Existe um Sudoku com 16 pistas?

Paula Mendes Martins
CMAT, Departamento de Matemática e Aplicações
Universidade do Minho
e-mail: `pmendes@math.uminho.pt`

Jorge Picado
CMUC, Departamento de Matemática
Universidade de Coimbra
e-mail: `picado@mat.uc.pt`

Resumo: Nesta pequena nota damos notícia da resolução recente do *problema do número mínimo de pistas de um Sudoku*, um problema importante no estudo matemático do Sudoku, que se manteve em aberto por muitos anos.

Abstract: In this short note we report on the recent solution of the *problem of the fewest number of starting clues of a Sudoku puzzle*, a long-standing problem for those who study the mathematics of Sudoku.

1 O problema do número mínimo de pistas

Existem $9 \times 9 = 81$ quadrados numa grelha de um Sudoku. Nos *puzzles Sudoku* alguns desses quadrados estão preenchidos com algarismos (as *pistas*) de modo a que exista precisamente <u>uma</u> maneira de completar a grelha (de acordo com regras que toda a gente conhece). Tipicamente, nos jornais e revistas são dadas cerca de 25 pistas. Podemos diminuir esse número, tornando os puzzles ainda mais difíceis?

Claro que se diminuirmos muito esse número, corremos o risco do puzzle passar a ter várias soluções, deixando de ser <u>válido</u>. Por exemplo, a grelha inicial com 16 pistas da Figura 1 não é um puzzle válido pois admite duas soluções (trocando entre si os 8's e os 9's, como indicado na figura).

5		2				4		
			7	1				3
					4	6		
	7		2					
	1							
6					2			
				3			1	
4								

5	6	2	3	$^{8}9$	$^{9}8$	4	7	1
$^{8}9$	4	$^{9}8$	7	1	6	2	5	3
1	3	7	4	2	5	$^{8}9$	$^{9}8$	6
3	5	$^{8}9$	1	$^{9}8$	4	6	2	7
$^{9}8$	7	4	2	6	3	1	$^{8}9$	5
2	1	6	$^{8}9$	5	7	3	4	$^{9}8$
6	$^{9}8$	1	5	4	2	7	3	$^{8}9$
7	2	5	6	3	$^{8}9$	$^{9}8$	1	4
4	$^{8}9$	3	$^{9}8$	7	1	5	6	2

Figura 1. Puzzle Sudoku com 16 pistas e duas soluções

Isto mostra que, apesar de não precisarmos de saber matemática, nem mesmo aritmética, para resolver um puzzle Sudoku — basta raciocinarmos de forma lógica —, o puzzle motiva uma série de problemas matemáticos muito interessantes [1, 3, 8]. O problema acima levantado (muito conhecido por estar em aberto há muito tempo) é um deles, e é habitualmente formulado na seguinte forma:

Problema. *Qual o número mínimo P de pistas que um puzzle válido pode ter?*

Não é difícil concluir que $P \leq 17$ pois existem muitos exemplos, como o da Figura 2, de puzzles válidos com 17 pistas (Gordon Royle mantém em [6] uma colecção de 49 151 puzzles válidos com 17 pistas!).

			8		1			
							4	3
5								
				7		8		
						1		
	2			3				
6							7	5
		3	4					
			2			6		

2	3	7	8	4	1	5	6	9
1	8	6	7	9	5	2	4	3
5	9	4	3	2	6	7	1	8
3	1	5	6	7	4	8	9	2
4	6	9	5	8	2	1	3	7
7	2	8	1	3	9	4	5	6
6	4	2	9	1	8	3	7	5
8	5	3	4	6	7	9	2	1
9	7	1	2	5	3	6	8	4

Figura 2. Puzzle com 17 pistas e solução única

Podemos baixar o limite superior de P para 16? Até hoje ninguém encontrou nenhum exemplo de um puzzle válido com 16 pistas. O melhor que se conseguiu foi encontrar exemplos como o da Figura 1, com 16 pistas e exactamente duas soluções, o que motivou a seguinte conjectura:

Conjectura. $P = 17$.

(Atenção: isto não significa que todos os sudokus contenham um puzzle válido com 17 pistas — de facto, só uns poucos contêm —; significa que nenhum sudoku contém um puzzle válido com 16 pistas.)

Tem havido muita discussão sobre esta conjectura, incluindo algumas provas erradas, nos blogues de discussão sobre o assunto (`forum.enjoysudoku.com` e `www.setbb.com/sudoku`). Em particular, tem-se tentado resolver o problema usando somente matemática (sem a ajuda de computadores), mas essas tentativas têm-se revelado infrutíferas. Com efeito, é muito fácil concluir que um puzzle com 7 pistas terá sempre múltiplas soluções (porque dois dos algarismos em falta nas pistas podem ser sempre trocados entre si em qualquer solução), mas quando passamos para 8 pistas já parece ser muito difícil encontrar um argumento teórico que justifique o facto do puzzle continuar a ter múltiplas soluções. Pior ainda será com 16 pistas! Tudo indica estarmos ainda muito longe de uma solução puramente matemática.

Assim, todos os ataques mais prometedores ao problema têm sido realizados na base da *força bruta* e alguma *combinatória*, tentando verificar exaustivamente (com a ajuda de supercomputadores) todas as hipóteses possíveis. Como?

O algoritmo óbvio de pesquisa exaustiva, dentro de um dado Sudoku, de um conjunto de 16 pistas que constitua um puzzle válido, testa todos os subconjuntos de cardinal 16 do Sudoku dado, à procura de um que tenha o Sudoku inicial como solução única. Claro que esta estratégia conduz à solução do problema, mas parece ser impraticável. De facto, só a pesquisa numa grelha completa de Sudoku já consumirá muito tempo pois o número de subconjuntos de cardinal 16 num conjunto com 81 elementos é igual a

$$\binom{81}{16} \approx 3,4 \times 10^{16}.$$

Mas não temos que testar só uma grelha. Existem (ver [2])

$$6\,670\,903\,752\,021\,072\,936\,960 \approx 6,7 \times 10^{21}$$

grelhas completas de sudoku! Claro que não é necessário analisar todas elas. Por exemplo, não alteramos a natureza do Sudoku se permutarmos os seus algarismos pois é evidente que a grelha depois de permutada conterá um puzzle com 16 pistas se e só se a grelha inicial contém um puzzle com 16 pistas (podemos até usar quaisquer 9 símbolos para representar os diferentes algarismos). Além da renumeração da grelha, podemos aplicar outras *transformações de equivalência* que não alteram a natureza da grelha:

- Permutações: das filas dentro de cada bloco ou dos blocos (um *bloco* de linhas – ou colunas – é o conjunto de linhas – ou colunas – 1-3, 4-6 ou 7-9).
- Transposição da grelha.

Estas transformações de equivalência, com a operação de concatenação, formam um grupo. Diz-se que dois Sudokus são *equivalentes* se um se pode obter do outro por uma sequência de transformações de equivalência (ou seja, por um elemento daquele grupo). Trata-se de uma relação de equivalência e é fácil provar que

> *Um Sudoku contém um puzzle válido com 16 pistas se e só se todos os sudokus a ele equivalentes contêm um puzzle válido com 16 pistas.*

Então será suficiente realizar a pesquisa num conjunto de representantes de todas as classes desta relação de equivalência. Contudo, mesmo após esta redução, o número de grelhas continua a ser muito grande: o grupo das transformações de equivalência tem ordem $9! \times 6^4 \times 6^4 \times 2$ e usando o Lema de Burnside da teoria dos grupos é possível concluir que existem exactamente 5 472 730 538 classes de equivalência [7]. Temos assim que testar todas as $3,4 \times 10^{16}$ grelhas com 16 algarismos contidas em cada um destes 5 472 730 538 Sudokus! E para isso, precisamos de ter à partida um conjunto enumerado de representantes dessas classes de equivalência...

Esta estratégia de resolução tem pois esbarrado sempre na complexidade computacional da tarefa. Como afirmou Royle no seu blogue ([6]) a 3 de Janeiro de 2011: "Doing the numbers suggests that something clever will be needed to solve this; even projected computer advances won't be enough to resolve it in my lifetime...".

Surpreendentemente, no passado mês de Janeiro, este problema parece ter sido ultrapasssado e a conjectura foi finalmente resolvida, na afirmativa, por Gary McGuire, Bastian Tugemann e Gilles Civario em [5]. Estes conseguiram dar a volta ao problema de uma forma inteligente, analisando matematicamente os chamados *conjuntos inevitáveis* de pistas (um subconjunto S de pistas numa grelha completa G de um Sudoku é *inevitável* se o complemento $G \setminus X$ pode ser completado num Sudoku de múltiplas maneiras), o que lhes permitiu reduzir muito o número de casos a pesquisar, obtendo a solução em tempo útil. A prova foi realizada com a ajuda de um novo algoritmo e de mais de 7 milhões de horas de trabalho computacional realizado por alguns supercomputadores ao longo de todo o ano de 2011. Todos os pormenores sobre esta abordagem encontram-se em [4] e [5].

2 Variantes do problema

2.1. A solução do problema oposto ao problema do número mínimo de pistas (*determinação do número máximo de chaves que não garante uma solução única*) é bem conhecida: 77. De facto, é muito fácil ver que com 80, 79 ou 78 pistas dadas, existindo solução, esta é única. Mas o mesmo já não se pode garantir para 77 pistas, como o exemplo seguinte mostra:

		3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	1	2	3
7	8	9	1	2	3	4	5	6
		4	3	9	8	5	6	7
8	6	5	2	7	1	3	9	4
9	3	7	6	4	5	8	1	2
3	4	1	8	6	2	9	7	5
5	7	2	9	1	4	6	3	8
6	9	8	5	3	7	2	4	1

$^{1}2$	$^{2}1$	3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	1	2	3
7	8	9	1	2	3	4	5	6
$^{2}1$	$^{1}2$	4	3	9	8	5	6	7
8	6	5	2	7	1	3	9	4
9	3	7	6	4	5	8	1	2
3	4	1	8	6	2	9	7	5
5	7	2	9	1	4	6	3	8
6	9	8	5	3	7	2	4	1

Figura 3. Puzzle com 77 pistas e duas soluções

2.2. A grelha da Figura 4 detém o recorde mundial da grelha com o maior número conhecido de puzzles com 17 pistas: 29, todos descobertos por Gordon Royle [6] (cf. [5]). Este recorde pode ser melhorado?

6	3	9	2	4	1	7	8	5
2	8	4	7	6	5	1	9	3
5	1	7	9	8	3	6	2	4
1	2	3	8	5	7	9	4	6
7	9	6	4	3	2	8	5	1
4	5	8	6	1	9	2	3	7
3	4	2	1	7	8	5	6	9
8	6	1	5	9	4	3	7	2
9	7	5	3	2	6	4	1	8

Figura 4. Sudoku que contém exactamente 29 puzzles com 17 pistas

2.3. Muitos puzzles Sudoku como os da Figura 5 (transcritos de [8] e [9], respectivamente) são *rotacionalmente simétricos*, no sentido em que uma rotação de 180° da grelha resulta numa grelha com um padrão semelhante na localização das pistas (este tipo de puzzles é muito comum, por razões estéticas). O que se pode dizer sobre o número mínimo P neste tipo de puzzles?

Bem, neste caso, o limite superior de P passa para 18 (repare que os puzzles da Figura 5 são exemplos de tais puzzles) mas ainda não se conhece o seu valor exacto:

Conjectura. *Nos puzzles rotacionalmente simétricos,* $P = 18$.

É expectável que o mesmo tipo de análise resolva o problema num futuro próximo...

Deixamos para o leitor o desafio de resolver os puzzles da Figura 5.

8								
				6			3	
1		2	4					
5					7			
	3						6	
			1					2
					5	2		1
	8			7				
								4

					4			8
				6	9			
							1	3
		8			3			
		4				6		
			5			2		
2	9							
			1	4				
7			2					

Figura 5. Puzzles rotacionalmente simétricos com 18 pistas

Referências

[1] Jean-Paul Delahaye, "The Science behind Sudoku", *Scientific American*, Vol. 294, No. 6 (2006), pp. 81-87.

[2] Bertram Felgenhauer e Frazer Jarvis, "Mathematics of Sudoku I", *Mathematical Spectrum*, Vol. 39, No. 1 (2006), pp. 15–22.

[3] Agnes M. Herzberg e M. Ram Murty, "Sudoku Squares and Chromatic Polynomials", *Notices of the AMS*, Vol. 54, No. 6 (2007), pp. 708-717.

[4] Gary McGuire, "Gary McGuire's Sudoku Page", `www.math.ie/checker.html`, consultada em 8 de Maio de 2012.

[5] Gary McGuire, Bastian Tugemann e Gilles Civario, "There is no 16-Clue Sudoku: Solving the Sudoku Minimum Number of Clues Problem", *preprint* arXiv:1201.0749 (Janeiro 2012), 36 páginas.

[6] Gordon F. Royle, "A collection of 49,151 distinct Sudoku configurations with 17 entries", `http://mapleta.maths.uwa.edu.au/~gordon/sudokumin.php`, consultada em 8 de Maio de 2012.

[7] Ed Russell e Frazer Jarvis, "Mathematics of Sudoku II", *Mathematical Spectrum*, Vol. 39, No. 2 (2007), pp. 54-58.

[8] Laura Taalman, "Taking Sudoku Seriously", *Math Horizons*, Vol. 15 (Setembro 2007), pp. 5-9.

[9] Laura Taalman, "How Few Sudoku Clues Are Enough?", *MAA Focus*, Vol. 32, No. 2 (2012), pp. 19.