]{723.104.521}$	$897,56$
-512	$8^3 = 512 < 723 < 729 = 9^3$
211.104	$300 \times 8^2 = 192.00$
	$a_2 \leq \lfloor \frac{211.104}{19200} \rfloor = 11$
-192.969	$300 \times 8^2 \times 9 + 30 \times 8 \times 9^2 + 9^3 = 192.969$
$18.135.521$	$300 \times 89^2 = 2.376.300$
	$a_3 \leq \lfloor \frac{18.135.521}{2.376.300} \rfloor = 7$
$-16.765.273$	$300 \times 89^2 \times 7 + 30 \times 89 \times 7^2 + 7^3 = 16.765.273$
$1.370.248,000$	$300 \times 897^2 = 241.382.700$
	$a_4 \leq \lfloor \frac{1.370.248.000}{241.382.700} \rfloor = 5$
$-1.207.586,375$	$300 \times 897^2 \times 5 + 30 \times 897 \times 5^2 + 5^3 = 1.207.586.375$
$162.661,625.000$	$300 \times 8975^2 = 24.165.187.500$
	$a_5 \leq \lfloor \frac{162.661.625.000}{24.165.187.500} \rfloor = 6$
$-145.000,818.216$	$300 \times 8975^2 \times 6 + 30 \times 8975 \times 6^2 + 6^3 = 145.000.818.216$
$17.660,806.784$	$\vdots$

Concluiu-se que $723104521 = (897,56)^3 + 17660,806784$. O processo pode continuar.

2.2 Os logaritmos na aproximação de raízes

Vários autores evidenciam a utilidade dos logaritmos no cálculo de raízes:

> "*Para extrair a raiz de um numero qualquer, divide-se o logarithmo d'esse numero pelo grau da raiz; e o numero correspondente ao quociente obtido será a raiz que se pede*" [5], pág. 147.

Para $N = 723104521$ e recorrendo, como nos manuais, a tabelas de logaritmos na base 10 (*logaritmos vulgares*), tem-se

$$N = 723104521 = 23 \times 2113 \times 14879 \qquad \text{(decomposição em primos)}$$

$$\log_{10} \sqrt[3]{723104521} = \frac{\log_{10} 23 + \log_{10} 2113 + \log_{10} 14879}{3} \approx 2,95306702563$$

Recorrendo, de novo, às tabelas, obtém-se $\sqrt[3]{723104521} \approx 897,56$.

3 Conclusão

Em 1895, deu-se a última reforma do ensino no século XIX. No entanto, nas primeiras duas décadas do século XX os programas de aritmética mantiveram-se sem grandes mudanças, como se pode ver em [14], 22.ª edição (1926). Com a reforma de 1947, os programas de matemática sofreram alterações significativas, com a implementação do regime de "livro único", e a extracção da raiz cúbica deixou de fazer parte dos conteúdos programáticos.

Referências

[1] L. Almeida, *Arithmetica ou Noções Elementares da Sciencia dos Números*, 1872.

[2] E. Bezout, *Elementos de Arithmetica*, Coimbra: Real Officina da Universidade, 1784.

[3] C. Boyer e U. Merzbach, *A history of mathematics*, John Wiley & Sons Inc, 2nd ed, 1991.

[4] R. Costa, *Elementos de Arithmetica e Algebra*, 1825.

[5] J. Couceiro da Costa, *Tratado de Arithmetica para servir no Collegio Militar*, 1866.

[6] J. Anastácio da Cunha, *Princípios mathematicos*, Lisboa: Officina de Antonio Rodrigues Galhardo, 1790.

[7] J. Feyo, *Elementos de Aritmética escrito para uso na Escola Politécnica*, 1828.

[8] F. Figueiredo, *José Monteiro da Rocha e a actividade científica da "Faculdade de Mathematica" e do "Real Observatório da Universidade de Coimbra": 1772–1820*, Tese de Doutoramento, Coimbra, 2011.

[9] W. Horner, "A new method of solving numerical equations of all orders by continuous approximation", *Philosophical Transactions*, London: Royal Society, 1819.

[10] M. Nordgaard, *A historical survey of algebraic methods of approximating the roots of numerical higher equations up to the year 1819*, Teachers college, Columbia university, 1922.

[11] R. Osorio, *Elementos de Arithmetica*, 4.ª Ed., 1861.

[12] L. Motta Pegado, *Tratado Elementar de Arithmetica*, 4.ª Ed., 1886.

[13] J. Manso Preto, *Elementos de Álgebra*, 1870.

[14] J. Serrasqueiro, *Tratado Elementar de Arithmetica*, 10.ª Ed., 1891 e 22.ª Ed., 1926.

[15] A. Teixeira, "Questão entre José Monteiro da Rocha e José Anastasio da Cunha". *O Instituto: Revista Scientifica e Litteraria*, vol. XXXVIII, 1890–1891, pág. 518.

33 anos do Projecto Matemática Ensino

Maria Paula Oliveira
Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro

O Projecto Matemática Ensino (PmatE) é um projeto de investigação e desenvolvimento, fundado em 1989 na Universidade de Aveiro (UA) que pretende aliar as tecnologias digitais ao desenvolvimento de conteúdos e eventos para a promoção do sucesso escolar e da cultura científica.

O PmatE e as Competições

Em 1989 a Secção Autónoma de Matemática da Universidade de Aveiro lecionava disciplinas com mais de 1000 estudantes inscritos o que dificultava o processo de avaliação. O computador estava a ser introduzido no ensino em Portugal e o Professor João David Vieira desafia dois colegas mais novos, António Batel Anjo e Maria Paula Carvalho, para criarem um sistema informático de apoio à avaliação [1]. Contudo, as dificuldades eram muitas, quer com o equipamento informático disponível, quer com recursos humanos para elaborar conteúdos para avaliar estes estudantes. Decidiram fazer uma experiência com alunos do 7.º ano de escolaridade sobre o conteúdo Equações de 1.º grau, criando uma competição que se tornou no ex-libris do Projecto – a competição EQUAMAT, cuja primeira edição ocorre em 1991 na Universidade de Aveiro, com conteúdos sobre equações de 1.º grau. O entusiasmo dos alunos que participaram levou à realização de uma segunda edição em 1992. Eram enviadas para as escolas diskettes com os conteúdos das provas, permitindo que os alunos treinassem para as competições ao longo do ano letivo.

Este entusiasmo alastrou a outras escolas e em 2000 (Ano Mundial da Matemática) a EQUAMAT juntou 2000 participantes. Em 2002 as competições passam para o online e inicia-se um novo ciclo, com competições para outros níveis de escolaridade e outras áreas curriculares. Os níveis de participação nas competições (atualmente designadas por Competições Nacionais de Ciência) foram aumentando, rondando atualmente os 8000 participantes.

Uma competição é organizada por níveis, sendo cada nível gerado por um Modelo Gerador de Questões (MGQ)[1] do tipo verdadeiro/falso generalizado. Uma das principais características de um MGQ é a sua aleatoriedade.

[1]Um modelo gerador de questões é um gerador de questões sobre um determinado tema, obedecendo a uma classificação por objetivos científico-didáticos e por níveis de dificuldade. [2]

Desta forma, existem várias concretizações possíveis para um mesmo MGQ de modo que dois computadores lado a lado dificilmente terão a mesma concretização para esse MGQ. Contudo, as afirmações incidirão sobre os mesmos objetivos e terão graus de dificuldade semelhantes [2]. O PmatE dispõe de uma Plataforma de Ensino Assistido, onde disponibiliza, durante todo o ano letivo, provas de treino para as competições. No final de um treino, o aluno pode consultar o seu desempenho e verificar as questões em que errou e um professor consultar o desempenho de todos os seus alunos. Esta interação fomenta nos alunos a vontade de aprender para ir mais longe e alcançar uma boa classificação na competição.

Intervenção escolar

Em 2002 o projeto Exi@mat (exi de exigência e de êxito) foi apresentado à Fundação Calouste Gulbenkian: "Pretendia-se testar as potencialidades do software desenvolvido enquanto instrumento de apoio ao ensino e aprendizagem, via avaliação diagnóstica (auto e hetero) em situação de sala de aula e não apenas em situação de preparação para uma competição." [1] Este projeto foi financiado durante 5 anos e envolveu seis escolas do 3.º ciclo do ensino básico. A vontade de alargar o exi@mat a outros ciclos de ensino e a mais escolas, esteve na génese do projeto Rede de Escolas.[3]

Uma outra vertente a destacar no domínio da intervenção escolar são os Testes Diagnóstico. No início de cada ano letivo o PmatE disponibiliza testes diagnóstico para os alunos dos anos de transição de ciclo (5.º, 7.º e 10.º) nas áreas curriculares fundamentais. Estes testes são realizados online e os resultados são disponibilizados às escolas através de uma tabela dinâmica, constituída por grupos de objetivos didáticos, em que o professor pode criar grupos de alunos, nomeadamente por turma ou por escola.

Cooperação

A cooperação com países africanos de língua oficial portuguesa (PALOP) foi uma vertente explorada pelo PmatE entre 2002 e 2013, destacando-se o projeto Pensas@moz, focado na melhoria da qualidade do ensino em Moçambique, nomeadamente na aprendizagem dos alunos e na qualificação dos professores, através de atividades dedicadas aos estudantes, como as Competições Nacionais de Ciência e de cursos de formação para professores nas áreas de Matemática e Língua Portuguesa [4], e o Programa CPLP nas Escolas, resultante de uma parceria entre a Comunidade de Países de Língua Portuguesa (CPLP) e o PmatE.

Comunicação e divulgação de ciência

A Educação Financeira foi uma aposta do PmatE entre 2009 e 2014. Durante este período realizaram-se 5 conferências internacionais de Educação Financeira que juntaram professores de vários graus de ensino e profissionais da área financeira, e, para os mais jovens, a exposição itinerante EDUCAÇÃO+Financeira [5] (2009/10 a 2013/14), com o apoio da Caixa Geral de Depósitos, circulou pelo país dispondo de três módulos distintos, destinados a diferentes faixas etárias.

O projeto CaixaMat [6] (também em parceria com a Caixa Geral de Depósitos) foi pioneiro no âmbito da divulgação e comunicação de ciência, na modalidade de roadshow, recorrendo a uma infra-estrutura constituída por um camião especialmente preparado para acolher experiências no campo da Física, Biologia e da Matemática, estando devidamente equipado com material informático. Este camião percorreu o país nos anos letivos 2005/06 a 2008/09.

Na divulgação de ciência, apoiados pela Agência Nacional Ciência Viva, os projetos Pais com Ciência e Escolher Ciência (`https://pmate.ua.pt`) foram dois marcos na história do PmatE.

Conclusões

Este trabalho pretendeu apresentar a história resumida de um projeto pioneiro em Portugal na área da educação. Muitas foram as iniciativas do PmatE que ficaram fora deste trabalho, contudo, as suas vertentes fundamentais ao serviço da educação em Portugal (e nos PALOP) foram aqui referidas.

As referências que se encontram nos meios de comunicação, essencialmente locais, a atividades levadas a cabo ao longo do tempo pelo PmatE, são inúmeras e, quiçá, poderão ser um mote para um trabalho de História da Matemática daqui a alguns anos.

Nota: O site do Projecto Matemática Ensino (`https://pmate.ua.pt`) disponibiliza informação sobre os projetos desenvolvidos ao longo dos anos.

Referências

[1] J. David Vieira, "EQUAMAT: notas sobre a origem e primeiros desenvolvimentos", *Linhas*, Universidade de Aveiro, Vol. 32, (2019), pp. 62–65.

[2] J. David Vieira, P. Carvalho e M. P. Oliveira, "Modelo Gerador de Questões", *IADIS Ibero-Americana WWW/Internet 2004*, Proceedings, 2004, pp. 105–113.

[3] P. Oliveira, A. Bernardes, A. Miranda, A. Neves, A. Santos, A. Tavares, M. Lopes, R. Estrela, R. Simões e S. Silva, "Rede de escolas: uma teia de experiências", *I Bienal de Matemática e Língua Portuguesa*, Proceedings, 2007.

[4] A. Batel Anjo, J. Sousa Pinto e P. Oliveira, "Pensas@moz", *IST-Africa 2006*, Conference Proceedings, Vol. 000, 2012, P. Cunningham e M. Cunningham, pp. 1–6.

[5] E. Barros, "De pequenino... se aprende a gerir o dinheiro", *Dossier Fazer, Gerir e Poupar*, (2010), Eds. Direção Geral da Educação (DGE) pp. 48–51 (`https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/ficheiros/dossier.reporter_estrada.83.pdf`).

[6] A. Carvalho e B. Magina, "Volta a Portugal com a Matemática", *Educação e Matemática*, No. 111 (2011), pp. 42–43.

Este trabalho teve o apoio da Fundação para a Ciência e Tecnologia (FCT) através do Centro de Investigação e Desenvolvimento em Matemática e Aplicações (CIDMA), projeto UID/MAT/04106/2022.

Sebastião e Silva e o Seminário de Royaumont (1959) – para um currículo "moderno" de Matemática

Henrique Guimarães[*]
Instituto de Educação — Universidade de Lisboa

Em meados do século passado, a culminar um interesse muito alargado de modernização do currículo de Matemática não apenas na Europa, a Organização Europeia de Cooperação Económica decidiu promover uma sessão de trabalho visando lançar uma reforma tão generalizada e profunda quanto possível do ensino da Matemática. A sessão de trabalho realizou-se em finais de 1959 no *Cercle Culturel de Royaumont* em França, com a duração de duas semanas e a participação de cerca de cinquenta delegados de dezoito países. Portugal não se fez representar. Esta reunião, que veio a ficar conhecida como o Seminário de Royaumont, é certamente a reunião mais emblemática de todo o movimento reformador que veio a ter enorme influência internacional e que recebeu o nome de reforma da Matemática Moderna.

A proposta da Matemática Moderna é hoje considerada um projeto reformador que, na sua concretização e no seu desenvolvimento, se veio centrar essencialmente numa mudança na estrutura e nos assuntos matemáticos do currículo. No entanto os seus promotores em Royaumont consideravam que a reforma era necessária quer ao nível dos conteúdos matemáticos quer ao nível dos métodos de ensino.

Destaquemos em primeiro lugar alguns aspetos de carácter mais amplo: a ênfase na unidade da Matemática e em conceitos unificadores como as estruturas matemáticas, a orientação axiomática e dedutiva subjacente à organização curricular proposta, a valorização da linguagem e do rigor matemáticos, e a proposta de uma abordagem algébrica, quer para a Aritmética, quer para a Geometria.

Para além destas perspectivas globais, entre as orientações metodológicas mais específicas e mais próximas do acto de ensino e das actividades de aprendizagem estão a valorização da compreensão face à mecanização, o valor atribuído à intuição e ao rigor, e a importância dada à aprendizagem por descoberta.

Nas conclusões do Seminário encontramos a crítica ao modo "rotineiro e mecânico" com que a aritmética até então era ensinada, visando essencialmente a memorização de regras e factos, recomendando-se que a sua

[*]Este resumo alargado foi elaborado por Luís Saraiva a partir de notas escritas por Henrique Guimarães.

aprendizagem resulte "de uma compreensão nascida de uma experimentação bem conduzida e de uma tomada de consciência pessoal, na maior pare das vezes depois da manipulação de objetos materiais de um género ou de outro".

Sobre a importância da intuição diz Dieudonné: "Não podemos desenvolver frutuosamente uma teoria matemática sob a forma axiomática senão quando o aluno está já familiarizado com a questão à qual ela se aplica, trabalhando durante algum tempo numa base experimental ou semi-experimental, isto é, *fazendo constantemente apelo à intuição*" (itálico no original).

Em muitas das recomendações do Seminário de Royaumont pode ver-se uma valorização do papel do aluno na aprendizagem e, igualmente, da componente da descoberta nessa aprendizagem.

Acompanhando o movimento reformador em curso em diversos países da Europa e de fora da Europa, a "Matemática Moderna" chega a Portugal em meados dos anos sessenta do século XX. Em 1963 é criada a Comissão de Estudos para a Modernização do Ensino da Matemática, sendo o Professor José Sebastião e Silva o escolhido para presidir a essa Comissão. Ainda em 1963 o Ministério de Educação Nacional assina um acordo para a criação de "turmas piloto de matemática moderna" do então 3.º ciclo do liceu (actuais 10.º e 11.º anos) que "irão começar a funcionar ainda no ano letivo de 1963/64 "a título de iniciação experimental [...] uma em cada um dos liceus normais do país", número que um ano depois aumentou para onze e se estendeu a diversos liceus em turmas do 6.º ano". Em 1969 havia nos liceus do Portugal europeu 60 turmas-piloto dos antigos 6.º e 7.º anos.

Para os alunos dessas turmas piloto, Sebastião e Silva redigiu "textos piloto", que fez acompanhar de "guias didáticos", dirigidos aos professores, para acompanhar e apoiar a experiência que se iniciava.

O autor não encontrou nos escritos de Sebastião e Silva qualquer referência direta e explícita ao Seminário de Royaumont, mas certamente que ele teve conhecimento das suas principais conclusões e recomendações, e estava de acordo com elas, como é explícito nos seus textos. Damos seguidamente três exemplos em como as suas diretivas estão de acordo com as recomendações de Royaumont:

1. O primeiro ponto das "Normas Gerais" que abrem o primeiro dos Guias Didáticos de Sebastião e Silva começa assim:

   "A modernização do ensino da Matemática terá que ser feita, não só quanto a *programas*, mas também quanto a *métodos*" (itálicos do autor).

É desde logo evidente em Sebastião e Silva que a mudança preconizada teria de passar por uma mudança no papel do professor e do aluno na relação didática no sentido de uma valorização do papel do aluno nessa relação. "O professor deve abandonar, tanto quanto possível, o método expositivo tradicional em que o papel dos alunos é quase cem por cento passivo e procurar, pelo contrário, seguir o método activo, estabelecendo o diálogo com os alunos e estimulando a imaginação destes de modo a conduzi-los, sempre que possível, à redescoberta".

2. A propósito da "questão crucial dos exercícios", como assim referiu Sebastião e Silva, e portanto sobre a questão do binómio mecanização--compreensão na aprendizagem em Matemática, considerava também "indispensável" que os alunos adquirissem "automatismos psicológicos", muito em particular no que diz respeito às "técnicas de cálculo". Todavia:

   "O treino recomendado [. . .] não deve confundir-se de modo nenhum com a mecanização do aluno na resolução de exercícios por meio de receitas, aplicadas sem qualquer conhecimento de causa. Essa prática [. . .] só contribui para desvirtuar completamente a finalidade do ensino da matemática, ensinando o aluno a não pensar e destruindo nele toda a iniciativa e espontaneidade para a resolução de problemas novos, como os que são postos pela ciência, pela técnica e pela vida corrente".

Referências

Jean Dieudonné, Pour une conception nouvelle de l'enseignement des mathématiques, In OECE (org.) *Mathématiques Nouvelles*, OECE : Paris, 1961, p. 31–47.

Henrique Guimarães, "A 'modernização' do ensino da matemática em Portugal – Sebastião e Silva e as perspectivas metodológicas emanadas de Royaumont (1959)", In *XIII CIAEM-IACME*, Recife, 2011, p. 1–10.

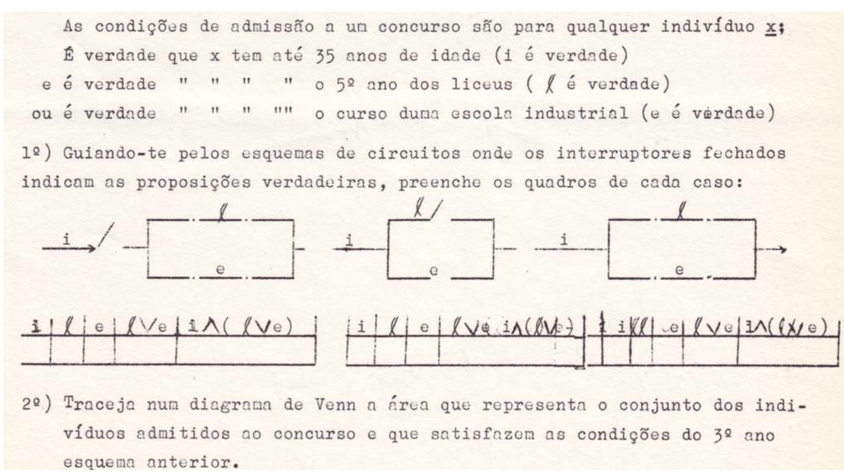
OECE, *Mathématiques Nouvelles*, OECE: Paris, 1961.

Aplicações da Matemática durante o Movimento da Matemática Moderna no Ensino Técnico em Portugal

Alexandra Sofia Rodrigues
Centro Interdisciplinar de Ciências Sociais (CICS.NOVA), Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa, UIED – Portugal

A reforma da Matemática Moderna ocorre entre as décadas de 50 e 70 do século passado, um pouco por todo o mundo e está associada a uma mudança profunda dos conteúdos e a uma alteração das metodologias de ensino e da linguagem matemática escolar. Nesta comunicação analisámos como se instaurou a reforma nas escolas técnicas, usando fontes documentais como jornais, revistas, legislação e outras referências que contribuíram para uma visão alargada do sistema político e económico em Portugal, focando em particular as aplicações da matemática ao contexto educativo do ensino técnico.

No ensino técnico, as primeiras turmas piloto iniciam-se no segundo período do ano letivo 1967/68 e a experiência foi acompanhada pela publicação da Folha Informativa dos Professores do 1.º Grupo (E.T.P), onde foram publicados os programas, abordagens científicas dos conteúdos a ensinar e abordagens metodológicas para o ensino da "nova" matemática.


As condições de admissão a um concurso são para qualquer indivíduo x;
É verdade que x tem até 35 anos de idade (i é verdade)
e é verdade " " " " o 5º ano dos liceus (ℓ é verdade)
ou é verdade " " " "" o curso duma escola industrial (e é verdade)

1º) Guiando-te pelos esquemas de circuitos onde os interruptores fechados indicam as proposições verdadeiras, preenche os quadros de cada caso:

i	ℓ	e	ℓ∨e	i∧(ℓ∨e)

i	ℓ	e	ℓ∨e	i∧(ℓ∨e)

i	ℓ	e	ℓ∨e	i∧(ℓ∨e)

2º) Traceja num diagrama de Venn a área que representa o conjunto dos indivíduos admitidos ao concurso e que satisfazem as condições do 3º ano esquema anterior.

Figura 1: Exercício de lógica (FI n.º 20, p. 19).

Suplemento do Boletim da SPM 82, Dezembro 2024, pp. 49–51

Apesar da linguagem formal e estruturada da Matemática Moderna, salientamos, a clara importância dada à aplicação dos conteúdos lecionados a situações do mundo real ou de acordo com o perfil do curso frequentado. Na comunicação, foram apresentados diferentes exemplos representativos de diferentes anos letivos da experiência e diferentes cursos. Um dos exemplos que destacamos na Figura 1, é um exercício de um ponto do metodólogo Santos Heitor, publicado na Folha Informativa n.º 20, em maio de 1968, dirigido a alunos de uma das turmas piloto.

Exercícios de aplicação são encontrados nos mais diversos conteúdos do programa: teoria de conjuntos, relações, aplicações, translações no plano, trigonometria, áreas, entre outros; publicados pelos professores das turmas piloto que partilhavam os testes aplicados aos alunos. Outros exemplos foram selecionados de manuais de exercícios destinados a acompanhar a experiência, em particular os livros de exercícios de matemática Moderna (Gomes, Nunes e Heitor, s/ data). Na figura 2, encontramos um exemplo retirado do manual de fichas referido sobre os movimentos de translação.

Figura 2: Exercício da Ficha de exercícios IV1 (Gomes et al, p. 115).

A reforma irá ter um papel importante na reflexão em torno deste subsistema de ensino, contribuindo para uma reformulação das práticas dos professores de matemática das escolas técnicas, promovendo o trabalho colaborativo, visível nas 66 edições da Folha Informativa dos professores do 1.º Grupo e levando a uma recomposição das práticas no ensino técnico em Portugal.

Referências

Gomes, F., Nunes, M. J. e Heitor, S. *Matemática Moderna 1. Fichas*. Livraria Popular, Lisboa, s/ data.

Gomes, F., Nunes, M. J. e Heitor, S. *Matemática Moderna 2. Fichas*. Livraria Popular, Lisboa, s/ data.

Heitor, S. 2.º ponto de frequência para os alunos da turma piloto. *Folha Informativa dos professores do 1.º Grupo (E. T. P.)*, n.º 20, 1968, p. 19.

Matos, J. M., e Almeida, M. C. A reforma da matemática moderna em Portugal. *Revista De História Da Educação Matemática*, 4(2) (2018), p. 5–30. `http://histemat.com.br/index.php/HISTEMAT/article/view/212`.

Rodrigues, A.; Novaes, B. W. D. & Matos, J. M. A cultura escolar em conflito: ensino técnico e matemática moderna em Portugal, *Revista Diálogo Educacional*, Curitiba, v. 16, n. 48 (2016), p. 381–402. `https://periodicos.pucpr.br/dialogoeducacional/article/view/2023/1942`.

Rodrigues, A. O Movimento da Matemática Moderna no Ensino Técnico em Portugal. Gutiérrez, R. E., & Prieto, J. L. (Comps.). *Memorias del VI Congreso Iberoamericano de Historia de la Educación Matemática*, Asociación Aprender en Red, (2022), p. 607–622. `https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/230722`.

Matemática pela rádio: uma experiência nos anos setenta

Mária Cristina Almeida
Centro Interdisciplinar de Ciências Sociais (CICS.NOVA), Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa

O *Instituto de Meios Audiovisuais de Ensino (IMAVE)* foi criado em 1964 (Decreto-Lei n.º 46 135, de 31 de Dezembro), e tendo atribuições diversas, entre as quais avultava a de promover a realização de programas de rádio e televisão escolares e outros de carácter educativo (Telles, 1965). A *Rádio Escolar* tinha começado a emitir em 1960, em Portugal, na dependência da Direcção-Geral do Ensino Primário, mas depois da criação do IMAVE os seus programas passaram a ser elaborados e supervisionados diretamente pelo Instituto. Este trabalho foca-se numa série de programas radiofónicos para o ensino secundário designada 'Tempo de Estudo', emitida em 1972, que visava especialmente a preparação para o exame, da 2.ª Fase, de várias disciplinas do 2.º e 3.º ciclo do ensino liceal, especialmente na disciplina de Matemática. Apresentaremos uma análise de guiões de lições emitidas e de material relativo a lições do 2.º ciclo, tentando descrever a dinâmica das lições. As fontes utilizadas englobam legislação e fontes manuscritas, complementadas com entrevistas a António Augusto Lopes (1917–2015), que foi o professor que organizou os materiais e apresentou os programas respeitantes às lições da disciplina de Matemática, dos dois ciclos.

O nosso entrevistado António Augusto Lopes (AAL) foi formador de professores desde 1956 até à aposentação em 1985. Teve um papel importante na reforma da Matemática Moderna (MM), em Portugal, como membro da Comissão nomeada em 1963 e como professor nos cursos para professores de Matemática – Cursos de Oeiras. Foi professor na Telescola, onde introduziu a MM no currículo; e autor de livros de texto e de exercícios de Matemática destinados ao ensino liceal, Telescola e CPES. Na primeira entrevista, AAL mencionou que deu 'aulas' de Matemática pela Rádio (AAL, 1/12/2006). Mais tarde, facultou-nos algum do material relativo a essa experiência.

AAL elaborou os documentos que eram enviados aos alunos e os guiões/textos das lições que seriam gravados para emissão em diferido. Encarregou-se, também, das lições emitidas pela rádio. Do material escrito para os alunos, constavam o sumário das lições, uma síntese de figuras destinadas ao acompanhamento das lições e textos de trabalho/exercícios para resolver em casa.

Pela análise do sumário das lições, observamos que houve 14 lições de Álgebra e 9 de Geometria. Analisando os textos de trabalho/exercícios destinados aos alunos para resolução em casa, verificamos que há 89 exercícios de Álgebra e 45 Geometria. Cada lição tem associado um conjunto de exercícios propostos, que pode conter exercícios de matéria lecionada em lições anteriores.

Ao ler as páginas dos guiões das lições, há um tom coloquial, havendo no decorrer da explanação um encorajamento aos alunos e um estímulo à sua participação individual e ativa na aprendizagem. Por meio de perguntas intercaladas no texto, o professor compele os alunos a acompanhar a exposição e, ao mesmo tempo, orienta o entendimento dos alunos na sequência de conteúdos abordados. Notamos o recurso a exemplos e explicações que favorecem a autonomia do aluno, bem como a materiais do quotidiano dos alunos para ilustrar ou ajudar a compreender conceitos matemáticos.

As sínteses de figuras eram utilizadas durante a lição, pois o professor, no decorrer da emissão, fazia referência a uma determinada figura, que servia para auxiliar um raciocínio ou acompanhava um exercício (Figura 1).

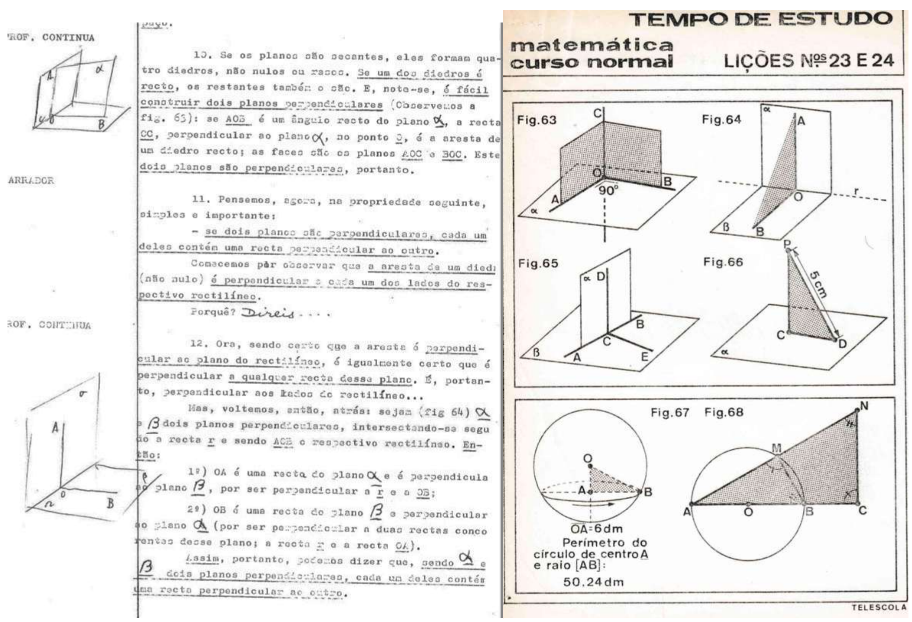


Figura 1: Parte do programa da lição n.º 23 e síntese de figuras.

Sobre os materiais que elaborou, AAL menciona que os sumários possibilitavam ao aluno saber a matéria a abordar nas diversas lições, pelo que podia preparar-se previamente, se assim o entendesse. Para os textos de trabalho, escolheu um conjunto de exercícios que proporcionassem a uma boa preparação para o exame, como era esperado. Em Álgebra, os pontos exigiam uma certa mecanização da parte dos alunos, assim optou por incluir mais exercícios deste tema do que de Geometria. Em Geometria, os pontos exigiam um maior grau de interpretação e raciocínio, os exercícios propostos visavam ajudar o aluno a melhorar o desempenho nestes campos (AAL, 19/12//2007). Quando questionado sobre a dificuldade da conceção de lições de Matemática que seriam emitidas pela Rádio, o professor referiu "Não foi fácil, mas eu já tinha alguma experiência de trabalhar para a televisão, na Telescola, e isso ajudou-me, por exemplo a marcar os tempos com mais facilidade (AAL, 1/12/2006). AAL refere alguns casos de sucesso, ou seja, de alunos que, já tendo reprovado várias vezes no exame, aprovaram em 1972 depois de terem participado no tempo de estudo.

Apesar das nossas tentativas não encontrámos, nem outro material relativo a esta experiência na Rádio Escolar, nem relatório de avaliação que permitisse saber sobre o seu sucesso ou razões porque não continuou.

Fontes e Bibliografia

Decreto-Lei n.º 46 135, de 31 de Dezembro de 1964.

Telles, I. *O Som e a Imagem ao Serviço do Ensino.* Lisboa: Instituto de Meios Áudio-Visuais de Ensino, 1965.

Tempo de Estudo. Lições do 2.º Ciclo: Matemática. Porto, 1972.

Os números racionais não negativos: análise de contextos de ensino em manuais da formação inicial dos professores do ensino primário (1934–1974)

Rui Candeias
Agrupamento de Escolas Terras de Larus
UIED/CICS.NOVA

Os números racionais não negativos são considerados um dos conteúdos matemáticos mais complexos e onde os alunos apresentam maiores dificuldades nos primeiros anos de escolaridade. Para a compreensão dos números racionais é essencial que os alunos desenvolvam um conhecimento profundo dos conceitos que lhe estão associados. Algumas investigações (por exemplo, Monteiro e Pinto, 2005; Pinto, 2011) têm mostrado que existem algumas componentes essenciais no desenvolvimento do sentido do número racional entre os alunos do ensino básico, como os diferentes contextos onde são trabalhados, a unidade de referência, a densidade, as diferentes representações, a comparação e a ordenação dos números racionais. Nesta comunicação discutimos as propostas apresentadas em dois manuais da formação inicial de professores do ensino primário, Pimentel Filho (1934) e Gonçalves (1972, 1974), para o desenvolvimento do conteúdo dos números racionais não negativos. A análise incide nos contextos e representações que estes dois autores utilizam no trabalho a desenvolver com os futuros professores do ensino primário, para o ensino deste conteúdo.

Os manuais de Pimentel Filho (1934) e de Gonçalves (1974) salientam a importância das situações apresentadas aos alunos no trabalho com os números racionais e apresentam diversos exemplos de situações e contextos a utilizar para o desenvolvimento deste conteúdo com os alunos.

Na obra de Pimentel Filho (1934), as primeiras noções das frações são apresentadas com recurso a situações matemáticas estritamente numéricas, com recurso a representações pictóricas que ilustram a situação. No entanto, este autor também recorre a situações semirreais, principalmente com recurso a problemas de cálculo, que se poderiam resolver com duas ou mais operações aritméticas. Nos exemplos em que são utilizados contextos, Pimentel Filho (1934) recorre essencialmente aos contextos de medidas de comprimento, medidas de capacidade, tempo e dinheiro. Nestes exemplos é de destacar a importância que Pimentel Filho (1934) dá à concretização dos dados do problema ou à sua representação através de desenhos e de esquemas. Pimentel Filho (1934) salienta a importância da ordenação da dificuldade dos problemas a apresentar aos alunos, destacando que os problemas a trabalhar nos primeiros anos se deveriam resolver apenas com uma operação aritmética, ou divididos em tantas partes quantas as operações a realizar, e apenas no último ano do ensino primário deveriam ser utilizados problemas em que o aluno tivesse de destacar no enunciado as diferentes fases da resolução. No entanto, nos exemplos que apresenta na sua obra, Pimentel Filho (1934) apresenta muitas vezes situações mais complexas, em que ao nível elementar a sua resolução implicaria vários passos no processo de resolução. Nas operações com decimais, Pimentel Filho utiliza essencialmente situações com um contexto semirreal, relacionadas com a medida ou com as atividades comerciais. São sobretudo problemas de cálculo que se podem resolver com a utilização de uma ou mais operações aritméticas.

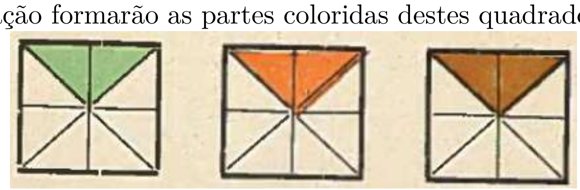
Na obra de Gonçalves (1974), as situações matemáticas e os contextos utilizados ressaltam da sua opção de iniciação aos números racionais através da representação decimal e da relação com as medidas de comprimento. Na primeira abordagem, o autor recorre principalmente a situações matemáticas estritamente numéricas, que ilustra com recurso à representação pictórica e a esquemas. Outras situações privilegiadas por Gonçalves (1974) são as situações com contextos semirreais, utilizando essencialmente as medidas de comprimento, as medidas de capacidade e o dinheiro. São utilizados problemas de cálculo que envolvem uma ou mais das quatro operações aritméticas. São também apresentados por Gonçalves (1974) alguns problemas que se poderão enquadrar nos problemas de processo já que, ao nível elementar, poderiam exigir a utilização de uma ou mais estratégias de resolução. Na obra de Gonçalves (1974) é ainda de destacar a tipificação que o autor apresenta nas situações a apresentar aos alunos tanto com as frações como os decimais. O autor destaca três tipos de problemas que se podem enquadrar nos tipos de problemas de tarefas de identificação de quantidades propostos por Mamede (2008), em que 1) se procura a fração, sendo dada a parte e o todo; 2) identifica-se a parte, sendo dado o todo e a fração; e 3) encontra-se o todo, sendo dada a parte e a fração.

No que diz respeito às representações utilizadas nos manuais analisados, destaca-se nas obras de Pimentel Filho (1934) e Gonçalves (1974) o recurso frequente à representação pictórica com um recurso à cor como forma de ilustrar e destacar o trabalho a realizar com os números racionais. Nestas duas obras também são reiteradas as referências à utilização de representações ativas. São utilizados essencialmente modelos de quantidade contínua

(Mamede, 2008), que os autores utilizam para relacionar com a linguagem verbal escrita e, posteriormente, com a linguagem simbólica matemática.

Na representação simbólica, Pimentel Filho (1934) privilegia inicialmente a representação dos números racionais como fração. Nesta obra a representação decimal é trabalhada posteriormente, numa relação estreita com as frações decimais. Neste trabalho são privilegiados os modelos contínuos de área, como no exemplo seguinte:

Pimentel Filho (1934) estabelece também a relação entre diferentes representações simbólicas. Para algumas das situações onde apresenta propostas de resolução, Pimentel Filho (1934) usa muitas vezes representações pictóricas que façam uma relação direta com a representação simbólica.

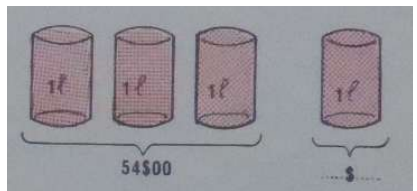
> Que fração formarão as partes coloridas destes quadrados?
>
> 
>
> Dois oitavos, mais dois oitavos, mais dois oitavos, são seis oitavos. Podemos pois escrever $\frac{2}{8}+\frac{2}{8}+\frac{2}{8}=\frac{6}{8}$, o que é uma soma de parcelas iguais e nós já vimos que uma soma nestas condições se poderá transformar em uma multiplicação, na qual o multiplicando é a parcela que queremos repetir e o multiplicador o número de vezes que essa parcela tem de ser repetida. E então $\frac{2}{8}\times 3=\frac{6}{8}$ ou $\frac{2\times 3}{8}$. (p. 172).

Pimentel Filho (1934) também usa modelos contínuos de comprimento, como a reta orientada, tal como é referido em Mamede (2008). Há também no trabalho de Pimentel Filho (1934) referências a um material didático idêntico ao material multibásico, que é usado no trabalho com os números racionais na representação decimal.

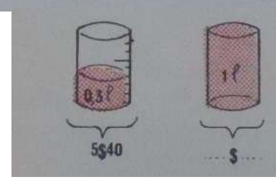
No trabalho de Gonçalves (1974) faz-se um uso frequente da representação pictórica, que depois se relaciona com a representação verbal escrita e representação simbólica matemática. Quanto à representação simbólica matemática privilegia-se inicialmente a representação decimal, mas também se utiliza a fração, o numeral misto e a percentagem, estabelecendo-se uma relação entre estas diferentes representações simbólicas. Um outro aspeto a destacar na obra de Gonçalves (1974) é a utilização muito frequente da representação pictórica para apresentar os problemas e as respetivas propostas de resolução.

Em Gonçalves (1974) são privilegiados os modelos de quantidade contínua, nomeadamente modelos de área e modelos de comprimento, como a representação a reta orientada. Também é de destacar a utilização por parte de Gonçalves (1974) de representações pictóricas de objetos do dia a dia que depois o autor relaciona com representações pictóricas, com o uso de modelos de quantidade contínua, e representações simbólicas. Um exemplo da utilização da representação pictórica é a que Gonçalves (1974) apresenta para a resolução do problema:

> 1) Compraram-se três litros de azeite por 54\$00. A como saiu o litro?



> 2) Compraram-se três decilitros (0,3l) de azeite por 5\$40. A como saiu o litro do mesmo azeite?
> O sentido do 1.º problema é nitidamente partitivo (54\$00 : 3 = 18\$00). (Gonçalves, 1974, p. 80)



Fontes

Gonçalves, G. (1972). *Didáctica do cálculo (apontamentos), 1.º volume*. 2.ª ed. Porto: Porto Editora.

Gonçalves, G. (1974). *Didáctica do cálculo (apontamentos), 2.º volume*. 2.ª ed. Porto: Porto Editora.

Pimentel Filho, A. (1934). *Súmula didáctica*. Lisboa: Livraria Editora.

Referências

Mamede, E. (2008). Às voltas com as frações. In E. Mamede (Coord.). *Matemática: ao encontro das práticas 1.º ciclo*. (pp. 83–92). Braga: Instituto de Estudos da Criança – Universidade do Minho.

Monteiro, C., & Pinto, H. (2005). A aprendizagem dos números racionais. *Quadrante, Revista de Investigação em Educação Matemática*, 14, 89–107. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Pinto, H. (2011). *O desenvolvimento do sentido da multiplicação e da divisão de números racionais*. Tese de doutoramento: Universidade de Lisboa.

Regular Polygons and Proportions — a Forgotten Chapter in the History of Mathematics

Parisa Kharazmi
Departamento de Matemática, CIDMA, Universidade de Aveiro

In the history of mathematics, regular polygons are mostly considered in the context of problems of their construction with ruler and compass [Euclid, B. IV; Heath (1956), Bankoff, Garfunkel (1973)], their use in decorative tiling or paving [Sarhangi (2007)], or of Platonic Solids [Elements, B. XIII; Heath (1956)].

The general question of the construction of regular polygons was definitively answered by C. F. Gauss during his construction of the regular Heptadecagon [Sarhangi (2007), Katz (2010)]: an arbitrary n-gon is constructable by compass and straightedge if and only if n can be factorized by a power of 2 and Fermat's primes *(Gauss–Wentzel theorem)*. Except for the case of the Pentagon and its important connection with the *Golden Section* (coined so only in the 19$^{\text{th}}$ century by Martin Ohm) but already described in Euclid's Elements [B. VI; Heath (1956)], other properties like proportions based on ratios between the diagonals and the sides of regular polygons have not received particular attention.

About 30 years ago two papers [Steinbach (1997), (2000)], mainly motivated by questions of quasi-periodicity and new methods of creating tiles, noticed this fact:

> "One of the best-kept secrets in plane geometry is the family of ratios of diagonal to side in the regular polygons".

Our talk aimed to show how a parallel view on the Pentagon and Heptagon easily reveals some of those secrets, leading to interesting applications of algebraic relations and their geometric visualization.

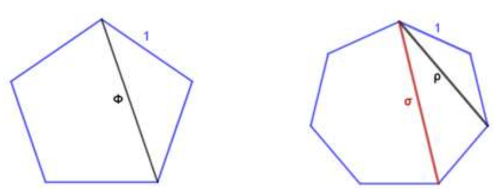


Figure 1: Pentagon and Heptagon with sides of length 1 and their diagonals.

In the introductory part of our talk, we mentioned that several mathematicians of Islamicated countries contributed from the 10^{th} century on with new methods to the solution of problems which have been outside of the attention of the Greeks. This also concerns the consideration of the construction of regular polygons. Without restricting to the use of compass and straightedge (often called Platonic instruments), their use of conic sections like parabola and hyperbola (for example, by Abu Sahl al-Quhi (940–1000) and Omar Khayyam (1048–1131)) explained the possibility of an exact construction of the Heptagon. More historical details concerning the exact and approximate constructions of regular polygons are subject of our contribution to the forthcoming 9^{th} Luso-Brazilian Meeting of the History of Mathematics in Setúbal in October 2022.

After these short historical remarks, we continued to show how the Pentagon and the intersection problem of its diagonals leads us to the consideration of regular polygons from the point of view of proportions. In fact, also these considerations can be historically traced back to Euclid's *Elements*, namely, to Book V on *Ratios and Proportions* and to Book VI on *Geometrical Proportions*. The main tool in this parallel treatment are different types of their so called "vertex-triangles", i. e. triangles in a polygon with all their vertices on the circumscribed circle of the regular n-gon. It is easy to see that all types of *v-triangles* are related to the different partitions of n into three entire numbers, corresponding to the number of arcs over their sides, cf. [Elements, B. VI, Prop. 33; Heath (1956)]. For example, in the case of the Pentagon exist two types of *v-triangles* corresponding to the two possible partitions of 5, namely $5 = 2 + 1 + 2 = 1 + 3 + 1$. But in the case of the Heptagon, we have four *v-triangles* corresponding to $7 = 3{+}1{+}3 = 2{+}3{+}2 = 1{+}5{+}1 = 1{+}2{+}4$, three of them isosceles and one of them a scalene triangle (coined *Heptagonal Triangle* [Bankoff, Garfunkel 1973]). These *v-triangles* helped us to prove interesting algebraic relations in the Heptagon that lead immediately to the recognition of the diagonals ρ and σ as cubic irrationalities, i. e. irrational solutions of a cubic equation. This is another reason for the impossibility to construct the Heptagon only by compass and straightedge. (Note that, in the Pentagon, constructable by compass and straightedge, the only diagonal ϕ is a quadratic irrational.) Compared with the well-known ratios and proportions between the side (of unit length) of the Pentagon and its single diagonal ϕ

$$\phi : 1 :: (1 + \phi) : \phi \tag{1}$$

the analogue situation in the Heptagon with its two diagonals led us to

$$\sigma : \rho : 1 :: (1+\rho+\sigma) : (\rho+\sigma) : \sigma :: (\rho+\sigma) : (1+\sigma) : \rho. \tag{2}$$

Concluding remarks: Our proof of algebraic relations in the Heptagon based on (2) and including only 4 detections of similar triangles with the help of *v-triangles* (reduced to partitions of 7!) can be used as starting point for interesting applications in teaching constructive and algebraic geometry in the classroom. Since the use of geometrical software like GeoGebra, The Geometer's Sketchpad or Cinderella (to mention only a few) in teaching the construction of polygons, the historical approach by using compass and straightedge is almost neglected as well as the discussion of approximate constructions. Using some historical background about the Heptagon could be one more contribution to teaching the cultural dimension of Mathematics. Moreover, the mentioned geometric approach to the properties of the algebraic field $\mathbb{Q}(1, \rho, \sigma)$ built by the side and the diagonals of the Heptagon also show a wide range of applications in undergraduate university studies like in number theory, algebraic structures, complex analysis, etc.

References

L. Bankoff, J. Garfunkel: "The Heptagonal Triangle", *Mathematics Magazine*, Vol. 46, No. 1 (1973).

Euclid, *The Thirteen Books of The Elements* (Transl. S. T. L. Heath; 2nd. Ed.), Dover Publication, 1956.

V. Katz, *História da Matemática*, (Transl. of *A History of Mathematics*, Addison Wiley, 2nd ed, 1998), Fundação Calouste Gulbenkian, 2010.

R. Sarhangi, "Geometric Constructions and their Arts in Historical Perspective", *Bridges Donostia: Mathematics, Music, Art, Architecture, Culture* (2007), 233–240.

P. Steinbach, "Golden Fields: A Case for the Heptagon", *Mathematics Magazine*, Vol. 70, No. 1 (1997), 22–31.

P. Steinbach, "Sections Beyond Golden", *Bridges: Mathematical Connections in Art, Music, and Science* (2000), 35–44.

A. Wünsche, "Delight and Frustration with Number 'Seven' in Plane Geometry and the Regular Heptagon", *Advances in Pure Mathematics*, Vol. 11, No. 1 (2021), 63–100.

Cultura Geral e Ideias Fundamentais: Caraça, Bruner e Delors

João Tomás do Amaral
Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo
Instituto Histórico e Geográfico de São Paulo

Introdução

O processo educativo tem se constituído em um significativo campo de interesse quanto ao ensino e a aprendizagem nos vários níveis de escolaridade e nas diversas áreas do conhecimento, principalmente no âmbito da Matemática. Há, de fato, farta quantidade de estudos de investigação com o objetivo de diagnosticar as causas que promovem os desvios tanto no ensino quanto na aprendizagem, no âmbito da Matemática e de outros ramos do conhecimento e, também, de apresentar propostas no sentido de amenizar e/ou resolver tais problemas. Esses diagnósticos e propostas de resolução ocorrem, de forma sistemática, por organismos nacionais e internacionais.

Dentre várias possibilidades para sanar essa questionada defasagem, certamente, encontraremos uma trajetória pedagógica fundamentada na ampliação da cultura geral por meio das noções/ideias/conceitos fundamentais. Essa proposta encontra amparo em reflexões e argumentos apresentados ao longo do século XX para a melhoria da abordagem em Matemática e da Educação para o século XXI. Assim, enfocaremos as referenciais posições propostas por Bento de Jesus Caraça (1901–1948), e utilizadas por Jerome Bruner (1915–2016) e, também, preconizadas pela Comissão Internacional sobre a Educação para o Século XXI, em 1996, no Relatório para a UNESCO — Relatório Delors.

A importância da cultura geral

O termo *Cultura*, ao longo do tempo e nas mais variadas circunstâncias, esteve exposto a um processo de ajustamento quanto ao seu sentido, significado e utilização. Nesse percurso, certamente, temos uma longa trajetória, e ainda, a ser percorrida no sentido de não questionarmos a sua importância, mas trilharmos para a conquista sólida da essência e estética da natureza da cultura — afinal, o que é a cultura? Nesse contexto, apresentaremos o pensamento de Bento de Jesus Caraça, por sua incansável intervenção no âmbito ampliação da cultura para todos, no tocante à noção de que o:

> Homem culto é aquele que tem consciência: 1.º) da sua posição no cosmos e, em particular na sociedade a que pertence; 2.º) da sua personalidade e da dignidade que é inerente à existência como ser humano; 3.º) da importância do aperfeiçoamento interior, fazendo-o como preocupação máxima e fim último de sua vida. (CARAÇA, 1970, p. 51)

Entretanto, é no século XIX, que surge uma forma de cultura que passou a ser denominada de Cultura Geral, conforme esclarece António Eduardo Lobo Vilela (1902–1965), em seu livro PERSPECTIVAS, ao afirmar que:

> O século XIX concebeu, com o nome de *cultura geral*, um tipo de cultura que abrange o conjunto de ideias, de noções, de formas de pensar que resumem as conclusões da ciência e da moral, os princípios diretores das artes e do pensamento, susceptíveis de formar uma concepção ampla e quanto possível completa do Mundo, da vida e da sociedade humana, sempre enriquecida e valorizada com novos subsídios. [...] os progressos alcançados nos diversos ramos do saber e da investigação. (LOBO VILELA, 2011, p. 22 e p. 40, grifo nosso).

A convicção Caraciana está presente no prefácio do livro "O Homem e o Livro", de M. Iline, publicada em 1941, a obra inicial da Biblioteca Cosmos, quando propõe as seguintes questões: "É possível pôr ao alcance de todos a cultura geral? Não existe, por ventura, no conjunto das ideias fundamentais da estruturação intelectual, domínios não acessíveis, ou só acessíveis aos iniciados? Não é verdade, como se vê afirmar com frequência, vulgarizar [popularizar] é sempre abaixar?". E responde que "em cada ramo do conhecimento há o que é do domínio do especialista [para poucos] e o que é do domínio geral [para todos]", e acrescenta "o que se pretende vulgarizar é, precisamente, o que pertence ao domínio geral [cultura geral], e aí não há nada que não possa ser aprendido pelo comum dos homens [para todos]". (1941, p. 7, acréscimos nossos)

Curiosamente, no final de anos 50, do século XX, nos Estados Unidos da América, o psicólogo Jerome Bruner e seu grupo de especialistas, visando a melhoria do processo educativo para os estudantes da América, apresenta respostas às questões semelhantes às propostas por Bento Caraça. Essas respostas, alavancadas em questões similares às enfrentadas por Caraça, propõem, que:

> [...] os *fundamentos* de qualquer assunto podem, de alguma forma, ser ensinados a quem quer que seja, em qualquer idade.

> Embora essa proposição posssa parecer de início surpreendente, sua intenção é sublinhar um ponto essencial [...] o de que as idéias básicas [fundamentais] que se encontram no âmago de todas as Ciências e da Matemática, e os temas básicos [fundamentais] que dão forma à vida e à literatura, são tão simples quanto poderosos. Ter essas idéias básicas [fundamentais] ao seu dispor, e usá-las eficientemente, exige constante aprofundamento da compreensão que delas se tem, o que se pode conseguir aprendendo a utilizá-las em formas progressivamente mais complexas. (BRUNER, 1978, p. 11–12, grifos e acréscimos nossos).

A Comissão Internacional sobre a Educação para o século XXI, coordenada por Jacques Delors, ao final dos nos 90, século XX, após os trabalhos realizados de março de 1993 a setembro de 1996, apresentou o Relatório para a UNESCO, conhecido como Relatório Delors. Nesse relatório, constam reflexões e argumentos que revisitam e reforçam para todos, especialistas ou não, as propostas Caracianas ao assegurar que:

> A *cultura geral, enquanto abertura a outras linguagens e outros conhecimentos, permite antes de tudo comunicar-se*. Fechado na sua própria ciência, o especialista corre o risco de se desinteressar pelo que fazem os outros. Sentirá dificuldade em cooperar, quaisquer que sejam as circunstâncias. [...] *em matéria de pesquisa*, determinados avanços do conhecimento dão-se nos pontos de intersecção [*ideias fundamentais*] das diversas áreas disciplinares. (2001, p. 91–92, grifos e acréscimo nosso).

O Relatório Delors ao afirmar que "*A especialização, porém, mesmo para os futuros pesquisadores, não deve excluir a cultura geral*" (2001, p. 91), propõe a urgente necessidade de uma articulação. Essa articulação, certamente, deve ocorrer por intermédio das idéias fundamentais de cada ramo do conhecimento, e que têm como caracteristicas identificadoras: o uso da *linguagem corrente*, a *articulação interna* com outras partes da sua especificidade e, ainda, a *articulação externa* por conexão e transbordamento com outros ramos de conhecimento.

Considerações finais

Está aberta uma incrível possibilidade aos agentes envolvidos com o processo educativo para que se inspirem e se motivem a partir das, então, inovadoras reflexões e ações de Bento Caraça, e também reforçadas por Jerome Bruner e atualmente propostas pelo Relatório Delors para a nossa Educação frente aos desafios do século XXI — especilização e cultura geral articuladas pelas idéias fundamentais. Nesse sentido, será importante uma imersão cuidadosa sobre o pensamento e a ação de Bento Caraça para a elaboração de uma pormenorizada reflexão, que objetive o desenvolvimento consciente de ações para a melhoria da qualidade da Educação.

Referências bibliográficas

AMARAL, J. T. *Bento de Jesus Caraça — Uma Visão Sobre o Valor Humano e o Valor Social da Matemática e Suas Implicações no Ensino.* Tese de Doutoramento. Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo. 2014.

BRUNER, J. S. *O Processo da Educação.* 7.ª edição. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1978.

CARAÇA, B. J. Prefácio. In: ILINE, M. *O Homem e o Livro.* 4.ª Edição. Lisboa: Edições Cosmos, 1947.

CARAÇA, B. J. *Conferências e Outros Escritos.* Lisboa: Editora e Livraria Sá da Costa, 1970.

DELORS, J. et al. *Educação: Um tesouro a descobrir.* Relatório para a UNESCO da Comissão Internacional sobre Educação para o século XXI. 5.ª Edição. São Paulo: Editora Cortez: Brasília: DF: MEC: UNESCO, 2001.

VILELA, A. E. L. *Perspectivas.* 2.ª Edição. Lisboa: Editor Antonio da Costa Lobo Vilela, 2011.

Eduardo L. Ortiz, matemático e historiador (1931–2021)

Luís Saraiva
CIUHCT, DM da FCUL

Eduardo Leopoldo Ortiz nasceu em Buenos Aires em 1931. Licenciou-se em Ciências Físico-Matemáticas na Universidade de Buenos Aires em 1956. Durante o seu curso conheceu António Aniceto Monteiro (1907–1980), então professor na Universidade Nacional de Cuyo, em San Juan. Concluiu o seu doutoramento em 1961, sob a orientação do matemático Micha Cotlar (1913–2007), com a tese *Continuity of Potential Operators in Spaces with weighted measures*. Em 1962 tem um artigo em colaboração com o seu orientador, "On some inequalities of potential operators", nas publicações da *Faculdade de Ciências e Físico-Matemática da Universidade de La Plata*.

Trabalhou um ano no *Institute for Advance Studies* de Dublin, instituto fundado em 1940, englobando a *School of Theoretical Physics*, que teve por primeiro director Erwin Schrödinger (1887–1961) e que foi dirigida a partir de 1955 pelo matemático e físico teórico húngaro Cornelius Lanczos (1873–1974), com cujos trabalhos Ortiz se familiariza, em particular com o método Tau. Inicialmente foi um instrumento para a aproximação de funções especiais da física matemática, mas que se transformou num poderoso auxiliar para a solução numérica de equações diferenciais e funcionais complexas. Ortiz irá formular este método de forma mais abstrata e geral. Após um ano de estada em Londres, no Imperial College, regressa, à Argentina, começando a sua carreira docente na Universidade de Buenos Aires. Contudo a instabilidade política naquele país nos anos 60, culminada com um golpe militar em 1966, seguido de invasão da sua Universidade por forças militares, agredindo professores e alunos, fez Ortiz, em conjunto com muitos outros docentes, demitir-se da Universidade. Saiu da Argentina, primeiro para o Peru, onde lecionou brevemente na Universidade de Lima, e depois para outros países. Fixou-se em Londres em 1967, e aí centrou o resto da sua vida. Fez a sua carreira académica no Imperial College, de Londres.

Uma síntese geral de alguns dos aspetos académicos mais relevantes:

Em 1990 foi-lhe atribuído pelo Departamento Argentino de Ciência e Tecnologia e pelo CONICET (*Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas*) o primeiro *Prémio José Babini*, pelo conjunto da sua obra em história da ciência na Argentina; em 1992–1993 foi professor visitante na *Universidade de Orléans*; em 1993 foi nomeado professor catedrático no *Imperial College*; de 1996 a 1998 foi nomeado *Guggenheim Research Fellow*, e nessa qualidade trabalhou no Departamento de História da *Universidade de Harvard*.

Foi igualmente professor visitante na *Universidade de Rouen*, no *Massachusetts Institute of Technology* (MIT), na *Universidade Nacional de Córdoba* e na *Universidade Nacional de Buenos Aires*, ambas na Argentina.

Foi eleito sócio da *Real Academia das Ciências de Espanha*; da *Academia de Ciências Exactas, Físicas e Naturais* da Argentina; da *Academia das Ciências*, da Argentina; do *Instituto de Matemática e suas Aplicações* da Grã-Bretanha; da *Sociedade Mexicana de História das Ciências*.

Foi o Editor em Chefe da *Humboldt Library*, de Londres, e nesse cargo realizou a edição das obras completas de Julio Rey Pastor em 8 volumes (1988) e de António Aniceto Monteiro em CD-ROM (2008), esta em colaboração com Alfredo Pereira Gomes.

Em matemática fez investigação em Análise Numérica, Equações com Derivadas Parciais, Funções Especiais, Teoria dos Espaços de Sobolev e Teoria da Aproximação e suas aplicações.

Tem pelo menos 86 artigos publicados em matemática entre 1962 e 2007, sendo mais de metade em análise numérica e na teoria da aproximação. A revista onde mais publicou foi a *Computers & Mathematics with Applications*, com 19 artigos. Orientou com êxito 7 doutoramentos.

O interesse de Ortiz pela história da Matemática foi iniciado na Universidade de Buenos Aires pela influência directa de Rey Pastor. O periodo que afirmava mais lhe agradar trabalhar era o da transição do século XVIII para o XIX, quando considerava que as ideias matemáticas e a filosofia estavam muito interligadas. Entre as áreas analisadas contam-se o desenvolvimento da Matemática na Argentina e em Espanha, e a relação entre ambas nos séculos XIX e XX, a transmissão da matemática para a área cultural latino-americana, e o estudo de matemáticos pouco conhecidos do século XIX, como Henrique de Figueiredo em Portugal, Mendoza Ríos em Espanha e José Balbín na Argentina. Tem (pelo menos) 84 artigos publicados em História da Matemática entre 1962 e 2021. Analisa igualmente aspetos da história matemática na Península Ibérica e as relações com a América Latina.

Participações em Portugal ou relativas a Portugal:

Eduardo Ortiz participou em Portugal em diversos Encontros de História da Matemática, ou ainda fora de Portugal em Encontros co-organizados por portugueses em que se abordavam temas relativos à nossa história matemática. Publicou, em revistas ou em livro, artigos relativos a aspetos da matemática portuguesa. Damos em seguida um levantamento cronológico de alguns desses eventos:

1980. *Portugaliae Mathematica* n.º 39, número de homenagem a António Monteiro. Artigo: "Professor António Monteiro and contemporary mathematics in Argentina";

1993, Lisboa, Faculdade de Ciências. *5.º Encontro do SNHM*. É o conferencista convidado;

1996. Livro *L'Europe Mathématique*. Artigo: "The 19th century international mathematics community and its connection with those on the Iberian periphery";

1999. *Historia Mathematica* vol. 26, n.º 1. Com Jeremy Gray, artigo: "On the transmission of Riemann's ideas to Portugal";

2000, Óbidos. Encontro Internacional *A Prática da Matemática em Portugal*. Artigo: "António A. Monteiro on the Practice of Mathematics" (publicado em 2004);

2001, Porto. Encontro *Um dia com o Centro de Estudos Matemáticos do Porto*. Artigo: "Transferências de Matemática Pura y Física Teórica de Portugal a Argentina en 1943–58";

2005, Porto. *Colóquio Internacional do Centenário do Nascimento de Ruy Luís Gomes*. Artigo com Edgardo Stacco e Luiz Monteiro: "Ruy Luís Gomes en la Argentina: 1958–1961", (*Boletim da SPM*, 2006);

2006, Madrid. Sessão do International Committee for the History of Mathematics no *XXIII Congresso Internacional de Matemáticos*, "Ibero-American mathematics in the 19th and 20th centuries". Apresentação da edição das obras completas de António A. Monteiro;

2007, Lisboa. Colóquio Internacional *António Aniceto Monteiro*. Artigo: "António A. Monteiro, Birkoff, Von Neumann y Stone: Matemáticas en Portugal y en Brasil en la década de 1940" (*Boletim da SPM*, 2008);

2015, Lisboa. Encontro Internacional "Mathematical Sciences and 20th century dictatorships", celebrando os 75 anos da SPM. Artigo: "Mathematicians in Latin America, in times of anxiety: 1965–1985" (publicado em 2018);

2019, Coimbra, Museu da Ciência da UC. Colóquio *Bento de Jesus Caraça e a actualidade da Cultura Integral*. Artigo: "Mathematician Bento de Jesus Caraça and the Cosmos library: books for the people" incorporado nas Actas do Colóquio *Bento de Jesus Caraça e o Projeto Cosmos* (publicado em 2021).

Referências

Ortiz, E. L., Mathematicians in Latin-America, in times of anxiety: 1966–1985, *Proceedings of the International Conference "Mathematical Sciences and 20th Century Dictatorships"*, SPM, 2018, p. 219–25.

Saraiva, L., In Memoriam: Eduardo Ortiz (1921–2022), para publicação em *Archives Internationales d'Histoire des Sciences*.

Two questions concerning the history of the calculus

Niccolò Guicciardini
Departamento de Filosofia «Piero Martinetti», Università degli Studi di Milano

Most histories of mathematical analysis describe the 18th century as a transition period in between two phases of radical innovation: the 17th century with the advent of the 'common' and the 'new' analyses, namely analytic geometry and calculus, and the 19th century with the development of real and complex analysis, abstract algebra, and the non-Euclidean geometries. Contrary to this view, the 18th century was an extremely creative period in which new concepts and methods were developed. In the first part of my talk, I will present the Newtonian and the Leibnizian versions of the calculus. Most notably, I will ask a question concerning the Newtonian calculus that deserves our attention. In the second part, I will give a general outline of the reception and profound transformation of these two mathematical heritages in the 18th century. I will propose another question concerning the development of calculus during the Enlightenment.

The first question concerns the boundaries of the discipline of mathematics as practiced by Newton. When Whiteside began the gigantic enterprise of editing Newton's mathematical papers in the 1960s, this question was not that problematic.[3] Historians of mathematics nowadays are much more sensitive to viewing disciplinary geographies as culturally and locally determined. In these last years, we have come to appreciate that the extension of the term 'mathematics' was much broader than it is nowadays. In the Seventeenth Century, the term included Euclidean geometry, specious algebra, the methods of series, the infinitesimal calculus, organic geometry, mechanics, astronomy, optics, music, and more. Should we, therefore, include texts where the young Newton deals with optics or astronomy as in several pages of the so-called "Waste Book" (CUL Ms Add. 4004)? Indeed, Whiteside chose a selection of some optical and astronomical manuscripts for his edition. Yet, while he aimed at completeness as far as pure mathematics is concerned, the many calculations that Newton carried out in applied fields are often not included in his edition. A bias for pure mathematics that somewhat oriented Whiteside in his edition offers us a view of Newton the mathematician that is more compatible with the traditional image of the pure scientist whose lonely mind is celebrated in Wordsworth's verses. We tend so easily to forget what in the 1950s Eva Taylor reminded us by including Newton in her prosopography of the mathematical practitioners in Tudor and Stuart England: namely, that Newton was deeply concerned with research on mathematical astronomy, optics, cubature of barrels, logarithm and trigonometric tables, which were the province of cartographers, opticians, gaugers, astronomers and land surveyors.[5] It is a polymath, Christiaan Huygens, that Newton held as his model, and it is with men professionally occupied in astronomy, such as John Flamsteed, Robert Hooke and Edmond Halley, that he was deeply engaged while writing his *Principia*. The third book of the magnum opus is clearly addressed to the professional astronomer. Briefly said, the excisions and the boundaries that Whiteside so naturally drew, construct an image of Newton that might be worth questioning.

The second question concerns the different trajectories taken by 18C calculus in Britain and on the Continent. As a matter of fact, the great innovations in the development of Continental calculus took place almost exclusively thanks to mathematicians based in three academies: the academies of Paris, Berlin, and St. Petersburg. These academies were founded with practical concerns in mind: as venues in which mathematics could be pursued in the interest of the State, for example in the field of cartography. Another prominent aim was that of conferring prestige to the patron, namely the Court. Unlike the Royal Society, the Continental Academies "resembled a civil service strictly organised in its patterns of recruitment and reward". Academicians were paid and ranked into a hierarchical structure: their ethos became soon elitist and based on competition. The abstract discipline in vogue in the Continental academies, the new analysis as practiced by Euler for example, was the perfect tool that allowed academicians to develop a "strong sense of membership in the profession of science" and to endow prestige to those who excelled in it.[1, 503] In Britain, on the contrary, mathematics remained a language subservient to teaching, natural philosophy, and practical concerns in applied fields.[2] The analysis of Continental academic mathematicians could not but appear to many — and not only in Britain but even in France in certain quarters — as remote from 'useful knowledge' and vitiated by an elitist French agenda. The fellows of the Royal Society considered themselves 'gentlemen of science' remote from the bureaucratic status of Continental academicians. British mathematicians, whether they championed symbolism or geometry, highly valued the integration of mathematics into the natural philosophers' agenda. In contrast to Continental academicians, the British did not value the independence from interpretation allowed by the kind of algebraic manipulations that was promoted in part by Euler, and systematically by Lagrange. While some Continental mathematicians could feel secure in pursuing an autonomous discipline whose justification was thought to reside in the functioning of its algorithms, the British felt compelled to defend the intelligibility and practical usefulness of their procedures. The highly abstract Continental calculus, as pursued by the top academicians, was thus foreign to the values defended in British universities and at the Royal Society, and this might at least partly explain the chasm separating British and Continental mathematicians in the second half of the eighteenth century. There was also no equivalent to Fontenelle in Britain, a similarly royally pensioned public spokesperson who from 1697 to 1740 sustained a systematic and persistent public propaganda campaign that explained to the wider public the value of the new abstract mathematics, and the reasons for the academy's lucrative support of its practitioners. Lavishly supported by the French crown in this way, and possessing a justification for its elevated scientific position that was re-iterated with unwavering eloquence every year in the annual publications of the Royal Academy in Paris, the practitioners of the new analysis acquired by 1740 an identity as the theoretical avant-garde of the new mathematical physics, which was itself positioned as the leading edge of modern science overall.[4]

References

[1] K. M. Baker, "Science and the Social Order in the Old Regime", *Minerva*, Vol. 10 (1972), pp. 502–508.

[2] N. Guicciardini, "Dot-Age: Newton's Mathematical Legacy in the Eighteenth Century", *Early Science and Medicine*, Vol. 9, No. 3 (2004), pp. 218–56.

[3] I. Newton, *The Mathematical Papers of Isaac Newton*, Whiteside, D. T. W. (ed.), 8 vols., Cambridge University Press, Cambridge, 1967–1981.

[4] J. B. Shank, *Before Voltaire: the French Origins of "Newtonian" Mechanics, 1680–1715*, The University of Chicago Press, Chicago, 2018.

[5] E. G. Taylor, *The Mathematical Practitioners of Tudor & Stuart England*, for the Institute of Navigation at the University Press, Cambridge, 1954.

Seis pavilhões para seis instrumentos: o plano-programa do Observatório Astronómico da Universidade de Coimbra, em Santa Clara

Sandra Poiarez
Centro de Investigação da Terra e do Espaço da Universidade de Coimbra / Doutoranda em História da Ciência e Educação científica[1], Instituto de Investigação Interdisciplinar da UC

O atual Observatório Astronómico da Universidade de Coimbra (OAUC), inaugurado em 1951, foi edificado na sequência da implementação do plano da Nova Cidade Universitária de Coimbra, que implicava a demolição do antigo Observatório do Pátio das Escolas, construído entre 1791 e 1799, durante a direção de José Monteiro da Rocha (1734–1819). Manuel dos Reis (1900–1992), diretor da instituição entre 1934 e 1970, irá mediar o processo, entre a Comissão Administrativa do Plano de Obras da Cidade Universitária de Coimbra (CAPOCUC) e a Faculdade de Ciências da Universidade de Coimbra (UC), para a escolha do local do novo OAUC. Será também o responsável pela definição do seu plano-programa que acabará por estabelecer a opção tipológica dos edifícios, tendo em conta as duas secções dedicadas à investigação astronómica que o Observatório já detinha: a secção de astronomia de posição e mecânica celeste, estabelecida desde a sua fundação, e a secção de astrofísica, dedicada ao estudo do sol, iniciada em 1925 pelo anterior diretor, Francisco da Costa Lobo (1864–1945).

Manuel dos Reis, depois de avaliar a hipótese de implantar o novo OAUC em Montes Claros, a Nordeste da Alta da cidade, em 1942, rejeitada pela CAPOCUC, acaba por sugerir a localização atual, no Alto de Santa Clara, na margem oposta do Mondego, em dezembro de 1944 (Costa et al, s. d.). Para a sua escolha identifica critérios de altitude, isolamento e de boa visibilidade para a prática científica (AUC, CAPUCOC, Proc. 95, cópia do ofício n.º 49/44). O diretor do OAUC expressa ainda, com propriedade, que se deverá delimitar e "regular convenientemente", uma zona de proteção ao estabelecimento (AUC, CAPUCOC, Proc. 95, cópia do ofício n.º 49/44).

Após a aceitação desta proposta por parte da CAPOCUC, o diretor apresenta, por ofício, em 1945, a justificação da área de implementação necessária, cerca de 75.886 m^2, reiterando a preocupação de se regulamentar a zona de proteção do OAUC. Descreve, em seguida, o plano-programa para

[1]Esta investigação foi financiada pela Fundação para a Ciência e Tecnologia, no âmbito da Bolsa de Doutoramento FCT UI/BD/151472/2021.

a construção do novo estabelecimento, constituído por vários edifícios edificados "a uma dezena de metros uns dos outros" e localizados na planta da área definida para a implantação do novo Observatório (AUC, CAPUCOC, Proc. 95, Cópia do Ofício n.º 31/45). O Diretor traça como proposta, que acabaria por se concretizar, a construção de um edifício central, seis "pavilhões de instrumentos" (assim designados por Manuel dos Reis), uma oficina e residências para os astrónomos, ajudantes de astrónomo, maquinista e para o guarda da instituição, bem como o muro que rodeia todo o terreno da instituição.

Manuel dos Reis ao elaborar o seu plano-programa apresenta uma vontade de manter a investigação que, contudo, apenas se faria com instrumentos científicos previamente existentes na instituição (Bonifácio, 2009). Os seis "pavilhões de instrumentos", com cúpulas ou telhados amovíveis propostos e que foram efetivamente construídos, destinavam-se a instrumentos de ambas as secções científicas do OAUC. Os pavilhões designados pelos nomes de cada instrumento serão o "Círculo Meridiano", o "Equatorial", o "Universal de Repsold" e o "Fotoheliográfo", instrumentos que haviam entrado no Observatório durante o século XIX. Os restantes pavilhões destinavam-se ao "Espectógrafo Estelar" e ao "Espectoheliográfo", este previamente instalado no recinto do Instituto Geofísico da UC, na Cumeada, aparelhos adquiridos na década de 1920 (MOP, 1951: 2,3).

O plano-programa, que estabelece orientações específicas para a implantação dos edifícios no terreno e dos próprios edifícios, descreve os critérios definidos por Castro Tirado como fundamentais à construção de Observatórios Astronómicos durante o seculo XX (Castro Tirado, 2021: 6,7). Esses critérios essencialmente técnicos e funcionais definem a implantação dos edifícios, a colocação correta dos instrumentos, e soluções que permitissem a estabilidade térmica e estrutural dos edifícios, para evitar a transmissão de qualquer tipo de vibração aos instrumentos de observação, ao mesmo tempo que deveriam proporcionar condições favoráveis, tanto de trabalho, como de acomodação, aos observadores.

O modelo de observatório astronómico constituído por vários edifícios independentes uns dos outros, equacionado por Manuel dos Reis, desde o primeiro momento, é aquele que Abraham Waumans designa de "complete split" ou de separação total dos seus componentes (Waumans, 2013). Segundo este autor, o observatório que pela primeira vez apresentou essa disposição, foi o do Monte Wilson, na Califórnia (E. U. A.), levantado entre 1908 e 1917.

Manuel dos Reis não terá saído do país com o objetivo de visitar outros observatórios para traçar o novo plano do OAUC, ao contrário do que sucedeu na preparação do plano dos restantes edifícios da nova UC. Sabemos, no entanto, que durante a sua direção, como aliás na anterior, o Observador-Chefe do Observatório, José António Madeira (1896–1976), havia saído em missões científicas aos Observatórios Astronómicos de Greenwich (Londres), Uccle (Bruxelas) e Meudon (Paris), patrocinadas pela Junta de Educação Nacional, em 1933 (Madeira, 1933), e pelo Instituto para a Alta Cultura, em 1937 (Madeira, 1938). Podemos notar que os observatórios que José António Madeira visitou na Europa, embora não tenham sido concebidos originalmente com uma ideia de separação total dos seus edifícios, incluíam já, em menor ou maior grau, desenvolvimentos nesse sentido. A proposta de Manuel dos Reis para o novo OAUC segue, portanto, um modelo de observatório definido por uma estruturação própria da ciência astronómica, quer do ponto de vista técnico, quer do ponto vista funcional. Foi a este modelo que a arquitetura dos edifícios teve de dar resposta. O projeto arquitetónico dos edifícios do novo OAUC foi entregue ao arquiteto Edgard Duarte de Almeida (1903–?), que elaborou o projeto do edifício central. O facto deste arquiteto se ter ausentado de País levou a CAPOCUC a contratar o arquiteto Álvaro da Fonseca (?–1973?), para desenhar os restantes edifícios.

O processo de construção do novo OAUC, apesar da diligência e do acompanhamento do então diretor, não decorreu sem problemas. Manuel dos Reis chegou mesmo a pedir a suspensão das obras “antes de nelas fazerem mais despesas”, pois não tinham sido garantidas as necessárias condições de estabilidade para a colocação dos instrumentos, em particular ao nível das fundações. Também as cúpulas tinham problemas nos seus mecanismos de abertura. No entanto, o novo OAUC seria inaugurado, conjuntamente com o edifício da Faculdade de Letras da UC, em 22 de novembro de 1951. Os seis pavilhões dos instrumentos encontravam-se ainda em vias de conclusão. Mas o término das obras iria arrastar-se no tempo. Dezassete longos anos decorridos após a inauguração do OAUC, o *Espectroheliógrafo* será o primeiro instrumento a ser efetivamente instalado no seu respetivo edifício, em 1968, um ano após a sua transferência do Observatório Geofísico para Santa Clara.

A construção do novo OAUC revela, em certa medida, que os projetistas, a empresa construtora e a própria fiscalização da CAPOCUC, não estavam preparados para a realização de uma obra desta complexidade. Nesse sentido, o novo OAUC de Santa Clara representou um relativo insucesso, do ponto de vista do seu esperado contributo para a observação e investigação astronómica em Coimbra.

Referências

Bonifácio, Victor, *Da Astronomia à Astrofísica. A perspetiva portuguesa (1850–1940)*, Dissertação de Doutoramento em Física, Universidade de Aveiro, 2009.

Costa, Cecília, Mariano, Emília e Vitória, José, "Manuel dos Reis e a Mudança do Observatório Astronómico da Universidade de Coimbra, do Paço das Escolas para o Alto de Santa Clara. Uma primeira notícia", *ENAA XIII*, 2003, s. d. (artigo não publicado).

Castro Tirado, M. A., "Astronomical Observatories: Consolidation of the Modern Observatory Between the XVIII$^{\text{th}}$ and the XX$^{\text{th}}$ Centuries", *Revista Mexicana de Astronomía y Astrofísica. Serie de Conferencias*, Vol. 53 (2021), p. 1–7. `https://doi.org/10.22201/ia.14052059p.2021.53.02`

Madeira, José A., "Missão de estudo nos observatórios astronómicos de Greenwich e Paris em 1932 e 1933: Relatório apresentado à Junta de Educação Nacional", *Revista da Faculdade de Ciências*, Vol. 3, n.º 4 (1933), p. 361–416.

Madeira, António, "Relatório Apresentado ao Instituto de Alta Cultura da Missão de Estudo nos Observatórios Astronómicos de Greenwich, Uccle e Paris, em 1937", *Revista da Faculdade de Ciências*, Vol. 7, n.º 1, (1938), p. 10–38.

Ministério das Obras Publicas – MOP (Ed.). *Cidade Universitária de Coimbra. Edifícios do Observatório Astronómico*, Bertrand Irmãos, Lisboa Lda, 1951.

Waumans, Abraham A., *The Typology of Astronomical Observatories*, Tese de mestrado, Explore Lab studio of Delft University of Technology's Department of Architecture, Delft, Países Baixos, 2013.

Fontes primárias

Arquivo da Universidade de Coimbra (AUC): Arquivo da Comissão Administrativa do Plano de Obras da Cidade Universitária de Coimbra, Processo 95.

A geometria da carta de navegar: uma discussão científica do século XVI

Bruno Almeida
Centro Interuniversitário de História das Ciências e da Tecnologia

As cartas de navegar produzidas entre os séculos XIII e XVII são objectos de enorme relevância histórica. Além da sua importância para a navegação da época, foi através da cartografia náutica que os europeus acederam a uma imagem geográfica mais exacta e pormenorizada das costas do Velho Mundo e, em primeira mão, de novas terras, até então, suas desconhecidas. Do ponto de vista da história da ciência, estes objectos estão ligados ao desenvolvimento de vários tópicos da navegação, geografia, matemática e geofísica, ao longo do século XVI, resultantes da reunião de saberes artesanais e eruditos.

Chegaram até aos dias de hoje centenas de cartas de navegar feitas na Europa até ao final do século XVI, no entanto, as origens medievais e as primeiras fases do seu desenvolvimento são mal conhecidas. A inexistência de fontes escritas no período medieval alimenta incertezas em relação aos métodos de recolha de dados geográficos, às técnicas de desenho e mesmo ao uso das mais antigas cartas conhecidas (séculos XIII e XIV). Não obstante estas dificuldades, a investigação histórica mostrou que as cartas reflectem as técnicas de navegação praticadas na época e nas zonas geográficas em que foram produzidas: as primeiras cartas do Mediterrâneo (cartas-portulano), foram desenhadas a partir de informação geográfica compilada ao longo de muitos anos de viagens marítimas, com base em distâncias estimadas e rumos magnéticos (não corrigidos da declinação magnética); as cartas do Atlântico (cartas de latitude), mais tardias, foram construídas recorrendo às mesmas variáveis, e também à latitude, determinada através de métodos astronómicos. Estes dados geográficos eram posteriormente transferidos para o pergaminho, sem ter em conta a curvatura da superfície terrestre, o que acarretou consequências geométricas singulares.

As propriedades geométricas das cartas de navegar comuns não eram evidentes para os pilotos, cartógrafos, cosmógrafos e matemáticos medievais e renascentistas. O interesse pela sua compreensão só surgiu, de forma generalizada, ao longo do século XVI. Entre outras, as razões que motivaram essa atenção foram de ordem prática, intelectual e geopolítica, sendo que a sua real extensão está ainda por avaliar. Na primeira metade de seiscentos, boa parte das pessoas que primeiro se interessaram por estas questões mantinham uma ligação a instituições ibéricas de gestão e controlo das navegações ultramarinas. Estes organismos eram espaços de confluência, onde os artesãos e os cosmógrafos trocavam ideias e experiências sobre os vários problemas da navegação da época. Entre os temas mais debatidos pontuavam os problemas geométricos da cartografia náutica, cujo impacto não se limitava à navegação prática. Por exemplo, foi neste contexto que a cartografia das ilhas Molucas teve uma enorme importância na disputa, entre Portugal e Espanha, sobre a prioridade do comércio das suas especiarias.

As primeiras conclusões sobre a geometria das cartas náuticas circularam em textos sobre cosmografia e sobre a arte de navegar (uma parte considerável desses textos foi escrita em vernáculo e os mais relevantes circularam na forma impressa). Numa primeira fase, os autores recorreram às prescrições dadas na importante *Geografia* de Ptolemeu (fl. séc. II d. C.), e equipararam as cartas a mapas geográficos, acreditando que a sua exactidão dependia do correcto posicionamento das terras em latitude e longitude. Ecos desta concepção registam-se no século XV, no texto do ragusano Benedetto Cotrugli (1464); identificam-se também no famoso manuscrito *Quatri partitu en cosmographia practica*, escrito pelo cosmógrafo Alonso de Chaves entre 1520 e 1538. Chaves comparou a carta de navegar a um mappamundi, desenhado com base numa malha "plana cuadrangular" de paralelos e meridianos. No entanto, as terras representadas nas cartas de navegar não foram desenhadas com base nestas prescrições, e o primeiro autor a mostrá-lo foi o cosmógrafo Pedro Nunes, em 1537.

O trabalho pioneiro de Pedro Nunes clarificou que os mapas elaborados a partir das prescrições ptolemaicas, baseados nas latitudes e longitudes dos lugares, eram objectos cartográficos diferentes das cartas náuticas comuns, não sendo, por isso, adequados às navegações. Em particular, Nunes observou que o posicionamento das terras desenhadas nas cartas dependia das rotas usadas pelos navegadores na sua exploração. Verificou que a carta de navegar não se mostrava numa projecção "quadrada", provando que, em geral, as terras que apareciam alinhadas num mesmo meridiano na carta, não estariam, na realidade, na direcção norte-sul. Em breve, autores como Pedro de Medina (1545) e Martín Cortés (1551), mesmo não atingindo a profundidade com que Nunes tratou este assunto, publicaram comentários sobre o tema, nomeadamente a propósito dos problemas de conformidade geométrica entre o globo e o plano, de onde resultava a não-convergência dos meridianos nas cartas.

Apesar destes primeiros avanços, um factor que teve influência no desenho das terras foi, de certa forma, subvalorizado: a declinação magnética.

Com efeito, a bordo, os rumos mostrados pela bússola não eram compensados da declinação magnética; a informação assim recolhida era usada no desenho das costas nas cartas, originando distorções geométricas que, na época, não eram evidentes. As primeiras observações sistemáticas da declinação magnética local foram feitas por D. João de Castro, e escritas no seu *Roteiro de Lisboa a Goa* (c. 1538–39). A partir dos dados reunidos, Castro intuiu, entre outras coisas, que as cartas comuns mostravam a costa africana, no hemisfério Sul, desviada para leste, em função do efeito combinado da declinação magnética no Atlântico (onde o desvio das agulhas era para nordeste) e no Índico (onde o desvio das agulhas era para noroeste). O exame da influência da declinação magnética na cartografia teve mais atenção na segunda metade de seiscentos e no século XVII, principalmente por parte de autores ingleses.

Pedro Nunes defendeu que a carta de navegar comum poderia continuar a ser utilizada a bordo, desde que se percebessem as suas características e limitações. Não obstante, o cosmógrafo compreendia que existiriam projecções cartográficas mais adequadas à navegação. Neste sentido, propôs uma solução em que a carta se dividia em tiras delimitadas em latitude, paralelas ao equador terrestre e na extensão da longitude. Essas tiras seriam desenhadas na projecção cilíndrica equidistante, e agregadas num atlas. Ao longo do século XVI, outros autores como Fernando Oliveira, John Davis, William Barlow, Thomas Blundeville, e Edward Wright propuseram outras soluções cartográficas nos seus textos, procurando responder aos problemas geométricos que afectavam as cartas comuns. Destaca-se entre estas a *paradoxal chart*, desenhada com base numa projecção polar, que foi utilizada a bordo, nomeadamente em expedições ocorridas nas latitudes mais elevadas do hemisfério norte.

O século XVI terminaria com um contributo fundamental para o desenvolvimento da cartografia náutica. Em 1599, Edward Wright explicou matematicamente a construção da carta de latitudes crescidas. Esta solução fora sugerida por Gerard Mercator em 1569, para obter uma carta de navegar a partir das coordenadas geográficas reais e que, ao mesmo tempo, mostrasse as linhas de rumo constante (linhas loxodrómicas) como linhas rectas. Wright demonstrou que, nesta proposta cartográfica, o espaçamento entre paralelos aumentava em função da secante da latitude. O trabalho matemático de Wright constituiu o culminar de uma importantíssima discussão em torno da geometria das cartas de navegar, que atravessou quase todo o século XVI, que envolveu vários actores, contextos laborais e sociais, e foi difundida através de textos que circularam por toda a Europa.

Referências

Almeida, B., *A Carta de Navegar: antologia de textos, 1464–1599*, Althum, Lisboa, 2022.

Gaspar, J. A., "A Matemática da Navegação e da Cartografia no Tempo das Descobertas", In F. P. da Costa, J. T. Pinto, & J. Buescu (Eds.), *Matemática do Planeta Terra*, Lisboa, IST Press, 2013, pp. 29–58.

Gaspar, J. A. e Leitão, H., "What is a nautical chart, really? Uncovering the geometry of early modern nautical charts", *Journal of Cultural Heritage*, Vol. 29, (2018), pp. 130–136.

Gaspar, J. A. e Leitão, H., "Early Modern Nautical Charts and Maps: Working Through Different Cartographic Paradigms", *Journal of Early Modern History*, Vol. 23, 1 (2019), pp. 1–28.

Leitão, H. e Sánchez, A., "Artisanal culture in early modern Iberian and Atlantic worlds", *Centaurus*, Vol. 60, (2018), pp. 135–140.

Pujades i Bataller, R. J., *Les cartes portolanes: La representació medieval d'una mar solcada / Portolan Charts: The Medieval Representation of a Ploughed Sea*, Institut Cartogràfic de Catalunya, Institut d'Estudis Catalans, & Institut Europeu de la Mediterrània (Eds.), Lunwerg Editores, Barcelona, 2007.