

FUNÇÕES DE BANDA LIMITADA (PARTE I)

Fernando Manuel Sequeira

e-mail: fmbsequeira@gmail.com

Resumo: São definidas as funções de banda limitada (f.b.l.) em \mathbb{R} e em \mathbb{R}^n e as suas propriedades analisadas. Em \mathbb{R} as transformadas de Fourier destas funções são as ultradistribuições temperadas de suporte compacto. Nos e.v.t. considerados (espaços \mathbb{M}^*) das f.b.l. desenvolvem-se diversas aplicações do cálculo simbólico (cálculo operacional).

Abstract The (b.b.f.) bounded bandwidth functions in \mathbb{R} and in \mathbb{R}^n are defined and their properties analysed. In \mathbb{R} the Fourier transforms of these functions are the tempered ultradistributions of compact support. Applications of the operational calculus on the considered spaces of the b.b.f. (\mathbb{M}^* spaces) are developed.

palavras-chave: Espaços de funções de banda limitada (f.b.l.); banda de uma função; teorema de Shannon; espaços numeravelmente normados; espaços \mathbb{M}^* e seus duais; cálculo operacional.

keywords: Spaces of bounded bandwidth functions (b.b.f.); band of a b.b.f.; Shannon sampling theorem; numerably normed spaces; \mathbb{M}^* spaces and their duals; operational calculus.

1 Introdução

O estudo dos sistemas físicos lineares envolve o uso de grandezas físicas tais como correntes, tensões, fluxos, ondas, campos, etc., que serão funções de um número finito de variáveis e se denominam componentes do sistema físico. Estas componentes estão interligadas entre si por equações integro-diferenciais lineares, e são designadas entradas ou saídas, sinais de entrada ou sinais de saída, consoante a sua interdependência causal.

O mais simples dos sistemas físicos que referimos é o que corresponde a uma só entrada $u(\hat{t})$ e uma só saída $v(\hat{t})$, ambas dependentes de uma mesma variável t (em geral o tempo). A entrada u e a saída v estarão relacionadas por uma equação da forma $F(u) = G(v)$ onde F e G são operadores lineares que naturalmente se pretendem contínuos num dado “espaço vectorial topológico (e.v.t.)”. Para resolver estas equações recorre-se então, frequentemente, à transformação de Fourier, que a cada sinal de entrada ou de saída faz corresponder uma função; cada uma dessas funções dar-nos-á o espectro

de frequências do respectivo sinal. Todavia, verifica-se que construir um sistema físico que responda linearmente em toda a gama de frequências é uma tarefa difícil, senão mesmo impossível. Em particular, no domínio das altas frequências, surgem oscilações próprias do sistema que são praticamente independentes dos sinais, obrigando ao recurso a filtros colocados, quer à entrada quer à saída do sistema. Em geral estes filtros eliminam as altas frequências, permitindo desse modo obter-se não só a desejada linearidade como também uma relação de causalidade entre a entrada e a saída. A filtragem das altas frequências tem de ser feita, no entanto, de modo a não diminuir a quantidade de informação útil transportada pelos sinais.

Sendo as frequências de um sinal dadas pela imagem de Fourier da função que representa esse sinal, põe-se a questão de saber com que tipos de funções devemos lidar. Interessa que haja uma correspondência biunívoca entre os sinais e as suas imagens de Fourier, de modo que a cada sinal corresponda o seu espectro de frequências e reciprocamente. O espectro de um sinal é dado, como sabemos, pelo módulo da sua imagem de Fourier.

Se lidamos com funções de quadrado somável, as suas imagens de Fourier são também de quadrado somável, e quando se filtram as altas frequências continuam a obter-se funções de quadrado somável, mas agora, de banda limitada; quer isto dizer, funções cujas imagens de Fourier têm suporte limitado. Estas funções gozam de uma propriedade importante: permitem uma discretização, de modo que a cada sinal analógico se pode fazer corresponder biunivocamente um sinal discreto (teorema de Shannon ou da amostragem [1]); mas têm o inconveniente de não incluírem no seu seio as funções sinusoidais nem as exponenciais.

As distribuições temperadas são um outro tipo de funções (em sentido lato), com as quais é possível estabelecer uma correspondência biunívoca com as suas imagens de Fourier [3]. Porém, além de não ser simples desenvolver um cálculo simbólico relativo ao operador derivação no espaço destas distribuições, verifica-se ainda que as exponenciais em geral não são temperadas na recta.

Assim, para responder um pouco a estas questões, dividimos o trabalho em duas partes, onde as tratamos primeiro na recta (em \mathbb{R} , Parte 1, e depois em \mathbb{R}^n , Parte 2). A Parte 1 é apresentada neste artigo, e a Parte 2 será incluída num artigo a publicar posteriormente.

Nesta primeira parte, começamos por estudar as propriedades de uma classe de funções complexas, definidas na recta, que denominamos de banda limitada. As suas imagens de Fourier são ultradistribuições de suporte com-

pacto, e daí chamarmos a essas funções de banda limitada (suporte da imagem de Fourier limitado, Secção 2).

Para cada real $q \geq 0$, definimos um espaço vectorial topológico E_q de funções complexas definidas na recta, espaço esse que verifica as seguintes propriedades (Secção 3)); a sua topologia é definida por uma família de normas concordantes (Subsecção 3.1) que o tornam simultaneamente um espaço perfeito no sentido de Guelfand [2] e um espaço \mathbb{M}^* [3]; a transformação de Fourier define um homeomorfismo (Secção 5) entre E_q e um “e.v.t.”, que representamos por \tilde{U}_q , de ultradistribuições de suporte compacto (Secção 4); cada uma destas ultradistribuições admite como representante uma função complexa $\varphi(\hat{z})$ que é única e denominamos de canónica; definida e holomorfa no complementar $\mathbb{C} \setminus C_q$ do círculo $C_q = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq q\}$, cada $\varphi(\hat{z})$ verifica a propriedade $\lim_{|z| \rightarrow \infty} \varphi(\hat{z}) = 0$ (Subsecção 4.1). Dizemos que a banda dos elementos de E_q está contida em C_q . Tal como E_q , \tilde{U}_q está munido de uma estrutura vectorial topológica que o torna simultaneamente um espaço \mathbb{M}^* e um espaço perfeito. As propriedades mais importantes destes espaços residem principalmente no facto de eles verificarem a propriedade que designámos por propriedade ‘P’ (Subsecção 6.3) e simultaneamente serem espaços numeravelmente normados completos.

Os elementos de E_q são funções complexas definidas na recta, que se prolongam como funções inteiras ao plano complexo. Entre os seus elementos podemos identificar funções polinomiais, sinusoidais, periódicas, exponenciais, de Bessel cilíndricas e esféricas, etc, de uma maneira geral, as funções mais usadas na resolução de equações diferenciais na Física. Como operador em E_q podemos referir a derivação (Secção 8), que admitindo as vizinhanças do círculo C_q como conjuntos espectrais, permite desenvolver um cálculo simbólico simples e manejável a seu respeito. As soluções de equações do tipo $\Phi(D)f = 0$ são fáceis de determinar, e como aplicação as funções periódicas (de período real ou complexo, Subsecção 8.4) em E_q São ainda operadores lineares contínuos neste espaço, comutáveis com a derivação, as rotações, as translações (Subsecção 8.2) e os produtos de convolução por ultradistribuições de suporte compacto (Secção 9). Adquire sentido referirmo-nos a translações complexas de funções definidas na recta.

A multiplicação pela função característica de um subconjunto B da recta (Secção 10), faz corresponder a cada função de E_q uma função complexa também definida na recta, mas de suporte contido em B . E sendo o núcleo desta aplicação um conjunto fechado em E_q , pode munir-se o espaço imagem da imagem da topologia de E_q que será isomorfa desta quando a aplicação é injectiva. É o que sucede, por exemplo, quando o subconjunto B tem um

ponto interior, ou quando $B = \{n\tau : n \in \mathbb{N}_0\}$, onde \mathbb{N}_0 designa o conjunto dos inteiros não negativos e τ é um real positivo tal que $\tau q < \pi$. Neste último caso, a multiplicação pela função característica permite obter uma discretização $(f(n\tau))_{n \in \mathbb{N}_0}$ de cada função $f \in E_q$ (Subsecção 10.1). A correspondência entre cada função e a sua discretização é biunívoca, podendo munir-se o conjunto das imagens discretas das imagens das estruturas vectorial e topológica de E_q . Quando o conjunto B tem um ponto interior, às restrições a B das funções $f \in E_q$ chamaremos funções definidas em B , de banda contida em C_q . O espectro de uma destas funções será o espectro da função $f \in E_q$ de que ela é a restrição. Com este conceito o espectro de um sinal deixa de depender do seu suporte e parece adquirir algum sentido a análise espectral de um sinal feita em tempo real. Torna-se possível estabelecer uma relação biunívoca entre a transformada de Fourier de uma função de E_q que é uma ultradistribuição e a transformada de Fourier da restrição da mesma função a um conjunto, quando este é compacto (Subsecção 10.2)

2 Definições e propriedades

Designamos de banda limitada toda a função complexa $f(\hat{x})$ definida na recta \mathbb{R} , que admite um prolongamento analítico $\check{f}(\hat{z})$ ao plano complexo \mathbb{C} , como função inteira verificando a seguinte propriedade: existe um real $k \geq 0$ tal que

$$\frac{|\check{f}(\hat{z})|}{e^{k|\hat{z}|}}$$

fica limitada sobre \mathbb{C} . No que se segue designamos por E o conjunto destas funções, que supomos munido da estrutura vectorial usual. Ele contém os polinómios, as funções sinusoidais, as funções exponenciais e consequentemente as funções próprias do operador derivação. Todo o complexo é, de resto, um valor próprio deste operador.

Além da derivação, há outros operadores em E que se tornam importantes no presente trabalho, como as rotações e as translações: Para cada real θ , chamamos rotação θ em E e representamos por R_θ o operador que a cada $f \in E$ faz corresponder a função $g = R_\theta(f) \in E$ dada por

$$g(x) = \check{f}(xe^{-i\theta}), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Para cada complexo α chamamos translação T_α ao operador em E que a cada $f \in E$ faz corresponder a função $h = T_\alpha(f)$ dada por

$$h(x) = \check{f}(x - \alpha), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Nestas definições \check{f} designa o prolongamento analítico de f ao plano complexo. A multiplicação usual entre funções é uma operação binária em E , bem como o produto de convolução, se definirmos produto de convolução $f * g$ de duas funções f e g pertencentes a E pela função dada por

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(x-t)g(t) dt, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

As duas operações são comutativas, associativas e distributivas em relação à adição, mas apenas a primeira tem elemento neutro. A regra de derivação da multiplicação de duas funções é, obviamente, a usual, sendo a do produto de convolução dada pela igualdade

$$\frac{d}{dx}(f(\hat{x}) * g(\hat{x})) = \frac{1}{2} \left[\frac{df}{dx}(\hat{x})g(\hat{x}) + \frac{dg}{dx}(\hat{x}) * f(\hat{x}) + g(0)f(\hat{x}) + f(0)g(\hat{x}) \right]$$

Nota: Dadas duas funções f e g pertencentes a E , o seu produto de convolução $h = f * g$, tal como foi definido, é ainda uma função de E . O seu prolongamento analítico é a função $\check{h}(\hat{z})$ definida no plano complexo pela igualdade

$$\check{h}(z) = \int_0^z \check{f}(z-\sigma)\check{g}(\sigma) d\sigma, \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

onde o integral pode ser efectuado ao longo de qualquer linha ligando a origem do plano complexo ao ponto z ; para cada z a função integranda de σ é uma função inteira. Para provar que h é um elemento de E , basta então efectuar a integração ao longo do segmento que une a origem do plano com o ponto z e verificar que havendo dois pares de reais positivos (a_1, k_1) e (a_2, k_2) tais que

$$\frac{|\check{f}(z)|}{e^{k_1|z|}} < a_1 \quad \text{e} \quad \frac{|\check{g}(z)|}{e^{k_2|z|}} < a_2, \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

se tem

$$|h(z)| < a_1 a_2 |z| e^{(k_1+k_2)|z|}, \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

isto é

$$\frac{|\check{h}(\hat{z})|}{e^{k|\hat{z}|}}$$

fica limitado sobre todo o plano, qualquer que seja $k > k_1 + k_2$. □

Qualquer das funções consideradas nesta secção tem como imagem de Fourier (como veremos adiante) uma ultra distribuição de suporte compacto.

Por exemplo a exponencial $e^{a\hat{x}}$, onde a é um complexo, tem como imagem de Fourier a ultradistribuição $2\pi i\delta(\hat{x} - a)$ que, quando a é real, coincide com uma distribuição. O seu suporte reduz-se ao ponto x , igual à parte real de a . Quando esta parte real percorre um intervalo $[-q, +q]$, com $q \geq 0$, todas as correspondentes exponenciais têm imagens de Fourier com suporte neste intervalo, independentemente da parte imaginária de a . Mas dado que estamos a trabalhar com ultradistribuições de suporte compacto que podem ser identificadas com funções holomorfas no complementar de círculos centrados na origem do plano complexo, pareceu-nos conveniente recorrer a estes círculos para definir as bandas (Subsecção 5.2). Uma exponencial $e^{a\hat{x}}$ seria então de banda contida num círculo de raio q sempre que $|a| \leq q$. De uma forma geral, uma função $f \in E$ será de banda contida num círculo $|z| \leq q$, sempre que a sua imagem de Fourier se puder prolongar com função holomorfa ao complementar deste círculo.

Esta ideia permitiu-nos então definir os subespaços E_q de E , que definimos para cada real $q \geq 0$, e a que chamamos das funções de banda contida no círculo

$$C_q = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq q\}.$$

O cálculo operacional torna-se nestes espaços muito mais simples, em particular o relativo ao operador derivação. A sua reunião contém todo o espaço E e a limitação da banda tem um certo sentido físico, como veremos adiante.

3 Os espaços E_q

Para cada real $q \geq 0$ designamos por E_q o subespaço vectorial de E constituído pelas funções que verificam a seguinte propriedade: qualquer que seja o real $k > q$, a função

$$\frac{\check{f}(\hat{z})}{e^{k|\hat{z}|}}$$

fica limitada sobre o plano complexo. Como anteriormente, \check{f} designa o prolongamento analítico de f . Dado um espaço E_q , podemos introduzir nele uma sucessão crescente $(\|\cdot\|_n)$ de normas, definida do seguinte modo: para cada natural n e cada função $f \in E_q$,

$$\|f\|_n = \sup_{z \in \mathbb{C}} \left| \frac{\check{f}(z)}{e^{(q+\frac{1}{n})|z|}} \right|.$$

Estas normas são concordantes [2] e como tal, definem uma topologia em E_q que, como veremos, o torna um espaço numeravelmente normado completo.

Além disso, os operadores derivação, rotação e translação ficam contínuos para essa topologia.

Nota: Duas normas definidas sobre o mesmo espaço vectorial dizem-se concordantes, quando toda a sucessão convergente para zero de acordo com uma delas é também convergente para zero de acordo com a outra se for de Cauchy para esta segunda norma. \square

Se uma dada sucessão (f_p) de funções de E_q converge para zero de acordo com uma dada norma $\|\cdot\|_n$, então ela converge uniformemente para zero sobre todos os compactos do plano complexo. Suponhamos que ela é de Cauchy para uma outra norma $\|\cdot\|_m$. Isso significará que dado qualquer real positivo ε , existe uma ordem j tal que $\|f_r - f_s\|_m < \varepsilon$, quaisquer que sejam r e s maiores que j . E como consequência

$$\left| \frac{\check{f}_r(z) - \check{f}_s(z)}{e^{(q+\frac{1}{m})|z|}} \right| < \varepsilon$$

sobre todo o plano complexo. Então para cada $z \in \mathbb{C}$, vem

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \left| \frac{\check{f}_r(z) - \check{f}_s(z)}{e^{(q+\frac{1}{m})|z|}} \right| = \left| \frac{\check{f}_r(z)}{e^{(q+\frac{1}{m})|z|}} \right| \leq \varepsilon$$

o que significa que $\|f_r\|_m \leq \varepsilon$. Para cada $\varepsilon > 0$, existe portanto uma ordem j a partir da qual ($r > j$) se tem $\|f_r\|_m \leq \varepsilon$, isto é, $\lim_{r \rightarrow +\infty} \|f_r\|_m = 0$.

3.1 E_q como espaço numeravelmente normado completo

Os conjuntos $B_{m\varepsilon}$, onde m é um número natural e ε é um real positivo, das funções $f \in E_q$ que verificam a desigualdade $\|f\|_m < \varepsilon$, constituem um sistema fundamental de vizinhanças de zero em E_q , ver [2].

Posto isto, consideremos uma sucessão de Cauchy (f_n) neste espaço. Quer isto significar que dado um $B_{m\varepsilon}$, existe uma ordem p tal que $\|f_r - f_s\| < \varepsilon$, e portanto

$$\left| \frac{\check{f}_r(z) - \check{f}_s(z)}{e^{(q+\frac{1}{m})|z|}} \right| < \varepsilon$$

sobre todo o plano complexo, quaisquer que sejam r e s maiores que p . Isto também significa que a sucessão (\check{f}_n) converge uniformemente sobre

todo o compacto do plano complexo para uma função inteira \check{f} , e como consequência que

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \left| \frac{\check{f}_r(z) - \check{f}_s(z)}{e^{(q+\frac{1}{m})|z|}} \right| = \left| \frac{\check{f}_r(z) - \check{f}(z)}{e^{(q+\frac{1}{m})|z|}} \right| \leq \varepsilon, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Daqui conclui-se então que

$$\left| \frac{\check{f}(z)}{e^{(q+\frac{1}{m})|z|}} \right| \leq \left| \frac{\check{f}_r(z)}{e^{(q+\frac{1}{m})|z|}} \right| + \varepsilon$$

sobre todo o plano complexo e portanto, que $f \in E_q$.

Para terminar, basta agora provar que dada qualquer vizinhança de zero $B_{m\varepsilon}$, existe uma ordem a partir da qual $f_r - f \in B_{m\varepsilon}$.

3.2 A derivação, a translação e a rotação como operadores contínuos em E_q

Comecemos por considerar a identidade

$$\check{f}'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{\check{f}(z + re^{i\theta})}{re^{i\theta}} d\theta$$

válida para toda a função inteira, todo o ponto z do plano complexo e todo o real positivo r . Dela infere-se que

$$|\check{f}'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|\check{f}(z + re^{i\theta})|}{r} d\theta.$$

Sendo então \check{f} o prolongamento analítico de um elemento f de E_q , e para todo o natural m ,

$$|\check{f}(z + re^{i\theta})| \leq \|f\|_m e^{(q+\frac{1}{m})(|z|+r)}.$$

Resulta que

$$|\check{f}'(z)| \leq \|f\|_m e^{(q+\frac{1}{m})|z|} \frac{e^{(q+\frac{1}{m})r}}{r},$$

para $r = \frac{1}{q+\frac{1}{m}}$

$$\frac{|\check{f}'(z)|}{e^{(q+\frac{1}{m})|z|}} \leq \|f\|_m \left(q + \frac{1}{m}\right) e$$

quaisquer que sejam o complexo z e o natural m . Isto significa que sendo f um elemento de E_q , a sua derivada $\frac{df}{dx}$ também o é, e que entre as suas normas se verificam as relações

$$\left\| \frac{df}{dx} \right\|_m \leq \|f\|_m \left(q + \frac{1}{m} \right) e$$

que asseguram, por sua vez, a continuidade do operador derivação, tendo em atenção que os conjuntos $B_{m\varepsilon}$ constituem um sistema fundamental de vizinhanças de zero.

Para demonstrar a continuidade da translação T_α , $\alpha \in \mathbb{C}$, comecemos por considerar que sendo f um elemento de E_q , são verdadeiras as desigualdades

$$\left| \frac{\check{f}(z - \alpha)}{e^{(q + \frac{1}{m})|z - \alpha|}} \right| \leq \|f\|_m$$

para todo o natural m e todo o ponto $z \in \mathbb{C}$. Ora estas desigualdades implicam que para todo natural m se tem

$$\|T_\alpha(f)\|_m \leq \|f\|_m e^{(q + \frac{1}{m})|\alpha|}$$

o que garante $T_\alpha(f) \in E_q$ e a continuidade de T_α .

De forma semelhante se demonstra que sendo R_θ , com θ real, a rotação θ em E , se $f \in E_q$, tem-se $R_\theta(f) \in E_q$, verificando-se para todo o natural m ,

$$\|R_\theta(f)\|_m = \|f\|_m$$

o que garante a continuidade das rotações.

4 Os espaços \widetilde{U}_q de ultradistribuições de suporte compacto

4.1 Definição de \widetilde{U}_q

Dado o espaço \widetilde{U} das ultradistribuições temperadas na recta [5] e um número real não negativo q , designamos por \widetilde{U}_q o subespaço de \widetilde{U} formado pelas ultradistribuições da forma

$$\varphi(\hat{z}) + \Pi$$

onde Π designa um conjunto de funções inteiras em \mathbb{C} , e $\varphi(\hat{z})$ é uma função complexa, definida e holomorfa no complementar em \mathbb{C} do círculo fechado

C_q dos complexos z de módulo menor ou igual a q . Esta função $\varphi(\hat{z})$ verifica a relação

$$\lim_{|z| \rightarrow +\infty} \varphi(z) = 0.$$

Cada uma destas ultradistribuições é pois uma classe de funções holomorfas no complementar de C_q ; dados dois representantes da mesma ultradistribuição, elas diferem entre si, em uma função de Π ; entre esses representantes existe uma e uma só função $\varphi(\hat{z})$ que verifica o limite anterior. A esta função chamaremos representante canónica em \tilde{U}_q da ultradistribuição; representaremos a ultradistribuição por $[\varphi]$.

4.2 Definição das normas de \tilde{U}_q

Sendo única a representante canónica de cada ultradistribuição de \tilde{U}_q , ver [5], podemos introduzir em \tilde{U}_q a sucessão de normas $(\|\cdot\|_m)$ dada, para cada natural m e para cada $[\varphi] \in \tilde{U}_q$, por

$$\|[\varphi]\|_m = \sup_{|z| \geq q + \frac{1}{m}} |\varphi(z)|.$$

Esta sucessão é crescente, as normas são concordantes e definem uma topologia em \tilde{U}_q que o torna um espaço numeravelmente normado completo. Demonstra-se de forma semelhante à que utilizámos para o espaço E_q . Essa topologia é obviamente mais fina que a topologia induzida por \tilde{U} .

No que se segue identificaremos muitas vezes cada uma destas ultradistribuições com a sua representante canónica. De resto, esta identificação, que pode quase sempre fazer-se sem problemas de natureza matemática, permite trabalhar com funções holomorfas em substituição das ultradistribuições que representam.

Uma propriedade importante é a de toda a ultradistribuição $[\varphi] \in \tilde{U}_q$ ser a soma neste espaço de uma série do tipo

$$[\varphi] = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \left[\frac{1}{\hat{z}^k} \right]$$

em que, para cada k , se tem $a_k = -\frac{1}{2\pi i} \oint (\lambda)^{k-1} \varphi(\lambda) d\lambda$. Os integrais são efectuados sobre qualquer circunferência centrada na origem de \mathbb{C} , descrita em sentido retrógrado e contida no domínio de φ . Daqui infere-se que todo o elemento de \tilde{U}_q é soma de uma série de dipolos $(\delta(\hat{x}))$ e suas derivadas) convergente de acordo com a topologia de \tilde{U}_q .

Nota: Todas as ultradistribuições de \tilde{U}_q são nulas, ver [5], nos intervalos $] - \infty, -q[$ e $]q, +\infty[$, o que significa que os seus suportes estão contidos no intervalo fechado $I_q = [-q, q]$. Mas isso não significa que toda a ultradistribuição de suporte neste intervalo seja um elemento de \tilde{U}_q . A ultradistribuição representada pela função $\frac{1}{z-r}$ onde r é um real maior que q , por exemplo, é uma ultradistribuição de suporte na origem, que não pertence a \tilde{U}_q . Já com as distribuições temperadas de suporte contido em I_q , a situação é diferente. Toda a distribuição temperada deste tipo é um elemento de \tilde{U}_q . Sabe-se que a transformação de Stieltjes aplica injectivamente o espaço \tilde{D} das distribuições temperadas em \tilde{U} , por forma que essa injeção permite identificar \tilde{D} como subespaço vectorial de \tilde{U} . No caso particular em que uma distribuição $g(\hat{x})$ tem o seu suporte no intervalo I_q , a sua imagem de Stieltjes é uma ultradistribuição $[\varphi] \in \tilde{U}_q$ em que $\varphi(\hat{z})$ se prolonga como função holomorfa ao complementar de I_q , por forma que

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} [\varphi(\hat{x} + iy) - \varphi(\hat{x} - iy)] = g(\hat{x})$$

verificando-se esta convergência no sentido da topologia de \tilde{D} , ver [5]. \square

5 A transformação de Fourier em E_q

A transformação de Fourier faz corresponder a cada função $f \in E_q$, um par (φ^+, φ^-) de funções holomorfas dadas por

$$\varphi^+(z) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{izt} dt, \quad \varphi^-(z) = \int_0^{-\infty} f(t) e^{izt} dt$$

respectivamente no semi-plano superior $\text{Im}(z) > q$ e no semi-plano inferior $\text{Im}(z) < -q$ do plano complexo [5]

5.1 φ^+ e φ^- como restrições do representante canónico de um elemento de \tilde{U}_q

A seu respeito prova-se que elas tendem para zero quando, respectivamente, $\text{Im}(z) \rightarrow +\infty$ e $\text{Im}(z) \rightarrow -\infty$, e que existe uma função $\varphi(\hat{z})$ que verifica as seguintes propriedades: é definida e holomorfa no complementar de C_q ; é o prolongamento analítico das duas funções φ^+ e φ^- ; tende para zero quando $|z| \rightarrow +\infty$. Isto é, a imagem de Fourier $\mathcal{F}(f)$ de toda a função $f \in E_q$ é um elemento de \tilde{U}_q . Daí designarmos os elementos de E_q por funções de banda contida em C_q . As suas bandas estão contidas no círculo C_q . E

prova-se ainda que esta aplicação, $\mathcal{F} : E_q \rightarrow \tilde{U}_q$, é injectiva, sobrejectiva e contínua, sendo a sua inversa, \mathcal{F}^{-1} , também contínua para as topologias agora definidas nestes espaços. A aplicação inversa \mathcal{F}^{-1} é definida por

$$\mathcal{F}^{-1}([\varphi]) = \frac{1}{2\pi} \oint \varphi(z) e^{-izt} dz,$$

onde o integral é efectuado sobre uma circunferência Γ centrada na origem do plano complexo, de raio maior que q , percorrida no sentido retrógrado.

5.1.1 A convergência dos integrais $\int_0^{+\infty} \check{f}(te^{i\theta}) e^{izte^{i\theta}} e^{i\theta} dt$

Vejamos que quando \check{f} é o prolongamento analítico de uma função $f \in E_q$, θ é um número real e $z = x + iy$ é um complexo pertencente ao semi-plano $x \sin \theta + y \cos \theta > q$, então o integral

$$\int_0^{+\infty} \check{f}(te^{i\theta}) e^{izte^{i\theta}} e^{i\theta} dt$$

é convergente (ver a Figura 1). Sendo $z = x + iy$ vem

$$e^{izte^{i\theta}} = e^{it(x \cos \theta - y \sin \theta)} e^{-t(x \sin \theta + y \cos \theta)}$$

e para qualquer real k , tal que $x \sin \theta + y \cos \theta > k > q$, resulta que

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \check{f}(te^{i\theta}) e^{izte^{i\theta}} e^{i\theta} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{f(te^{i\theta})}{e^{kt}} e^{kt} e^{it(x \cos \theta - y \sin \theta)} e^{-t(x \sin \theta + y \cos \theta)} e^{i\theta} dt \end{aligned}$$

é convergente. Isto é, o integral dado converge sempre que $z = x + iy$ pertence ao ao semi-plano aberto $x \sin \theta + y \cos \theta > q$.

5.1.2 A igualdade dos integrais

Sendo θ e σ dois reais positivos, e $z = x + iy$ pertencente à intersecção dos semi-planos $x \sin \theta + y \cos \theta > q$ e $x \sin \sigma + y \cos \sigma > q$, vejamos que

$$\int_0^{+\infty} \check{f}(te^{i\theta}) e^{izte^{i\theta}} e^{i\theta} dt = \int_0^{+\infty} \check{f}(te^{i\sigma}) e^{izte^{i\sigma}} e^{i\sigma} dt$$

Com efeito, comecemos por considerar a igualdade

$$\int_{\Gamma_2} \check{f}(\lambda) e^{i\lambda z} d\lambda - \int_{\Gamma_1} \check{f}(\lambda) e^{i\lambda z} d\lambda = \int_{\Gamma_r} \check{f}(\lambda) e^{i\lambda z} d\lambda$$

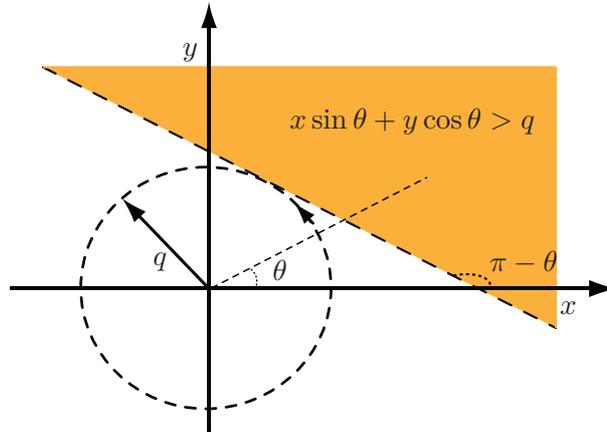


Figura 1

onde Γ_1 , Γ_2 e Γ_r designam as linhas orientadas assinaladas na Figura 2, bem como σ e θ os ângulos nela representados. Supomos que Γ_r é um arco de circunferência de raio r centrada na origem do plano complexo.

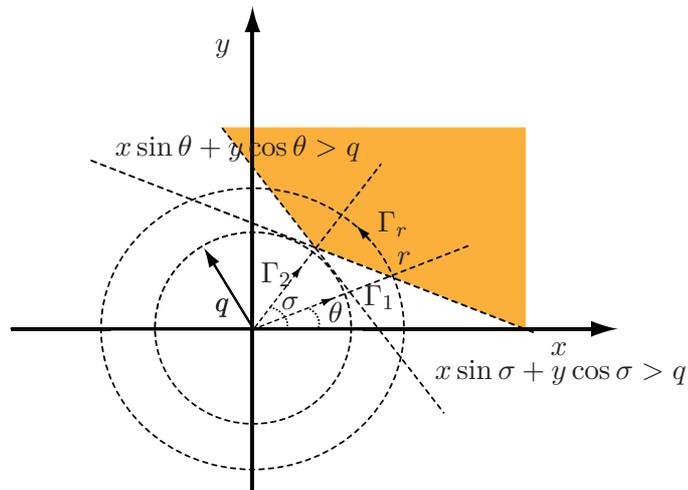


Figura 2

Quando $r \rightarrow +\infty$ os dois primeiros integrais vão tender para os dois integrais assinalados na Subsecção 5.1.2 (desde que z pertença à intersecção dos dois

semi-planos respectivos). O integral sobre Γ_r , por sua vez, vem dado por

$$\begin{aligned} & \int_{\sigma}^{\theta} \check{f}(te^{i\psi}) e^{izr} e^{i\psi} r e^{i\psi} d\psi \\ &= \int_{\sigma}^{\theta} \frac{\check{f}(re^{i\psi})}{e^{kr}} e^{ir(x \cos \psi - y \sin \psi)} e^{kr} e^{-r(x \sin \psi + y \cos \psi)} r e^{i\psi} d\psi \end{aligned}$$

que converge para zero quando $r \rightarrow +\infty$. Os dois integrais (Subsecção 5.1.2) são portanto iguais.

5.1.3 A existência de um elemento $[\varphi] \in \widetilde{U}_q$ para cada $f \in E_q$

Demonstremos agora a existência, para cada $f \in E_q$, de $\varphi \in \widetilde{U}_q$, que é prolongamento analítico das funções φ^+ e φ^- dadas pela transformação de Fourier de f . Dado um elemento $f \in E_q$, para cada ângulo θ entre 0 e 2π podemos definir uma função $\varphi_{\theta}(\hat{z})$ dada pelo integral

$$\varphi_{\theta}(\hat{z}) = \int_0^{+\infty} \widehat{f}(te^{i\theta}) e^{i\hat{z}te^{i\theta}} e^{i\theta} dt$$

Como vimos, dadas duas destas funções, elas coincidem na intersecção dos seus domínios. Por sua vez, dado que a reunião dos seus domínios cobre o complementar de C_q , elas definem uma função $\varphi(\hat{z})$ no complementar de C_q que é prolongamento analítico de cada uma delas. Além disso, tendo-se

$$\varphi_{\theta}(z) = \int_0^{+\infty} \frac{\check{f}(te^{i\theta})}{e^{(q+\frac{1}{m})t}} e^{it(x \cos \theta - y \sin \theta)} e^{-t(x \sin \theta + y \cos \theta - (q+\frac{1}{m}))} e^{i\theta} dt$$

para todo o número natural m , resulta que

$$|\varphi_{\theta}(x + iy)| \leq \|f\|_m \frac{1}{x \sin \theta + y \cos \theta - (q + \frac{1}{m})}$$

Isto significa pois que $\varphi_{\theta}(z)$ tende uniformemente para zero sobre o semi-plano $x \sin \theta + y \cos \theta - (q + \frac{1}{m}) > k$, quando $k \rightarrow +\infty$. Consequentemente $\varphi(z) \rightarrow 0$ quando $|z| \rightarrow +\infty$, sendo $\varphi(\hat{z})$ o representante canónico de um elemento de \widetilde{U}_q .

5.1.4 A continuidade da transformação de Fourier \mathcal{F} em E_q

Tendo em atenção a última desigualdade, podemos escrever

$$|\varphi(r \sin \theta + ir \cos \theta)| \leq \|f\|_m \frac{1}{r - (q + \frac{1}{m})}$$

qualquer que seja θ e todo o $r > q + \frac{1}{m}$. Em particular, fazendo $r = q + \frac{1}{n}$, com $n < m$, conclui-se que

$$\|[\varphi]\|_n \leq \|f\|_m \frac{1}{\frac{1}{n} - \frac{1}{m}}$$

o que garante a continuidade de \mathcal{F} . Com efeito, de acordo com esta desigualdade resulta que, dada uma vizinhança de zero $\mathcal{V}_{n\varepsilon}$ formada pelos elementos de \tilde{U}_q cuja norma $\|\cdot\|_n$ é menor que ε (real positivo), todo o elemento f de E_q cuja norma $\|\cdot\|_m$ é menor que $(\frac{1}{n} - \frac{1}{m})\varepsilon$, tem uma imagem $\mathcal{F}(f) \in \mathcal{V}_{n\varepsilon}$.

5.1.5 A injectividade de \mathcal{F}

Seja $f \in E_q$ e $k > q$ um real positivo. Os dois integrais dados em 5 que definem a sua imagem de Fourier podem então escrever-se com a forma

$$\varphi^+(z) = \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{e^{kt}} e^{\nu(z-\nu k)t} dt, \quad \varphi^-(z) = \int_0^{-\infty} \frac{f(t)}{e^{-kt}} e^{\nu(z+\nu k)t} dt$$

o que nos permite escrever

$$\varphi^+(z + \nu k) = \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{e^{kt}} e^{\nu z t} dt, \quad \varphi^-(z - \nu k) = \int_0^{-\infty} \frac{f(t)}{e^{-kt}} e^{\nu z t} dt$$

Isto permite-nos afirmar que o par de funções $\mu^+(z) = \varphi^+(z + \nu k)$ e $\mu^-(z) = \varphi^-(z - \nu k)$ é a imagem de Fourier da função $\frac{f(t)}{e^{k|t|}}$. Mas então se $\mathcal{F}(f) = 0$, isso vai implicar que sejam nulas φ^+ e φ^- e consequentemente $\mu^+(z)$ e $\mu^-(z)$, isto é, que $\mathcal{F}\left(\frac{f(t)}{e^{k|t|}}\right) = 0$. E sendo a transformação de Fourier injectiva no conjunto das distribuições temperadas, isto exige que f seja nula.

5.1.6 A sobrejectividade de \mathcal{F} como aplicação linear de E_q em \tilde{U}_q

Dado um elemento $[\varphi] \in \tilde{U}_q$, consideremos a função $f(\hat{t})$ dada por

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \varphi(\mu) e^{-i\mu t} d\mu$$

onde Γ designa qualquer circunferência centrada na origem do plano complexo, de raio maior que q , descrita em sentido retrógrado. Ela é obviamente

um elemento de E_q : o seu prolongamento analítico ao plano complexo vem dado por

$$\check{f}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \varphi(u) e^{-i\mu z} d\mu$$

que verifica a propriedade que caracteriza os prolongamentos analíticos dos elementos de E_q . Posto isto, podemos calcular o integral

$$\int_0^{+\infty} f(t) e^{i\lambda t} dt = \int_0^{+\infty} e^{i\lambda t} dt \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \varphi(\mu) e^{-i\mu t} d\mu$$

quando $Im \lambda$ for maior que o raio de Γ e do que q . Nessas condições os dois integrais são também comutáveis, do que resulta

$$\int_0^{+\infty} f(t) e^{i\lambda t} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\mu)}{\lambda - \mu} d\mu = \varphi(\lambda),$$

o que garante $\mathcal{F}(f) = [\varphi]$ e a sobrejectividade de \mathcal{F} .

Tendo-se demonstrado a injectividade e a sobrejectividade de \mathcal{F} , resulta que a aplicação de \check{U}_q em E_q definida pelo integral

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \varphi(\lambda) e^{i\lambda t} d\lambda$$

será a aplicação inversa da transformação de Fourier. Representa-la-emos por \mathcal{F}^{-1} .

5.1.7 A continuidade de \mathcal{F}^{-1}

No integral, referido no parágrafo anterior, que define o prolongamento analítico \check{f} de um dado elemento $f = \mathcal{F}^{-1}([\varphi])$, com $[\varphi] \in \check{U}_q$, para cada número natural m , podemos supor que Γ é a circunferência centrada na origem do plano complexo, de raio igual a $q + \frac{1}{m}$. Desse mesmo integral podemos então concluir que

$$|\check{f}(z)| \leq \|\varphi\|_m \left(q + \frac{1}{m}\right) e^{(q + \frac{1}{m})|z|}, \quad \forall z \in C$$

e portanto que $\|f\| \leq \|\varphi\|_m \left(q + \frac{1}{m}\right)$, o que garante a continuidade de \mathcal{F}^{-1} .

5.2 As ultradistribuições de suporte compacto como imagens de Fourier das funções de banda limitada. O conceito de banda

Podemos agora considerar E munido da topologia do limite indutivo, em relação às inclusões $g_{qp} : E_q \rightarrow E_p$, $q < p$, do sistema indutivo dos espaços

E_q , e para cada $q \geq 0$ designar por g_q a inclusão $E_q \rightarrow E$. O subespaço \tilde{U}_∞ de \tilde{U} constituído pelas ultradistribuições de suporte compacto, pode ser representado pela reunião dos \tilde{U}_q se nesta reunião identificarmos dois quaisquer elementos $[\varphi]$ e $[\sigma]$ de dois destes espaços sempre que as funções φ e σ que os representam, coincidam em qualquer vizinhança de infinito. Posto isto, para cada $q \geq 0$ designemos ainda por f_q a composição de $\mathcal{F} : E_q \rightarrow \tilde{U}_q$ com a inclusão $\tilde{U}_q \rightarrow \tilde{U}_\infty$.

Agora, dado que as aplicações f_q são comutáveis com as inclusões g_{qp} podemos definir a aplicação $F : E \rightarrow \tilde{U}_\infty$ que torna comutativos os diagramas

$$\begin{array}{ccc} E_q & \xrightarrow{g_q} & E \\ & \searrow f_q & \downarrow F \\ & & \tilde{U}_\infty \end{array}$$

A aplicação F assim definida é obviamente a transformação de Fourier, é injectiva e é única. Podemos agora introduzir um conceito de banda. Cada função $f \in E$ pertencerá a diversos E_q e portanto terá diversas imagens dadas pelas aplicações \mathcal{F} ; mas todas elas são prolongamentos analíticos umas das outras, a complementares de círculos C_q . À intersecção destes círculos podemos chamar banda de f .

Nota: Designando $A(V)$ o espaço das funções holomorfas de crescimento lento sobre o filtro V gerado no plano complexo \mathbb{C} pelos complementares em \mathbb{C} das bandas $\text{Im } |z| \leq \alpha$, em que α é qualquer real não negativo, consideramos equivalentes em $A(V)$ duas quaisquer funções φ e ϑ sempre que a sua diferença se possa prolongar como função inteira ao plano complexo, ver [5]. Representamos por \tilde{U} o espaço quociente assim obtido, denominando ultradistribuição temperada cada uma destas classes de funções equivalentes. Quer isto significar que toda a ultradistribuição temperada pode ser representada por uma função φ holomorfa de crescimento lento no complementar de uma das bandas $|\text{Im } z| \leq \alpha$, α real não negativo, representando nós por $[\varphi]$ a correspondente classe de funções equivalentes, ou ultradistribuição. A transformação de Fourier define um automorfismo no espaço das distribuições temperadas. Uma vez que este espaço é denso no espaço Λ das distribuições de tipo exponencial, a transformação de Fourier é então estendido a Λ , mas agora como um isomorfismo entre Λ e \tilde{U} . Toda a ultradistribuição temperada $[\varphi]$ é da forma (ver [5])

$$[\varphi] = \int_{\mathbb{R}} \cdot e^{izx} g(x) dx$$

onde $g \in \Lambda$ é única para cada $[\varphi]$. O conjunto E das funções de banda limitada constitui obviamente um subespaço de Λ , sendo a transformação de Fourier definida em E uma restrição da definida em Λ . O espaço $A(V)$ pode ainda identificar-se com o produto $A(V^+) \times A(V^-)$, onde V^+ e V^- designam os filtros gerados no plano complexo respectivamente, pelos semiplanos $\text{Im } z > \alpha$, $\text{Im } z < -\alpha$ (α real não negativo). Então cada ultradistribuição temperada será representada por pares de funções (φ^+, φ^-) , com $\varphi^+ \in A(V^+)$, $\varphi^- \in A(V^-)$. \square

6 E_q e \widetilde{U}_q como espaços \mathbb{M}^* e como espaços perfeitos

Devido ao isomorfismo definido pela transformação de Fourier entre estes espaços limitar-nos-emos a tratar o caso de \widetilde{U}_q .

6.1 A álgebra A_q das funções holomorfas sobre o filtro das vizinhanças de C_q

Para cada número natural $n \in \mathbb{N}$, representamos por A_q^n o espaço vectorial complexo das funções $\phi(\hat{z})$, holomorfas no interior de $C_{q+\frac{1}{n}}$, e contínuas no seu fecho. Vamos supor este espaço munido da norma usual [4]

$$\|\phi\|_n^* = \sup_{z \in C_{q+\frac{1}{n}}} |\phi(z)|.$$

Obtém-se deste modo uma sucessão (A_q^n) de espaços de Banach. O seu limite indutivo em relação às inclusões, que vamos representar por A_q é um espaço \mathbb{LN}^* , isto é, um espaço localmente convexo, limite indutivo canónico de uma sucessão regular de espaços normados. Ele é separado e reflexivo. Os seus elementos são as classes $[\phi]$ de funções $\phi(\hat{z})$ que são holomorfas sobre uma vizinhança de C_q , considerando como pertencentes à mesma classe duas funções que coincidem sobre uma vizinhança de C_q . As vizinhanças de zero em A_q são os conjuntos cuja intersecção com qualquer dos A_q^n é uma vizinhança de zero neste espaço. Em A_q pode introduzir-se o produto usual. Obtém-se uma álgebra comutativa, complexa, munida de elemento unidade e de uma topologia em relação à qual a multiplicação fica contínua. A_q denomina-se álgebra das funções holomorfas sobre o filtro das vizinhanças de C_q .

6.2 O dual de \tilde{U}_q

Sendo \tilde{U}_q um espaço numeravelmente normado completo e a sua topologia definida por uma sucessão crescente $(\|\cdot\|_n)$ de normas concordantes, ele é o limite projectivo em relação às inclusões da sucessão (\tilde{U}_q^n) de espaços de Banach; para cada $n \in \mathbb{N}$, \tilde{U}_q^n é o completado de \tilde{U}_q para a norma $\|\cdot\|_n$ [2]. Nestas condições, o dual \tilde{U}'_q de \tilde{U}_q também pode ser considerado como o limite indutivo em relação às inclusões da sucessão $(\tilde{U}'_q^{n'})$ de espaços de Banach, onde para cada $n \in \mathbb{N}$, $\tilde{U}'_q^{n'}$ é o dual de \tilde{U}_q^n . Para todo o par (n, m) de números naturais, com $n < m$, representamos por J_{nm} a inclusão de $\tilde{U}'_q^{n'}$ em $\tilde{U}'_q^{m'}$, e por J_n , $n \in \mathbb{N}$ a inclusão de $\tilde{U}'_q^{n'}$ em \tilde{U}'_q . O diagrama que se segue fica comutativo qualquer que sejam n, m , com $n < m$.

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{U}'_q^{n'} & \xrightarrow{J_{nm}} & \tilde{U}'_q^{m'} \\
 \searrow J_n & & \swarrow J_m \\
 & \tilde{U}'_q &
 \end{array}$$

Posto isto, dado um número natural $n \in \mathbb{N}$ interpretando $\frac{1}{\lambda - \hat{z}}$ como uma função de λ com valores em \tilde{U}_q^n , holomorfa no interior de $C_{q+\frac{1}{n}}$, a cada $f \in \tilde{U}'_q^{n'}$ podemos fazer corresponder a função complexa ϕ dada por $\phi(\lambda) = f\left(\frac{1}{\lambda - \hat{z}}\right)$ no interior do mesmo círculo; ela é um representante de um elemento de A_q . Definimos assim uma aplicação de $\tilde{U}'_q^{n'}$ em A_q que vamos representar por h_n . Ela é injectiva e contínua como provamos em seguida. A injectividade resulta naturalmente do facto de $h_n(f) = 0$ implicar

$$\phi(\lambda) = f\left(\frac{1}{\lambda - \hat{z}}\right) = 0$$

qualquer que seja λ no interior de $C_{q+\frac{1}{n}}$, e consequentemente $f([\varphi]) = 0$ qualquer que seja $[\varphi] \in \tilde{U}'_q$ (f é uma forma linear contínua em \tilde{U}'_q). Para demonstrar a continuidade, dado um número natural $m > n$, consideremos o conjunto dos elementos

$$\psi_\alpha(\hat{\lambda}) = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right) \frac{1}{\alpha - \hat{\lambda}}, \quad \alpha \in \Gamma_m,$$

onde Γ_m designa a fronteira de $C_{q+\frac{1}{m}}$. Estes elementos pertencem a \tilde{U}'_q^n e a sua norma é igual a 1 neste espaço. Então, sendo $f \in \tilde{U}'_q^{n'}$ e $f\left(\frac{1}{\lambda - \hat{z}}\right) = \varphi(\lambda)$,

resulta que

$$f(\psi_\alpha) = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right) \phi(\alpha), \forall \alpha \in \Gamma_m$$

e consequentemente a norma de f em $\tilde{U}_q^{n'}$, que vamos representar por $\|f\|_n^*$ verificará a relação $\|f\|_n^* \geq \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right) \|\phi\|_m^*$, isto é $\|h_n(f)\|_m^* \leq \frac{1}{\frac{1}{n} - \frac{1}{m}} \|f\|_n^*$. h_n é contínua como queríamos provar. Ora sendo as aplicações h_n compatíveis com as inclusões J_{nm} , resulta que existe uma e uma só aplicação linear contínua $h : \tilde{U}_q' \rightarrow A_q$ tal que $h \circ J_n = h_n, \forall n \in \mathbb{N}$. O diagrama seguinte fica comutativo qualquer que seja n .

$$\begin{array}{ccc} \tilde{U}_q^{n'} & \xrightarrow{J_n} & \tilde{U}_q' \\ & \searrow h_n & \swarrow h \\ & & A_q \end{array}$$

A aplicação h é evidentemente injectiva. Podemos agora considerar A_q como limite indutivo em relação às inclusões da sucessão (A_q^n) de espaços de Banach, e para cada $n \in \mathbb{N}$, a aplicação linear $g_n : A_q^n \rightarrow \tilde{U}_q'$ que a cada faz corresponder $f \in \tilde{U}_q'$ dado por

$$f([\psi]) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n} \phi(\lambda) \psi(\lambda) d\lambda, \forall [\psi] \in \tilde{U}_q.$$

Ora desta igualdade infere-se que

$$|f([\psi])| \leq \|\phi\|_n^* \|\psi\|_n \left(q + \frac{1}{n}\right), \forall [\psi] \in \tilde{U}_q$$

e consequentemente

$$\|g_n(\phi)\|_n' \leq \|\phi\|_n^* \left(q + \frac{1}{n}\right)$$

onde $\|g_n(\phi)\|_n'$ designa a norma de $g_n(\phi)$ no espaço $\tilde{U}_q^{n'}$. As aplicações g_n são portanto lineares limitadas e consequentemente contínuas. E são também injectivas, pois se $g_n(\phi) = g_n(\psi)$ e ϕ e ψ pertencem a A_q^n , vem

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n} \phi(\lambda) \psi(\lambda) d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n} \psi(\lambda) \psi(\lambda) d\lambda, \forall [\psi] \in \tilde{U}_q.$$

Em particular, fazendo $\psi(\hat{\lambda}) = \frac{1}{\alpha - \hat{\lambda}}$ resulta que $\phi(\alpha) = \psi(\alpha)$ para todo o α pertencente ao interior de $C_{q+\frac{1}{n}}$. A compatibilidade com as inclusões resulta

naturalmente de a inclusão corresponder a uma restrição. Há portanto uma única aplicação linear contínua $g : A_q \rightarrow \tilde{U}'_q$ que composta com a inclusão $A^n_q \rightarrow A_q$ é igual a g_n qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, e essa aplicação é injectiva.

Vamos agora provar que dado um elemento $[\phi] \in A_q$, existe um elemento $f \in \tilde{U}'_q$ tal que $h(f) = [\phi]$, e esse elemento é $g([\phi])$. Com efeito, sendo $\phi \in A^n_q$ um representante de $[\phi]$, tem-se $g([\phi]) = g_n(\phi)$ e por consequência $h(g_n(\phi))$ terá um representante ψ em qualquer A^m_q , com $m > n$, dado por

$$\psi(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n} \phi(z) \frac{1}{\lambda - z} dz = \phi(\lambda).$$

Isto é, $h(g([\phi])) = [\phi]$, $\forall [\phi] \in A_q$.

Analogamente vamos provar que dado $f \in \tilde{U}'_q$, existe $[\phi] \in A_q$ tal que $g([\phi]) = f$, e esse elemento é $[\phi] = h(f)$. Com efeito, sendo $f \in \tilde{U}^{n'}_q$, teremos $h(f) = h_n(f)$ e $\phi(\hat{\lambda})$ dado por $\phi(\lambda) = f\left(\frac{1}{\lambda - \hat{z}}\right)$ será um representante de $h(f)$ num espaço A^m_q , com $m > n$. Mas desta igualdade resulta que para todo o $[\psi] \in \tilde{U}_q$ seja válida a igualdade

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n} \phi(\lambda)\psi(\lambda)d\lambda = \langle f, [\psi] \rangle$$

o que obriga a ser $h_m(\phi) = h([\phi]) = f$. Isto é, $h(g(f)) = f$. Concluimos que A_q e \tilde{U}'_q são portanto isomorfos.

6.3 \tilde{U}_q como espaço \mathbb{M}^* e como espaço perfeito

Um espaço \mathbb{M}^* é, como sabemos, o dual (forte) de um espaço LN^* . Interpretamos então $\left[\frac{1}{\hat{z}-\lambda}\right]$ como uma função de λ com valores em A_q definida no complementar de C_q , diferenciável e tal que o seu limite (de acordo com a topologia de A_q) quando $\lambda \rightarrow \infty$ é zero. Sendo f uma forma linear contínua em A_q , $f\left(\left[\frac{1}{\hat{z}-\lambda}\right]\right)$ será uma função complexa $\psi(\lambda)$, e o representante canónico de um elemento de \tilde{U}_q . Isto é, a cada forma linear f em A_q fazemos deste modo corresponder um elemento $[\psi] \in \tilde{U}_q$. Reciprocamente, a cada elemento $[\psi] \in \tilde{U}_q$, podemos fazer corresponder a forma linear f em A_q dada por

$$f([\phi]) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n} \phi(\lambda)\psi(\lambda)d\lambda, \forall [\phi] \in A_q$$

onde ϕ designa um representante de $[\phi]$ pertencente a um A^n_q e Γ_n a fronteira de $C_{q+\frac{1}{n}}$ orientada em sentido retrógrado. Pode demonstrar-se facilmente

que esta correspondência entre \tilde{U}_q e o dual de A_q é injectiva e sobrejectiva; \tilde{U}_q é isomorfo do dual de A_q . Tem-se

$$\langle [\psi], [\phi] \rangle = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n} \phi(\lambda) \psi(\lambda) d\lambda, \forall [\phi] \in A_q.$$

Para provarmos que a topologia inicial de \tilde{U}_q coincide com a da convergência uniforme sobre os limitados de A_q , basta demonstrar que toda a vizinhança de zero para esta segunda topologia contém uma vizinhança de zero para a topologia inicial. Para esse efeito, consideremos uma vizinhança de zero

$$\left\{ [\psi] \in \tilde{U}_q : |\langle [\psi], [\phi] \rangle| < \varepsilon, \forall [\phi] \in B \right\}$$

onde ε é um real positivo e B é um conjunto limitado em A_q , para a topologia da convergência uniforme sobre os limitados de A_q . Ora sendo B um conjunto limitado, ele é limitado num dos A_q^p o que significa que existe um real positivo r tal que $\|\phi\|_p^* \leq r, \forall [\phi] \in B$. Então é fácil verificar que a vizinhança de zero para a topologia inicial

$$\left\{ [\psi] \in \tilde{U}_q : \|\psi\|_p < \frac{\varepsilon}{r \left(q + \frac{1}{p} \right)} \right\}$$

está contida na anterior. A título de curiosidade pode também verificar-se que dada qualquer vizinhança de zero em \tilde{U}_q para a topologia inicial do tipo $\left\{ [\psi] \in \tilde{U}_q : \|\psi\|_p < \varepsilon \right\}$ onde $p \in \mathbb{N}$ e ε é um real positivo, existe a vizinhança de zero, para a topologia da convergência uniforme sobre os limitados, definida por

$$\left\{ [\psi] \in \tilde{U}_q : |\langle [\psi], [\phi] \rangle| < \varepsilon, \forall [\phi] \in B \right\}$$

onde $B = \left\{ [\phi] \in A_q : \phi(\hat{\lambda}) = \frac{1}{\lambda - \alpha}, \alpha \in C, |\alpha| = q + \frac{1}{p} \right\}$, que está contida na anterior. O espaço \tilde{U}_q (munido da topologia inicial) é portanto o dual forte de A_q . Esse facto e o de A_q ser o seu dual forte, garante pois que ele é não só um espaço reflexivo como também um espaço \mathbb{M}^* [3].

Para demonstrar que \tilde{U}_q é um espaço \mathbb{M}^* , podíamos também recorrer ao facto de ele ser o limite projectivo em relação às inclusões dos espaços de Banach $\tilde{U}_q^n, n \in \mathbb{N}$, e de para cada $n \in \mathbb{N}$, a bola fechada dos elementos $\psi \in \tilde{U}_q^n$ de norma $\|\psi\|_n \leq 1$ ser relativamente compacto em todo o \tilde{U}_q^p , com $p < n$ (consequência do teorema de Montell). Desta propriedade, que vamos designar no que se segue por propriedade 'P' resulta também que \tilde{U}_q

é um espaço perfeito no sentido de Guelfand [2]. Ela é uma condição suficiente para que num espaço numeravelmente normado completo os conjuntos limitados sejam relativamente compactos e que portanto ele seja perfeito (por definição, espaço numeravelmente normado completo cujos conjuntos limitados são relativamente compactos)

6.4 As propriedades do espaço E_q das funções de banda contida em C_q

As suas propriedades ressaltam naturalmente do facto de E_q ser isomorfo de \tilde{U}_q . Assim ele:

- É um espaço numeravelmente normado completo;
- É o limite projectivo em relação às inclusões de uma sucessão (E_q^n) de espaços de Banach tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ a bola fechada dos elementos $f \in E_q^n$ de norma $\|f\|_n \leq 1$, é relativamente compacta em todo o E_q^p com $p < n$ (dizemos que verifica a propriedade ‘P’);
- É metrizável (a topologia resultante da métrica coincide com a topologia inicial);
- É reflexivo, sendo o seu dual um espaço $\mathbb{L}\mathbb{N}^*$ e ele um espaço \mathbb{M}^* [4];
- É um espaço perfeito no sentido de Guelfand [2], portanto um espaço separável, sendo compactos todos os seus subconjuntos limitados e fechados. Os operadores lineares contínuos nestes espaços são também limitados.

Uma propriedade não menos importante é ainda o facto de toda a função $f \in E_q$, portanto definida na recta, ser prolongável como função holomorfa a todo o plano complexo .

6.5 As álgebras dos operadores lineares contínuos em \tilde{U}_q e em E_q . Uma aplicação do cálculo simbólico de Sebastião e Silva

No que se segue representamos por $L[E_q]$ e $L[\tilde{U}_q]$ as álgebras dos operadores lineares contínuos em respectivamente E_q e \tilde{U}_q . Sendo estas álgebras isomorfas, todas as propriedades que enunciarmos para uma delas será automaticamente válida, a menos de um isomorfismo, para a outra. Elas têm elemento unidade e munidas da topologia da convergência uniforme sobre

os conjuntos limitados (de E_q e \tilde{U}_q respectivamente) constituem álgebras localmente convexas, separadas completas; e como demonstraremos em seguida a multiplicação é uma operação separadamente contínua.

6.5.1 A continuidade à esquerda da multiplicação

Demonstraremos apenas no caso da álgebra $L[E_q]$. Para o efeito, consideremos uma vizinhança de zero $V_{p\varepsilon B} = \{g \in L[E_q] : \|g([\varphi])\|_p < \varepsilon, \forall [\varphi] \in B\}$, onde $\|\cdot\|_p$ designa uma das normas que definem a topologia de E_q , ε é um número real positivo e B é um conjunto limitado em E_q . Estas vizinhanças constituem um sistema fundamental de vizinhanças de zero em $L[E_q]$. Posto isto, dado um elemento não nulo $h \in L[E_q]$, seja

$$V = \{g \in L[E_q] : \|g([\varphi])\|_p < \varepsilon, \forall [\varphi] \in h(B)\}$$

que obviamente constitui uma vizinhança de zero, pois h transforma limitados de E_q em limitados de E_q . Então teremos

$$V.h = \{g.h \in L[E_q] : \|g([\varphi])\|_p < \varepsilon, \forall [\varphi] \in h(B)\}$$

e por conseguinte

$$V.h = \{g.h \in L[E_q] : \|g(h([\vartheta]))\|_p < \varepsilon, \forall [\vartheta] \in B\}.$$

Isto é, $V.h \subset V_{p\varepsilon B}$ como pretendíamos demonstrar.

6.5.2 A continuidade à direita

Demonstramos a continuidade à direita no caso da álgebra $L[\tilde{U}_q]$, mas a demonstração permanece válida, tal como a demonstração anterior, para a álgebra dos operadores lineares contínuos num qualquer espaço numeravelmente normado completo. Seja

$$V_{r\varepsilon B} = \{f \in L[\tilde{U}_q] : \|f([\vartheta])\|_r < \varepsilon, \forall [\vartheta] \in B\}$$

onde $\|\cdot\|_r$ designa uma das normas que definem a topologia de \tilde{U}_q , ε é um real positivo e B um conjunto limitado em \tilde{U}_q ; como sabemos estes conjuntos $V_{r\varepsilon B}$ constituem um sistema fundamental de vizinhanças de zero em $L[\tilde{U}_q]$.

Dado então $h \in L[\tilde{U}_q]$ não nulo, existe uma norma $\|\cdot\|_p$ em \tilde{U}_q e um real positivo δ tais que $\|[\varphi]\|_p < \delta$ implica $\|h([\varphi])\|_r < \varepsilon$. Quer isto dizer que

$$\|g([\vartheta])\|_p < \delta \implies \|h(g([\vartheta]))\|_r < \varepsilon, \forall [\vartheta] \in B, g \in L[\tilde{U}_q].$$

Posto isto, dado o conjunto

$$V_{r\delta B} = \left\{ g \in L[\tilde{U}_q] : \|g([\vartheta])\|_p < \delta, \forall [\vartheta] \in B \right\},$$

vem

$$h.V_{p\delta B} = \{h.g : \|g([\vartheta])\|_p < \varepsilon, \forall [\vartheta] \in B\} \subset \{h.g : \|h(g([\vartheta]))\|_r < \varepsilon, \forall [\vartheta] \in B\}$$

conjunto este último que está contido em $V_{r\varepsilon B}$. Quer isto dizer $h.V_{p\delta B} \subset V_{r\varepsilon B}$. A multiplicação é portanto contínua à direita.

6.5.3 Aplicação do cálculo simbólico

Os resultados anteriores permitem-nos aplicar o Teorema 2 do artigo [4], de Sebastião e Silva, que enunciamos para estes casos:

Se F é um filtro de subconjuntos do plano complexo C admitindo uma base regular $\{F_k\}$ existe uma correspondência biunívoca \mathcal{H} entre os homomorfismos contínuos \mathcal{H} de $A(F)$ (álgebra das funções holomorfas de crescimento lento sobre o filtro F) em $L[E_q]$, tais que $\mathcal{H}(1) =$ identidade na álgebra dos operadores $g \in L[E_q]$ cujo filtro espectral é mais fino do que F . Esta correspondência é definida pelas fórmulas recíprocas

$$g = \mathcal{H}(\hat{z});$$

$$\mathcal{H}(\phi) = \int_{\Gamma_k} \frac{\phi(\lambda)}{(\lambda - \alpha)^n (g - \lambda)} d\lambda, \quad \forall \phi \in A(F)$$

sendo α um ponto qualquer de $C \setminus F_1$, k e n inteiros tais que $\frac{\phi(\lambda)}{(\lambda - \alpha)^{n-i}}$ fica limitado sobre F_k ; supõe-se ainda que Γ_k é a fronteira de F_k orientada de maneira a deixar os pontos de F_k à direita.

7 A_q como álgebra de operadores em \tilde{U}_q

Dado um elemento $[\phi] \in A_q$, para cada $n \in \mathbb{N}$ em que exista um representante $\phi \in A_q^n$ daquele elemento, o integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{n+1}} \frac{\phi(\lambda)\psi(\lambda)}{\lambda - \hat{z}} d\lambda, \quad \forall [\psi] \in \tilde{U}_q$$

define uma aplicação linear contínua $h_n : \tilde{U}_q \rightarrow \tilde{U}_q^n$. Estas aplicações h_n são obviamente compatíveis com as inclusões $\tilde{U}_q^m \rightarrow \tilde{U}_q^n$, $m > n$, determinando portanto um operador linear contínuo em \tilde{U}_q , que designamos por

multiplicação por $\hat{\phi}$. Representamos o resultado dessa multiplicação por $\hat{\phi} \times [\psi]$. Como casos particulares temos aqueles em que

$$\phi(\hat{\lambda}) \equiv 1, \phi(\hat{\lambda}) \equiv -i\hat{\lambda} \quad \text{e} \quad \phi(\hat{\lambda}) \equiv \frac{1}{-i\hat{\lambda} - \alpha}$$

onde α é qualquer complexo pertencente ao complementar de C_q . A estes operadores vão corresponder em E_q , através da transformação de Fourier, respectivamente a identidade, a derivação D e o inverso de $D - \alpha$, como veremos adiante.

A correspondência $[\phi] \longrightarrow \hat{\phi}$ atrás definida entre as funções de A_q e os operadores em \tilde{U}_q é obviamente linear. Vejamos que ela é também injectiva. Com efeito, no caso em que $q > 0$, para todo o $\alpha \in C_{q'}$, vem $\hat{\phi} \times [\frac{1}{\alpha - \hat{\lambda}}] = [\frac{\phi(\alpha)}{\alpha - \hat{\lambda}}]$. Quando $q = 0$, cada ϕ está definida numa vizinhança de zero, sendo portanto um representante de um elemento de um A_p , com $p > 0$. A igualdade anterior permanece válida para todo $\alpha \in C_p$.

Vejamos agora a multiplicação entre estes operadores. Sabemos que se $\hat{\phi} \times [\psi] = [\vartheta]$, a função ϑ pode ser dada pela igualdade

$$\vartheta(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\phi(\gamma)\psi(\gamma)}{\gamma - \lambda} d\gamma$$

válida para todo o λ pertencente ao complementar de C_q , e toda a circunferência Γ centrada na origem do plano complexo, orientada no sentido retrógrado e de raio maior que q e menor que $|\lambda|$. Recorrendo a ela demonstra-se facilmente que, ao produto de duas funções em A_q vai corresponder o produto de respectivos operadores. Quer isto dizer que a sub-álgebra de $L[\tilde{U}_q]$ constituída por estes operadores é isomorfa de A_q . No que se segue identificaremos esta sub-álgebra com o próprio A_q .

Nestas condições podemos munir esta sub-álgebra, quer da imagem da topologia de A_q , isto é da topologia que resulta da estrutura vectorial topológica ser a de um espaço LN^* , quer da induzida pela topologia da convergência uniforme sobre os limitados de \tilde{U}_q , que denominaremos topologia τ . A topologia τ é também localmente convexa, dado que cada um destes operadores fica limitado sobre os conjuntos limitados de \tilde{U}_q . Verificamos em seguida algumas propriedades destas topologias.

7.1 Sobre as topologias definidas em A_q

A seu respeito pode demonstrar-se que toda a vizinhança de zero em A_q de acordo com a topologia τ contém uma vizinhança de zero de acordo com a

topologia LN^* . Para o efeito, consideremos um conjunto limitado B em \tilde{U}_q , uma das normas $\|\cdot\|_p$ deste espaço e um real positivo δ ; o conjunto $V_{\delta B}$ dos operadores $\hat{\phi}$ que verificam a desigualdade

$$\|\hat{\phi} \times [\vartheta]\|_p < \delta, \quad \forall [\vartheta] \in B$$

é uma vizinhança de zero de acordo com a topologia τ , e os conjuntos $V_{\delta B}$ desta forma constituem uma base do sistema fundamental de vizinhanças de zero para essa topologia. Ora dado $V_{\delta B}$, para que $\hat{\phi} \in V_{\delta B}$, bastará que exista um $m > p$, $m \in \mathbb{N}$, tal que $\phi \in A_q^m$ e

$$\|\phi\|_m^* < \frac{(\frac{1}{p} - \frac{1}{m})\delta}{qr_m}$$

onde r_m designa um majorante da norma $\|\cdot\|_m$ em B . Isto resulta naturalmente de se ter

$$\hat{\phi} \times \vartheta(\hat{\lambda}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} \frac{\phi(\gamma)\vartheta(\gamma)}{\gamma - \hat{\lambda}} d\gamma.$$

Vejam agora que existe uma vizinhança V de zero em A_q contida em $V_{\delta B}$. Para o efeito, para cada $m \in \mathbb{N}$, $m > p$, consideremos o conjunto $V_m \subset A_q^m$ dos elementos ϕ que verificam a desigualdade anterior para cada $m > p$, onde r_m continua a designar um majorante da norma $\|\cdot\|_m$ em B , e V a reunião $\cup_{m>p} V_m$. Para $m > p$, a intersecção $\cap_{m>p} V_m$ conterá V_m o que garante que V é uma vizinhança de zero em A_q e dado um elemento $\phi \in V$, ele pertencerá a um dos V_m , satisfazendo portanto a desigualdade que define $V_{\delta B}$. Como consequência, a convergência de acordo com a topologia LN^* implica a convergência de acordo com a topologia τ . Além disso, todo o conjunto limitado de acordo com a topologia LN^* é também limitado de acordo com a topologia τ . Da definição resulta ainda que a aplicação bilinear $A_q \times \tilde{U}_q \rightarrow \tilde{U}_q$ definida por este produto é separadamente contínua e aplica limitados de $A_q \times \tilde{U}_q$ em limitados de \tilde{U}_q , quando A_q está munida da topologia LN^* .

7.2 A continuidade à esquerda e à direita do produto

A continuidade à direita é de demonstração imediata. Com efeito, sendo $\hat{\phi}$ um operador, dada uma vizinhança de zero em \tilde{U}_q , seja ela $V_{\delta p} = \{[\phi] \in \tilde{U}_q : \|[\phi]\|_p < \delta\}$, se ϕ pertence a um dado A_q^m , com $m > p$, basta impormos a condição

$$\|\vartheta\|_m < \frac{1}{\|\phi\|_m^*} \frac{\frac{1}{p} - \frac{1}{m}}{q + \frac{1}{p}} \delta$$

para garantirmos que $\hat{\phi} \times [\vartheta] \in V_{\delta p}$.

Para demonstrar a continuidade à esquerda, basta verificar que dada a mesma vizinhança de zero $V_{\delta p}$ em \tilde{U}_q , para cada elemento $[\vartheta] \in \tilde{U}_q$, o conjunto $V = \cup_{m>p} V_m$ onde para cada $m \in \mathbb{N}$, $m > p$,

$$V_m = \left\{ [\phi] \in A_q : \|\phi\|_m^* < \frac{(\frac{1}{p} - \frac{1}{m})\delta}{q\|\vartheta\|_m} \right\}$$

verifica a relação

$$V \times [\vartheta] \subset V_{\delta p}.$$

É óbvio que V é uma vizinhança de zero em A_q .

7.3 A função $e^{-i\lambda z}$, $z \in \mathbb{C}$, como multiplicador em \tilde{U}_q

Com efeito, para cada $z \in \mathbb{C}$, a função $e^{-i\lambda z}$ é um elemento de A_q , pelo que a multiplicação por $e^{-i\lambda z}$ é um operador contínuo em \tilde{U}_q . A cada $[\varphi] \in \tilde{U}_q$ ele fará corresponder $e^{-i\lambda z} \times [\varphi]$. Se agora considerarmos o integral

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} e^{-i\lambda z} \times [\varphi] dz$$

onde Γ designa a usual circunferência descrita em sentido retrógrado, é fácil de verificar que ele fará corresponder a cada $z \in \mathbb{C}$ um complexo $\check{f}(z)$, e que a função \check{f} assim definida é um prolongamento analítico de uma função $f \in E_q$. Essa função é a imagem inversa de Fourier da ultradistribuição $[\varphi]$.

8 O operador derivação em E_q

Definindo a transformação de Fourier um isomorfismo entre E_q e \tilde{U}_q , ela fará corresponder a cada operador linear contínuo em E_q um operador linear contínuo em \tilde{U}_q , sendo esta correspondência biunívoca. Ao operador derivação D em E_q , por exemplo, ela faz corresponder a multiplicação por $-i\hat{z}$ em \tilde{U}_q e para todo o α pertencente ao complementar de C_q , à multiplicação por $\frac{1}{-i\hat{z}-\alpha}$ em \tilde{U}_q , ela fará corresponder o inverso de $D - \alpha$ em E_q , que representamos por $\frac{1}{D-\alpha}$.

Posto isto, sendo o conjunto das funções $\frac{1}{-i\hat{z}-\alpha}$, com α pertencente ao complementar de qualquer das vizinhanças de C_q , um conjunto limitado em A_q , de acordo com a topologia da convergência uniforme sobre os limitados de \tilde{U}_q , o conjunto dos operadores $\frac{1}{D-\alpha}$ será também limitado em $L[E_q]$.

Quer isto dizer que toda a vizinhança de C_q é um conjunto espectral de D , ver [4].

Nestas condições há um e um só homomorfismo contínuo \mathcal{H} de A_q em $L[E_q]$, tal que $\mathcal{H}(1)$ é igual à identidade em $L[E_q]$ e $\mathcal{H}(\hat{z}) = D$. Esse homomorfismo é dado por (Subsubsecção 6.5.3)

$$\mathcal{H}([\phi]) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\phi(\lambda)}{D - \lambda} d\lambda$$

onde Γ designa qualquer circunferência centrada na origem do plano complexo, orientada no sentido retrógrado, contida no domínio de holomorfismo de ϕ e de raio maior que q . No que se segue poremos $\mathcal{H}([\phi]) = \phi(D)$.

Agora dado que a transformação de Fourier ao operador $\frac{1}{D-\lambda}$ em $L[E_q]$ faz corresponder a multiplicação por $\frac{1}{-i\hat{z}-\lambda}$ em $L[\tilde{U}_q]$, para todo o $[\phi] \in A_q$ ao operador $\phi(D)$ ela fará corresponder a multiplicação por

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\phi(\lambda)}{-i\hat{z} - \lambda} d\lambda = [\phi(-i\hat{z})].$$

8.1 A solução $f \in E_q$ da equação $(D - \alpha)f = g$, $\alpha \in \mathbb{C} \setminus C_q$

Dada a imagem de Fourier $[\vartheta]$ de $g \in E_q$, a imagem de Fourier da solução $f \in E_q$ será a ultradistribuição

$$\left[\frac{1}{-i\hat{z} - \alpha} \right] \times [\vartheta] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\vartheta(\gamma)}{(-i\gamma - \alpha)(\gamma - z)} d\gamma = \left[\frac{\vartheta(\hat{z}) - \vartheta(i\alpha)}{\hat{z} - i\alpha} \right]$$

ultradistribuição esta que pertence obviamente a \tilde{U}_q . Vem

$$f(\hat{t}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\vartheta(z) - \vartheta(i\alpha)}{z - i\alpha} e^{-iz\hat{t}} dz$$

onde Γ designa a usual circunferência descrita em sentido retrógrado.

8.2 O operador translação em E_q

Dados $f \in E_q$, $[\vartheta]$ a sua imagem de Fourier e \check{f} o seu prolongamento analítico, sabemos que a translação $T_{\alpha}(f) = \check{f}(\hat{t} - \alpha)$ (onde α designa um complexo) vem dada por

$$T_{\alpha}(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \vartheta(\lambda) e^{-i\lambda(\hat{t}-\alpha)} d\lambda$$

onde Γ designa a circunferência usual. A sua imagem de Fourier será, como é fácil de calcular $[e^{i\alpha\lambda}] \times [\vartheta]$. Isto é

$$T_\alpha(f) = e^{-\alpha D} f.$$

A translação é portanto uma função do operador derivação.

8.3 As soluções em E_q da equação $\phi(D)f = 0$, $[\phi] \in A_q$

Sendo $[\phi]$ um elemento de A_q , $f \in E_q$ será uma solução da equação dada, se e só se $[\phi(-i\hat{z})] \times [\vartheta] = 0$, onde $[\vartheta] = \mathcal{F}(f)$; isto é, se e só se

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\phi(-i\lambda)\vartheta(\lambda)}{\lambda - z} d\lambda$$

for nulo qualquer que seja z pertencente ao complementar de C_q ; Γ é a usual circunferência descrita em sentido retrógrado, de raio maior que q mas menor que $|z|$. Ora este integral será nulo se e só se o produto $\phi(-i\lambda)\vartheta(\lambda) = \mu(\lambda)$ definido e contínuo sobre Γ , se prolongar como função holomorfa ao interior de Γ , isto é, como função holomorfa sobre uma vizinhança de C_q . Daqui conclui-se que

$$\vartheta(\lambda) = \frac{\mu(\lambda)}{\phi(-i\lambda)}$$

se prolonga como função meromorfa a uma vizinhança de C_q . Os seus pólos, localizados em C_q , coincidirão com os zeros de $\phi(-i\lambda)$ e serão de grau menor ou igual ao grau do correspondente zero de $\phi(-i\lambda)$ em C_q . Sendo $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ os seus pólos de graus k_1, k_2, \dots, k_m , pode escrever-se com a forma

$$\vartheta(\lambda) = \sum_{j=1}^m \frac{\beta_j}{(\lambda - \alpha_j)^{k_j}}$$

onde $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ são constantes arbitrárias. Reciprocamente, toda a função ϑ deste tipo será uma representante canónica de uma ultradistribuição cuja imagem dada por \mathcal{F}^{-1} é solução da equação $\phi(D)f = 0$.

8.4 As funções periódicas

Chamamos função periódica em E_q , de período α complexo, toda a função f neste espaço que verifica a igualdade $\check{f}(\hat{t} - \alpha) = f(\hat{t})$, ou a equação $(e^{-\alpha D} - 1)f = 0$. Ora as raízes da equação $e^{i\alpha\lambda} - 1 = 0$ são os complexos $\alpha_k = \frac{2k\pi}{\alpha}$ onde os k são os números inteiros tais que $|k| \leq \frac{q|\alpha|}{2\pi}$, sendo todas

as raízes de grau igual a 1. Se representarmos por m o maior dos k , podemos escrever as soluções com a forma

$$f(\hat{t}) = \sum_{k=-m}^m \beta_k e^{-i\frac{2k\pi}{\alpha}\hat{t}}$$

onde os β_k são constantes complexas arbitrárias. Daqui infere-se que estas funções constituem um espaço vectorial complexo de dimensão $2m + 1$.

8.5 Os valores próprios do operador $\phi(D)$, $[\phi] \in A_q$

Será valor próprio do operador $\phi(D)$, todo o complexo σ tal que a equação $\phi(-i\lambda) = \sigma$ tenha pelo menos uma solução em C_q . Isto implica que o conjunto dos valores próprios coincida com o conjunto dos valores de $\phi(-i\lambda)$ no círculo C_q . Para cada valor próprio σ , as funções próprias serão as imagens dadas por \mathcal{F}^{-1} das funções

$$\vartheta(\hat{\lambda}) = \sum_{j=1}^m \frac{\beta_j}{(\hat{\lambda} - \alpha_j)^{k_j}}$$

onde os α_j designam as raízes da equação $\phi(-i\lambda) = \sigma$, os k_j os graus dessas raízes e os β_j são constantes arbitrárias.

9 A convolução por ultradistribuições de suporte compacto

Referimo-nos a operadores da forma $\int_{\mathbb{R}} h(s)f(\hat{t} - s) ds$, onde h designa uma ultradistribuição em \mathbb{R} , pertencente a um espaço \tilde{U}_r , $r \geq 0$, e f é uma função de E_q , ver [5]. Veremos que a aplicação bilinear por eles definida é uma aplicação $\tilde{U}_r \times E_q \rightarrow E_q$ separadamente contínua, e como veremos na Parte 2, contínua. Para cada $h \in \tilde{U}_r$ define um operador linear contínuo em E_q , comutável com a translação.

9.1 As funções $f \in E_q$ como multiplicadores em \tilde{U}_r

Dado $f \in E_q$, designemos por \check{f} o seu prolongamento analítico ao plano complexo, e por ϕ_z , para cada $z \in \mathbb{C}$, a função em A_r (álgebra das funções holomorfas sobre o filtro das vizinhanças de C_r) dada por $\phi_z(\lambda) = \check{f}(z - \lambda)$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$. Sendo ϑ o representante canónico de um elemento de \tilde{U}_r , portanto representante de uma ultradistribuição de suporte compacto h , podemos

efectuar a multiplicação $[\phi_z] \times [\vartheta]$, obtendo (Secção 7) uma ultradistribuição $[\varphi_z]$, que vamos representar por $u_z(\hat{t})$; quer $[\vartheta]$ quer $[\varphi_z]$ pertencem a um mesmo espaço \tilde{U}_r de ultradistribuições, sendo por isso integráveis sobre a recta \mathbb{R} . O integral sobre \mathbb{R} define uma forma linear contínua sobre cada um destes espaços \tilde{U}_r . No caso presente podemos definir

$$\check{g}(z) = \int_{\mathbb{R}} u_z(t) dt = \int_{\Gamma} \varphi_z(\lambda) d\lambda$$

para cada $z \in \mathbb{C}$, onde Γ representa uma qualquer circunferência centrada na origem do plano complexo, de raio maior que r e orientada em sentido retrógrado. A função $\check{g}(\hat{z})$ fica assim definida em todo o plano complexo.

9.2 $\check{g}(\hat{z})$ como função inteira

Para cada $z \in \mathbb{C}$, sendo α um complexo, consideremos a razão incremental

$$\frac{\check{g}(z + \alpha) - \check{g}(z)}{\alpha} = \int_{\Gamma} \frac{\varphi_{z+\alpha}(\lambda) - \varphi_z(\lambda)}{\alpha} d\lambda.$$

Ora dado que

$$\frac{\varphi_{z+\alpha}(\lambda) - \varphi_z(\lambda)}{\alpha} = \frac{\phi_{z+\alpha}(\lambda) - \phi_z(\lambda)}{\alpha} \times [\vartheta],$$

a multiplicação $A_r \times \tilde{U}_r$ é contínua à esquerda e

$$\frac{\phi_{z+\alpha}(\lambda) - \phi_z(\lambda)}{\alpha}$$

converge para $\phi'_z(\lambda)$ de acordo com a topologia de A_r , quando $\alpha \rightarrow 0$, podemos concluir que $\check{g}(\hat{z})$ é derivável em cada ponto $z \in \mathbb{C}$, e que

$$\check{g}'(z) = \int_{\Gamma} (\phi'_z \times \vartheta)(\lambda) d\lambda.$$

9.3 $\check{g}(\hat{z})$ como prolongamento analítico de uma função $g(\hat{t}) \in E_q$

Sendo $[\varphi_z] = [\phi_z] \times [\vartheta]$, podemos escrever, para qualquer $\lambda \in \mathbb{C} \setminus C_r$,

$$\varphi_z(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{\check{f}(z - \gamma)\vartheta(\gamma)}{\gamma - \lambda} d\gamma$$

onde Γ_1 é qualquer circunferência centrada na origem do plano complexo, de raio maior que r e menor que $|\lambda|$, descrita em sentido retrógrado. Recorrendo a este integral e ao facto de qualquer que seja $k > q$,

$$\frac{\check{f}(z)}{e^{k|z|}}$$

ficar limitado sobre o plano complexo, demonstra-se então facilmente que

$$\frac{g(z)}{e^{k|z|}} = \int_{\Gamma} \frac{\varphi_z(\lambda)}{e^{k|z|}} d\lambda$$

fica também limitada sobre o plano complexo. $\check{g}(\hat{z})$ é portanto o prolongamento analítico de uma função $g(\hat{t}) \in E_q$. Podemos escrever

$$g(\hat{t}) = \int_{\mathbb{R}} h(s) f(\hat{t} - s) ds$$

e tendo em atenção a Subsecção 9.2,

$$g'(\hat{t}) = \int_{\mathbb{R}} h(s) f'(\hat{t} - s) ds.$$

9.4 A convolução por $f \in E_q$ como aplicação linear contínua de \tilde{U}_r em E_q

Sendo f um elemento de um espaço E_q , e o real $r \geq 0$, vamos considerar uma vizinhança de zero em E_q , $\{g \in E_q : \|g\|_m < \varepsilon\}$ onde ε designa um real positivo e $\|\cdot\|_m$ uma das normas que define a topologia de E_q . Então, dado \tilde{U}_q , o conjunto das funções

$$\frac{\check{f}(z - \hat{\lambda})}{e^{(q+\frac{1}{m})|z|}}, \quad z \in \mathbb{C},$$

está contido e fica limitado em A_r . Quer isto dizer que existe uma vizinhança de C_r , seja ela $C_{r+\frac{1}{s}}$, e um real positivo b tais que

$$\left| \frac{\check{f}(z - \hat{\lambda})}{e^{(q+\frac{1}{m})|z|}} \right| < b, \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad \forall \lambda \in C_{r+\frac{1}{s}}.$$

Dado então um elemento $[\varphi] \in \tilde{U}_r$, teremos

$$\frac{\check{f}(z - \hat{\lambda})}{e^{(q+\frac{1}{m})|z|}} \times [\varphi] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_s} \frac{\check{f}(z - \lambda)}{e^{(q+\frac{1}{m})|z|}} \frac{\varphi(\gamma)}{(\gamma - \hat{\lambda})} d\gamma, \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

onde Γ_s designa a fronteira de $C_{r+\frac{1}{s}}$. Consequentemente, sendo Γ uma circunferência centrada na origem do plano complexo, orientada no sentido retrógrado e de raio $\rho = 2r + \frac{1}{s}$, podemos escrever

$$\left| \int_{\Gamma} \frac{\check{f}(z - \hat{\lambda})}{e^{(r+\frac{1}{m})|z|}} \times [\varphi] d\gamma \right| < b\rho \frac{\|[\varphi]\|_s}{r}, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Se escolhermos agora a vizinhança de zero $\{[\varphi] \in \tilde{U}_q : \|[\varphi]\|_s < \frac{\varepsilon r}{b\rho}\}$, é fácil de ver que qualquer que seja $[\varphi]$ pertencente a esta vizinhança se tem

$$\left| \int_{\Gamma} \frac{\check{f}(z - \hat{\lambda})}{e^{(r+\frac{1}{m})|z|}} \times [\varphi] d\gamma \right| < \varepsilon,$$

isto é,

$$\left\| \int_{\Gamma} f(t - \lambda)\varphi(\lambda) d\lambda \right\|_m < \varepsilon.$$

A convolução por $f \in E_q$ é portanto uma aplicação linear contínua de \tilde{U}_q em E_q .

10 A multiplicação por funções características de subconjuntos da recta

Designando por $c(\hat{t})$ a função característica de um dado sub-conjunto $B \subset \mathbb{R}$, a multiplicação por $c(\hat{t})$ fará corresponder a cada função $f(\hat{t}) \in E_q$ uma função complexa definida na recta, cujo suporte está contido em B . É óbvio que os núcleos destas aplicações são sempre conjuntos fechados em E_q , o que nos permite munir o espaço imagem da imagem da topologia de E_q . Nos casos em que o núcleo desta aplicação $f(\hat{t}) \mapsto c(\hat{t}) \cdot f(\hat{t})$ se reduz à função nula, ela será injectiva, o que fará com que a topologia do espaço imagem seja isomorfa topologia de E_q . Uma condição suficiente para que isto se verifique é que o conjunto B tenha um ponto interior.

Há no entanto situações com interesse em que, embora o subconjunto B não tenha pontos interiores, a multiplicação pela função característica é uma aplicação injectiva, isto é, o seu núcleo reduz-se à função nula. Trata-se dos casos em que $B = \{n\tau : n \in \mathbb{N}_0\}$, onde \mathbb{N}_0 designa o conjunto dos números inteiros não negativos e τ um número real positivo tal que $\tau q < \pi$. O produto $c(\hat{t}) \cdot f(\hat{t})$, onde $c(\hat{t})$ é a função característica de B e $f(\hat{t}) \in E_q$, denomina-se então amostragem da função $f(\hat{t})$, de período τ , ou ainda uma discretização da função. O anulamento do produto implica que a função é nula, como demonstraremos em seguida.

10.1 A discretização em E_q

Vamos começar por analisar a imagem dada pela função $e^{\iota\tau\hat{z}}$ da circunferência $\rho = qe^{\iota\theta}$, $\theta \in [-\pi, \pi]$, em que supomos $\rho\tau < \pi$, $\rho > q$. A cada ponto desta circunferência, que representamos por Γ , a função $e^{\iota\tau z}$ fará corresponder um ponto do plano de coordenadas polares $r = e^{-\rho\tau \sin\theta}$, $\phi = \rho\tau \cos\theta$. Daqui infere-se pois que os valores mínimo e máximo de ϕ , são respectivamente $-\rho\tau$ e $\rho\tau$, e para esses valores de ϕ tem-se $r = 1$. Por sua vez a cada valor de ϕ (portanto de $\cos\theta$) vão corresponder dois θ simétricos e por consequência dois valores de r cujo produto é igual a 1.

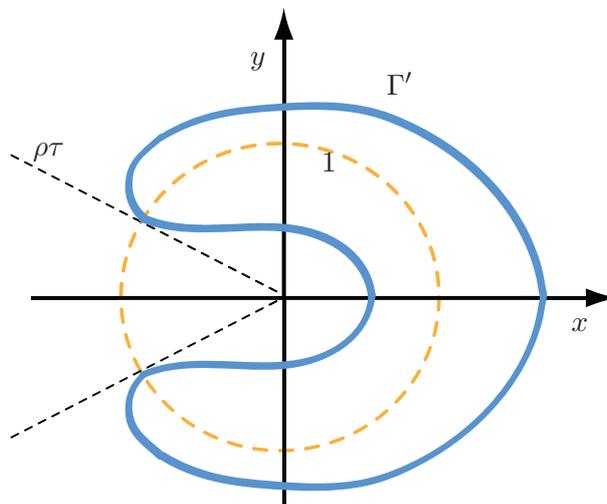


Figura 3: Imagem aproximada dada pela função $e^{\iota\tau z}$ da circunferência.

Quando $\phi = 0$, os dois valores de r são $r_1 = e^{-\rho\tau}$ e $r_2 = e^{\rho\tau}$, e são exactamente os seus valores mínimo e máximo. Eles são portanto os raios de duas circunferências que, centradas na origem do plano, limitam uma coroa circular que contém a imagem Γ' da circunferência (ver Figura 3). O conjunto $V_q = \{\lambda = e^{-\iota\tau z} : z \in C_q\}$ fica obviamente no interior desta linha, que dá uma volta em torno de cada um dos pontos de V_q . Se fizermos $\gamma = e^{-\iota\tau z}$ e $z = \frac{z}{\tau} \log \gamma$ (em que o ramo da função logaritmo é aquele em que a parte imaginária varia entre $-\pi$ e π) definimos uma aplicação bijectiva de Γ sobre Γ' e simultaneamente uma mudança de variáveis. Nestas condições, sendo $f(\hat{t})$ uma função de E_q e $[\vartheta]$ a sua imagem de Fourier, consideremos a função $\varphi(\hat{\lambda})$ definida para cada λ no complementar de Γ pela igualdade

$$\varphi(\lambda) = \frac{1}{2\pi\iota} \int_{\Gamma} \frac{\vartheta(z)}{e^{-\iota\tau z} - \lambda} dz$$

onde Γ é a referida circunferência centrada na origem de \mathbb{C} , orientada em sentido retrógrado. Mais precisamente, ela define duas funções holomorfas: uma, φ^+ nos pontos λ em torno dos quais Γ' não dá nenhuma volta, e outra φ^- nos pontos em torno dos quais Γ' dá uma volta. Ora se fizermos agora a mudança de variáveis $z = \frac{\lambda}{\tau} \log \gamma$, o integral anterior toma a forma

$$\varphi(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \frac{i}{\tau \gamma} \frac{\vartheta\left(\frac{\lambda}{\tau} \log \gamma\right)}{\gamma - \lambda} d\gamma$$

o que implica que a diferença das duas funções $\varphi^+(\hat{\lambda})$ e $\varphi^-(\hat{\lambda})$, uma exterior à linha Γ' e a outra interior, tende para $\frac{i}{\tau \gamma} \vartheta\left(\frac{\lambda}{\tau} \log \gamma\right)$ sobre a linha.

Posto isto, dado que

$$\frac{1}{e^{-i\tau z} - \lambda} = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-ik\tau z}}{\lambda^{k+1}}$$

convergindo esta série uniformemente sobre $\Gamma \times \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \geq r > r_2\}$, conclui-se que sobre $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \geq r > r_2\}$ se tem

$$\varphi(\lambda) = \frac{i}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{k+1}} \int_{\Gamma} \vartheta(z) e^{-ik\tau z} dz$$

e portanto

$$\varphi(\lambda) = i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(k\tau)}{\lambda^{k+1}}$$

o que significa a convergência uniforme para $\varphi^+(\hat{\lambda})$ sobre $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \geq r > r_2\}$. Mas então, quando os $f(k\tau)$ são todos nulos, $\varphi^+(\hat{\lambda})$ é nula, o que implica $\varphi^-(\hat{\lambda})$ ser um prolongamento analítico de $\frac{i}{\tau \gamma} \vartheta\left(\frac{\lambda}{\tau} \log \gamma\right)$ ao interior da linha, isto é $\vartheta(z)$ a ser nula. Portanto, $c(\hat{t}) \cdot f(\hat{t}) = 0$ implica $f(\hat{t}) = 0$.

10.2 Multiplicação por funções características localmente somáveis de suporte compacto e a transformação de Fourier

Sendo $c(\hat{t})$ uma função característica localmente somável e de suporte compacto a sua transformada de Fourier dada pelo integral sobre a recta

$$g(t) = \int_{\mathbb{R}} c(x) e^{itx} dx$$

é uma função de banda limitada: supomos $g \in E_s$. A multiplicação de $c(\hat{t})$ por uma exponencial $e^{-i\lambda t}$ onde λ é qualquer complexo terá por sua vez

como imagem de Fourier a função $\check{g}(t - \lambda)$. Daqui infere-se pois que sendo $f \in E_q$ e $[\varphi]$ a sua imagem de Fourier e podendo portanto escrever-se

$$f(\hat{t}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \varphi(\lambda) e^{-i\lambda\hat{t}} d\lambda$$

onde Γ é a usual circunferência descrita em sentido retrógrado, venha

$$c(\hat{t})f(\hat{t}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \varphi(\lambda)c(\hat{t})e^{-i\lambda\hat{t}} d\lambda$$

A transformada de Fourier deste produto será então

$$\int_{\mathbb{R}} c(t)f(t)e^{izt} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \varphi(\lambda)\check{g}(z - \lambda) d\lambda$$

isto é

$$\int_{\mathbb{R}} c(t)f(t)e^{izt} dt = \frac{1}{2\pi} [\varphi] * g.$$

Ora esta convolução, dado $f \in E_q$, a cada função $c(\hat{t})$ tal que $g(\hat{t}) \in E_s$, fará corresponder um elemento de E_s (Subsecção 9.4), uma imagem de Fourier que é uma função de banda limitada.

Referências

- [1] R. J. Friedland, *Sistemas lineares*, Universidade de S. Paulo, S. Paulo, 1972.
- [2] I. M. Guelfand, *Les distributions*, Tome 2, Dunod, Paris, 1964.
- [3] J. S. Silva, "Su certe classi di spazi localmente convessi importanti per le applicazioni", *Rendiconti di Matematica e delle sue Applicazioni*, Univ. Roma, Serie 5, Fase 1-2, (1955), pp. 388-410.
- [4] J. S. Silva, "Sur le calcul symbolique d'opérateurs permutables, à spectre vide ou non borné", *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, Vol. 58 (1962), pp. 219-275.
- [5] J. S. Silva, "Les séries de multipôles des physiciens et la théorie des ultradistributions", *Math. Annalen*, Vol. 174 (1967), pp. 109-142.
- [6] F. Trèves, *Topological vector spaces, distributions and kernels*, Vol. III, Purdue University (Lafayette, Indiana), Academic Press, New York, San Francisco, London 1967.