36.º Encontro do Seminário Nacional de História da Matemática

20 e 21 de outubro 2023

Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

June Barrow-Green
Open University, Inglaterra

Marc Moyon
Université de Limoges, França

Clóvis Pereira da Silva
Universidade Federal do Paraná, Brasil

Reinhard Siegmund-Schultze
University of Agder, Noruega

https://snhm.web.ua.pt

universidade de aveiro

CIDMA

spm SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA
SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Turismo Centro Portugal
Um país dentro do País

fct Fundação para a Ciência e a Tecnologia

SUMÁRIO (continuação)

36.º Encontro do Seminário Nacional de História da Matemática

(continua no verso)

SUMÁRIO (continuação)

36.º Encontro do Seminário Nacional de História da Matemática

Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

20 e 21 de Outubro de 2023

Introdução

Luis Saraiva[1]
(Coordenador Nacional do SNHM, CIUHCT, DM da FCUL)

Esta foi a 4.ª vez que um Encontro do SNHM se realizou em Aveiro, no seu Departamento de Matemática. Os três primeiros tiveram lugar em 1999 (o 11.º Encontro do SNHM), em 2006 (o 19.º) e em 2013 (o 26.º). Podemos ver que, um pouco involuntariamente, estávamos a realizar estes encontros em Aveiro de 7 em 7 anos. E foi por isso que se pensou organizar o de 2020 igualmente em Aveiro. Contudo a pandemia, entre outros fatores, veio interromper esta sequência, pelo que este Encontro acabou só por se realizar 10 anos após o de 2013. Aveiro é, após Lisboa (8) e Coimbra (7), o local onde mais Encontros do SNHM se realizaram.

Soubemos reagir face à adversidade que foi a pandemia covid, e conseguimos manter a regularidade anual dos nossos Encontros, realizando em 2020 o 33.º Encontro online, com centro no Politécnico de Leiria, e o 34.º, já com o carácter misto online/presencial, em 2021, em Santiago do Cacém. Em 2022 voltámos à normalidade dos Encontros presenciais em Gouveia, só tendo havido intervenção por Zoom de 3 convidados estrangeiros.

Com este Encontro fechamos um biénio extremamente complicado e trabalhoso, pois além dos dois Encontros Nacionais tivemos a organização e realização de dois Encontros internacionais: em Outubro de 2022 o *9.º Encontro Luso Brasileiro de História da Matemática* em Setúbal, e o *4.º Encontro Ibérico de História da Matemática* em Leiria, em Junho de 2023, com um total de mais de 80 palestras e cerca de 120 participantes. A isso há a adicionar as 37 palestras dos dois últimos Encontros nacionais e os cerca de 70 participantes nesses Encontros.

Em números redondos, tivemos nestes dois anos cerca de 120 palestras e 200 participantes. É um elogio para todos os envolvidos na organização e efetivação destes Encontros e em primeiro lugar para os seus palestrantes, que tudo tenha corrido da melhor forma, e os quatro Encontros tenham deixado gratas memórias nos seus participantes.

Neste Encontro tivemos quatro convidados para realizarem conferências plenárias. Três deles estiveram em Aveiro graças ao apoio conjunto dado às suas deslocações pelo *CIDMA – Universidade de Aveiro* e pela *Sociedade Portuguesa de Matemática (SPM).* Foram eles os Professores Reinhard Siegmund-Schultze, da *Universidade de Agder*, em Kristiansand, na

[1] Agradecimentos institucionais são devidos à *Fundação para a Ciência e a Tecnologia* de Portugal no âmbito do projeto UIBD/00286/2020.

Noruega, June Barrow-Green, da *Open University* em Milton Keynes, Reino Unido, e Marc Moyon, da *Universidade de Limoges*, França. O quarto convidado, o Professor Clóvis Pereira da Silva, da *Universidade Federal do Paraná*, Brasil, fez a sua intervenção por Zoom, a única conferência não presencial deste Encontro. O Professor Siegmund-Schultze já tinha estado em Portugal, pois tinha participado no Encontro "*Mathematical Sciences and 20th Century Dictatorships*" realizado em Lisboa em 2015, na celebração dos 75 anos da SPM. Igualmente o Professor Clóvis Pereira da Silva esteve presente nos primeiros *Encontros Luso-Brasileiros*, sendo um dos palestrantes do 1.º Encontro, realizado em Coimbra em 1993.

Tivemos igualmente como conferencistas dois usuais participantes nos Encontros Luso-Brasileiros, a Professora Circe Mary Silva da Silva, da *Universidade Federal de Pelotas*, uma das três personalidades convidadas do 8.º Encontro do SNHM, realizado no Porto em 1996, e o Professor Wagner Valente, da *Universidade Federal de S. Paulo*, um dos quatro conferencistas convidados do 26.º Encontro do SNHM, realizado em 2013 em Aveiro.

No total foram apresentadas 18 comunicações. Foi igualmente elaborado um caderno com 34 páginas, com os resumos das palestras e outras informações referentes ao Encontro e ao SNHM que foi distribuído aos participantes e às entidades que estiveram presentes na sessão de abertura. Uma cópia, como é usual, foi entregue para os Arquivos da SPM. Houve 35 inscritos no Encontro. Os docentes e alunos de mestrado do *Departamento de Matemática* da *Universidade de Aveiro* puderam assistir ao Encontro sem necessidade de inscrição.

O Encontro foi acreditado pelo Conselho Científico Pedagógico da Formação Contínua, como Acção de Formação para Professores de Matemática do Ensino Básico e Secundário (Grupos 230, 500). Participaram como formandos dois professores.

Queremos agradecer a toda a Comissão Organizadora local, e muito especialmente ao seu coordenador, Professor Helmuth Malonek, o empenho que colocaram em todos os aspectos da realização do Encontro. Estendemos os nossos agradecimentos ao *Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro*, representado na sessão de abertura pelo seu Diretor, Professor Alexandre Almeida, ao *CIDMA*, representado na mesma sessão pelo seu coordenador adjunto, Professor Ricardo Almeida, e a todas as restantes instituições que contribuiram para o êxito deste Encontro: a *Fundação para a Ciência e a Tecnologia*, a *Escola Profissional de Anadia* e o *Turismo Centro Portugal*. Agradecemos igualmente e muito em especial à *Sociedade Portuguesa de Matemática*, que nos tem apoiado sempre, desde a nossa constituição

como secção autónoma da Sociedade, e que em Aveiro esteve representada pelo Professor Fernando Pestana da Costa. Tivemos igualmente a colaboração de um conjunto de alunos da *Universidade de Aveiro* que contribuiram para que o Encontro decorresse sem problemas. A todos agradecemos a boa vontade.

Por último queremos igualmente agradecer aos nossos colegas da Comissão Científica, João Caramalho Domingues e Fernando Figueiredo, que em muito contribuiram para o êxito desta realização do SNHM.

O Encontro não tinha tema pré-definido, pelo que não foi de admirar que as palestras fossem desde questões do século XVII até assuntos do século XX, quer da História da Matemática quer da História do Ensino da Matemática.

Na conferência inaugural foi analisado o *Congresso dos Matemáticos de Oslo*, de 1936, perspetivado no seu contexto histórico. Notemos que se realizou três anos antes do começo da Segunda Guerra Mundial, quando esta já parecia inevitável.

Houve palestras em que se deram perspectivas gerais sobre certos temas, como sobre os começos e desenvolvimentos do conceito de função, sobre a polémica da Companhia de Jesus com Galileu, sobre o modo como historicamente foram representadas as mulheres que fizeram matemática, ou ainda uma análise dos livros de textos franceses no modo como se tentou implementar a história da matemática na sala de aula. Tivemos intervenções mais localizadas sobre figuras notáveis da história da matemática, como François Viète e Gottlob Frege. Tivemos igualmente palestras relativas à matemática portuguesa: sobre António Carvalho da Costa, Gago Coutinho, Ruy Luis Gomes e a *Gazeta de Matemática.*

Houve duas palestras sobre aspetos da História Matemática e do Ensino da Matemática no Brasil respetivamente relativas à formação da comunidade matemática no Brasil e ao processo de criação no Brasil de um campo disciplinar sobre o ensino.

Tivemos igualmente uma secção de debate de questões de história do Ensino e da divulgação da Matemática: Os *Elementos* de Euclides e o *GeoGebra*; História da Matemática na sala de aula; vultos da história matemática portuguesa no *Dicionário Histórico* de Esteves Pereira e Guilherme Rodrigo, as "*Questões Propostas*" no *Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas* de Gomes Teixeira; Sebastião e Silva e a modernização da matemática em Portugal;

Como é costume terminarmos esta introdução, esperamos que a publicação destes resumos seja útil a todos os que a consultarem, que aumente a curiosidade de saberem mais sobre alguns destas questões, e que constitua um estímulo para futura participação em outros encontros do SNHM, quer como palestrantes quer como assistentes.

O Seminário está aberto a todos e de todos precisa.

Programa

20 de Outubro

09.00 *Inscrições e entrega de pastas*

09.30 Abertura

10.00 Reinhard Siegmund-Schultze (Univ. Agder, Noruega) — *Meeting under the integral sign? The Oslo Congress of Mathematicians on the eve of the Second World War*

11.00 *Coffee Break*

11.30 Circe Mary Silva da Silva (UFPEL, Brasil) — *Infância e maturidade do conceito de função*

12.00 Reinhard Kahle e Isabel Oitavem (DM-UNL) — *Frege's axiomatization of implication and the proof of the tautology "A implies A"*

12.30 Parisa Kharazmi (CIDMA, DM-UA) — *François Viète e o método de inserção no seu Supplementum Geometricae*

13.00 *Almoço*

15.00 Clóvis Pereira da Silva (UFPR, Brasil) — *A formação da comunidade matemática brasileira*

16.00 Luís Saraiva (CIUHCT, DM-FCUL) — *Ruy Luís Gomes, um importante matemático da Geração de 40*

16.30 Wagner Valente (UNIFESP/GHEMAT, Brasil) — *A Educação Matemática no Brasil: debates e propostas para a criação de um campo disciplinar sobre o ensino*

17.00 *Coffee Break*

17.30 *Tarde Social*

20.00 *Jantar do Encontro*

Programa

21 de Outubro

09.00 June Barrow-Green (Open University, Milton Keynes, Reino Unido) — *The historical representation of women in mathematics*

10.00 Ana Bastião (Escola Naval) — *Carvalho da Costa: a latitude por duas alturas do Sol*

10.30 António Canas (Escola Naval) — *Navegação astronómica na travessia aérea do Atlântico Sul*

11.00 *Coffee Break*

11.30 Luis Miguel Carolino (ISCTE - IU de Lisboa / CIES-IUL) — *Os Jesuítas no rescaldo da polémica com Galileu: revisitando o Cosmos Aristotélico no Collegio Romano (1618–1667)*

12.00 Fernando Figueiredo (CITEUC, DM-UC), Jaime Carvalho e Silva (CMUC, DM-UC) e Anabela Teixeira (E. Secundária de Camões) — *O percurso singular da Gazeta de Matemática: 200 números em 83 anos*

12.30 Jaime Carvalho e Silva (CMUC, DM-UC) e Cecília Costa (CIDTFF, UTAD) — *Vultos da História Matemática Portuguesa no Dicionário Histórico de Esteves Pereira e Guilherme Rodrigo (1904)*

13.00 *Almoço*

15.00 Marc Moyon (Univ. de Limoges, França) — *History of Mathematics "in potentiality" versus History of Mathematics "in actuality": an analysis of French textbooks to implement history of mathematics in the classroom*

16.00 Hélder Pinto (I. Piaget, RECI e CIDMA-UA) — *Os Elementos de Euclides e a GeoGebra*

16.30 Teresa Clain (GHMEM, CIDMA-UA) — *Episódios da História da Matemática na sala de aula: aprender com os erros de Gaspar Nicolas*

17.00 *Coffee Break*

17.30 Inês Martins (CEAFEL) e Pedro Freitas (CIUHCT) — *As "Questões propostas" no Jornal de Gomes Teixeira*

18.00 Anabela Teixeira (E. Secundária de Camões) e Jaime Carvalho e Silva (CMUC, DM-UC) — *Sebastião e Silva face a algumas controvérsias contemporâneas à volta da modernização do Ensino da Matemática em Portugal*

18.30 Encerramento do Encontro

The Oslo Congress of Mathematicians on the Eve of the Second World War

Reinhard Siegmund-Schultze
University of Agder, Kristiansand, Norway

The Oslo ICM of 1936 appears as a mathematical and political melting pot, standing between the academic fall-out of the First World War and the further disruptions of the Second. In my talk I have described the ways in which the political situation shaped the staging of the congress, and the consequences that this had for the development of mathematics in the 1930s. The congress itself provides us with a snapshot of the mathematics of that decade, made the more interesting by the fact that this was the first ICM at which the now well-established Fields Medals were awarded.

The talk is related to a joint book with Christopher D. Hollings and the author.

We found the following four major strategies for international scientific communication manifesting themselves in the organization and the staging of the congress in Oslo. These were exemplified by the actions of several nations, and by various members of the international mathematical community as a whole:

- the newcomer strategy of the ambitious and developing nation [Norway];
- the expansionist and propagandistic strategy of the (mathematically) established nation [Germany];
- the isolationist and often fearful strategy of the (politically) ousted nation [Soviet Union, Italy];
- the scientific, for the most part internationalist, strategy of the research mathematician.

The Norwegian Carl Størmer, well known for his mathematical theory, physical observation, and description of the Northern Lights, was the president of the congress. He had presented his theory repeatedly on the ICMs from 1908, ironically without his real mathematical innovation, the multistep numerical method. Also in Oslo he talked about aurora borealis. While the congress was performed in a pre-computer age Størmer could refer to new technical progress in the realm of analogue computers (Vannevar Bush's differential analyzer) which allowed the calculation of orbits even without recourse to his numerical method.

> "I hope you will agree with me, that the methods of numerical and mechanical integration of differential equations are very important not only in the applications but also in pure mathematics."

At the same time the congress took place under tense political conditions with several refugees from Nazi Germany attending who were looking for jobs and had to confront colleagues from Germany who in most cases had not behaved bravely during their expulsion. The book contains in its appendix interviews which several of the refugees (A. A. Fraenkel, E. J. Gumbel, F. Noether and others) gave to journalists from Norwegian dailies, such as *Aftenposten* and *Arbeiderbladet.*

There was an internal mathematical and political report on the congress sent to the Nazi-authorities by Walther Lietzmann, an educator and historian of mathematics in Göttingen. The Nazi ministry had nominated him as "leader (Führer)" of the German delegation. Lietzmann had to acknowledge important mathematical work being done by Polish mathematicians at the time. Many of them were discriminated against by Germans; during the war from 1939 they were even killed in great numbers. In 1939 Lietzmann reported:

> "At a social gathering it was stressed with regard to the attending Polish mathematician S. Banach (Lemberg), how admirable it was that Poland had developed such a broad and strong mathematical school of peculiar orientation in a very short period of time. ... We should improve our contacts with Poland, which is still largely oriented towards France in the scientific respect. However, certain problems may arise, since many Polish mathematicians seem to be non-Aryans."

The real scientific leader of the German delegation was the Berlin mathematician Erhard Schmidt who revealed his illusions about the political situation with the following words:

> "When I left Berlin, everything was resounding with the joyful preparations for the Olympic Games. Everybody was prepared to welcome the gathering peoples with honour and to celebrate the spectacle of their peaceful competition."

Schmidt called the congress in Oslo an "Olympia of the Intellect" and continued:

> "Here [at the mathematical congress] everybody is thrilled by the successes of the others. Because in the bright and pure atmosphere of the intellect one more easily understands that the wealth and the rise of one people is no disadvantage, but only a great fortune for all other peoples."

Resistance to the racist theories of mathematics of the Nazis is palpable during the congress. This for instance in the plenary talk given by Otto Neugebauer who related the specific qualities of Babylonian mathematics to the "special blend of different peoples down there". Even Lietzmann had to admit in his internal report:

> "There is one thing that many foreigners have real problems in understanding: our [sic] notion of the national peculiarity of science, regardless of the universal validity of its results."

The reasons for the boycott of the congress by Russian and Italian mathematicians (Luzin affair in the Soviet Union, boycott of Italy by the League of Nations due to their war in Ethiopia) are also discussed.

Looking for traces of a participation of Portuguese mathematicians in the Oslo Proceedings I was unfortunately not successful. However, I found one remark in Maurice Fréchet's plenary talk pointing to the recent defence in July 1936 of the dissertation of his Portuguese student A. Monteiro with respect to its relation to probability theory.

References

Ch. D. Hollings and R. Siegmund-Schultze: Meeting under the Integral Sign? The Oslo Congress of Mathematicians on the Eve of the Second World War, AMS, Providence 2020.

Conceito de Função de Bernoulli a Bourbaki

Circe Mary Silva da Silva
Universidade Federal de Pelotas, Brasil

O objetivo da pesquisa é historicizar e problematizar as diferentes definições do conceito de função formuladas por matemáticos desde Johann Bernoulli (1667–1748) até o século XX, com a definição formalista do grupo Bourbaki. A definição matemática mais antiga de função, foi dada por Bernoulli, no artigo *Remarques sur ce qu'on a donné juisqu'ici de solutions des problemes sur les isoperimetres.* Ele colocou a ideia de função como associada a uma variável. "Chama-se uma função de uma magnitude variável uma quantidade composta de alguma maneira daquela magnitude e de constantes" (Bernoulli, 1718, p. 241). O matemático introduziu uma notação geral para função φx que se aproxima da moderna $\varphi(x)$. Em 1748, Leonard Euler (1707–1783) escreveu: "uma função de uma quantidade variável é uma expressão analítica composta de qualquer maneira que seja, desta mesma quantidade ou de quantidades constantes" (Euler, 1988, v. 1, p. 3; v. 2, s/p).

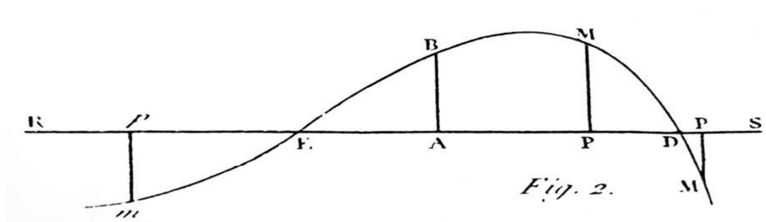


Figura 1: representação de função por Euler

Na obra *Princípios Mathematicos*, José Anástacio da Cunha (1744–1787), matemático português, apresentou a definição: "Se o valor de uma expressão A depender de outra expressão B, chamar-se-á A função de B" (Cunha, 1790, p. 193). Joseph Louis Lagrange (1736–1813), em 1798, publicou o livro *Leçons de Calcul de Fonctions* em que estendeu um pouco mais a definição de função de Euler.

> Denomina-se função de uma ou mais grandezas toda expressão de cálculo na qual essas grandezas estiverem presentes de algum modo, estejam elas separadas ou ligadas a outras grandezas, que são consideradas como dadas ou invariáveis, ao passo que as

> grandezas das funções podem adquirir todos os valores possíveis (Lagrange, 1798, p. 1).

Lagrange manteve o status que Euler atribuiu a esse conceito e ainda o colocou no título de seu livro. Durante o século XVIII, função foi entendida como uma expressão analítica. Associada ao conceito de função, surgiu a simbologia φx, y e, posteriormente, f_x, $f(x)$. No século XIX, sua popularização atingiu as escolas. Na França, no século XIX, Sylvestre Lacroix (1765–1843) incluiu a seguinte definição para função:

> Para exprimir que uma quantidade depende de uma ou de várias outras, seja por operações quaisquer, seja mesmo pelas relações impossíveis de assinalar algebricamente, mas cuja existência é determinada por certas condições, diz-se que a primeira é função das outras. (Lacroix, 1861, p. 1).

Lacroix tratou função como dependência entre variáveis, e lhe concedeu um caráter mais geral que aquele do século XVIII. No século XIX, vários autores contribuíram para uma maior precisão da definição de função, entre eles Lejeune Dirichlet (1805–1859) que não se restringiu a funções contínuas como Euler e nem a uma única lei de formação: "[...] se uma variável y está relacionada com uma variável x de tal modo que, sempre que é dado um valor numérico a x, existe uma regra segundo a qual um valor único de y fica determinado, então diz-se que y é uma função da variável independente x " (Dirichlet, 1829, p. 157–159). Georg Cantor (1845–1918) ao divulgar sua teoria dos conjuntos transfinitos, estabeleceu uma definição de função em termos de conjuntos.

> Dizemos que uma lei, que para cada elemento n de N faz corresponder um elemento determinado de M, o mesmo elemento podendo ser usado várias vezes; realiza-se uma representação do conjunto N sobre os elementos do conjunto M, ou mais simplesmente uma representação em M. (Cantor, 1899, p. 350).

As primeiras definições estavam atreladas a fenômenos da natureza, a partir de Cantor não há quaisquer preocupações com aplicações. Funções são relações entre conjuntos — objetos matemáticos abstratos. No século XX, a definição do grupo Nicolas Bourbaki, em 1939, no livro *Theorie des Ensembles*, é a seguinte:

> [...] uma correspondência $f = (\mathrm{F}, \mathrm{A}, \mathrm{B})$ é uma função se, para todo x pertencente ao conjunto de partida A de f, a relação $(x, y) \in \mathrm{F}$ é funcional em y; o objeto único correspondente a x por f é chamado o valor de f para o elemento x de A, e se designa por $f(x)$ ou f_x (ou $\mathrm{F}(x)$ ou F_x. Se f é uma função, F seu grafo e x um elemento do conjunto de definição de f, a relação $y = f(x)$ é equivalente a $(x, y) \in \mathrm{F}$. (Bourbaki, 1970, p. 64).

A definição de função sofreu transformações, a princípio entendida como uma relação entre quantidades sujeita a uma lei de formação, passou por uma ampliação deixando precisos o domínio de definição e as possibilidades das leis que a formam, até finalmente, no século XX, chegar a uma formalização tal, que pode ser expressa praticamente apenas por símbolos. A definição de função a princípio é bastante discursiva, mas aos poucos as palavras tornam-se mais precisas e os símbolos integram-se a ela. Torna-se um conjunto de pares ordenados — um objeto matemático.

Referências

BERNOULLI, J. *Opera Omnia.* Tommus Secundus. Anno 1714–1726. Lausanne & Geneve: Marci-Michaelis Bousquet, 1742.

BOURBAKI, N. *Théorie des Ensemble.* Diffusion: Paris, 1970.

CANTOR, G. Sur les fondements de la théorie des ensembles transfinis. *Memoires de La Société des Sciences physiques et naturelles de Bourdeaux*, v. III, 1899, 343–437.

DIRICHLET, L. Sur la convergence des series trigonometriques qui servent à représenter une founction arbitraire entre des limites données. *Journal für die reine und angewandte mathematik.* v. 4, 1829,157–169.

EULER, L. *Introduction a l'analyse infinitésimale.* Paris: ACL-Editions, 1988.

LACROIX, S. *Traité élémentaire du calcul différentiel et du calcul intégral.* Tome 1. 7.ª ed. Paris: Mallet-Bachelier, 1861.

LAGRANGE, J. L. *Theorica das funções analyticas, que contem os principios do Calculo Diferencial.* Lisboa: Officina de João Procopio Correa da Silva, 1798.

Frege's axiomatization of implication and the proof of the tautology $\varphi \to \varphi$

Reinhard Kahle
Carl Friedrich von Weizsäcker-Zentrum, Universität Tübingen, Germany
NovaMath, FCT, Universidade Nova de Lisboa, Portugal

Isabel Oitavem
Center for Mathematics and Applications (NOVA Math), NOVA, FCT
Department of Mathematics, NOVA FCT, 2829 Caparica, Portugal

The modern axiomatization of Logic goes back to Gottlob Frege (1848–1925). In his semanal booklet *Begriffsschrift* of 1879 [1], he proposed the following three axioms for implication which read in modern notation:

$$\vdash \varphi \to (\psi \to \varphi) \tag{F1}$$
$$\vdash (\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)) \tag{F2}$$
$$\vdash (\theta \to (\psi \to \varphi)) \to (\psi \to (\theta \to \varphi)) \tag{F3}$$

Frege does not give any heuristics for his choice, and the motivation is restricted to arguments for the correctness and to examples from Mathematics which give sound instances of the two axiom schemata.

It leaps to the eye, that $\varphi \to \varphi$ is not an axiom in this axiomatization. But it is, of course, provable. And Frege provided a proof which, however, made use of his axiom (F3).

Interestingly, the axiomatization of the *Begriffsschrift* was not taken up immediately. Even Frege himself used another form of axiomatization in his (ill-fated) *Grundgesetze der Arithmetik* [2] which, in fact, used $\varphi \to \varphi$ as an axiom!

Whitehead and Russell, in the *Principia Mathematica* [6], start with disjunction as basic connective next to implication. Thus, the full proof of $\varphi \to \varphi$ (formula $*2{\cdot}08$) is already quite long, as it makes use of earlier derived formulas. (F1), for instance, is derived as formulas $*2{\cdot}02$.

In their seminal textbook *Grundzüge der theoretischen Logik* [3], Hilbert and Ackermann use, as Whitehead and Russells, disjunction as a basic connective in the first edition of 1928. Only in the second edition of 1938, they start with a optimized version of Frege's axiomatization form the *Begriffsschrift*, which uses only (F1) and (F2).

This optimization is due to Łukasiewicz [4] who noticed that Frege's third axiom could be dropped – it was used, by Frege, in connection with his axioms for negation, and another form to axiomatize negation allows to dispense with (F3).

Thus, the standard axiomatization of implication uses, today, only (F1) and (F2):

$$\vdash \varphi \to (\psi \to \varphi) \tag{F1}$$
$$\vdash (\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)) \tag{F2}$$

In this case, however, we need another proof for $\varphi \to \varphi$, as Frege's proof made use of (F3).

The standard proof, as it can be found in many textbooks reads as follows:

1	$\vdash (\varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi)) \to ((\varphi \to (\varphi \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi))$	(F2)
2	$\vdash \varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi)$	(F1)
3	$\vdash (\varphi \to (\varphi \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi)$	MP[1,2]
4	$\vdash \varphi \to (\varphi \to \varphi)$	(F1)
5	$\vdash \varphi \to \varphi$	MP[3,4]

It is not clear, however, who was providing the proof first. Here, we only mention that it was already implicitely present in Schönfinkel's work on Combinatory Logic [5] of 1924, through the (later discovered) *Curry-Howard correspondence*.

Combinatory Logic can be considered as the "computational counterpart" of the Hilbert-style calculus with Frege's axioms for implication.

Combinatory terms are defined inductively:

- Variables $x, y, \ldots$ are combinatory terms;
- the constants K and S are combinatory terms;
- if M and N are combinatory terms, then so is $(M \cdot N)$ (*application*).

Combinatory terms serve as a kind of programming language, when one considers the following equalities:

- $\mathsf{K}\, M\, N = M$;
- $\mathsf{S}\, M\, N\, O = M\, O\, (N\, O)$

The combinators can be *typed* by formulas, such that the combinatory terms represent proofs.

For the axioms (F1) and (F2) we have the constants K and S:

- $\mathsf{K}^{\varphi\to(\psi\to\varphi)}$;
- $\mathsf{S}^{(\varphi\to(\psi\to\chi))\to((\varphi\to\psi)\to(\varphi\to\chi))}$.

Application relates to (an application of) *modus ponens*: For (typed) combinatory terms $M^{\varphi\to\psi}$ and N^{φ} the application $M\,N$ has the type ψ.

Thus, if a combinatory term M can be typed by a formula φ, we also say that M *denotes a proof of* φ.

The identity combinator $\mathsf{I}^{\varphi\to\varphi}$ defined as $\mathsf{S\,K\,K}$ satisfies $\mathsf{I}\,M = M$ for every combinatorial term M of the appropriate type. And by the Curry-Howard correspondence we have $\mathsf{I}^{\varphi\to\varphi}$ denoting the standard proof of $\varphi\to\varphi$ via the following typification:

$$\mathsf{S}^{(\varphi\to((\varphi\to\varphi)\to\varphi))\to(\varphi\to(\varphi\to\varphi))\to(\varphi\to\varphi)}\,\mathsf{K}^{\varphi\to((\varphi\to\varphi)\to\varphi)}\,\mathsf{K}^{\varphi\to(\varphi\to\varphi)}$$

Schönfinkel, in 1924 [5, footnote 3], attributes the definition of I in terms of S and K to Boskowitz who, thus, might have been the person discovering the standard derivation of $\varphi\to\varphi$, albeit through combinatory terms.

References

[1] Gottlob Frege, *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*, Louis Nebert, Halle, 1879.

[2] Gottlob Frege, *Grundgesetze der Arithmetik. Begriffsschriftlich abgeleitet*, vol. I–II, Hermann Pohle, Jena, 1893/1903.

[3] David Hilbert and Wilhelm Ackermann, *Grundzüge der theoretischen Logik*, Springer, Berlin ^{1}1928, ^{2}1938.

[4] Jan Lukasiewicz and Alfred Tarski, “Untersuchungen über den Aussagenkalkül”, *C. R. Soc. Sci.*, Varsovie, vol. 23, Klass III (1930).

[5] Moses Schönfinkel, “Über die Bausteine der mathematischen Logik”, *Mathematische Annalen*, vol. 92 (1924), pp. 305–316.

[6] Alfred North Whitehead and Bertrand Russell, *Principia Mathematica*, Cambridge University Press, ^{2}1925.

Acknowledgment. Research supported by national funds through the FCT – Fundação para a Ciência e a Tecnologia, I.P., under the scope of the project UIDB/00297/2020 (Center for Mathematics and Applications) and by the Udo Keller Foundation. The talk is based on joint work with Paulo Guilherme Santos.

François Viète and the Method of Insertion in His *Supplementum Geometriae*

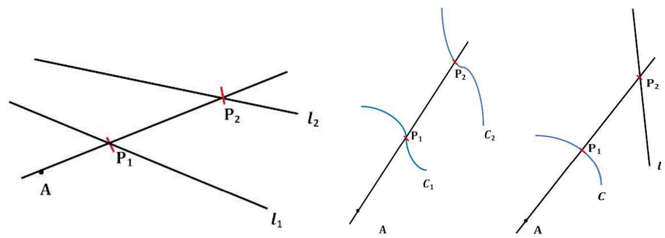
Parisa Kharazmi
Departamento de Matemática, CIDMA, Universidade de Aveiro

Since ancient times, mathematics has been an area of applying analogies, denoting "similarity, kinship, extension of a rule to similar cases." Notable among the mathematicians recognizing the "*prominent role of analogy in the discovery of new mathematical truths*," as mentioned (Knobloch, 1991), are Kepler, Wallis, Leibniz, Newton, Euler, and Laplace. François Viète (1540–1603), an amateur mathematician and astronomer, deserves a place among them. Best known for his book *In Artem Analyticen Isagoge* (Tours 1591), Viète was the first to consistently introduce symbolic algebraic notation, (Witmer, 2006). Noteworthy are also the works *Effectionum Geometricarum Canonica Recensio and Supplementum Geometriae,* published in Tours in 1593, along with *Ad Angularium Sectionum Analyticen Theoremata*, published and provided with proofs by A. Anderson in 1615 (Witmer, 2006).

The *Supplementum Geometriae* is dedicated to the geometric solutions of equations of the 3rd and 4th degree. Curiously, Viète derives geometric problems from solutions obtained with the methods of his *arte analytica*, emphasizing the historical role of geometry as the foundation of algebra. While the exclusive use of a ruler and compass in Euclidean geometric constructions is considered a consequence of the first three postulates of the Elements, Viète explicitly introduces an additional postulate at the beginning of the *Supplementum Geometriae.* This postulate allows the use of a *marked ruler* for the execution of the so-called insertion (or verging; gre. νεύσις – Neusis (Knorr, 1986)). As a result, he successfully trisects an arbitrary angle using the marked ruler (relying on Archimedes (Knorr, 1986)) and concludes with the exact construction of a heptagon (similar to Abu´I-Jud (Knorr, 1986)), all in complete analogy to the construction of the Pentagon in Euclid's Elements (IV, 10, 11).

This research aims to highlight Viète's method in *Supplementum Geometriae*, specifically the Method of Insertion (neusis), and explore his analogy application to geometric problems, on regular polygon construction and ancient unsolvable problems. François Viète, described himself: "*I, who do not profess to be a mathematician, but who, whenever there is leisure, delight in mathematical studies ...*" In 1592, he lectured at Tours, discussing antiquity's problems, solving algebraic equations, finding solutions to geometric problems, and using the marked straightedge as neusis constructions. He introduced the first symbolic algebraic notation, earning him the title of the father of modern algebra. The title "Isagoge" suggests Viète's algebraic techniques, known as the "analytic art," and seventeenth-century algebra became known as "analysis". This process was followed by "synthesis," where one begins with knowns and uses logical mathematical arguments to conclude. Viète's work provides a foundation for investigating the role of analogies in the work of mathematicians who go beyond Platonic construction limitations. A recent book by George Polya, Volume I*, Induction and Analogy in Mathematics*, is well-known among teachers. Analogy plays a crucial role in mathematics, representing the process of discovering and exploring new mathematical ideas between two mathematical fields. Viète's analysis in algebra involves naming a quantity (denoted by x) and calculating its value until an equation is obtained. Subsequently, synthesis calculates its value. Historically, Viète is mainly remembered for the utility of his symbolic algebra and the solution of algebraic equations by trigonometry, forming the foundation of Descartes' analytic geometry. *Supplementum Geometriae* (1593) focuses on solving geometric problems using algebraic techniques, playing a significant role in the development of analytic geometry by R. Descartes. It contains twenty-five propositions and proofs on geometry, many showcasing geometries done by the ancient Greeks. Viète deduces geometric problems from solutions obtained with the methods of analytic art, emphasizing the historical role of geometry as the basis of algebra. He succeeds in using the exact trisection of an arbitrary angle by the marked ruler (Neusis) to finish with an exact construction of a heptagon, analogously to the construction of the Pentagon in Euclid's Elements (IV, 10, 11). The most significant step by Viète in his *Supplementum Geometriae* is illustration a), showing the idea of insertion or NEUSIS, in a more general form introduced by Pappus, as seen in b) and c) (Pappus' Mathematical Collection, published in manuscripts in Europe before Viète's time, in 1588.)

Viète's 4th postulate overcomes the notion of impossible solutions to the trisection of an angle and the construction of the heptagon. It is noteworthy that Viète's construction uses a proportion between ratios of segments and squares, where he uses r as the radius and an unknown distance as X. With this proportion, he obtains a formula, and the equation demonstrates the geometrical solution of proportions as equivalent to the solution of a cubic equation, solvable with trigonometric tools, as explained in his



(a) (b) (c)

Figure 1: (a) Viète, (b) , (c) Pappus (about 240 AC).

supplements. The construction of the Heptagon in Viete's work, with an isosceles triangle and proportion of $\Delta 7$: 3:1:3, is in analogy to the construction of the Pentagon by the Greek, Euclid, which started from an isosceles triangle and proportion of $\Delta 5$: 2:1:2. This Greek mathematical technical term (αναλογία) designated equality of proportions, already during the 5th century (a:b :: c:d) . A modern construction of a heptagon that appeared in 1975 by Crockett Johnson (1906–1975), the pen name of the American cartoonist and children's book illustrator David Johnson Leisk. Johnson integrated mathematics into his art, producing over a hundred (117 or more) mathematically inspired paintings. The result of his discovery, explained in the article "A Construction for a Regular Heptagon," published four months before his death, details how a heptagon can be constructed with Neusis. Johnson's construction, while pleasing the ancient Greeks, employs a modern proof, requiring the law of cosines and several trigonometric identities.

References

Euclid, *The Thirteen Books of The Elements* (Transl. S. T. L. Heath; 2nd. Ed.), Dover, 1956.

E. Knobloch, *Analogy and mathematical thought*, in Roshdi Rashed (Ed.). Mathématiques et philosophie de l'antiquité à Vage Classique, 217–37, Paris, 1991.

T. R. Witmer, *Analytic art*, Translation of *Opera Mathematica* of Viète, edited by Frans van Schooten, Leyden, 1646. Dover, 2006 (re-publ.).

W. R. Knorr, *The Ancient Tradition of Greek Geometric Problems*, Birkhäuser, Boston, 1986.

C. Johnson, “A Construction for a Regular Heptagon”, *The Mathematical Gazette,* Vol. 59, No. 407, (1975), p. 17–21.

A Formação da Comunidade Matemática Brasileira

Clóvis Pereira da Silva
UFPR, Brasil

O objetivo deste texto é divulgar os elementos que contribuíram para produzir a fase inicial, e seguintes, de formação da comunidade matemática brasileira. O início do processo de formação da comunidade matemática brasileira, como conhecemos nos dias atuais, pode ser estabelecido logo após a criação em 1934, da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras, da Universidade de São Paulo — FFCL-USP. Decreto Estadual n.º 6.283, de 25/01/1934 que criou a FFCL-USP, a primeira Faculdade de Ciências no Brasil. A FFCL-USP que passou a ofertar, dentre seus cursos, um curso de graduação bacharelado em Matemática, um curso com três anos de duração. Posteriormente, foi criado o curso de graduação licenciatura em Matemática, com quatro anos de duração, destinado à formação de professores para o ensino fundamental e médio. O organizador das disciplinas — do curso bacharelado — com seus programas e suas referências bibliográficas, foi o Prof. Dr. Luigi Fantappiè, especialista em Funcionais Analíticos e Análise Funcional. Ele foi o criador, em 1925, da Teoria dos Funcionais Analíticos, importante subárea da Análise Matemática

L. Fantappiè foi contratado em 1934, pelo Prof. Theodoro A. Ramos para reger a cátedra de Análise Matemática da FFCL-USP. O Prof. Dr. Theodoro A. Ramos primeiro Diretor da FFCL-USP, designou dois assistentes para L. Fantappiè, que foram o engenheiro Omar Catunda, que tinha muito interesse em estudar e ensinar matemática, e Cândido Lima da Silva Dias, depois que este se graduou pela FFCL-USP. Cândido Lima da Silva Dias foi aluno da primeira turma do curso bacharelado em Matemática da FFCL-USP.

L. Fantappiè criou um bom ambiente de estudos e pesquisa em matemática na FFCL, e formou a primeira geração de matemáticos brasileiros residentes em São Paulo, entre os quais citamos: Omar Catunda, Cândido Lima da Silva Dias, Benedito Castrucci, Fernando Furquim de Almeida. Como decorrência do desenvolvimento da 2.ª Guerra Mundial, em 1939, o Reitor da USP rescindiu o contrato de trabalho de L. Fantappiè, e ele regressou à Itália. Seu assistente Omar Catunda assumiu interinamente a cátedra de Análise Matemática da FFCL-USP.

A pesquisa em Matemática no Brasil, na forma institucionalizada, foi iniciada nesta instituição a partir dos anos 1940, quando em 1942 foi criado na FFCL-USP um concurso para a obtenção do doutorado em Ciências. Decreto-Lei Estadual n.º 12.511, de 21 de janeiro de 1942, que reorganiza a FFCL-USP. O candidato interessado em obter o doutorado, estudava durante dois anos, se preparando, sob orientação do catedrático responsável pela cadeira onde a tese seria defendida. Para a Matemática, foi decido que o título de doutor seria concedido em Ciências (Matemática).

O primeiro doutor titulado em Ciências (Matemática) pela FFCL-USP foi o Prof. Cândido Lima da Silva Dias, que em 11/12/1942, defendeu a tese intitulada *Sobre a Regularidade dos Funcionais Definidos no Campo das Funções Localmente Analíticas*. Subárea: Análise Matemática. Orientador: Prof. Omar Catunda. Como catedrático interino de Análise Matemática, o Prof. Omar Catunda estava legalmente constituído para ser orientador de teses. A tese acima citada foi influenciada cientificamente pelos ensinamentos de L. Fantappiè. O Prof. Cândido Lima da Silva Dias orientou várias teses de doutorado de seus alunos. Alunos que também orientaram teses de seus alunos de doutorado, promovendo assim, a primeira fase na cadeia de formação da comunidade matemática brasileira a partir do estado de São Paulo.

A segunda tese de doutorado em Ciências (Matemática) defendida na FFCL-USP, foi a tese do Prof. Omar Catunda, defendida em 3/9/1944, intitulada *Sobre os fundamentos da teoria dos funcionais analíticos*, subárea: Análise Matemática. Tese defendida em concurso para provimento da cátedra de Análise Matemática, do Departamento de Matemática da FFCL-USP. Nesta época no Brasil, e até muitos anos depois, o concurso para cátedra em uma Universidade, concedia ao aprovado o título de doutor. Este trabalho foi inspirado nos ensinamentos científicos de L. Fantappiè. O Prof. Omar Catunda orientou diversas teses de doutorado de seus alunos. Estes também orientaram várias teses de doutorado de seus alunos, continuando assim com o processo de formação da comunidade matemática brasileira, a partir do estado de São Paulo.

O segundo centro de ensino e pesquisa em Matemática no Brasil foi a Faculdade Nacional de Filosofia, da Universidade do Brasil, FNFi-UB, na cidade do Rio de Janeiro, criada em 1939; Decreto n.º 1.190, de 04/4/1939. Nesta instituição foi criado o curso de graduação bacharelado em Matemática, com duração de três anos. No final dos anos 1930, o Departamento de Matemática da FNFi-UB contratou como Professores Visitantes, os matemáticos italianos: Achille Bassi para a Cátedra de Geometria; Gabrielle Mamanna para a Cátedra de Análise Matemática e Superior e Luigi Sobrero físico matemático que trabalhava em Teoria Matemática da Elasticidade

Linear (Mecânica do Contínuo). Esses matemáticos estimularam também alunos talentosos da Escola de Engenharia da UB, para os estudos de matemática, como: Leopoldo Nachbin e Maurício M. Peixoto, que assistiam, como ouvintes, aulas desses professores italianos. Com o prosseguimento da 2.ª Guerra Mundial, a UB rescindiu o contratato de trabalho desses professores, que regressaram à Itália, exceto Achille Bassi que ficou no Brasil.

Em 1945 o Departamento de Matemática da FNFi-UB contratou como Professor Visitante, o matemático português António Monteiro. António Monteiro ao fazer contatos com vários jovens professores e com estudantes brasileiros por meio de cursos e Seminários, contribuiu para os períodos de efervescências e formação do ambiente matemático na cidade do Rio de Janeiro e no Brasil. António Monteiro introduziu seus alunos em assuntos da matemática que eram atuais para a época, tais como: Espaços de Hilbert, Análise Funcional, Conjuntos Ordenados, Reticulados e Álgebra de Boole, Filtros e Ideais, Topologia Geral. Seus Seminários influenciaram cientificamente muitos dos estudantes. Leopoldo Nachbin e Maurício M. Peixoto participaram dos seminários realizados com António Monteiro. Nesse período, António Monteiro criou na FNFi a publicação não periódica *Notas de Matemática.*

Nos anos 1950 trabalharam no Instituto de Física e Matemática – IFM, da Universidade de Recife como professores visitantes, os matemáticos portugueses: Alfredo Pereira Gomes, José Morgado, Manuel Augusto Zaluar Nunes e Ruy Luis Gomes). Alfredo Pereira Gomes criou no IFM a publicação não periódica intitulada *Textos de Matemática.* Eles dinamizaram, em Recife-PE, os estudos da matemática, e formaram vários discípulos. Elaboraram, inclusive um projeto para criação de um curso de mestrado em Ciências (Matemática) no IFM. Em 1952 a Universide do Paraná – UPR contratou, como professor visitante, o matemático português João Remy Teixeira Freire. Ele dinamizou, em Curitiba, os estudos e ensino da matemática e da probabilidade/estatística. Em 1953 ele criou na UPR a Sociedade Parananse de Matemática – SPM. Atualmente esta associação científica está sob responsabilidade da Universidade Estadual de Maringá – UEM.

Referência

SILVA, Clovis Pereira da. Avanços da Matemática no Brasil, 2.ª ed. Revista e Ampliada, São Paulo: Editora Blucher, 2023.

Ruy Luís Gomes, um importante matemático da geração de 40

Luís Saraiva
CIUHCT, DM da FCUL

Ruy Luís Gomes (1905–1984) foi um dos matemáticos portugueses que, a partir da segunda metade dos anos 30, tentaram modificar a situação da matemática em Portugal, quer a nível de ensino quer a nível de investigação. Procuraram trazer para a prática dos matemáticos portugueses os temas então actuais da matemática e simultaneamente integrar Portugal na rede internacional dos matemáticos.

Concluiu a sua licenciatura em Matemática na *Faculdade de Ciências da Universidade de Coimbra* em 1926, entrando nesse ano para esta Faculdade, como 2.º Assistente do 2.º Grupo (*Mecânica e Astronomia*) da 1.ª Secção da *Faculdade de Ciências* (*Matemática*). Doutorou-se em 1928, com a tese "Sobre o desvio das trajetórias dum sistema holónomo", utilizando trabalhos do matemático italiano Levi-Civitta (1873–1941) e de Aureliano Mira Fernandes (1884–1958), um dos dinamizadores da *Geração de 40*. Em 1929 passou a Assistente da *Faculdade de Ciências do Porto*, sendo regente da cadeira de Física Matemática em 1930 e Professor Catedrático em 1933.

O primeiro grupo português de investigação matemática no século XX foi o *Núcleo de Matemática, Física e Química*, fundado em 1936 por bolseiros portugueses que tinham regressado do estrangeiro decididos a modificar qualitativamente o curso da ciência em Portugal. Um desses elementos tinha assistido no *Institut Poicaré* em Paris a uma conferência de Louis de Broglie (1892–1987) em que este mencionou trabalhos de Ruy Luis Gomes. Deste modo, uma vez criado o *Núcleo*, foi feito um convite a Ruy Luis Gomes para vir fazer um conjunto de quatro conferências a Lisboa sobre a Teoria da Relatividade. A vinda de Ruy Luis Gomes a Lisboa foi importante por vários motivos, um deles por proporcionar o contacto direto com António Aniceto Monteiro (1907–1980), o grande dinamizador das actividades da Geração de 40. Entre as importantes realizações dos elementos deste grupo, podemos mencionar a criação da revista internacional *Portugaliae Mathematica* em 1937, do C*entro de Estudos Matemáticos Aplicados à Economia* em 1938, do *Seminário de Análise Geral* em 1939, e, em 1940, *do Centro de Estudos Matemáticos de Lisboa*, da *Gazeta de Matemática*, revista de divulgação e ligação com os estudantes universitários e pré-universitários e, em Dezembro desse ano, a fundação da *Sociedade Portuguesa de Matemática*.

Suplemento do Boletim da SPM 82, Dezembro 2024, pp. 113–116

Em 1942 Ruy Luis Gomes foi o principal impulsionador da criação do *Centro de Estudos Matemáticos do Porto*. Anexo a este Centro funcionou um *Seminário de Física Teórica*, inicialmente dirigido pelo físico austríaco Guido Beck (1903–1988) e, a partir de Julho de 1943, pelo físico nuclear francês de origem romena Alexandru Proca (1897–1955). Para além da actividade de pesquisa dos seus membros, foram dados cursos livres com o objetivo de interessar os jovens pela investigação científica. Foi igualmente criada a coleção de publicações do Centro de Estudos Matemáticos do Porto, para divulgação dos trabalhos, cursos e conferências dos seus membros.

Em 1943 Ruy Luis Gomes, conjuntamente com António Monteiro e Mira Fernandes, e com o apoio financeiro de António Luís Gomes, irmão de Ruy Luís Gomes e então Ministro da Fazenda Pública, criaram a *Junta de Investigação Matemática* (JIM), para subsidiar o trabalho dos matemáticos portugueses na investigação e na publicação, uma vez que o apoio que tinham tido até então das entidades oficiais fora retirado. Entre os mais importantes apoios dados pela JIM está o dado à continuação da publicação da *Portugaliae Mathematica* e aos *Cadernos de Análise Geral*, cadernos de introdução ao estudo das modernas correntes do pensamento matemático, como eram então apresentados

Com o fim da 2.ª Guerra Mundial na Europa em Maio de 1945 pensou-se ingenuamente que os regimes totalitários da Península Ibérica seriam também depostos. O regime português receou que os seus dias estivessem contados, e por isso encenou um simulacro de abertura democrática, com a dissolução da *Assembleia Nacional* e a marcação de eleições. Mas em breve se viu que não havia condições para eleições credíveis, e o *Movimento de Unidade Democrática* (*MUD*), entretanto formado, desistiu de nelas participar, mas continuou o seu trabalho enquanto organização. Ruy Luis Gomes foi presidente da Comissão Distrital do Porto do MUD.

Em 1946 deu-se o primeiro doutoramento de um elemento do CEMP, Alfredo Pereira Gomes (1919–2006), orientado por António Monteiro, desde 1945 no Rio de Janeiro.

O regime, vendo que se tinha desvanecido a possibilidade de intervenção dos aliados na Península Ibérica, regressou à sua política repressiva. Foram demitidos da Universidade nesse ano dois Professores Catedráticos, Bento de Jesus Caraça e Mário Azevedo Gomes, membros da Comissão Central do MUD. Em 1947 outra vaga de 26 expulsões ou demissões da Universidade, motivadas principalmente pelas ideias e atitudes políticas dos visados. Cinco eram do CEMP, incluindo Ruy Luis Gomes, por terem escrito uma carta contra a prisão de uma estudante pela polícia política. As actividades da SPM não foram interditas, mas o Ministério da Educação proibiu a utilização das suas instalações para a realização de conferências ou seminários. A solução encontrada foi realizar essas sessões em casa dos matemáticos: na área de Lisboa em casa de Hugo Ribeiro (1910–1988), no Murtal (denominada "Universidade do Murtal") e no Porto em casa de Luis Neves Real (1910–1985) (denominada "Universidade da Rua do Almada"). Em 1948 o governo ilegalizou o MUD. Ruy Luis Gomes investiu fortemente no combate político ao regime, tendo sido preso várias vezes pela polícia política. Em 1951 foi candidato à Presidência da República mas após ter legalizado a sua candidatura o regime ilegalmente alterou a legislação, conferindo ao Conselho de Estado poderes para a rejeitar.

Em 1953 A Academia das Ciências atribuiu-lhe o Prémio Artur Malheiros pelo trabalho "Sobre as relações entre o integral de Riemann e o integral de Lebesgue" (António Monteiro tinha sido premiado em 1938).

Em 1959 a convite de António Monteiro foi para a Universidade del Sur, na Argentina, onde Monteiro dirigia o seu Instituto de Matemática. Deu cursos de Teoria de funções de variável real e organizou seminários onde se estudaram os *Elements de Mathématique* de Bourbaki publicados até então.

Em Janeiro de 1962 partiu para a *Universidade de Recife*, onde já se encontravam Alfredo Pereira Gomes, Manuel Zaluar Nunes (1907–1967) e José Morgado (1921–2003). Ainda em 1962 Pereira Gomes partiu para a Universidade Nancy em França. Em 1965 Ruy Luís Gomes e Morgado fundaram e dirigiram duas coleções: *Notas e Comunicações de Matemática,* para a publicação preliminar de artigos de pesquisa, e *Notas de Curso*, para a publicação de cursos avançados. Em 1967 a *Universidade de Recife* passou a *Universidade Federal de Pernambuco* (UFPE). Ruy Luís Gomes e Morgado iniciaram um curso de mestrado em Matemática. Em 1970, o Conselho Nacional de Pesquisas reconheceu a UFPE como Centro de Excelência para este mestrado. Com a revolução de 25/04/1974, Ruy Luis Gomes regressou ao Porto, sendo nomeado Reitor da sua Universidade. Jubilou-se em 1975, e foi-lhe atribuído o título de *Reitor Honorário da Universidade do Porto.*

Referências

L. Saraiva, "The beginnings of the Portuguese Society of Mathematics (1936–1945)", *Archives Internationales d'Histoire des Sciences*, vol. 66, n.º 176 (2016), p. 171–199.

L. Saraiva, "A actividade dos matemáticos portugueses no Recife, 1953–1974". *Anais do XVº Seminário Nacional de História da Matemática*, Universidade Federal de Alagoas, Maceió, Brasil. Cavalari, Mariana, e Santos, Viviane, eds. 2023, https://snhm.com.br/anais/article/view/122/1 ISSN 2236-4102, p. 1–20.

A Educação Matemática no Brasil: debates e propostas para a criação de um campo disciplinar sobre o ensino

Wagner Rodrigues Valente
UNIFESP/GHEMAT, Brasil

A comunicação tem por objetivo analisar as propostas surgidas na década de 1970, relativamente à criação de cursos de pós-graduação em Ensino de Matemática. Essa década representa momento de consolidação dos cursos de pós-graduação no Brasil. Até então, havia poucos deles no país. Ainda: não existiam cursos onde a pesquisa sobre o ensino de matemática pudesse ser desenvolvida.

Esse momento de consolidação da pós-graduação no Brasil é cercado de turbulências. Elas repercutem como tema na grande imprensa do país. Manchetes de jornais há que indicam polêmicas sobre o uso do dinheiro público na educação e a negativa de investir-se recursos na pós-graduação, diante do estado ruim da educação básica brasileira.

Esse era um tempo onde tão somente vinte por cento dos professores universitários brasileiros tinham feito alguma especialização, algum curso pós cursos de graduação. A absoluta maioria dos docentes das universidades do país havia tido um curso de formação, porém não apresentava titulação de mestres ou doutores nas respectivas áreas de atuação.

Os debates sobre o papel da pós-graduação a esse tempo também incluíam discussões diante da iminência de afastamento dos professores universitários para fazerem as suas especializações. Haveria que "importar" professores para suprirem as demandas de cursos e aulas a serem ministradas aos graduandos, com a ausência dos professores brasileiros, que estariam fazendo pesquisas no país ou no exterior, buscando título de mestre ou doutor.

É esse o quadro e contexto sobre a pós-graduação no Brasil, em tempos em que se cria o primeiro curso de mestrado em Ensino de Ciências e Matemática. Neste caso, a atuação do professor Ubiratan D'Ambrosio é determinante. Este professor esteve nos EUA, no período de 1964 a 1972, trabalhando ativamente na reorganização de cursos de pós-graduação em universidades que não tinham maior expressão. D'Ambrosio, ao retornar ao Brasil, reunindo tal experiência, logo manteria contato com o Ministério da Educação, juntando em seu redor figuras que buscavam criar um campo de pesquisa sobre o ensino, sobre o ensino de Ciências e Matemática.

Desse modo, meados da década de 1970, sob iniciativa de D'Ambrosio, tem-se a criação de um mestrado em Ensino de Ciências e Matemática.

Passados mais de quarenta anos, de instalação desse mestrado, o próprio D'Ambrosio (2014) detalha a existência pioneira do Programa Experimental de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática da UNICAMP/OEA/MEC, que se desenvolveu no período de 1975 a 1984. Diz-nos o autor:

> O Curso de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática ocorrido na Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP, no período de 10 de fevereiro de 1975 a 29 de fevereiro de 1984, foi um projeto com características sui generis, patrocinado conjuntamente pelo Ministério da Educação e Cultura (MEC), supervisionado pelo Programa para a Melhoria do Ensino (PREMEN) e pela Organização dos Estados Americanos (OEA), como parte de seu Projeto Multinacional para a Melhoria do Ensino de Ciências e Matemática. (PROMULMEC) (D'Ambrosio, 2014, p. 56).

O projeto centrava-se em uma distribuição de tempo maior para a apresentação de seminários, restringindo a duração das aulas tradicionais. O currículo contava também com a valorização de atividades por meio de conferências e pouca utilização dos espaços formais como a sala de aula, sendo que as atividades propostas serviram como motivacionais para o desenvolvimento da aprendizagem.

Como relata o próprio D'Ambrosio, esse curso de mestrado teve características muito diferentes daquelas que estavam sendo consolidadas pelos demais programas já existentes de pós-graduação no Brasil. Esse fato e o término das bolsas de estudos aos pós-graduandos contribuiu enormemente para o encerramento dessa primeira iniciativa.

Uma segunda tentativa de institucionalização de um curso sobre o ensino de matemática surgiu em 1977, durante mesmo a vigência do curso Promulmec. Tratava-se de proposta do professor Osvaldo Sangiorgi.

Em meio aos documentos do Arquivo Pessoal Ubiratan D'Ambrosio (APUA) encontram-se documentos que atestam a existência dessa segunda iniciativa. Há correspondências trocadas entre Sangiorgi e D'Ambrosio, ricas em detalhes sobre essa proposta. Sangiorgi envia a D'Ambrosio um projeto completo a ser submetido como curso de pós-graduação em Ensino de Matemática. D'Ambrosio critica o projeto em carta-resposta, aludindo ao fato de que o projeto nada mais é que um curso avançado em matemática para professores, pouco representando um curso sobre educação matemática. Ainda:

indica que no exterior já há muita literatura a respeito de como deveria ser organizado tal curso, informando que uma das disciplinas fundamentais que poderia constar na grade curricular deveria ser a modelagem matemática. Era preciso que Sangiorgi buscasse atualizar-se sobre o que se estava fazendo em termos internacionais.

Diante dessa avaliação ruim feita por D'Ambrosio, Sangiorgi, mesmo tendo espírito bastante empreendedor e interessado na criação de um mestrado próprio ao ensino de matemática, abandona o projeto, a partir da negativa da Universidade Mackenzie, onde ele era professor, de apoiar a iniciativa.

Conclui-se que, em momento de consolidação da pós-graduação no Brasil, na década de 1970, as propostas de criação da especialidade Ensino de Matemática não atendiam as normativas acadêmicas já estabelecidas, caso do Promulmec; e pouco dialogavam com iniciativas internacionais, caso do projeto elaborados por Sangiorgi, fatos que contribuíram para o fracasso do processo de institucionalização da nova área no país a esse tempo.

Referências

Ambrosio, U. A Uma síntese do Programa Experimental de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática da UNICAMP/OEA/MEC (1975 a 1984). In: Nardi, R.; Gonçalves, T. V. O. (Orgs.) *A Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática no Brasil.* São Paulo: Livraria e Editora da Física, 2014, p. 56–84.

APUA – Arquivo Pessoal Ubiratan D'Ambrosio. Centro de Documentação do GHEMAT-Brasil. Santos, SP.

Bourdieu, P. *Para uma sociologia da ciência.* Lisboa: Edições 70, 2001.

Hofstetter, R.; Schneuwly, B. Disciplinarização e disciplinação: as ciências da educação e as didáticas das disciplinas sob análise In: Hofstetter, R. Valente, W. R. (Org.). *Saberes em (trans) formação: tema central a formação de professores.* 1.ª ed. São Paulo: Editora da Física, 2017, p. 21–54.

Miranda, G. A. A pesquisa em Educação Matemática no Brasil: contribuições do primeiro mestrado em Ensino de Ciências e Matemática da UNICAMP (1975–1984). *Anais* do III Congresso Ibero-americano de História da Educação Matemática. Belém, PA: UFPA, 04 a 07 de novembro de 2015 – p. 387–399

Prochasson, C. Les correspondances : sources et lieux de mémoire de l'histoire intellectuelle. *Les Cahiers du Centre de Recherches Historiques*, 8, 1991. `https://doi.org/10.4000/ccrh.2824`

Touati, P. De la médiation épistolaire dans la construction du savoir scientifique: Le cas d'une correspondance entre phonéticiens. *Revue d'anthropologie des connaissances*, V. 4, N. 3, 2010 – p. 451–457.

The Historical Representation of Women in Mathematics

June Barrow-Green
The Open University & The London School of Economics, UK

My talk stemmed from work I have been doing on the history of the gender gap in mathematics in Britain. The fact that women are not going into or staying in mathematics at the same rate as men means that mathematical talent is going missing. While strenuous efforts are being made to counter this, it is evident that a negative attitude towards women doing mathematics is still present in parts of British society. Research has shown not only the deep roots of this negative view, but also the extent to which historical negative representations are still in evidence. Looking at these representations and the context in which they were created provides us with a new way to open up the discussion about women in mathematics.

To give some context: Within mathematics in Britain today, women account for about 40% of A-level students, 37% of undergraduates, 21% of PhD students, and 12% of Professors. There has been some improvement, but these numbers have shifted little in the last decade.

I discussed pictorial and verbal images of women mathematicians, showing examples of how women mathematicians were viewed by others and how women mathematicians viewed themselves. I adopted a chronological approach, giving sparse biographical details to focus on the representations.

Hypatia (c. 355–415 CE) is generally believed to have written commentaries on the works of the great Hellenistic mathematicians, but she is probably most famous for her brutal death at the hands of a mob which has led to her becoming an icon for various causes. Although no true image of Hypatia exists, a Google search on her name throws up plenty of wildly differing images dating from pre-79AD to the modern day. I showed four of these to illustrate the importance of knowing the origin/reliability of an image, and to show how women mathematicians have been imagined across the ages.

In the medieval and renaissance periods, one finds images in which women are depicted as the muses for mathematicians representing the mathematical arts of the quadrivium. Here the women are not mathematicians but facilitators. Such images can be found easily on the web, but it can be difficult to find the original sources and authenticate the images. As an exemplar, I showed one in which four images had been digitally manipulated from a 14$^{\text{th}}$ century manuscript depicting the seven liberal arts.

Maria Agnesi (1718–1799) was the first woman in the modern period to make a substantial contribution to mathematics (*Instituzioni Analitiche*, 1748). I included her not because of the portraits of her (which are worth discussing) but because of a remark by the French historian of mathematics, Jean-Étienne Montucla:

> "I must cite here with praise the *Institutions analytiques* of Mademoiselle Maria Gaetana Agnesi, a work that a French lady mathematician (for we have them here too) should have translated into our language. It is not without astonishment that we see a person of a sex so little made to brave the thorns of science able to penetrate so deeply into all parts of analysis, either ordinary or transcendental."

At first glance this may be thought complimentary but the suggestion that Agnesi's book should have been translated by a woman—it had been translated by a man in 1775—implies that women do mathematics differently from men and in a way that women themselves best understand. The claim that women are "so little made to brave the thorns of science", implies that women's mathematical ability is naturally inferior to that of men. By singling out Agnesi, Montucla underlines his prejudice.

Émilie du Châtelet (1706–1749) is well-known for her masterly translation of Newton's *Principia*. Different images of her reveal her in different ways: how she saw herself (as a mathematician), how she was represented by Voltaire (as his muse) and how she was represented by Algarotti (as his student), the latter image being a travesty of the truth.

In the case of Sophie Germain (1776–1831), I quoted from a letter to her from Gauss about her work in number theory. Distinct from Montucla, he praised her for overcoming "infinitely more obstacles than men" and acknowledging her "extraordinary talent, and superior genius", i. e., it was external obstacles that got in the way of women doing mathematics, not women's lack of natural talent.

For Mary Somerville (1780–1872), I began with a quote from William Whewell who praised her, but in comparison with other women, and who considered only two other women "as worthy of entirely honorable notice—Hypatia and Agnesi". He dismissed du Châtelet because her "whole character and conduct have not attracted to her the interest which belongs to the other two", a reference to her relationship with Voltaire, imposing on her a standard of behaviour not imposed on men. In the portraits of Somerville, in contrast to those of du Châtelet, it is conspicuous that there is no indication of her academic interests. This is telling both about her own view of herself and the British attitude towards women in science and mathematics.

Ada Lovelace (1815–1852), who was mentored by Mary Somerville, is one of the most written about women in mathematics. I showed quotes about her mathematical ability which ranged from the very positive to the very negative, much of which was based on misunderstanding or incomplete textual evidence. I then showed how recent scholarship by historians of mathematics has produced a more balanced and nuanced assessment of her talents.

In Cambridge in the 19$^{\text{th}}$ century, mathematics was considered a masculine subject and not suitable for women, or at least not suitable for women who wanted to get married! Among the women I discussed were Charlotte Scott (1858–1931) and Philippa Fawcett (1868–1948), whose triumphs in the Cambridge Mathematical Tripos in 1880 and 1890 respectively made them subject to a wide range of comments and cartoons.

Negative images of female mathematicians are also evident in 19$^{\text{th}}$/early 20$^{\text{th}}$ century English literature. Examples I showed included Jules Verne's 1889 novel *Sans dessus dessous*, translated as 'Purchase of the North Pole' or 'Topsy Turvy', George Bernard Shaw's play *Mrs Warren's Profession* of 1893 (first performed 1902) and Virginia Woolf's novel *Night and Day* (1919).

To conclude, I looked at some 20$^{\text{th}}$ and 21$^{\text{st}}$ century images, with an emphasis on role models. In the preface of Margot Lee Shetterly's impressive book *Hidden Figures: The untold story of the African American Women who helped win the space race* (2016), the author makes a very powerful statement about the importance of role models for her both as a woman and as an African American.

Mathematicians come in many guises, and while the stereotypical solitary figure, male or female, sitting at a desk, may be one of them, most don't fall into this category. To be a mathematician and enjoy it doesn't mean winning a Fields Medal. For aspiring women mathematicians, it is important to see a variety of women mathematicians both in terms of the type of mathematics and the environments in which it is being done. When we look at women mathematicians from the past, we mostly see women who achieved against the odds. Often the way they have been represented makes for uncomfortable viewing or reading and is sometimes shocking to our 21$^{\text{st}}$ century gaze. But as I said earlier, I believe that we can use these representations to initiate discussions about women in mathematics, and counter some of the still prevalent stereotyping. In this way we can contribute towards making mathematics a subject equally welcoming to everyone.

References

J. E. Barrow-Green, “The historical context of the gender gap in mathematics”, *World Women in Mathematics 2018*, Springer, 2019, Eds. C. Araujo, G. Benkart, C. E. Praeger, B. Tanbay, p. 129–145.

J-E. Montucla, *Histoire des Mathématiques*, Volume 2, 1799–1802, p. 171.

R. Laubenbacher, D. Pengelley, ““Voici ce que j’ai trouvé:” Sophie Germain’s grand plan to prove Fermat’s Last Theorem”, *Historia Mathemtica*, Vol. 37, p. 641–692, p. 644.

W. Whewell, “Review of *On the Connexion of the Physical Sciences*”, *Quarterly Review*, Vol. 51, (1834), p. 54–68, p. 66.

Carvalho da Costa: a latitude por duas alturas iguais do sol

Ana Mafalda Bastião
Escola Naval, CINAV

O método do cálculo da latitude por duas alturas do sol tem sido amplamente estudado por diversos autores ao longo da história. Pedro Nunes (1502–1578) estudou este assunto baseando-se na observação de duas alturas do Sol e na diferença de azimute entre elas, processo que resolvia graficamente, sobre um globo.

Diego Ramirez de Arellano (1580–1624) navegador e cosmógrafo espanhol, na sua obra *Reconocimiento de los estrechos de Magallanes...* (1621), identifica vários autores que estudaram a latitude por extrameridianas, analisando os métodos por eles usados. Arellano aponta os inconvenientes dos autores que estudou e procura resolvê-los. Para isso, propõe uma resolução analítica, utilizando as regras dos senos, sendo este o primeiro método analítico conhecido.

Valentim Estancel (1621–1705) propõe ainda uma resolução analítica do problema, usando também regras dos senos, para os triângulos esféricos, mas sem utilizar logaritmos (1614). Não se conhece a data do texto de Estancel mas pensa-se que seja da década de 1660, ou posterior.

Um outro autor contemporâneo de Estancel, Carvalho da Costa (1650–1715), utiliza para determinar a latitude, um método diferente dos utilizados até então e utilizando já logaritmos.

António Carvalho da Costa nasceu em Lisboa, em 1650. Autor de uma vasta e diversificada obra, apresenta-se como padre diocesano e matemático, nas dedicatórias que faz nos seus livros a membros da monarquia e da nobreza.

Da sua obra fazem parte várias obras de cariz matemático como a *Via Astronómica*, a *Astronomia Metódica* e o *Compêndio Geográfico*, mas também uma obra de descrição topográfica, histórica e genealógica, a *Corografia Portugueza*.

No *Compêndio Geográfico*, Costa propõe que se determine a latitude através da observação de duas alturas iguais do sol. O matemático propõe que se meçam várias alturas do sol, antes e depois do meio-dia, até que se encontrem duas alturas iguais (uma vez que o movimento do sol é simétrico em relação ao meio-dia), que se meça o intervalo de tempo e que se encontre a declinação a partir do lugar do Sol.

Suplemento do Boletim da SPM 82, Dezembro 2024, pp. 125–127

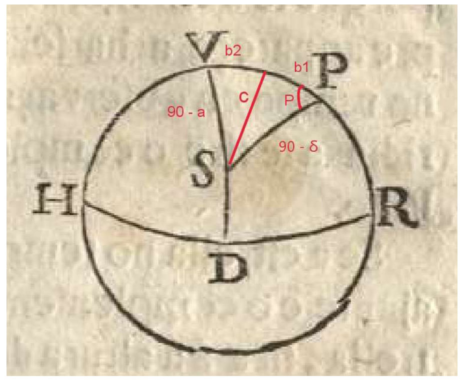


Figura 1: *Compêndio Geográfico*, p. 6.

Com os dados recolhidos (a altura, o intervalo de tempo e a declinação) Costa constrói o triângulo esférico SVP, da figura 1, do qual se conhece o lado VS (complemento da altura do Sol), o lado SP (a distância do Sol ao Polo) e o ângulo VPS (metade do intervalo de tempo, convertido em graus), com os quais se encontrará o lado VP, complemento da altura do Polo.

Em seguida, o matemático propõe a divisão deste triângulo em dois triângulos retângulos, que irá resolver usando as fórmulas de Neper.

Para resolver o primeiro triângulo retângulo, Costa procura determinar o lado b_1. Através da regra dos senos, o cosseno de P é igual ao produto das tangentes de b_1 e δ.

$$\cos P = \operatorname{tg} \delta \cdot \operatorname{tg} b_1 \Leftrightarrow \operatorname{tg} b_1 = \cos P \cdot \operatorname{cotg} \delta$$

Em seguida, resolva-se o segundo triângulo retângulo usando, mais uma vez, as regras dos senos:

1. $\cos(90 - \delta) = \cos b_1 \cdot \cos c$
2. $\cos(90 - a) = \cos b_2 \cdot \cos c$
3. $\cos c = \dfrac{\cos(90 - \delta)}{\cos b_1} = \dfrac{\cos(90 - a)}{\cos b_2}$

Assim: $\cos b_2 = \dfrac{\operatorname{sen} a \cdot \cos b_1}{\operatorname{sen} \delta}$

À medida que explica o processo, Costa apresenta-nos um exemplo concreto de como o fazer, usando uma regra de três simples e logaritmos.

Como o seno da declinação do Sol	
7 gr. 41 min. 30 seg.	9,126592
para o seno da altura do Sol 20 gr.	9,534052
Assim o seno do complemento da primeira base	9,376003
Para o seno do complemento da segunda base, que	
se achará de 52 gr. 36 min	9,783463

Isto é, pelas propriedades dos logaritmos, à soma do logaritmo da altura do sol com o logaritmo do cosseno de b_1 (primeira base), subtrai-se o logaritmo do seno da declinação do sol, obtendo-se o logaritmo do cosseno de b_2 (segunda base), a que corresponde um ângulo de 52 gr. 36 min.

O processo de determinação da latitude por duas alturas iguais do sol proposto pelo padre António da Costa é um processo mais simples que os apresentadados por autores como Pedro Nunes ou Estancel, entre outros. De realçar que António da Costa utiliza em todas as suas obras de cariz matemático as fórmulas de Neper, para triângulos esféricos retângulos e é o primeiro autor conhecido a publicar obras impressas utilizando logaritmos.

Referências

[1] A. C. da Costa, *Compendio geographico distribuido em tres tratados...*, João Galrão, Lisboa, 1686.

[2] A. C. Canas, "A latitude pelo Sol a qualquer hora do dia", *Anais Da Universidade de Évora*, No. 12 (2002), pp. 63–86.

[3] B. J. Almeida, A influência da obra de Pedro Nunes na Náutica dos séculos XVI e XVII: um estudo de transmissão de conhecimento, Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa, Portugal, 2011.

[4] J. J. Pires, Determinação da Latitude por alturas Extrameridianas do Sol, Evolução Histórica do Processo, Tese de Mestrado, Escola Naval, Portugal, 2021.

Navegação astronómica na travessia aérea do Atlântico Sul

António Costa Canas
Escola Naval—CINAV & CHist-UL

Um processo simples de conhecer a posição de um navio no mar baseia-se na marcação da direção em que se navegou e na distância percorrida, desde a última posição conhecida. Foi este o método usado pelos primeiros navegadores portugueses da época dos Descobrimentos. Contudo, existem diversos erros associados a este método, devido à existência de correntes no mar e a erros de leitura, ou instrumentais. Para minimizar estes erros, que poderiam ser elevados, nas longas viagens oceânicas, foram desenvolvidas técnicas de navegação astronómica.

Quando surgiu a navegação aérea, foram adaptados muitos dos procedimentos usados no mar, uma vez que existem várias semelhanças entre esta e a navegação marítima. Inicialmente usava-se o conhecimento da direção e distância percorrida, mas para as longas viagens oceânicas, tal era insuficiente, tendo sido adaptados processos astronómicos de navegação, para reduzir os erros. No entanto, existem algumas diferenças na navegação aérea, nomeadamente o facto de a velocidade ser geralmente mais elevada. Tal implica uma necessidade de realizar os cálculos mais rapidamente, uma vez que o consumo de combustível é bastante rápido. Por outro lado, na navegação aérea não é necessário tanto rigor nos cálculos, pois do ar é mais fácil identificar o destino a uma maior distância do que no mar.

No início do século XX, quando nasceu a aviação, usavam-se vários métodos de navegação astronómica. Aquele que acabou por prevalecer foi o método de Marcq de Saint-Hilaire, desenvolvido no último quartel do século anterior. Este método foi o preferido por Gago Coutinho para a travessia aérea do Atlântico Sul. Baseava-se na comparação entre a altura observada, de um determinado astro, e a altura que esse mesmo astro deveria ter, na posição estimada do navio. Cada altura observada permitia calcular uma linha de posição, cruzando duas, ou mais, linhas de posição, obtinha-se a posição do navio, ou da aeronave. Para tal, deveria observar-se a altura do astro, com um sextante, registando igualmente a hora da observação. À altura observada aplicavam-se algumas correções, para obter a altura verdadeira. Para calcular a altura "estimada" bastava conhecer a posição estimada e a hora da observação, obtendo-se a altura pela seguinte fórmula:

$$\operatorname{sen} a = \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos P$$

onde (**a**) é a altura, (φ) a latitude estimada, (δ) a declinação do astro (lida em tabelas) e (**P**) o ângulo no Polo, o qual era função da longitude e da hora. Era ainda necessário calcular o azimute (**Z**) do astro, recorrendo à fórmula:

$$\operatorname{cosec} Z = \sec \delta \operatorname{cosec} P \cos a$$

A partir da posição estimada traçava-se uma linha com a direção do azimute e media-se a distância em milhas correspondente à diferença entre a altura verdadeira e a altura estimada. Neste ponto traçava-se a perpendicular à direção do azimute, ficando assim marcada a linha de posição.

As fórmulas acima apresentadas implicavam a realização de cálculos demorados, uma vez que consistiam em multiplicações e divisões de números geralmente com cinco algarismos cada. Um recurso para reduzir o tempo de cálculo era o uso de logaritmos, que "transformavam" multiplicações em somas e divisões em subtrações. Mas no caso da primeira das fórmulas, a mesma consistia na soma de dois produtos, facto que implicava um número mais elevado de cálculos e consulta de tabelas, mesmo usando logaritmos. Um dos grandes contributos de Gago Coutinho para a navegação aérea foi a simplificação dessas fórmulas, reduzindo significativamente o tempo de cálculo das linhas de posição astronómicas. Seguidamente será explicado, sinteticamente, o procedimento usado por Gago Coutinho para calcular e traçar as retas.

Outro dos problemas a resolver era a escolha da projeção da carta a usar. Na navegação marítima usa-se a projeção de Mercator, a qual não tem sempre a mesma escala, ao longo de toda a carta, variando a escala em função da latitude, facto que tornava mais demorada a marcação das linhas de posição, ainda para mais num espaço exíguo como era aquele que ele tinha disponível no avião. Gago Coutinho desenhou, sobre cartões, as cartas que usou, tendo optado por uma projeção cónica secante, a qual permite uma escala praticamente constante ao longo de todo o percurso da travessia. Nesses cartões, escolheu um conjunto de pontos, a intervalos regulares de latitude e de longitude, os quais considerou como pontos estimados a usar para os cálculos.

De modo a realizar o menor número possível de cálculos durante a viagem, Gago Coutinho calculava previamente uma série de valores, reduzindo assim as operações a realizar durante o voo. Partindo da fórmula da altura:

$$\operatorname{sen} a = \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos P$$

realizava as seguintes operações:

Multiplicar e dividir o segundo termo por: $\operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\delta$:

$$\operatorname{sen} a = \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\delta \left(\frac{\operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos P}{\operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\delta} \right)$$

Pôr em evidência: $\operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\delta$:

$$\operatorname{sen} a = \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\delta \left(\frac{\operatorname{cotg}\varphi \operatorname{cotg}\delta}{\sec P} + 1 \right)$$

Fazendo: $\operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\delta = S$ e $\operatorname{cotg}\varphi \operatorname{cotg}\delta = C$, fica:

$$\operatorname{sen} a = S \left(\frac{C}{\sec P} \pm 1 \right)$$

nesta última fórmula, os termos **S** e **C** podiam ser previamente calculados, pois só dependem da latitude estimada, valor fixo, escolhido pelo navegador e da declinação da Sol, a qual varia muito lentamente com o tempo, podendo considerar-se um valor fixo para cada dia de viagem. Restava o termo em **P** o qual depende da longitude estimada, a qual era conhecida, mas depende também da hora da observação, a qual só se poderia conhecer depois de medida a altura do astro, pois a altura estimada tinha que ser calculada para o mesmo instante em que se obtinha a altura verdadeira.

Em jeito de conclusão, pode afirmar-se que na travessia aérea do Atlântico Sul, em 1922, se praticou pela primeira vez navegação astronómica aérea. Tal só foi possível graças a diversas inovações, sendo Gago Coutinho o protagonista destas. Só assim foi possível encontrar os minúsculos Rochedos de São Pedro e São Paulo, após uma viagem com duração superior a 11 horas, na qual se percorreram mais de 900 milhas, sem observar terra.

Referências

Coutinho, Gago, 1922. “A Navegação Aérea”, *Anais do Clube Militar Naval*, vol. 10 a 12, pp. 301–422.

Coutinho, Gago, & Cabral, Sacadura, 1922. *Relatório da viagem aérea Lisboa–Rio de Janeiro*, Lisboa, Centro de Estudos da Marinha.

Pereira, J. Malhão, 2015. “Os Céus de Gago Coutinho e Sacadura Cabral” *Memórias*, vol. xlii, Lisboa, Academia de Marinha, pp. 263–321.

Os Jesuítas no rescaldo da polémica com Galileu: Revisitando o Cosmos Aristotélico no Collegio Romano (1618–1677)

Luís Miguel Carolino
ISCTE – Instituto Universitário de Lisboa, CIES-IUL

Ao estudar a controvérsia que decorreu entre Galileu e os jesuítas sobre os cometas de 1618, os historiadores tenderam a concentrar-se nas obras que levaram à publicação do *Il Saggiatore,* em 1623, considerando que este livro de Galileu pôs fim à célebre controvérsia. Como afirmaram, por exemplo, Ofer Gal e Raz Chen-Morris, "with *The Assayer* the controversy comes to its virtual end" (2011, p. 38). Contudo, uma análise do ensino de matemática e filosofia natural no Collegio Romano, com base em material manuscrito e impresso, revela que esta famosa polémica teve um profundo impacto nesta instituição até ao final da década de 1670.

Apesar de ser um centro de referência nos estudos matemáticos, o Collegio Romano afirmou-se como um bastião da ortodoxia filosófica ao longo do século XVII. No passado, os ecos das diferentes disputas filosóficas do final do Renascimento tinham ressoado no colégio. Os debates sobre o estatuto epistemológico da matemática também animaram o ambiente intelectual do colégio, acabando por moldar o próprio currículo matemático dos jesuítas. No entanto, o generalato de Claudio Acquaviva inaugurou uma nova fase na defesa do princípio da *uniformitas et soliditas doctrinae* entre os jesuítas, numa época em que a questão copernicana ganhava relevo no seio da Igreja Católica. Foi neste cenário que três cometas brilhantes cruzaram os céus no final de 1618, dando origem a um aceso debate sobre os próprios fundamentos da filosofia aristotélica e da astronomia ptolemaica.

A disputa foi particularmente intensa em Roma, opondo os professores do Collegio Romano a Galileu e aos membros da Academia dos Lincei. Em jogo estava não só o prestígio intelectual dos contendores, mas sobretudo a validade explicativa dos sistemas astronómicos de Copérnico e Tycho Brahe e dos fundamentos da filosofia natural aristotélica. Assim, à medida que se chegava a um consenso segundo o qual os cometas de 1618 se moviam acima da Lua, os princípios da solidez celeste e da incorruptibilidade ficavam em sério risco.

No início, os jesuítas esforçaram-se por tornar as observações cometárias compatíveis com a tese da solidez celeste. Em vésperas da controvérsia com Galileu, os filósofos do Collegio Romano propuseram a tese engenhosa segundo a qual os cometas eram o resultado ótico de um agregado de estrelas situadas em epiciclos diferentes. Mesmo que a tese fosse tão engenhosa quanto fantasiosa, tinha uma grande vantagem: permitia continuar a afirmar os princípios da solidez e da incorruptibilidade celeste. Devido ao seu carácter ortodoxo, este argumento manteve-se no ensino da filosofia natural no Colégio Romano até à década de 1640, tendo sido defendido, entre outros, por Giacomo Lampugnano. Do ponto de vista historiográfico, esta tese é particularmente interessante pois demonstra que, para alguns intelectuais do início da Idade Moderna, a observação de cometas na região celeste não conduziu necessariamente ao colapso da astronomia ptolemaica.

Contudo, os matemáticos jesuítas que ensinavam no Collegio Romano seguiram um caminho diferente. Para além de demonstrar que o terceiro cometa de 1618 se situava entre a Lua e o Sol, Orazio Grassi argumentou que este se movia de acordo com a teoria de Tycho Brahe. Isto levou-o, bem como à maioria dos jesuítas que o seguiram nas cadeiras de matemática e filosofia do Collegio Romano, entre os quais se encontrava Gabriele Beati, a reconhecer que os céus eram fluidos. Mais uma vez, esta ideia estava em plena sintonia com o sistema geo-heliocêntrico proposto por Tycho Brahe.

Galileu, uma vez proibido de seguir o modelo heliocêntrico na sequência da proibição do copernicanismo por parte da Igreja Católica em 1616, rapidamente reconheceu esta mudança operada pelos jesuítas, acusando-os de aderirem veladamente às ideias de Tycho Brahe. Tal teve lugar ainda antes da aceitação do astrónomo luterano por parte das autoridades jesuítas. O empenho oficial dos jesuítas em seguir a filosofia aristotélica estava, portanto, em questão. Galileu, por sua vez, propôs uma tese cometária que reconhecia a corruptibilidade celeste e, como tal, opunha-se à divisão ontológica em que se baseava a filosofia natural de Aristóteles.

A análise do ensino da cosmologia no Collegio Romano ao longo do século XVII prova que a controvérsia continuou a ter impacto entre os jesuítas deste colégio muito depois da publicação de *Il Saggiatore* de Galileu em 1623. Os argumentos utilizados na controvérsia reverberaram nas aulas do Collegio Romano durante décadas, com professores de filosofia e matemática como Silvestro Mauro e Ottavio Cattaneo a empenharem-se — contra Galileu — na sustentação da tese de que os céus eram ontologicamente diferentes da região terrestre e, portanto, imunes à corrupção. Mesmo após a adesão ao sistema planetário de Tycho Brahe, estes professores continuaram a defender a incorruptibilidade celeste. Assim, a receção de Tycho Brahe não correspondeu necessariamente, como por vezes se afirma, ao colapso da cosmologia aristotélica na ótica do Collegio Romano.

Os jesuítas do Collegio Romano continuaram, portanto, a proclamar a autoridade de Aristóteles na filosofia durante a segunda metade do século XVII, acabando esta instituição por se afirmar como um guardião ortodoxia filosófica na rede educativa jesuíta. Esta foi certamente a última consequência do célebre debate que opôs os jesuítas e Galileu sobre os cometas e o seu significado cosmológico.

Referências

Ugo Baldini, *Legem impone subactis. Studi su filosofia e scienza dei Gesuiti in Italia, 1540—1632*, Roma, Bulzoni Editore, 1992.

Luís Miguel Carolino, "The burden of Galileo's controversy: The Jesuit revisiting of the Aristotelian cosmos in Collegio Romano (1618–1677)", *Galilæana*, Vol. 20, No. 2 (2023): p. 33–60.

Michel-Pierre Lerner, "L'entrée de Tycho Brahe chez les jésuites ou le chant du cygne de Clavius", *Les Jésuites à la Renaissance. Système éducatif et production du savoir*, Paris, Presses Unversitaires de France, 1995, Ed. Luce Giard, p. 145–185.

Ofer Gal e Raz Chen-Morris, "Galileo, the Jesuits, and the controversy over the comets. What was *The Assayer* really about?", *Controversies Within the Scientific Revolution,* Amsterdão e Filadélfia, John Benjamins Publishing Company, 2011, Ed. Marcelo Dascal e Victor D. Boantza, p. 33–52.

O PERCURSO SINGULAR DA GAZETA DE MATEMÁTICA: 200 NÚMEROS EM 83 ANOS

Fernando B. Figueiredo
Departamento de Matemática, CITEUC, Universidade de Coimbra

Anabela Teixeira
Escola Secundária de Camões, de Lisboa

Jaime Carvalho e Silva
Departamento de Matemática, CMUC, Universidade de Coimbra

Durante a segunda metade do século XIX, a ciência começou a expandir os seus horizontes, abrangendo novas áreas de interesse e investigação. Na viragem do século XX, a matemática, tradicionalmente ligada com questões da física, experimentou um avanço significativo. Diversas subdisciplinas emergiram e começaram a ser exploradas de maneira autónoma, marcando uma era de especialização e profundidade sem precedentes na investigação matemática.

Neste contexto de efervescência intelectual, assistiu-se ao fortalecimento da comunidade matemática global. Muitos países testemunharam o surgimento de sociedades matemáticas e periódicos especializados, refletindo um movimento em direção a um empreendimento colectivo e internacional. A matemática, agora mais do que nunca, passa a estar interligada com a troca global de ideias e investigações.

Paralelamente, o desenvolvimento explosivo do ensino secundário e superior obrigava a uma atenção renovada à formação de professores. As disciplinas, em especial a matemática, estavam em constante evolução, exigindo profissionais atualizados com os avanços mais recentes e capazes de transmitir esse conhecimento complexo e dinâmico.

Além disso, a ciência e a prática científica começaram a infiltrar-se no discurso quotidiano e na vida do cidadão comum. Começam a surgir publicações destinadas ao grande público, buscando desmistificar e disseminar conceitos de ciência e matemática, tornando-os acessíveis e compreensíveis.

Portugal, imerso neste cenário global de ensino e investigação, também vivenciou transformações significativas. A reforma do ensino superior em 1911, que culminou na criação das novas Universidades de Lisboa e Porto e na reestruturação da de Coimbra, marcou o início de uma nova era na educação portuguesa. Com esta reforma, emergiram novos cursos e disciplinas, refletindo a expansão e diversificação do conhecimento.

Suplemento do Boletim da SPM 82, Dezembro 2024, pp. 137–140

A matemática, pedra angular dos cursos científicos e tecnológicos, não só ganhou destaque no âmbito académico, como também se expandiu no sistema de ensino com a introdução de novas matérias curriculares e disciplinas. Paralelamente, a investigação começou a ser reconhecida como um pilar fundamental na construção do mundo moderno.

Este dinamismo é eloquentemente descrito num relatório de 1939 por Aniceto Monteiro, um jovem matemático, ao Instituto de Alta Cultura. Monteiro fazia notar que a "investigação científica é um dos fatores determinantes da estruturação do mundo moderno", e salientava a crescente importância atribuída à ciência, evidenciada pelo aumento exponencial de investigadores, institutos de investigação, universidades, laboratórios e publicações.

A partir dos finais da década de 30, em Portugal, testemunhou-se o surgimento de vários centros de investigação matemática importantes. Estes centros refletiam a tendência para o trabalho colaborativo e coletivo, manifestando-se na formação contínua de grupos de trabalho, encontros e seminários.

Foi neste contexto de renovação e avanço científico que Gazeta de Matemática foi fundada em 1939 por um distinto grupo de matemáticos preocupados seriamente com o estado do ensino e da investigação que as ciências matemáticas portuguesas enfrentaram à época. O primeiro número assinado por António Monteiro, Bento de Jesus Caraça, Silva Paulo, Hugo Ribeiro e Zaluar Nunes, sairia em Janeiro de 1940, embora legalmente fosse iniciativa de uma "sociedade por cotas" com capital avançado por Bento de Jesus Caraça, Silva Paulo e Zaluar Nunes (Rezende, 2012). Na "Apresentação" do primeiro número está escrito que a Gazeta de Matemática pretendia ser "um instrumento de trabalho e um guia para os estudantes de Matemática das Escolas Superiores portuguesas" e que em cada número pretendia publicar "um artigo de carácter didáctico, sobre um assunto de matemáticas elementares ou superiores".

Com a publicação do seu 200.º número em 2023, a Gazeta de Matemática não apenas comemora um marco histórico, mas também reafirma o seu compromisso inabalável com a disseminação e o enriquecimento da matemática. Este é um testemunho da sua relevância ininterrupta e do seu papel essencial no apoio a todos os que se dedicam ao estudo e à prática desta ciência fundamental.

Este resumo pretende apresentar uma investigação em curso sobre a notável trajetória da Gazeta de Matemática, uma iniciativa que emergiu de um movimento matemático prolífico e deixou um legado que ainda perdura.

Um projecto editorial, concebido com a visão de elevar o ensino e a literacia matemática em Portugal, que se mostrou não apenas ambicioso, mas também resiliente e influente ao longo dos anos. Este estudo, que celebra e analisa a história da Gazeta, será publicado nas páginas da própria Gazeta.

Com uma abordagem que atravessa várias décadas, o nosso estudo pretende destacar os momentos-chave da evolução da Gazeta, destacando as personalidades que foram instrumentais na sua trajectória de 83 anos, e examinar como os debates e discussões pedagógicas na revista influenciaram o ensino e a prática da matemática em Portugal.

Questões-chave que orientam a nossa investigação incluem:

- como os temas e o foco da Gazeta de Matemática evoluíram ao longo do tempo? Há alguma tendência ou mudança significativa que reflita os desenvolvimentos matemáticos ou sociais/políticos globais?
- houve algum artigo ou série de artigos na Gazeta que foi particularmente influente ou controverso na comunidade matemática? Quais foram as repercussões a longo prazo?
- qual foi o impacto tangível da Gazeta na educação matemática em Portugal, tanto a nível universitário como no secundário, e possivelmente, em níveis de ensino mais baixos?
- quais foram os maiores desafios enfrentados pela Gazeta ao longo dos anos (censura, financiamento, falta de interesse/submissões, etc.) e como foram superados?
- como a Gazeta se compara a outros periódicos similares internacionais? Existem características únicas ou uma abordagem distinta adotada pela Gazeta?
- como a Gazeta lidou com questões de representação? Há uma diversidade visível entre os autores, nos tópicos abordados, ou nas escolas matemáticas representadas?

Referências

Bilhoto, Z. (1995), *A Gazeta de Matemática*, Tese de Mestrado em Matemática, Especialização em Ensino, Universidade do Minho.

Morgado, J. (1996) Para a História da Sociedade Portuguesa de Matemática. In http://www.mat.uc.pt/~jaimecs/indexhspm.html. Acedido em 20-07-2023.

Rezende, J. (2012). Sociedades «Gazeta de Matemática, Limitada» e «Tipografia Matemática, Limitada» (8 de Outubro de 1945. Jornal do Comércio, 23 de Outubro de 1945). In Blogue "ANTÓNIO ANICETO MONTEIRO" http://antonioanicetomonteiro.blogspot.com/2012/12/sociedades-gazeta-de-matematica.html. Acedido em 20-07-2023.

SPM (2023). Gazeta de Matemática. https://gazeta.spm.pt/pagina. Acedido em 20-07-2023.

Vultos da História da Matemática portuguesa no *Dicionário Histórico* de Esteves Pereira e Guilherme Rodrigues (1904–1915)

Jaime Carvalho e Silva
Universidade de Coimbra, CMUC, Departamento de Matemática

Cecília Costa
Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro e CIDTFF

Como assinalaram Catarina Mota e outros "O nosso século XIX é fértil na investigação em História da Matemática e no ensino da Matemática" (Mota, Ralha & Estrada, 2011). Em anterior trabalho concluímos que a Matemática e a sua História ocupavam um lugar razoável nos conteúdos no *Diccionario Popular* de Manoel Pinheiro Chagas (Pinheiro Chagas, 1890), e no *Diccionario Universal de Educação e Ensino* de E. M. Campagne traduzido (e alargado) por Camilo Castelo Branco (Campagne, 1873); e que a sua presença contribuiu, certamente, para disseminar na época o conhecimento da Matemática e da sua História (Carvalho e Silva & Costa, 2022).

Neste estudo analisamos o impacto do que foi publicado no século XIX sobre o *Diccionario Historico* de Esteves Pereira e Guilherme Rodrigues (Esteves Pereira & Rodrigues, 1904–15), em particular no tratamento dos principais vultos da nossa história como Álvaro Tomás, D. Francisco de Melo, Pedro Nunes e José Anastácio da Cunha. Com esse objetivo, analisamos: i) em que medida a História da Matemática ocupa aí um lugar significativo e como esse tratamento se compara com o das duas enciclopédias referidas (Pinheiro Chagas, 1890) e (Campagne, 1873), tentando identificar as razões para as diferenças de tratamento; e ii) em que medida a obra pioneira de Stockler sobre a História da Matemática em Portugal (Saraiva, 1993) serviu de fonte para as entradas do *Diccionario Historico*.

Este *Diccionario Historico* encontra-se acessível e integralmente digitalizado, o que possibilita a perscrutação do mesmo através de ferramentas de pesquisa. Assim pudemos identificar diversas entradas cuja análise nos permitiu obter os resultados que adiante apresentamos.

Começamos por uma breve nota biográfica dos autores do *Diccionario Historico*, personalidades de relevo, mas cuja vida e obra é hoje pouco conhecida. Sobre João Manuel Esteves Pereira (1872–1944) sabe-se que frequentou a Academia de Belas-Artes de Lisboa e o Instituto Industrial e Comercial, tendo concluído o Curso Superior de Letras, em 1896 (Assembleia da República, 2021; Cabral, 2014). Interessou-se pela história da indústria, tendo publicado numerosos trabalhos e sido professor desta área no Instituto 19 de Setembro (Lisboa). Foi amanuense na secretaria da Junta do Crédito Público e Secretário de Estado do Ministério do Comércio e Comunicações, no governo presidido por Álvaro Xavier de Castro (Assembleia da República, 2021). De Guilherme Augusto Rodrigues (1841–?) tivemos nota através de Esteves Pereira (1909) que o considera "um escriptor contemporâneo, cheio de valor e de modéstia", dos poucos que, à época, era escritor de profissão. Deixou uma obra vasta e diversificada (artigos literários, estudos históricos, traduções, peças teatrais, operetas, entre outros). Pertenceu à administração do *Diário de Notícias* e do *Diário Illustrado*, colaborou na *Gazeta Commercial* e foi Secretário do Conselheiro António José Teixeira.

No *Diccionario Historico* a História da Matemática ocupa um lugar significativo, contendo entradas relativas a muitos Matemáticos (e. g. José Maria Dantas Pereira, Francisco de Borja Garção-Stockler, Francisco Gomes Teixeira, João Manuel d'Abreu, José Monteiro da Rocha), e bastante desenvolvidas, bem como relativas a instituições e publicações (e. g. Academia Real das Ciências, O Instituto). Não encontramos referência a Álvaro Tomás, tal como também acontece em (Pinheiro Chagas, 1890) e em (Campagne, 1873). As entradas relativas a D. Francisco de Melo, Pedro Nunes e Anastácio da Cunha são extensas (respetivamente, 1 coluna e ½, 1 coluna e ½ e 2 colunas) e focam aspetos como: dados biográficos, formação académica, percurso de vida e profissional, referência à obra escrita (publicada ou não).

Comparativamente com as enciclopédias de Pinheiro Chagas (1890) e de E. M. Campagne (1873) as diferenças não são substanciais, mas aumenta claramente a quantidade de Matemáticos tratados. Trata-se de obras com objetivos e público alvo distintos. A enciclopédia de Campagne (1873) é um dicionário escolar para ajudar os professores e as mães a encontrar o melhor material possível para ensinar os jovens; a de Pinheiro Chagas (1890) é uma obra dirigida ao público em geral incluindo questões especificamente relativas aos portugueses e a Portugal; e a de Esteves Pereira e Guilherme Rodrigues (1904–15), como escreve o seu editor Romano Torres na nota ao leitor do dicionário, no vol. 1: "O diccionario historico Portugal substitue e unifica, com a vantagem da sua disposição lexicographica, um avultadissimo numero de publicações das especialidades de que trata, cuja consulta, nem sempre facil, é offerecida ao leitor nos seus tópicos mais interessantes".

A obra pioneira de Garção-Stockler sobre a História da Matemática em Portugal serviu de fonte explícita em quatro entradas do *Diccionario Historico*. Uma vez que há muitas mais referências a Matemáticos, podemos conjeturar que tal pode ser influência da obra de Stockler, não só da obra sobre a História da Matemática, mas também dos diversos Elogios Históricos que escreveu. Garção Stockler é mesmo apelidado no *Diccionario Historico* de "o célebre mathematico Stockler" (vol. 1, p. 296).

No *Diccionario Historico* há casos, como na entrada relativa a D. Francisco de Mello, em que repete Pinheiro Chagas (1890). Nas entradas relativas a Pedro Nunes e Anastácio da Cunha não é feita referência à obra de Stockler, pois obviamente já existiam outros textos sobre estes matemáticos.

Podemos pois concluir que o *Diccionario Historico* dá um lugar importante à História da Matemática em Portugal e a obra de Garção-Stockler sobre a História da Matemática em Portugal contribuiu positivamente para essa visibilidade.

Referências

Assembleia da República, *ComunicAR*, jun 2021.

A. R. Cabral, *João Manuel Esteves Pereira*, 2014, em SITE Romano Torres `https://romanotorres.fcsh.unl.pt`.

E. M. Campagne, *Dicionário Universal de Educação e Ensino. Trasladado a portuguez por Camillo Castello Branco*, 2 volumes, Liv. Intern. Ernesto Chardron, Porto, 1873.

J. Carvalho e Silva e C. Costa, "A Divulgação da História da Matemática através das Enciclopédias", *9.º Encontro Luso-Brasileiro de História da Matemática*, Atas do ELBHM, 2022 (no prelo).

J. M. Esteves Pereira, "Guilherme Rodrigues", *Revista OCCIDENTE*, 30/3/1909.

J. M. Esteves Pereira e G. A. Rodrigues, *Portugal: diccionario historico, chorographico, heraldico, biographico, bibliographico, numismatico e artistico / obra illustrada com centenares de photogravuras e regida segundo os trabalhos dos mais notaveis escriptores, por Esteves Pereira e Guilherme Rodrigues.* 7 volumes, J. Romano Torres, Lisboa, 1904–15.

C. Mota, E. Ralha e M. F. Estrada, "Matemática em Portugal: episódios da história do ensino e do ensino da história", Comunicação ao I Congresso Iberoamericano de História da Educação Matemática, Covilhã, 2011.

M. Pinheiro Chagas, *Diccionario popular historico, geographico, mythologico, biographyco, artistico, bibliographico e litterario.* 16 volumes, Lallemant frères, Lisboa, 1876–1890.

L. M. R. Saraiva "On the first history of Portuguese mathematics". *Historia Mathematica*, Vol. 20, No. 4 (1993), p. 415–427.

History of mathematics 'in potentiality' *vs.* history of mathematics 'in actuality': a study of textbooks to implement the history of maths in the classroom

Marc Moyon,
Université de Limoges, XLIM – UMR CNRS 7252

Many international studies empirically focus on implementing the history of mathematics (HoM) into mathematics education[1]. Over the last two decades, some studies have also explored theoretical elements concerning the implementation of learning sessions and/or their didactical analysis and effectiveness. In [2], we recently complemented these empirical studies with a more systematic approach in the French context.

Advocated for decades within the French network of IREM, the HoM is now officially included in the French curriculum (2019). However, is it sufficient for teachers to change their habits by implementing the HoM into their practices? I present a survey conducted with French secondary school mathematics teachers (who instruct students aged 10 to 18), regarding the introduction of the HoM into their classes [2]. This survey allows for the comparison of teachers' aspirations ('HoM in potentiality') and the realities in classrooms ('HoM in actuality'), taking into account the well-known Aristotelian concept [3, θ, 6, 1048a-1048b, italicization is mine]:

> 'Actuality' means the presence of the thing, not in the sense which we mean by 'potentially'. We say that a thing is present potentially as Hermes is present in the wood, or the half-line in the whole, because it can be separated from it; and as we call even a man who is not studying 'a scholar' if he is capable of studying. That which is present in the opposite sense to this is present actually. What we mean can be plainly seen in the particular cases by induction; we need not seek a definition for every term, but must comprehend the analogy: that as that which is actually building is to that which is capable of building, so is that which is awake to that which is asleep; and that which is seeing to that which has the eyes shut, but has the power of sight [...]. *Let actuality be defined by one member of this antithesis, and the potential by the other.*

[1] Refer to [1] for the latest synthesis on this topic.

I would add, in Plato's style, one analogy about maths teachers: *that which is implementing the HoM into his or her classroom to that which is not but has the desire and skills to do so.* That is my own purpose.

Next, my focus shifts to French mathematics textbooks designed for students aged 15 to 18, where I aim to assess their effectiveness as tools for the introduction of a historical perspective in maths teaching[2].

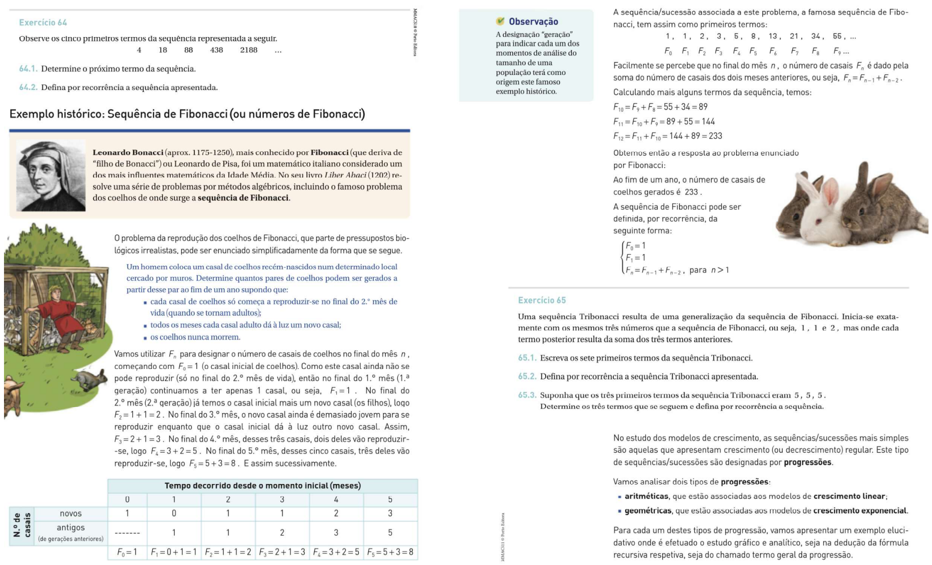
The aforementioned survey has persuaded me that French mathematics teachers express a desire to implement the HoM into their teaching. However, regrettably, there is still a considerable distance to cover to encourage the realization of inherent possibilities (to promote *entelechy*, in Plato's sense). The survey indicates that, more often than not, we encounter mere intentions. Even when these intentions are translated into action, the implementation appears to be confined to *historical snippets* (as referenced in [8]), lacking substantial didactic depth.

Additionally, I describe historical/mathematical tasks found in these textbooks using the Schorcht's categorization ([9] reviewed in [2]), specifically focusing on their reference to Fibonacci (a subject of personal research for me). I elaborate on this point using the three following excerpts (figs. 1, 2), drawn from Portuguese textbooks (tab. 1).

Excerpts	Attributes	Types of tasks
fig. 1	Linkage to the present Historical information Personalization Mathematical information Mathematical acting	Acting present type Informative present type Mention type
fig. 2 (left)	Personalization Mathematical information Mathematical acting	Mention type
fig. 2 (right)	Linkage to the present Mathematical information Historical information Personalization	Informative present type

Table 1: Types of tasks for 3 Portuguese excerpts (with their attributes)

[2]In particular, it is intriguing to compare the historical accounts of mathematics by historians with what we encounter in textbooks (read, for example, [7] on Egyptian fractions).



Exercício 64

Observe os cinco primeiros termos da sequência representada a seguir.

4   18   88   438   2188   ...

64.1. Determine o próximo termo da sequência.

64.2. Defina por recorrência a sequência apresentada.

MMACS10 © Porto Editora

Exemplo histórico: Sequência de Fibonacci (ou números de Fibonacci)

Leonardo Bonacci (aprox. 1175-1250), mais conhecido por **Fibonacci** (que deriva de “filho de Bonacci”) ou Leonardo de Pisa, foi um matemático italiano considerado um dos mais influentes matemáticos da Idade Média. No seu livro *Liber Abaci* (1202) resolve uma série de problemas por métodos algébricos, incluindo o famoso problema dos coelhos de onde surge a **sequência de Fibonacci**.

O problema da reprodução dos coelhos de Fibonacci, que parte de pressupostos biológicos irrealistas, pode ser enunciado simplificadamente da forma que se segue.

Um homem coloca um casal de coelhos recém-nascidos num determinado local cercado por muros. Determine quantos pares de coelhos podem ser gerados a partir desse par ao fim de um ano supondo que:
- cada casal de coelhos só começa a reproduzir-se no final do 2.° mês de vida (quando se tornam adultos);
- todos os meses cada casal adulto dá à luz um novo casal;
- os coelhos nunca morrem.

Vamos utilizar F_n para designar o número de casais de coelhos no final do mês n, começando com $F_0 = 1$ (o casal inicial de coelhos). Como este casal ainda não se pode reproduzir (só no final do 2.° mês de vida), então no final do 1.° mês (1.ª geração) continuamos a ter apenas 1 casal, ou seja, $F_1 = 1$. No final do 2.° mês (2.ª geração) já temos o casal inicial mais um novo casal (os filhos), logo $F_2 = 1 + 1 = 2$. No final do 3.° mês, o novo casal ainda é demasiado jovem para se reproduzir enquanto que o casal inicial dá à luz outro novo casal. Assim, $F_3 = 2 + 1 = 3$. No final do 4.° mês, desses três casais, dois deles vão reproduzir-se, logo $F_4 = 3 + 2 = 5$. No final do 5.° mês, desses cinco casais, três deles vão reproduzir-se, logo $F_5 = 5 + 3 = 8$. E assim sucessivamente.

		Tempo decorrido desde o momento inicial (meses)					
		0	1	2	3	4	5
N.º de casais	novos	1	0	1	1	2	3
	antigos (de gerações anteriores)	-------	1	1	2	3	5
		$F_0 = 1$	$F_1 = 0 + 1 = 1$	$F_2 = 1 + 1 = 2$	$F_3 = 2 + 1 = 3$	$F_4 = 3 + 2 = 5$	$F_5 = 5 + 3 = 8$

Observação

A designação “geração” para indicar cada um dos momentos de análise do tamanho de uma população terá como origem este famoso exemplo histórico.

A sequência/sucessão associada a este problema, a famosa sequência de Fibonacci, tem assim como primeiros termos:

1,	1,	2,	3,	5,	8,	13,	21,	34,	55,	...
F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	...

Facilmente se percebe que no final do mês n, o número de casais F_n é dado pela soma do número de casais dos dois meses anteriores, ou seja, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.

Calculando mais alguns termos da sequência, temos:

$F_{10} = F_9 + F_8 = 55 + 34 = 89$

$F_{11} = F_{10} + F_9 = 89 + 55 = 144$

$F_{12} = F_{11} + F_{10} = 144 + 89 = 233$

Obtemos então a resposta ao problema enunciado por Fibonacci:

Ao fim de um ano, o número de casais de coelhos gerados é 233.

A sequência de Fibonacci pode ser definida, por recorrência, da seguinte forma:

$$\begin{cases} F_0 = 1 \\ F_1 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \text{ para } n > 1 \end{cases}$$

Exercício 65

Uma sequência Tribonacci resulta de uma generalização da sequência de Fibonacci. Inicia-se exatamente com os mesmos três números que a sequência de Fibonacci, ou seja, 1, 1 e 2, mas onde cada termo posterior resulta da soma dos três termos anteriores.

65.1. Escreva os sete primeiros termos da sequência Tribonacci.

65.2. Defina por recorrência a sequência Tribonacci apresentada.

65.3. Suponha que os três primeiros termos da sequência Tribonacci eram 5, 5, 5. Determine os três termos que se seguem e defina por recorrência a sequência.

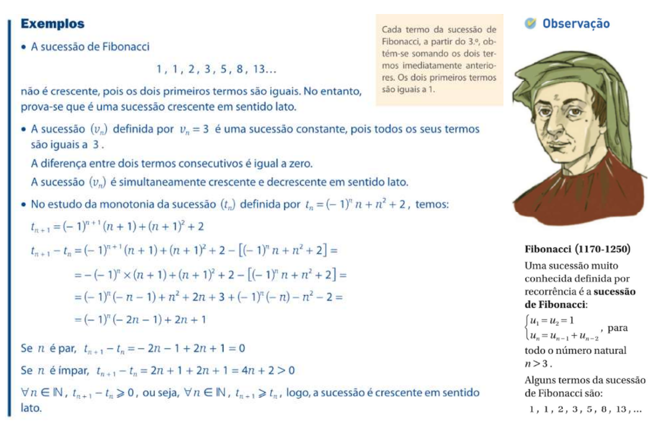
No estudo dos modelos de crescimento, as sequências/sucessões mais simples são aquelas que apresentam crescimento (ou decrescimento) regular. Este tipo de sequências/sucessões são designadas por **progressões**.

Vamos analisar dois tipos de **progressões**:
- **aritméticas**, que estão associadas aos modelos de **crescimento linear**;
- **geométricas**, que estão associadas aos modelos de **crescimento exponencial**.

Para cada um destes tipos de progressão, vamos apresentar um exemplo elucidativo onde é efetuado o estudo gráfico e analítico, seja na dedução da fórmula recursiva respetiva, seja do chamado termo geral da progressão.

MMACS11 © Porto Editora

Figure 1: Excerpt on Fibonacci in [4, p. 29].



Exemplos

- A sucessão de Fibonacci

  1, 1, 2, 3, 5, 8, 13...

não é crescente, pois os dois primeiros termos são iguais. No entanto, prova-se que é uma sucessão crescente em sentido lato.

Cada termo da sucessão de Fibonacci, a partir do 3.º, obtém-se somando os dois termos imediatamente anteriores. Os dois primeiros termos são iguais a 1.

- A sucessão (v_n) definida por $v_n = 3$ é uma sucessão constante, pois todos os seus termos são iguais a 3.

  A diferença entre dois termos consecutivos é igual a zero.

  A sucessão (v_n) é simultaneamente crescente e decrescente em sentido lato.

- No estudo da monotonia da sucessão (t_n) definida por $t_n = (-1)^n n + n^2 + 2$, temos:

$$t_{n+1} = (-1)^{n+1}(n+1) + (n+1)^2 + 2$$

$$\begin{aligned} t_{n+1} - t_n &= (-1)^{n+1}(n+1) + (n+1)^2 + 2 - \left[(-1)^n n + n^2 + 2\right] = \\ &= -(-1)^n \times (n+1) + (n+1)^2 + 2 - \left[(-1)^n n + n^2 + 2\right] = \\ &= (-1)^n(-n-1) + n^2 + 2n + 3 + (-1)^n(-n) - n^2 - 2 = \\ &= (-1)^n(-2n-1) + 2n + 1 \end{aligned}$$

Se n é par, $t_{n+1} - t_n = -2n - 1 + 2n + 1 = 0$

Se n é ímpar, $t_{n+1} - t_n = 2n + 1 + 2n + 1 = 4n + 2 > 0$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $t_{n+1} - t_n \geqslant 0$, ou seja, $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_{n+1} \geqslant t_n$, logo, a sucessão é crescente em sentido lato.

Observação

Fibonacci (1170-1250)

Uma sucessão muito conhecida definida por recorrência é a **sucessão de Fibonacci**:

$\begin{cases} u_1 = u_2 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \end{cases}$, para todo o número natural $n > 3$.

Alguns termos da sucessão de Fibonacci são:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

Figure 2: Excerpts on Fibonacci in [5, p. 12] (left), in [6, p. 165] (right)

Finally, I propose a framework for implementing the HoM into mathematics education, beginning with textbooks commonly used in the classroom. The objective is to support mathematics teachers in reimagining and enhancing the relevance of tasks within their textbooks (from, for example, *informative tasks* to *acting tasks*), while considering original sources from the HoM.

References

[1] R. Chorlay, K. M. Clark and C. Tzanakis, "History of mathematics in mathematics education: Recent developments in the field", *ZDM – Mathematics Education*, Vol. 54 (2022), pp. 1407–1420.

[2] M. Moyon, "Desire of teachers and realities in textbooks: dealing with history of mathematics in the new French curriculum and its impact on teacher training", *ZDM – Mathematics Education*, Vol. 54 (2022), pp. 1613–1630.

[3] Aristotle, *The Metaphysics*, W. Heinemann, ltd., G. P. Putnam's sons, London, New York, 1935.

[4] B. Costa and E. Rodrigues, *Novo Espaço Parte 2 Matemática A 11.º ano*, Porto, 2019.

[5] C. Andrade, P. Pinto Pereira and P. Pimenta, *Novo Ípsilon 11, Matemática A 11.º ano*, vol. 2, Lisboa, 2023.

[6] M. A. Ferreira, N. L. Guerreiro and A. Pinto Silva, *Máximo Parte 1 Matemática A 11.º ano*, Porto, 2019.

[7] M. Moyon, "Frações egipticas e o algoritmo de fibonacci : história da matemática versus livros didáticos atuais", *ACERVO – Boletim do Centro de Documentação do GHEMAT-SP*, Vol. 5 (2023), pp. 1–36.

[8] C. Tzanakis, A. Arcavi & *alii* "Integrating history of mathematics in the classroom: an analytic survey", *History in Mathematics Education: The ICMI Study*, 2000, Eds. J. Fauvel and J. Van Maanen, Dordrecht, pp. 201-240.

[9] S. Schorcht, *Typisierung mathematikhistorischer Beispiele in deutschen Mathematikschulbüchern der Klassenstufen 1 bis 7*, Münster, 2018.

Os Elementos de Euclides e o *GeoGebra*

Hélder Pinto
Instituto Piaget, RECI e CIDMA-UA

A História da Matemática (HM) e a Tecnologia são duas ferramentas bastante utilizadas no contexto da Educação Matemática (para as potencialidades da HM no ensino, consultar, por exemplo, Jankvist (2009)). Contudo, a utilização simultânea destes dois instrumentos é ainda extremamente residual (um exemplo pode ser encontrado em Isoda (2004)). Neste artigo iremos apresentar um exemplo de como utilizar a tecnologia, em particular, o *Geogebra*, para abordar um livro marcante na HM: *Os Elementos* de Euclides e, em particular, o Livro I que termina com o bem conhecido Teorema de Pitágoras e seu recíproco.

Os Elementos de Euclides (c. 300 a. C.) têm sido objeto, ao longo dos séculos, de variadíssimas edições, sendo um sucesso editorial até aos dias de hoje. Por exemplo, em 1855 eram (parcialmente) publicados sob a chancela da Universidade de Coimbra (Commandino, 1855); no início do século XX (1908) foi publicada uma nova versão comentada por T. Heath (fac-simile da Dover em 1956); já neste século, no Brasil, foi publicada uma nova versão pelo professor Irineu Bicudo (2009, com nova tiragem em 2018). Para além destas versões, destacam-se ainda outras utilizações desta obra: os "azulejos que ensinam" (Simões e Duarte, 2007) do antigo Colégio dos Jesuítas em Coimbra (séc. XVI) e que reproduzem as figuras da versão de André Tacquet e a belíssima edição de Oliver Byrne (1847) onde as letras são substituídas por diagramas coloridos, tornando as demonstrações visualmente mais atrativas. Esta versão foi adaptada para o contexto *web*, mantendo o grafismo original em várias línguas (espanhol, grego, inglês atual e antigo), num projeto de N. Rougeux (sd). Na *web* é ainda possível encontrar versões interativas d'*Os Elementos* onde as figuras que acompanham as demonstrações são interativas, isto é, podem ser modificadas pelo utilizador ao movimentar certos pontos. Uma versão completa e profusamente comentada pode ser encontrada em (Joyce, 1996–98), embora atualmente a interatividade não se encontre funcional. Assim, surgiu a ideia de se criarem novos conteúdos interativos, em língua portuguesa (a partir de (Commandino, 1855), acessível online), para as demonstrações de Euclides.

No trabalho aqui apresentado escolheu-se utilizar o Geogebra por ser um software gratuito e de utilização ampla no ensino. Utilizando este software de geometria dinâmica é possível novas abordagens às demonstrações de Euclides, permitindo que os estudantes tenham acesso a imagens construídas «passo a passo» e não apenas a uma imagem final estática como acontece num livro ou num *pdf*. Por exemplo, na Fig. 1, apresenta-se o sexto passo da demonstração de Elementos I,2. Nestas demonstrações utiliza-se ainda o seguinte sistema de cores: a preto estão os objetos iniciais, a azul os objetos que foram contruídos ao longo da demonstração e a vermelho o objeto que está a ser construído/analisado no passo apresentado. Neste momento trata-se de um projeto em curso estando terminadas apenas algumas das demonstrações do primeiro livro.

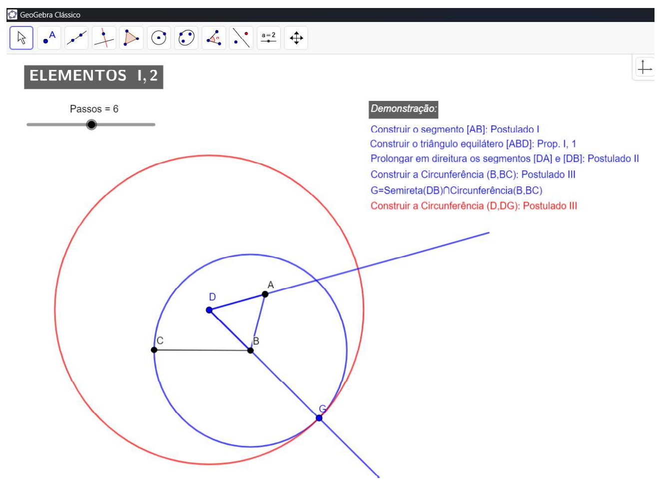


Figura 1: Parte da demonstração de Elementos I, 2. Passo 6: construir a circunferência de centro D e raio $\overline{\mathrm{DG}}$, que é possível pelo Postulado 3.

Para finalizar, note-se que *Os Elementos* foram um sucesso pois apresentam conteúdos que continuam, até aos dias de hoje, essenciais na geometria plana elementar dos primeiros anos: por exemplo, o critério de igualdade de triângulos LAL (I,4); ângulos verticalmente opostos são iguais (I,15); num triângulo, ao lado maior opõe-se o ângulo interno maior e vice-versa (I,18 e I,19); desigualdade triangular (I,20); a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° (I,32) e o Teorema de Pitágoras (I,47).

Além disso, continua a ser um bom exemplo de como funciona o «edifício matemático» (o que é uma demonstração matemática, o que deve ser o rigor de uma demonstração, onde cada passo deve ser devidamente justificado com resultados previamente demonstrados); note-se ainda que as proposições estão encadeadas de tal modo que, em geral, cada resultado utiliza a proposição anterior (consultar (Silva e Pinto, 2011, p. 217) para a estrutura de dependências das primeiras proposições d'Os *Elementos*).

Com a tecnologia atual, a interatividade e a geometria dinâmica, é possível dar uma nova «roupagem» e novas abordagens para dissipar parte da dificuldade em ler um texto «original» do passado. Por outro lado, consideramos que esta abordagem poderá ser útil no ensino, mostrando aos alunos a «força» das demonstrações matemáticas e das suas justificações, podendo ser complementada, por exemplo, por fichas de trabalho como a apresentada em (Pinto, 2011, pp. 45–61).

Referências

BICUDO, I. (Trad.) *Os elementos Euclides*. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

BYRNE, O. *The First Six Books of the Elements of Euclid in which coloured diagrams and symbols are used instead of letters for the greater ease of learners*. London: William Pickering, 1847.

COMMANDINO, F. (Tradução portuguesa). *Elementos de Euclides. Dos seis primeiros livros, do undécimo e duodécimo da versão latina de Frederico Commandino*. Coimbra: Imprensa da Universidade, 1855. `http://www.mat.uc.pt/~jaimecs/euclid/elem.html`

HEATH, T. *Euclid, The Thirteen Books of The Elements* (Vol. 1, 2 e 3). New York: Dover, 1956.

ISODA, M. Why we use historical tools and computer software in Mathematics Education: mathematics activity as a human endeavor project for secondary school. In: *Proceedings HPM & ESU4*, pp. 132–141. Uppsala: Upsala Univ, 2004.

JANKVIST, U. A categorization of the "whys" and "hows" of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, v. 71, n. 3, pp. 235–261, 2009. `https://doi.org/https://doi.org/10.1007/s10649-008-9174-9`

JOYCE, D. *Euclid's Elements* (website), 1996–1998. `http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/toc.html`

PINTO, H. (2.ª ed.). *História da Matemática na Sala de Aula*. Lisboa: Ludus, 2011.

ROUGEUX, N. *Byrne's Euclid The First Six Books of The Elements of Euclid With Coloured Diagrams And Symbols* (website), s. d. https://www.c82.net/euclid/

SILVA, J. N.; PINTO, H. The Elements of Euclid: The Cornerstone of Modern Mathematics. In: *Alexandrea Ad Aegyptum — The Legacy of Multiculturalism in Antiquity*, pp. 211–220. Porto: Afrontamento, 2013.

SIMÕES, C.; DUARTE, A. L. *Azulejos que ensinam.* Coimbra: Universidade de Coimbra, 2007. https://www.academia.edu/42978739/Azulejos_que_Ensinam

Episódios da História da Matemática na sala de aula: aprender com os erros de Gaspar Nicolas

Teresa Costa Clain
Grupo de História da Matemática e Educação Matemática,
CIDMA-Universidade de Aveiro, Portugal

Os benefícios que a História da Matemática pode desempenhar na educação matemática têm vindo a ser reconhecidos e [Fauvel e Maanen, 2020] assim o referem. Por outro lado, os docentes dos ensinos básico e secundário, sentem-se pouco à vontade com uma abordagem da matemática através da sua história. No sentido de recrear ambientes históricos, através da inclusão de textos originais e da resolução de problemas, com o saber matemático do passado, propomos a abordagem de dois problemas, ambos do *Tratado da Prática d'Arismética* de Gaspar Nicolas, publicado em 1519. Esta obra é rica em problemas/conteúdos valiosos para a sala de aula. As atividades que vamos descrever inserem-se no projeto *Which are some errors made by mathematicians in the Middle Age and what can students learn from them?* em parceria com Josip Slisko.[1]

Na Gazeta da Matemática, Paulo Saraiva escreve sobre a "Frustração e resiliência na aprendizagem da matemática" e diz que "(...) quando se trata da Matemática temos medo de cometer erros."[2]. Ao propormos problemas de Gaspar Nicolas na sala de aula, queremos levar os alunos a serem capazes de manter emoções positivas e motivação perante os erros cometidos. O que vamos descrever parte de dois enunciados, designados por o problema 1 e problema 2. O primeiro foi destinado aos alunos do 10.º ano[3] e o segundo aos alunos do 11.º ano[4], ambos previstos como atividade em grupo. Como estratégia de implementação tivemos em conta as etapas seguintes: apresentar a formulação original ou adaptada dos enunciados; analisar a solução original do autor; após a transformação do enunciado na linguagem atual, os alunos resolveram os problemas, utilizando a estratégia que lhes parecia adequada e avaliaram o(s) erro(s) presente(s) ou esclareceram os tópicos enunciados; compararam e avaliaram as duas estratégias (a sua e a original) e tiraram conclusões.

[1] Facultad de Ciencias Físico Matemáticas Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, México.
[2] Gazeta da Matemática n.º 200, p. 2 (Editorial).
[3] Escola Secundária José Falcão, Coimbra.
[4] Escola Secundária D. Maria II, Braga.

Problema 1: *São duas torres não iguais de altura. Uma tem 20 braças*[5] *de altura e a outra tem 15 (braças). E estão separadas uma da outra 4 braças. Pergunto, lançando uma linha de ponta a ponta qual o comprimento dessa linha?*[6] [Nicolas, 1963, f. 88 v].

Questões para os alunos: 1) A solução apresentada por Nicolas está incorreta. Como teria o autor chegado a esta resposta?; 2) Descrever verbalmente um plano para encontrar a boa solução; 3) Traduzir o raciocínio em linguagem matemática; 4) Indicar a solução correta; 5) Será importante saber que mesmo os matemáticos famosos cometeram erros? Numa linha, justificar a resposta. Antes da questão 3) deve proceder-se à correção do enunciado. Na época visada, os enunciados presentes em certas obras poderiam apresentar-se incompletos ou pouco claros tendo presente as figuras que os acompanhavam e as etapas da resolução.

Problema 2: *Huũ homem espalhou .100. laranjas e dyz ha outro que as apanha huũa a huũa todas em huũa pinha. Ora eu demando em quantos passos apanhara aquella pinha aquellas laranjas.* [Nicolas, 1963, f. 72 f][7].

Nesta atividade, as etapas percorridas foram idênticas às do problema 1. Registámos algumas dificuldades por parte dos alunos em ler o português de outra época, o que foi rapidamente superado gerando algum entusiasmo entre os discentes. Foram identificados os elementos seguintes: Gaspar Nicolas diz que a solução do problema é 10100 passos[8], as duas primeiras linhas do enunciado remetem-nos para outra possibilidade; Nicolas discorda da solução 9900. O enunciado alerta para condições que permitam considerar a segunda resposta 9900 incorreta? (sugerir, entre pares, uma correção do enunciado)[9].

A fórmula atual da soma dos termos da progressão aritmética foi analisada na resposta de Nicolas e verificou-se a equivalência entre o que escreveu o autor e a fórmula atual. Sobre a questão: "É importante saber que mesmo os matemáticos famosos "cometeram erros"?" Temos algumas respostas dos alunos: "É engraçado o problema, humanizamos e mostramos que não há problema em errar"; "Aprendemos com os erros a tentar boas soluções"; "Sim, já que mostra que mesmo cometendo erros podemos ser bons a matemática"; "Com os erros aprendemos a explorar novos métodos"; "Saber que

[5]Braça é uma antiga medida de comprimento equivalente a 2,20 metros linearmente.

[6]Tradução para linguagem atual do problema que consta no fólio 88 do *Tratado da Prática d'Arismética*, ordenado por Gaspar Nicolas em 1519 (edição fac-similada de 1963, Livraria Civilização Editora, Porto.

[7]Escrito em português da época (*Tratado da Prática d'Arismética*, publicado em 1519).

[8]Recomenda-se a consulta de [Nicolas, 1963, f. 72 f].

[9]Recomenda-se a consulta de [Nicolas, 2022, pp. 176, 177].

mentes brilhantes também falharam é de certa forma reconfortante"; "Não sei o que dizer, pois para além de matemáticos famosos, eles também são humanos, logo é normal que eles errem".

Quando os alunos se envolveram com a fonte, a maioria tem dúvidas (sobre terminologia ou procedimentos matemáticos). Contudo, será importante ultrapassar, com confiança, esta etapa. Tendo presente as atividades anteriormente descritas e as palavras dos alunos visados, entende-se que, aprender é um processo de tentativas entre acertar e errar, conjeturando, deduzindo e chegando a resultados válidos. Ter presente que matemáticos famosos também erraram motivou o desenvolvimento de estratégias destinadas à superação do erro e despertou a curiosidade de "mergulhar" em épocas anteriores onde o próprio saber matemático conheceu as suas "limitações". Expor os alunos a diversos projetos didáticos de aprendizagem, com problemas nos quais os matemáticos da Idade Média cometeram um ou mais erros ou apresentaram enunciados pouco claros, poderá ajudá-los a desenvolver diversas competências, tais como o pensamento crítico e criativo, a comunicação e a colaboração. As experiências descritas podem reduzir enormemente as crenças erradas como, "cometer erros é vergonhoso e deve ser evitado", "somente os alunos cometem erros, os matemáticos nunca cometem erros". O objetivo de tarefas desta natureza é confrontar os alunos com a uma nova conceção do erro: *Os erros são uma parte necessária da aprendizagem, especialmente quando se é confrontado com novas ideias e conceitos.*

Referências

J. Fauvel e J. Maanen (Eds.), *History in mathematics education – The ICMI study*. Dordrecht: Kluwer, 2000.

G. Nicolas, *Tratado da Pratica d'Arismetica*, Edição fac-similada da edição de 1519. Livraria Civilização, Porto, 1963.

J. Slisko, *What students can learn from Fibonacci's error in solving "The lion in the pit" problem"*. Góndola, Enseñanza y Aprendizaje de las Ciencias, Vol. 15, No. 2 (may–ago 2020), pp. 216–238, Universidade Distrital Francisco José Calda, 2020. `http://doi.org/10.14483/23464712.16041` (acedido em 01/07/2023)

J. Silva e P. Freitas (Coord.), *Tratado da Prática de Aritmética* (1519), Fundação Calouste Gulbenkian, 2022.

As “Questões Propostas” no *Jornal* de Gomes Teixeira

Pedro J. Freitas[1]
Centro Interuniversitário de História das Ciências e Tecnologia, Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa, Portugal

Inês Legatheaux Martins[2]
Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa e Centro de Análise Funcional, Estruturas Lineares e Aplicações

Em 1877, face ao isolamento que considerava existir na comunidade científica portuguesa, Francisco Gomes Teixeira (1851–1933) fundou o *Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronómicas*. Era seu intuito que viesse a ser uma revista dedicada a artigos de investigação e de cariz internacional. Porém, no prefácio, afirma que pretende que o jornal seja lido não só por um público especializado mas também por “pessoas que conhecem só as mathematicas, que se ensinam nos nossos cursos de instrucção secundaria.” Nesse sentido, os primeiros volumes incluem 24 “Questões propostas” que constituem problemas abertos a respostas dos leitores.

Esta opção é explicada no prefácio, que estabelece com clareza os objectivos iniciais do *Jornal*. Trata-se de uma particularidade que o inscreve numa categoria situada entre a revista de investigação e o jornal “intermédio”, definição de E. Ortiz [1] que cita o *Journal de mathématiques élémentaires* (1877, J. Bourget) como um dos mais bem sucedidos jornais desta tipologia.

> Começamos hoje a publicação de um Jornal dedicado ás Sciencias Mathematicas e Astronomicas. Quasi todos os paizes da Europa, ainda os mais pequenos, sustentam (...) jornaes de iniciativa particular dedicados exclusivamente ás Sciencias Mathematicas ou ás Sciencias Astronomicas. Em Portugal não existe nenhum d’este segundo genero. (...)
>
> Em cada numero haverá duas secções, uma relativa a questões de Mathematicas superiores, outra destinada ás pessoas que conhecem só as mathematicas, que se ensinam nos nossos cursos de instrucção secundaria, na qual publicaremos artigos sobre Mathematicas elementares, Noticias astronomicas, etc., para cujo bom

[1]Financiado pela Fundação para a Ciência e a Tecnologia, I.P./MCTES através de fundos nacionais (PIDDAC): UIDB/00286/2020 e UIDP/00286/2020

[2]Financiado pela Fundação para a Ciência e a Tecnologia, I.P./MCTES através de fundos nacionais (PIDDAC): UIDB/04721/2020

> exito esperamos que concorrerão os professores dos nossos Lyceus com seus artigos.

Embora o *Jornal* inclua apenas 24 questões propostas e que este formato seja interrompido no Volume 5, pode considerar-se que foi uma experiência bem sucedida. De facto, estes problemas promoveram várias participações, tanto de autores portugueses como de alguns estrangeiros.

Por outro lado, as questões propostas apresentam grande variedade. São usualmente problemas de nível intermédio com pontes para a matemática avançada, sendo alguns de âmbito pedagógico. Também são propostas questões que pretendem desenvolver novos resultados, necessitando a sua resolução de alguma formação matemática, e outras mais próximas da matemática recreativa. Seguem-se alguns exemplos de problemas destas duas categorias.

Questão 12: "Dados dois pontos, determinar com o compasso ordinario o ponto medio da distancia que os separa. L. F. Marrecas Ferreira (Vol. 2)"

Este problema, relacionado com o Teorema de Mohr-Mascheroni, suscitou duas soluções da autoria de Giusto Bellavitis e Alfredo Schiappa Monteiro. Deu igualmente origem a um artigo de comentário de Alfredo Schiappa Monteiro, no qual este apresenta mais quatro soluções (ver Figura 1).

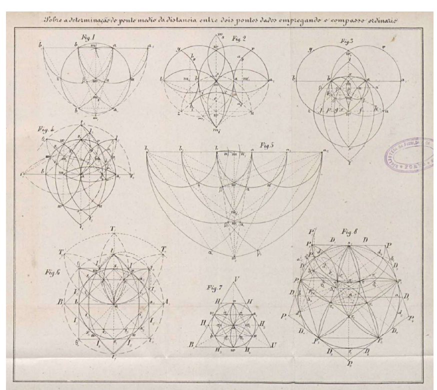


Figura 1: Ilustrações de resoluções da Questão Proposta 12.

Questão 15: "Dada uma figura plana composta de um hexagono regular, sobre os lados da qual estão seis outros hexagonos regulares congruentes ao primeiro, quer-se saber como se póde cortar esta figura por tres linhas rectas que a dividam em partes congruentes ou não congruentes, de modo que com estas partes se possa formar um hexagono regular. sr. Birger Hansted (Vol. 2)"

Este problema de matemática recreativa inclui-se na família dos problemas de dissecção, problemas ainda considerados na actualidade. A Figura 2 ilustra a solução desta questão apresentada por Alfredo Schiappa Monteiro.

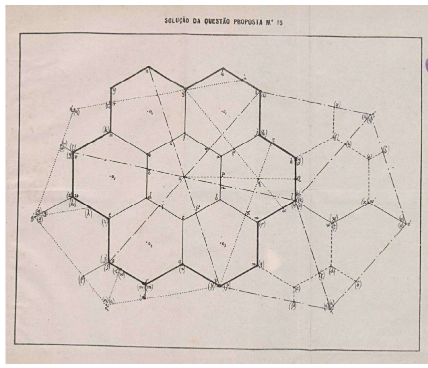


Figura 2: Ilustração da resolução da Questão Proposta 15.

Em conclusão, parece-nos que a secção das "Questões propostas" constituiu um meio bem sucedido de incentivar a participação, tanto nacional como internacional, no *Jornal*. Ainda que a publicação se tenha afirmado ao longo do tempo como uma revista de investigação, esta secção deu origem a contribuições que perduraram enquanto o *Jornal* foi publicado.

Referências

[1] Ortiz, Eduardo, "The nineteenth-century international mathematical community and its connection with those on the Iberian periphery", *L'Europe Mathématique – Histoires, Mythes, Identités*, Catherine Goldstein, Jeremy Gray et Jim Ritter, eds. (1996) pp. 323–343.

[2] Peiffer, Jeanne; Gispert, Hélène; Nabonnand, Philippe, "Interplay between mathematical journals on various scales 1850–1950". *Historia Mathematica*, Vol. 45, no. 4 (November 2018) pp. 323-333.

[3] Saraiva, Luís. "A decisive journal in Portuguese mathematics: Gomes Teixeira's Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas (1877–1905)", *L'émergence de la presse mathématique en Europe au 19ème siècle*, Christian Gerini et Norbert Verdier, eds. London: College Publications (2014) pp. 67–95.

Sebastião e Silva face a algumas controvérsias contemporâneas à volta da modernização do ensino da Matemática em Portugal

Jaime Carvalho e Silva
Departamento de Matemática, CMUC, Universidade de Coimbra

Anabela Teixeira
Escola Secundária de Camões, Lisboa

Muitas controvérsias acompanharam a experiência de modernização do ensino da Matemática em Portugal que se desenrolou em Portugal a partir de 1963 sob a direção de José Sebastião e Silva e que teve o apoio da OCDE. Conseguimos identificar, entre outras, a escolha das escolas, dos professores e dos alunos para as turmas piloto, assim como o tipo e a profundidade dos temas a tratar.

O processo de experimentação iniciou confinado a um número relativamente restrito de intervenientes. É criada uma comissão de estudos para a modernização do ensino da Matemática, constituída por: José Sebastião e Silva, professor catedrático da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa (presidente); Jaime Furtado Leote, professor metodólogo do Liceu Pedro Nunes; Manuel Augusto da Silva, professor metodólogo do Liceu D. João III; António Augusto Lopes, professor metodólogo do Liceu D. Manuel II (Portaria de 17 de julho de 1963, *Diário do Governo*). À qual, pouco depois, se integrou um inspetor do ensino liceal.

No ano letivo de 1963/64, começou-se com uma experiência de carácter preliminar em três turmas piloto nesses liceus. Nos anos seguintes, informou o *Diário de Notícias* em 1968, em entrevista a Sebastião e Silva, que o número de turmas-piloto foi aumentando pelo alargamento do projeto aos vários liceus; estas turmas eram regidas por professores preparados em cursos de férias e com a ajuda de textos-piloto e guias sucessivamente melhorados: 11 turmas em 1964/65; 30 em 1965/66; 44 em 1966/67; cerca de 60 turmas em 1967/68, entre as quais duas a funcionar no Colégio Militar e três, já num maior alargamento geográfico, na província ultramarina de Angola, em Luanda.

Apesar desta dinâmica restritiva, no campo da educação e a uma disciplina do plano curricular dos estudos do ensino secundário, o desenvolvimento deste projeto era alvo de atenção da imprensa periódica da época (muitas das notícias encontram-se transcritas e podem ser consultadas em

M. Almeida, J. Matos e A. Almeida, 2022). São várias as entrevistas a Sebastião e Silva, reportagens e notícias sobre os cursos de formação de professores, que decorriam, sobre reuniões nomeadamente com especialistas estrangeiros, sobre textos normativos e artigos de opinião.

Por exemplo, relativamente à seleção dos alunos que constituíram as turmas piloto, o procedimento era o seguinte: quando se abria uma nova turma piloto, o liceu recebia um ofício do Ministério da Educação Nacional com a indicação do professor que a ia reger e as normas do seu funcionamento. Cada turma piloto deveria ser constituída "por não mais de 25 alunos" (Norma 1.ª) e dever-se-ia "dar preferência absoluta aos alunos mais classificados e evitar-se a inclusão de alunos repetentes ou que tenham transitado do 2.º ciclo com deficiência em Matemática" (Norma 2.ª). Este número reduzido de alunos por turma e a forma como deviam ser selecionados geraram muitos comentários e críticas, que Sebastião e Silva foi esclarecendo, nomeadamente em entrevistas que dava à imprensa, como a que deu em 23/1/1968, ao *Diário de Notícias*. Por outro lado, num relatório redigido por Sebastião e Silva em 14/06/1969, intitulado "Projecto de modernização do ensino da matemática no 3.º ciclo dos liceus portugueses", aponta ainda que:

> "[...] na prática, este critério não tem podido ser aplicado com rigor num grande número de casos, não só porque o número de turmas-piloto tem vindo a aumentar (o que restringe as possibilidades de escolha), como ainda é praticamente inaplicável em pequenos liceus da província. Daqui se infere que é destituída de fundamento a crítica segundo o qual os resultados do projecto são viciados pelo facto de as turmas-piloto serem constituídas só por bons alunos".

Nos arquivos históricos dos antigos liceus encontram-se, na correspondência recebida, pedidos de encarregados de educação para que os seus educandos fizessem parte de turmas-piloto. Solicitações que são também referidas por Sebastião e Silva nesse relatório:

> "A organização das turmas-piloto, em cada ano lectivo tem sido baseada em convites dirigidos a encarregados de educação dos alunos. Isso tem permitido, desde logo, efectuar uma avaliação espontânea da experiência. O que se tem verificado, cada vez mais, é que não só esses convites são geralmente aceites, num regime de plena liberdade de escolha, como ainda surgem numerosos pedidos de encarregados de educação, para que alunos não

convidados sejam incluídos nessas turmas. Este índice espontâneo de êxito do projecto vem, ao mesmo tempo, criar dificuldades, na medida em que obriga a aumentar o número de alunos previsto para cada turma (25), como até a criar novas turmas que não estavam previstas."

Outras referências críticas, que se encontram em diversas publicações, são, por exemplo:

> "[...] a designação Matemática «moderna» é, antes de mais, um equívoco, cuja responsabilidade, aliás cabe exclusivamente, ou quase exclusivamente, a certos compêndios redigidos em língua francesa que as livrarias exibem nos seus escaparates." (Luís de Albuquerque, *Diário de Lisboa*, 18/10/1968)

> "E é necessário também que os professores não escolhidos até agora para reger turmas-piloto compreendam as dificuldades existentes e não fiquem melindrados por esse facto." (*Diário de Lisboa*, 30/7/1966)

> "O RELATÓRIO [de 1968] É UMA CONSTRUÇÃO FORJADA, DE EMBUSTE GROSSEIRO, DESTINADO A ABATER O PROF. Sebastião e Silva." (António Augusto Lopes, referido em M. Almeida e J. Matos, 2021)

Nesta comunicação foram apresentadas algumas respostas de Sebastião e Silva às questões levantadas e foram discutidos os constrangimentos à ação de modernização do ensino desenvolvida nessa época. A análise detalhada destas questões será feita em posteriores publicações.

Referências

A. Teixeira (comp. e coord.), *José Sebastião e Silva (1914–1972), O Homem, O Cientista, O Professor*. Lisboa: Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, 2015.

H. Guimarães, "A «modernização» do ensino da matemática em Portugal — Sebastião e Silva e as perspectivas metodológicas emanadas de Royaumont (1959)", *XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática*, Recife, Brasil (2011), p. 1–10.

J. Sebastião e Silva, “Projecto de modernização do ensino da matemática no 3.º ciclo dos liceus portugueses”, 14/06/1969, Arquivo de José Sebastião e Silva.

M. Almeida e J. Matos, “A avaliação da experiência de Matemática Moderna nos liceus portugueses, *Revista de Matemática, Ensino e Cultura – REMATEC*, Belém/PA, Vol. 16 (2021), p. 43–58.

M. Almeida, J. Matos e A. Almeida, *Transcrição das notícias sobre matemática moderna publicadas nos jornais diários de Lisboa*, Coleção História e Memória do Ensino da Matemática, APM, 2022.

M. Silva e W. Valente, “A matemática moderna em Portugal: o que dizem os cadernos escolares dos alunos?”, *Quadrante*, Vol. 17, No. 1 (2008), p. 78–92.