# Matemática Recreativa

Editores
*Jorge Picado e Paula Mendes Martins*

---

## Quadrados Mágicos

*Alexander Kovačec*
Departamento de Matemática
Universidade de Coimbra
e-mail: `kovacec@mat.uc.pt`

**palavras-chave:** quadrados mágicos

**keywords:** magic squares

Mago, Magia, Mágico: Derivando das palavras gregas *mágos*, *mageía*, *magikós* ($\mu\alpha\gamma o\sigma$, $\mu\alpha\gamma\eta\iota\alpha$, $\mu\alpha\gamma\iota\kappa o\sigma$), enciclopédias e dicionários tradicionais e digitais ([2],[4]) associam-nas invariavelmente a feiticeiros, astrólogos, sacerdotes da religião de Zoroastro; às ciência e arte que pretendem actuar sobre a natureza para aparentemente contrariar as suas leis; a encanto, fascínio e sedução, respectivamente.

Não é de admirar que os quadrados mágicos, definidos em ([6], p.194) como tabelas (matrizes) $n \times n$ de inteiros cujas colunas, linhas e ainda as duas diagonais exibem todas a mesma soma mágica, tivessem sido alvo de

Este artigo foi originalmente publicado no blogue $+(\&)\times$ (`www.maisevezes.com`) da autoria de Francisco Craveiro de Carvalho e Jason Bolito (Universidade de Coimbra). Ao autor do artigo e aos autores do blogue agradecemos a permissão para a sua transcrição.

admiração e encanto, e os detentores dos conhecimentos necessários para os construir atraído a atenção dos filistinos. Poucos eram os privilegiados que, na altura, sabiam o alfabeto.

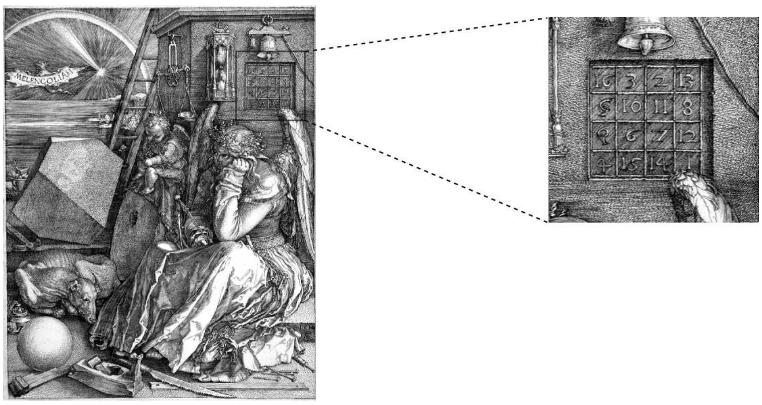

Figura 1: Melancholia I e detalhe, *Albrecht Dürer* (Alemanha, 1471-1528)

Segundo ([3], p.131), a astrologia europeia refloresceu quando a visão copernicana do mundo, primeiro divulgada por Rheticus poucos anos antes da morte de Nícolo Copérnico (1473-1543), começou a ser aceite. A terra deixou de ser o centro do universo. Com a ameaça de se ficar sem pátria, aumentou a superstição e o calendário babilónico foi reinterpretado num sistema de mágicas influências astrais. Aos diferentes corpos celestes eram atribuídos efeitos sobre o temperamento. Quem tinha nascido sob Saturno era melancólico. Veja-se a gravura da era. Os dois números centrais no quadrado mágico de Dürer dão 1514, ano em que se pensa que o quadro Melancolia I foi feito, enquanto os quadrados extremos da última linha são uma assinatura codificada: 1 e 4 indicam a primeira e a quarta letra do alfabeto alemão: A e D.

Mas examinando as datas, a viragem copernicana só pode ter impulsionado (e não iniciado) o que na altura já estava no ar. O mencionado pintor alemão renascentista Albrecht Dürer (1471-1528), um dos estudiosos da perspectiva aliás, tinha morrido bem antes da revolução copernicana, e também já antes tinha havido Heinrich Cornelius Agrippa (1486-1535). O mago de Colónia concebeu um culto de abracadabra com o qual, disse, obtinha poder sobre os demónios. Tendo ele nomeado o seu próprio cão 'Demónio' ([3]), não duvidamos disto. Agrippa escreve, em 1510, *De Occulta Philosophia* e, usando ideias de Pico della Mirandola, enaltece as virtudes mágicas de sete quadrados mágicos de ordem 3 a 9, cada um associado com os planetas astrológicos ([4]). Eis alguns:

$$\text{Saturno} \doteq \begin{matrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{matrix} \qquad \text{Júpiter} \doteq \begin{matrix} 4 & 14 & 15 & 1 \\ 9 & 7 & 6 & 12 \\ 5 & 11 & 10 & 8 \\ 16 & 2 & 3 & 13 \end{matrix} \qquad \text{Marte} \doteq \begin{matrix} 11 & 24 & 7 & 20 & 3 \\ 4 & 12 & 25 & 8 & 16 \\ 17 & 5 & 13 & 21 & 9 \\ 10 & 18 & 1 & 14 & 22 \\ 23 & 6 & 19 & 2 & 15 \end{matrix}.$$

O que nos faz descobrir, neste preciso momento que o quadrado mágico de Dürer é obtido do quadrado do Júpiter trocando as colunas 2 e 3 e depois rescrevendo as linhas por ordem inversa. Que mágica metamorfose de Júpiter para Saturno!

No Fausto (1808-33), Goethe chama 'Heinrich' ao protagonista (que na verdade era Dr. Johannes Faustus, um mago necromante e erudito do século XVI). Para o verdadeiro Agrippa, a matemática é absolutamente indispensável para a magia 'pois tudo o que se consegue por meio natural é determinado pelo número, pelo peso e pela medida. Um mago que entenda a filosofia natural e a matemática e que conheça as ciências intermédias que dela provêm – a aritmética, a música, a geometria, a óptica, a astronomia, a mecânica – pode conseguir maravilhas.' ([5], p.102)

Para um matemático moderno, mesmo que nunca antes tivesse pensado no assunto, a existência de quadrados mágicos de todas as ordens, e ainda em grande quantidade, não surpreende: para encontrar um quadrado mágico $n \times n$ escrevam-se as $2n+2$ formas lineares em $n^2$ incógnitas que definem as somas. Ponham-se estas todas iguais a uma certa constante racional. Visto que para $n = 3$, $n^2 > 2n + 2$, é expectável que existam muitas soluções racionais. Estas, se necessário, podem ser multiplicadas por inteiros e pode adicionar-se uma matriz constante para se obter uma matriz inteira positiva. O que talvez mais surpreenda é que fontes como [6] não fazem referência a tais sistemas lineares. Talvez porque existem vários métodos mais sistemáticos para construir quadrados mágicos com propriedades adicionais (que alguns livros exigem já na definição). A investigação séria começou, como tanta outra coisa matemática, com Leonhard Euler (1707-1783).

Um quadrado $n \times n$ cujas casas são pares $(g, l) \in G \times L$, com $G$ e $L$ alfabetos de $n$ letras, diz-se *greco-latino* se em cada linha e cada coluna ocorrerem todas as letras de $L$ e todas as letras de $G$, e no quadrado todos os possíveis pares de $G \times L$. (Euler usou letras gregas e latinas.)

Euler e outros usaram quadrados greco-latinos para construir quadrados mágicos. Podemos explicar um método básico que funciona para qualquer ordem ímpar. Seja $n$ ímpar.

1. Construa-se uma tabela $n \times n$, $L^* = (i + j)$ com $i, j \in \{0, \ldots, n-1\}$ e as somas definidas módulo $n$.

2. Defina-se a tabela $L$ trocando em $L^*$ as entradas $n$ e $\frac{1}{2}(n-1)$ em cada linha.

3. Defina-se a tabela $L'$ trocando em $L$ as colunas 0 e $n-1$ $(0 \leftrightarrow (n-1))$ e, analogamente, $1 \leftrightarrow n-2$, $2 \leftrightarrow n-3$,..., $\frac{1}{2}(n-1) \leftrightarrow \frac{1}{2}(n-1)$. (A coluna no meio da tabela fica então fixa.)

4. Calcule-se a soma matricial em $\mathbb{Z}$, $M = nL + L'$.

Para $n = 5$, por exemplo, temos as tabelas seguintes

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 0 | 1 | 4 | 3 | 2 | 2 | 3 | 4 | 1 | 0 | 2 | 8 | 24 | 16 | 10 | $\alpha c$ | $\beta d$ | $\epsilon e$ | $\delta b$ | $\gamma a$ |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 0 | 1 | 4 | 3 | 2 | 0 | 0 | 2 | 3 | 4 | 1 | 5 | 22 | 18 | 14 | 1 | $\beta a$ | $\epsilon c$ | $\delta d$ | $\gamma e$ | $\alpha b$ |
| 2 | 3 | 4 | 0 | 1 | 4 | 3 | 2 | 0 | 1 | 1 | 0 | 2 | 3 | 4 | 21 | 15 | 12 | 3 | 9 | $\epsilon b$ | $\delta a$ | $\gamma c$ | $\alpha d$ | $\beta e$. |
| 3 | 4 | 0 | 1 | 2 | 3 | 2 | 0 | 1 | 4 | 4 | 1 | 0 | 2 | 3 | 19 | 11 | 0 | 7 | 23 | $\delta e$ | $\gamma b$ | $\alpha a$ | $\beta c$ | $\epsilon d$ |
| 4 | 0 | 1 | 2 | 3 | 2 | 0 | 1 | 4 | 3 | 3 | 4 | 1 | 0 | 2 | 13 | 4 | 6 | 20 | 17 | $\gamma d$ | $\alpha e$ | $\beta b$ | $\epsilon a$ | $\delta c$ |
| $L^*$ | | | | | | | $L$ | | | | | $L'$ | | | | | $M = 5L + L'$ | | | | | $L\&L'$ | | |

Confirmámos assim, com um exemplo, o teorema seguinte provado em Dénes e Keedwell ([6], p.209).

**Teorema.** *Dado um inteiro positivo ímpar $n$, seguindo os passos 1, 2, 3 e 4 acima referidos, obtém-se um quadrado mágico $M$ de entradas distintas* $0, 1, 2, \ldots, n^2 - 1$ *e constante mágica* $\frac{1}{2}n(n^2 - 1)$.

E onde entraram acima os quadrados greco-latinos? Se usarmos em $L$ as letras $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ em lugar de $0, 1, 2, 3, 4$, e em $L'$, $a, b, c, d, e$, e sobrepusermos $L$ e $L'$ obtemos a tabela $L\&L'$. Esta é um quadrado greco-latino. É composta pelos dois quadrados latinos $L$ e $L'$, isto é, quadrados $n \times n$ que contenham todas as letras de um alfabeto de $n$ letras em cada coluna e linha.

Euler conjecturou que não podiam existir quadrados greco-latinos de ordem 6 e, mais geralmente, de ordem $4k + 2$. Esta conjectura mostrou-se verdadeira para $k = 0$ e $k = 1$ (G. Tarry, 1900), mas foi destruída em 1960 por R.C. Bose, S.S. Shrikande e R.T. Parker. Com uma prova, na altura sensacional, exposta em [6], eles mostraram que existem quadrados greco-latinos de qualquer ordem, excepto 2 e 6. Em [6] também se mostra que todo o quadrado greco-latino composto de latinos com elementos distintos nas diagonais pode ser usado para construir um quadrado mágico $n \times n$ com as restantes propriedades referidas no teorema.

Diz Euler que veio a estudar o problema dos quadrados greco-latinos por uma questão que a czarina Catarina II (a Grande) lhe pôs quanto a um arranjo natural em forma quadrática de trinta e seis oficiais provindos de 6 regimentos e com 6 patentes. A tabela $L\&L'$ conteria a resposta se o problema tivesse sido formulado com vinte e cinco oficiais provindos de 5 regimentos e com 5 patentes. Agora adivinhe o leitor qual foi a pergunta de Catarina e veja [1] e [8] para a confirmação. Aí pode ainda ver como usar quadrados latinos e greco-latinos para planear experiências estatísticas (ver [8] seguido de [6]), em estudos sobre o plano projectivo, para o estudo de grupos e quasi-grupos, e para a teoria dos códigos (tudo isto em [6], obra enciclopédica do seu tempo (1974), com 550 páginas, que, entretanto já tem sucessor [7]).

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| H | E | A | R | T |
| E | M | B | E | R |
| A | B | U | S | E |
| R | E | S | I | N |
| T | R | E | N | D |

| | | |
|---|---|---|
| P | O | R |
| F | I | M |

são por vezes comparados com quadrados mágicos, quadrados cujas casas são letras que se compõem de tal forma que tanto as linhas como as colunas dão palavras com significado. Um lindo exemplo está aqui; magicamente, é ainda simétrico!

| | |
|---|---|
| 1 | 11 |
| 11 | 1 |