

# História da Matemática

Editor  
*Luís Saraiva*

---

## OS LOGARITMOS E AS SUAS APLICAÇÕES NAS CIÊNCIAS NÁUTICAS – UM APONTAMENTO HISTÓRICO

*Carlos M. Lemos*

Instituto de Estudos Superiores Militares - CISDI, e Escola Naval - CINAV  
e-mail: oliveira.lemos@marinha.pt

**Resumo:** Desde a sua introdução no início do século XVII, os logaritmos desempenharam um papel importante na matemática, primeiro como ferramenta de cálculo e depois no desenvolvimento da análise e da descrição matemática dos fenómenos naturais.

Neste artigo, é apresentado um apontamento histórico sobre a génese dos logaritmos e os métodos de cálculo das primeiras tabelas de logaritmos. É feita uma referência às descobertas sucessivas das propriedades analíticas das funções logarítmicas, que conduziram a métodos de cálculo mais eficientes e à resolução de muitos problemas científicos importantes.

É referida a importância dos logaritmos em muitos problemas das ciências náuticas, particularmente da astronomia náutica e da cartografia, com ênfase na concepção e desenvolvimento prático de métodos de determinação do ponto astronómico a bordo dos navios por parte de ilustres navegadores da Marinha Portuguesa, adaptados ao cálculo com logaritmos. Por fim, são apresentados alguns exemplos de problemas actuais das ciências náuticas cuja solução pode ser expressa em termos dos logaritmos naturais ou decimais.

Concluiu-se que, embora o seu valor como ferramenta computacional tenha desaparecido com o advento das calculadoras eletrônicas e dos computadores, o estudo dos logaritmos, da sua história e das suas aplicações é um tema com grande interesse a actualidade.

**Palavras-chave:** Logaritmos; Ciências Náuticas; História; Astronomia Náutica.

## 1 Introdução

Nos nossos dias, o ensino da matemática tende frequentemente para a aplicação “mecanicista” de técnicas apoiada numa notação eficiente, orientada para a resolução de exemplos e problemas, sem estimular uma compreensão suficientemente profunda das ideias e dos conceitos. O estudo da história da matemática é uma excelente forma de mitigar esta deficiência. Permite-nos compreender a génese e o desenvolvimento das grandes ideias, tal como surgiram e tomaram forma na mente dos grandes matemáticos.

A história dos logaritmos é um exemplo interessante do que acabamos de referir. Desde a sua introdução no início do século XVII, desempenharam um papel essencial no desenvolvimento científico, como instrumento auxiliar do cálculo aritmético e na descrição de muitos problemas das ciências naturais. Mesmo quando eram utilizados de forma intensiva, o seu estudo resumia-se aos procedimentos de consulta das tabelas de logaritmos, sendo geralmente omitido em aspectos extremamente interessantes e instrutivos, tais como os processos de construção das primeiras tabelas de logaritmos ou a importância da utilização das séries infinitas para tornar essa construção muito mais rápida e eficiente. Hoje, os estudantes das disciplinas de análise matemática aplicam com destreza as fórmulas de diferenciação e integração das funções  $e^x$  e  $\ln x$ , mas poucos terão compreendido a natureza tão especial do número  $e = 2,718282\dots$  e conseqüentemente daquelas funções.

Neste artigo, é apresentado um apontamento histórico sobre a génese e evolução dos logaritmos, primeiro como auxiliares de cálculo na trigonometria e na astronomia, depois como instrumento de cálculo de uso generalizado (com as tabelas de logaritmos decimais e as réguas de cálculo) e posteriormente tomados como funções de importância central na análise matemática e em muitas áreas da ciência.

A invenção dos logaritmos representou um avanço enorme no cálculo aritmético, que na prática multiplicou o tempo de vida dos astrónomos, dos cientistas e dos engenheiros, o que se revelou decisivo para o progresso

científico e tecnológico nos três séculos seguintes, até ao surgimento de uma nova revolução: o computador digital.

Os logaritmos foram um elemento essencial no desenvolvimento da astronomia náutica. Até ao surgimento das tabelas de inspecção directa (já na segunda metade do século XX) e posteriormente das calculadoras electrónicas, estiveram na base de todos os métodos para a determinação da posição astronómica no mar. A relação entre os logaritmos e a astronomia náutica é pois da máxima relevância histórica.

Na concepção de métodos de cálculo para a resolução do chamado “triângulo de posição” muito se distinguiram brilhantes oficiais da Marinha Portuguesa, como os comandantes Francisco Penteadó, Fontoura da Costa e Azevedo Coutinho (sem esquecer as contribuições do Almirante Gago Coutinho para os métodos de traçado rápido de rectas de altura na navegação aérea astronómica). Como não podia deixar de ser, o presente artigo contém uma referência aos métodos desenvolvidos por estes ilustres navegadores portugueses, cuja principal particularidade era a adaptação das fórmulas da trigonometria esférica ao cálculo eficiente com tabelas de logaritmos, cuja disposição especial também conceberam.

Para além da astronomia náutica, os logaritmos surgem também em muitos outros problemas das ciências náuticas, nomeadamente nos campos da cartografia ou a acústica. Assim, é feita uma pequena referência a alguns desses problemas, com maior interesse prático e histórico.

## 2 Antecedentes

No início do século XVII, estava em marcha a revolução do pensamento científico que iria determinar a evolução da ciência nos séculos seguintes. Os dogmas foram substituídos pela observação, pelo cálculo e pelo pensamento crítico, que passaram a ser os fundamentos para a explicação dos fenómenos naturais. A astronomia foi uma das ciências nas quais essa revolução produziu mudanças mais profundas, com os trabalhos de Copérnico, Galileu, Kepler e mais tarde Newton a deitar por terra teorias que tinham sido aceites durante séculos. O progresso da astronomia passou a depender da capacidade de realizar manualmente um grande número de cálculos para a determinação das posições dos astros, que envolviam multiplicações de divisões dos valores das funções trigonométricas, muito mais morosas e susceptíveis a erros que as adições e subtracções.

Surgiu assim a ideia de transformar as multiplicações e divisões em adições e subtracções, muito mais fáceis e rápidas de executar. Por essa altura,

já era bem conhecido que em certas condições era possível multiplicar ou dividir termos de uma progressão geométrica adicionando ou subtraindo os expoentes respectivos.

Michael Stifel referiu pela primeira vez este princípio para o caso de expoentes racionais, na sua obra *Arithmetica Integra*, publicada em Nuremberga em 1544, na qual considerou o seguinte exemplo:

|     |     |     |   |   |   |   |    |    |    |
|-----|-----|-----|---|---|---|---|----|----|----|
| -3  | -2  | -1  | 0 | 1 | 2 | 3 | 4  | 5  | 6  |
| 1/8 | 1/4 | 1/2 | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 |

Verificou que uma multiplicação de termos da segunda progressão correspondia a uma adição dos termos correspondentes na primeira. O problema está em estender este princípio para números que não figurem na progressão, de modo a determinar uma sucessão de expoentes que permita “preencher os intervalos” entre os termos da progressão geométrica. Mas como Stifel não conhecia as frações decimais (cujo uso só seria vulgarizado no final do século XVI), não teve condições para realizar os cálculos aritméticos que permitiriam materializar a ideia de “preencher os intervalos” entre os termos da progressão geométrica e construir uma tabela dos expoentes correspondentes.

Outro método para multiplicar e dividir números de forma aproximada, utilizado pelos matemáticos e astrónomos do século XVI e princípios do século XVII, era conhecido pelo nome de *prostafarese*<sup>1</sup>. Este método foi concebido por Johannes Werner (1468-1522) e utilizado por Tycho Brahe (1546-1601), Clavius (1538-1612) e Bürgi (1552-1632). A primeira descrição impressa surgiu em 1588, na obra *Fundamentum Astronomicum*, de Nicolas Rimerus. O método era baseado nas seguintes fórmulas da trigonometria:

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} (\cos(a + b) + \cos(a - b))$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} (\cos(a - b) - \cos(a + b))$$

Usando a primeira destas fórmulas, o produto (aproximado) de dois números  $x$  e  $y$  pode ser obtido através do algoritmo seguinte: *i*) aplicar um factor de escala a  $x$  e  $y$  de modo a que caiam no intervalo  $] - 1, 1[$ ; *ii*) determinar dois ângulos cujos cossenos (ou senos) sejam os números obtidos no passo anterior, e calcular a soma e a diferença entre esses ângulos; *iii*) determinar

<sup>1</sup>A palavra “prostafarese” deriva das palavras gregas πρόσθεσις (adição) e ἀφαίρεσις (subtração).

os cossenos dos dois ângulos obtidos no passo anterior e calcular a média; *iv*) inverter os factores de escala aplicados no primeiro passo e obter o resultado final. Para a divisão, é necessário dispor de tabelas com os valores de secante ou da cossecante.

As fórmulas da prostafarese facilitavam o cálculo dos produtos na fórmula fundamental da trigonometria esférica<sup>2</sup>:

$$\cos c = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \cos C$$

uma vez que dois dos produtos podiam ser calculados directamente. Obtido o produto  $\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$ , a prostafarese permitia calcular o produto do resultado por  $\cos C$ . Apesar de facilitar os cálculos, o método era ainda assim moroso. Tinha as desvantagens de necessitar de tabelas de cossenos (para as multiplicações) e secantes (para as divisões) muito precisas, e de a adição e subtracção de ângulos expressos em graus, minutos e segundos, ser mais lenta do que a adição e subtracção de números racionais.

Regressando à ideia de utilizar expoentes para obter um método prático de substituição das multiplicações e divisões por adições e subtracções, consideremos agora um número  $b > 0$ . O problema de determinar, para cada número  $x$ , um número  $y$  tal que  $x = b^y$ , pode ser resolvido de duas formas. A primeira, é considerar um valor de  $b$  muito próximo de 1 e valores de  $y$  inteiros, de que resulta uma progressão geométrica  $x_n = b^n$  de variação suficientemente lenta para que os valores do expoente correspondentes a números que não figuram na progressão geométrica  $x_n$  possam ser calculados por interpolação. A segunda consiste em obter aproximações racionais para  $y$  para um dado conjunto de valores de  $x$ , o que envolve a extracção de raízes. Ambos os métodos foram usados na construção das primeiras tabelas de logaritmos, o primeiro por Napier e Bürgi, e o segundo por Briggs.

---

<sup>2</sup>Nesta fórmula,  $a$ ,  $b$ , e  $c$  são os lados do triângulo esférico e  $C$  é o ângulo oposto ao lado  $c$  (ângulo diedro entre os planos das circunferências máximas que contêm os lados  $a$  e  $b$ ).

### 3 John Napier e a invenção dos logaritmos

*“... cast away from the work itself even the very numbers themselves that are to be multiplied, divided, and resolved into roots, and putteth other numbers in their place which perform much as they do, only by addition and subtraction, division by two and division by three.”*

John Napier, in *“Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio”*

John Napier (1550-1617) nasceu em Merchiston, próximo de Edinburgo, no seio de uma família nobre escocesa. Dedicou-se à teologia, à matemática e à astronomia. Deduziu as fórmulas da trigonometria esférica conhecidas por “analogias de Napier” e preocupou-se desde cedo com o problema da simplificação dos cálculos aritméticos. Inventou um método mecânico para simplificar as multiplicações e divisões através de um conjunto de barras numeradas conhecidas por “ossos de Napier” e inventou de forma independente a notação do ponto decimal, embora as frações decimais tenham sido introduzidas por Simon Stevin (1548-1620). Contudo, foi a invenção dos logaritmos<sup>3</sup> que o imortalizou, por ter representado um avanço no cálculo aritmético só comparável à invenção do sistema de numeração hindu-árabe e à introdução as frações decimais (Hobson, 1914, [9]).

Napier publicou a primeira tabela de logaritmos em 1614, na sua obra *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*. Essa tabela contém os logaritmos dos senos e cossenos dos ângulos compreendidos entre  $0^\circ$  e  $90^\circ$  com intervalos de um minuto. No tempo de Napier, o seno e o cosseno não eram interpretados como quocientes, mas sim como comprimentos de linhas trigonométricas associadas a um círculo de raio arbitrário<sup>4</sup>. Napier escolheu um raio igual a  $10^7$  de modo a que o seno de  $90^\circ$  tomasse esse valor.

---

<sup>3</sup>A palavra “logaritmo” deriva das palavras gregas λογος (logos), que significa “razão”, e αριθμος (arithmos), que significa “número”. O logaritmo é portanto um número que indica uma razão (ou quociente), uma vez que a diferença entre dois logaritmos determina o quociente (razão) entre os números aos quais eles estão associados, de forma que a uma progressão aritmética de logaritmos corresponde a uma progressão geométrica de números. O termo “logaritmo” foi introduzido por Napier, que também designou os logaritmos por “números artificiais”.

<sup>4</sup>O seno era definido como o comprimento da metade da corda de um círculo, correspondente à metade do ângulo ao centro subtendido por essa corda. Em meados do século XIX, já depois de Euler ter introduzido o conceito de função, as linhas trigonométricas de uma circunferência de raio R eram designadas por  $\text{Sen } \theta$ ,  $\text{Cos } \theta$ , etc., e as de uma circunferência de raio unitário por  $\text{sen } \theta$ ,  $\text{cos } \theta$ , etc., como hoje fazemos. Esta notação foi usada por exemplo por Airy (1855, [2]) no seu tratado sobre trigonometria.

| $n$ | $x_n$  | $n$ | $x_n$  | $n$ | $x_n$   |
|-----|--------|-----|--------|-----|---------|
| 0   | 1.0000 | 9   | 2.3579 | 18  | 5.5599  |
| 1   | 1.1000 | 10  | 2.5937 | 19  | 6.1159  |
| 2   | 1.2100 | 11  | 2.8531 | 20  | 6.7275  |
| 3   | 1.3310 | 12  | 3.1384 | 21  | 7.4002  |
| 4   | 1.4641 | 13  | 3.4523 | 22  | 8.1403  |
| 5   | 1.6105 | 14  | 3.7975 | 23  | 8.9543  |
| 6   | 1.7716 | 15  | 4.1772 | 24  | 9.8497  |
| 7   | 1.9487 | 16  | 4.5950 | 25  | 10.8347 |
| 8   | 2.1436 | 17  | 5.0545 |     |         |

Tabela 1: Os primeiros 25 termos da progressão geométrica  $x_n = 1,1^n$ .

É interessante seguir o método de cálculo usado por Napier, apresentado na sua obra *Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio*, publicada em 1619 (dois anos após a sua morte). Embora este método nos possa hoje parecer complicado e obscuro, o seu estudo constitui uma excelente ilustração da forma como as descobertas e os conceitos da matemática surgem e se desenvolvem. Antes de descrever o método de Napier, iremos ilustrar a aplicação da ideia de construir tabelas de logaritmos com base em progressões geométricas. Consideremos a progressão geométrica  $x_n = 1,1^n$ , com  $n = 0, 1, 2, \dots$ , e tomemos o número de termos necessário para abranger o intervalo  $[1, 10]$ . A Tabela 1 mostra que são necessários 25 termos, e a Figura 1 ilustra graficamente o resultado obtido. Para obter os logaritmos decimais aproximados, podemos efectuar uma interpolação inversa, calculando valores  $n(x)$  correspondentes aos valores de  $x$  para os quais pretendemos obter os logaritmos e dividindo pelo valor de  $n(10)$ , de modo a que  $n(10) = 1$  (para que  $\log 10 = 1$ ). A Tabela 2 mostra os valores obtidos, considerando números no intervalo  $[1, 10]$  com um espaçamento de 0,1. Podemos verificar que, apesar de o número de termos da progressão ser modesto, conseguimos ainda assim obter uma precisão de 3 casas decimais<sup>5</sup>. A Figura 2 mostra que, na escala considerada, o resultado aproximado não se distingue graficamente do resultado “exacto”.

Após esta breve digressão, regressemos ao século XVII e ao trabalho pioneiro de Napier, que partiu da construção de uma progressão geométrica

<sup>5</sup>A qualidade da aproximação deve-se ao facto de ter sido usada uma interpolação inversa com uma spline de grau 3, em vez de uma simples interpolação linear.

| $x$    | $n(x)$ | $x$    | $n(x)$ | $x$     | $n(x)$ |
|--------|--------|--------|--------|---------|--------|
| 1.0000 | 0.0000 | 4.1000 | 0.6126 | 7.1000  | 0.8510 |
| 1.1000 | 0.0414 | 4.2000 | 0.6233 | 7.2000  | 0.8571 |
| 1.2000 | 0.0790 | 4.3000 | 0.6332 | 7.3000  | 0.8633 |
| 1.3000 | 0.1136 | 4.4000 | 0.6431 | 7.4000  | 0.8695 |
| 1.4000 | 0.1457 | 4.5000 | 0.6530 | 7.5000  | 0.8751 |
| 1.5000 | 0.1758 | 4.6000 | 0.6629 | 7.6000  | 0.8806 |
| 1.6000 | 0.2040 | 4.7000 | 0.6719 | 7.7000  | 0.8862 |
| 1.7000 | 0.2300 | 4.8000 | 0.6809 | 7.8000  | 0.8918 |
| 1.8000 | 0.2551 | 4.9000 | 0.6899 | 7.9000  | 0.8974 |
| 1.9000 | 0.2784 | 5.0000 | 0.6990 | 8.0000  | 0.9030 |
| 2.0000 | 0.3007 | 5.1000 | 0.7076 | 8.1000  | 0.9086 |
| 2.1000 | 0.3220 | 5.2000 | 0.7158 | 8.2000  | 0.9139 |
| 2.2000 | 0.3421 | 5.3000 | 0.7240 | 8.3000  | 0.9190 |
| 2.3000 | 0.3614 | 5.4000 | 0.7322 | 8.4000  | 0.9241 |
| 2.4000 | 0.3800 | 5.5000 | 0.7404 | 8.5000  | 0.9292 |
| 2.5000 | 0.3976 | 5.6000 | 0.7482 | 8.6000  | 0.9343 |
| 2.6000 | 0.4150 | 5.7000 | 0.7557 | 8.7000  | 0.9393 |
| 2.7000 | 0.4310 | 5.8000 | 0.7631 | 8.8000  | 0.9444 |
| 2.8000 | 0.4470 | 5.9000 | 0.7706 | 8.9000  | 0.9495 |
| 2.9000 | 0.4622 | 6.0000 | 0.7780 | 9.0000  | 0.9544 |
| 3.0000 | 0.4768 | 6.1000 | 0.7855 | 9.1000  | 0.9590 |
| 3.1000 | 0.4913 | 6.2000 | 0.7924 | 9.2000  | 0.9636 |
| 3.2000 | 0.5050 | 6.3000 | 0.7991 | 9.3000  | 0.9683 |
| 3.3000 | 0.5182 | 6.4000 | 0.8059 | 9.4000  | 0.9729 |
| 3.4000 | 0.5313 | 6.5000 | 0.8127 | 9.5000  | 0.9775 |
| 3.5000 | 0.5440 | 6.6000 | 0.8194 | 9.6000  | 0.9821 |
| 3.6000 | 0.5560 | 6.7000 | 0.8262 | 9.7000  | 0.9868 |
| 3.7000 | 0.5680 | 6.8000 | 0.8325 | 9.8000  | 0.9914 |
| 3.8000 | 0.5799 | 6.9000 | 0.8387 | 9.9000  | 0.9958 |
| 3.9000 | 0.5908 | 7.0000 | 0.8448 | 10.0000 | 1.0000 |
| 4.0000 | 0.6017 |        |        |         |        |

Tabela 2: Aproximação de  $\log x$  calculada por interpolação, a partir da progressão geométrica  $x_n = 1, 1^n$ .



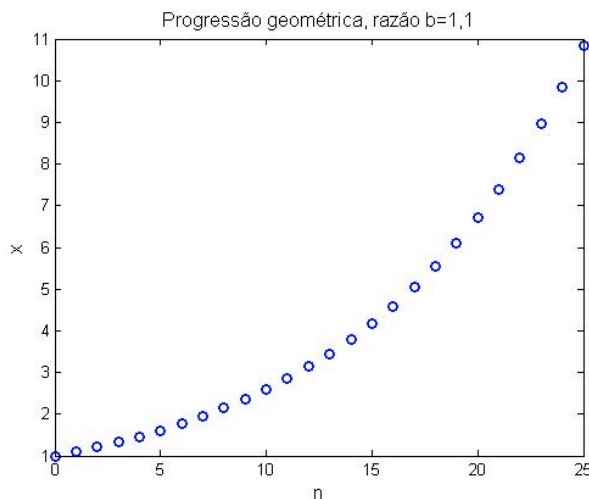


Figura 1: Representação gráfica dos primeiros 25 termos da progressão geométrica  $x_n = 1,1^n$ .

da forma  $x_n = ab^n$ , com  $a = 10^7$  e  $b = 1 - 1/10^7 = 0,9999999$ . Sendo  $b$  muito próximo de 1, os termos da progressão variam muito lentamente. Como Napier pretendia que a progressão fosse decrescente, escolheu um valor de  $b$  menor do que um. A correspondência era a seguinte:

|     |            |
|-----|------------|
| 0   | 10.000.000 |
| 1   | 9.999.999  |
| 2   | 9.999.998  |
| ... | ...        |

Designando os logaritmos de Napier por  $\text{NapLog } x$ , tem-se  $\text{NapLog } 10^7 = 0$ ,  $\text{NapLog}(10^7 - 1) = 1$ , etc. O cálculo dos termos da progressão podia ser feito de forma eficiente subtraindo a cada termo  $10^{-7}$  do seu valor:

$$\Delta x_n = x_n - x_{n-1} = a \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^n - a \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^{n-1} = \frac{x_{n-1}}{10^7}$$

$$x_n = x_{n-1} - \frac{x_{n-1}}{10^7}$$

graças à utilização da notação do ponto decimal. Utilizando este princípio, Napier construiu três tabelas diferentes, que permitiam calcular os logaritmos para qualquer valor de  $x$  por interpolação. A descrição completa do

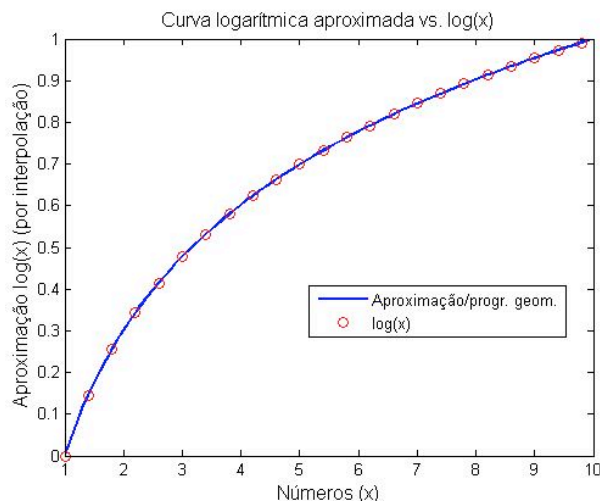


Figura 2: Representação gráfica da aproximação de  $\log x$  calculada por interpolação a partir da progressão geométrica  $x_n = 1, 1^n$ , comparada com o resultado “exacto”.

método de construção da primeira tabela de logaritmos pode encontrar-se em Hobson (1914, [9]). Napier teve que efectuar um número impressionante de cálculos para construir a essa tabela, num esforço que consumiu 20 anos da sua vida.

É importante notar que os logaritmos calculados por Napier não coincidem com o que hoje designamos por logaritmos naturais ou de base  $e$  (Napier não conhecia o número  $e$  nem se apercebeu da sua importância). Estão relacionados com os logaritmos na base  $1/e$ , facto que pode ser demonstrado tendo em atenção que:

$$x_n = 10^7 \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^n = 10^7 \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^{10^7 \left(\frac{n}{10^7}\right)} = 10^7 \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{n}{10^7}}$$

Deste modo, se considerarmos  $x$  e  $n$  como variáveis contínuas e designarmos por  $n$  uma aproximação da função NapLog  $x$ , tem-se<sup>6</sup>:

$$n \cong 10^7 \log_{\frac{1}{e}} \left(\frac{x}{10^7}\right) = 10^7 \ln \left(\frac{10^7}{x}\right)$$

<sup>6</sup>Neste trabalho, denotaremos os logaritmos naturais por  $\ln x$  e os logaritmos decimais por  $\log x$ , segundo a convenção usual.

pelo que a fórmula

$$\text{NapLog } x = 10^7 \ln \left( \frac{10^7}{x} \right)$$

estabelece a relação entre os logaritmos de Napier e os logaritmos naturais. Este resultado pode ser obtido de outra forma, recorrendo ao cálculo diferencial e integral. Considerando novamente  $x$  e  $n$  como variáveis contínuas, a fórmula de recorrência usada por Napier pode ser expressa do modo seguinte:

$$\frac{dx}{dn} = -\frac{x}{10^7}$$

donde resulta por integração

$$\ln x = -\frac{n}{10^7} + C$$

Atendendo a que  $n = 0$  corresponde a  $x = 10^7$ , fica

$$n = -10^7 \ln x + 10^7 \ln(10^7) = 10^7 \ln \left( \frac{10^7}{x} \right) = \text{NapLog } x$$

Na sua obra *Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio*, Napier apresenta uma “definição cinemática” dos seus logaritmos, muito interessante de analisar recorrendo ao cálculo diferencial e integral<sup>7</sup>.

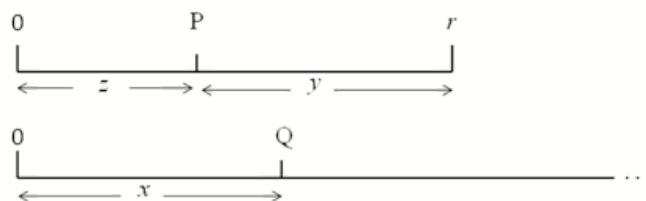


Figura 3: Definição dos logaritmos segundo Napier (1617), estabelecendo uma correspondência entre duas variáveis contínuas:  $y = \text{NapLog } x$ .

Napier considerou dois pontos,  $P$  e  $Q$ , o primeiro movendo-se num segmento de comprimento  $r$  com velocidade proporcional à distância de  $P$  à extremidade do segmento, e o segundo movendo-se com uma velocidade uniforme ao longo de uma semi-recta. Os dois pontos partem da origem com a mesma

<sup>7</sup>Esta definição mostra que Napier foi o primeiro a intuir a noção abstracta dos logaritmos como associação entre dois contínuos, apesar de as definições rigorosas de função e número real não serem conhecidas no seu tempo.

velocidade (Figura 3). Nestas condições, Napier definiu a distância do ponto  $Q$  à origem ( $x$ ) como sendo o logaritmo da distância de  $P$  à extremidade do segmento ( $y$ ). Assim sendo, as equações que descrevem o movimento dos pontos  $P$  e  $Q$  são, respectivamente:

$$\frac{dz}{dt} = a(r - z)$$

$$\frac{dx}{dt} = ar$$

com as condições iniciais:

$$\left. \frac{dz}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = ar$$

sendo  $a$  uma constante de proporcionalidade tal que  $ar$  define a velocidade inicial dos dois pontos. Integrando as equações do movimento em ordem a  $t$  tem-se:

$$-\ln(r - z) = at + C_1, \quad x = art + C_2$$

Como ambos os pontos partem da origem, as constantes de integração são  $C_1 = -\ln r$  e  $C_2 = 0$ . Deste modo obtém-se sucessivamente

$$\begin{aligned} \ln r - \ln(r - z) &= at \\ \ln\left(\frac{r}{r - z}\right) &= \frac{ax}{ar} \\ x &= r \ln\left(\frac{r}{r - z}\right) = r \ln\left(\frac{r}{y}\right) \end{aligned}$$

Tomando  $r = 107$ , obtemos a relação  $x = \text{NapLog } y$ . Note-se que a constante de proporcionalidade  $a$  não figura na solução, que depende unicamente de  $r$ . Comparando os logaritmos de Napier com a definição moderna, podemos observar que Napier não estabeleceu uma base para o seu sistema, e que os seus logaritmos não verificam a propriedade  $\text{NapLog } 1 = 0$ , pelo que não permitem efectuar directamente multiplicações e divisões de números. No entanto, permitem calcular proporções como as que resultam da lei dos senos da trigonometria plana ou da analogia dos senos da trigonometria esférica. Por exemplo, para determinar o ângulo  $b$  de um triângulo plano (Figura 4) conhecidos o ângulo  $a$  e os lados  $A$  e  $B$ , tem-se

$$\text{NapLog}(\text{sen } b) = \text{NapLog}(\text{sen } a) + \text{NapLog } B - \text{NapLog } A$$

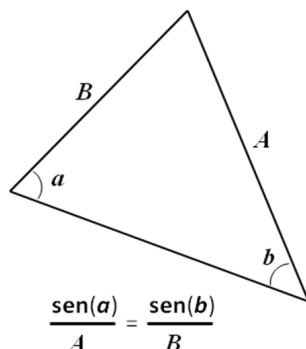


Figura 4: Lei dos senos da trigonometria plana. O cálculo de um lado ou de um ângulo é obtido através de uma proporção, cujo cálculo aritmético é facilitado pelos logaritmos de Napier.

#### 4 As tabelas de Jost Bürgi (1620)

Jost Bürgi (1552-1632) foi um notável relojoeiro e construtor de instrumentos de precisão, que se dedicou também à astronomia e à matemática, cujo nome surge também associado à introdução dos logaritmos. Em 1620, publicou uma tabela de correspondência entre duas progressões, uma aritmética (com números impressos a vermelho)<sup>8</sup> e outra geométrica (com números impressos a preto), na sua obra *Arithmetische und Geometrische Progress-Tabulen*. Roegel (2011, [16]) apresenta uma descrição pormenorizada do processo de construção das tabelas de Bürgi, uma reconstituição dessas tabelas e uma comparação com as tabelas de logaritmos de Napier. Bürgi escolheu a razão de progressão  $b = 1,0001$  e construiu a sua tabela segundo o esquema seguinte:

| (números a vermelho) | (números a preto)         |
|----------------------|---------------------------|
| 0                    | $10^8$                    |
| 10                   | $10^8(1 + 1/10^4)$        |
| 20                   | $10^8(1 + 1/10^4)^2$      |
| ...                  | ...                       |
| $N$                  | $10^8(1 + 1/10^4)^{n/10}$ |

<sup>8</sup>Na realidade, as tabelas de Bürgi são tabelas de anti-logaritmos, visto que as entradas (a vermelho) são os logaritmos e formam uma progressão aritmética, enquanto que os números a preto no corpo da tabela (a preto) são termos de uma progressão geométrica.

Cada termo pode ser obtido do anterior somando-lhe  $10^{-4}$  do seu valor, o que permite construir a tabela pelo mesmo processo de Napier, usando a notação do ponto decimal. Para determinar um número a vermelho (da progressão aritmética) correspondente a um número a preto (da progressão geométrica) que não figurasse na tabela, bastava efectuar uma interpolação. É interessante relacionar também os logaritmos de Bürgi com os logaritmos naturais. Designando por  $r(x)$  um número “a vermelho” e por  $b(x)$  um número “a preto”, obtém-se

$$b(x) = 10^8 \left(1 + \frac{1}{10^4}\right)^{\frac{r(x)}{10}} = 10^8 \left(1 + \frac{1}{10^4}\right)^{10^4 \frac{r(x)}{10^5}} \cong 10^8 e^{\frac{r(x)}{10^5}}$$
$$r(x) \cong 10^5 \ln \left(\frac{b(x)}{10^8}\right)$$

A tabela de Bürgi tinha duas particularidades interessantes (Roegel, 2011, [16]): era uma tabela de dupla entrada (ao contrário das tabelas de Napier e de Briggs) e usava pontos para substituir números repetidos. Bürgi nunca utilizou o termo “logaritmo” ou outro equivalente. Tal como ocorria com as tabelas de Napier, também as tabelas de Bürgi não permitiam efectuar directamente multiplicações e divisões.

Embora alguns considerem que Bürgi pode ter tido a ideia de construir uma tabela de correspondência entre progressões geométricas e aritméticas antes de Napier, só publicou os seus resultados quando os logaritmos de Napier já eram conhecidos e utilizados na Europa. Por outro lado, Bürgi nunca desenvolveu um conceito abstracto de logaritmo. Por estes motivos, Napier é considerado o inventor dos logaritmos.

## 5 Henry Briggs e os logaritmos decimais (1624)

Henry Briggs (1561-1630) visitou Napier em 1616, para discutir a ideia de introduzir um sistema de logaritmos decimais que, na sua opinião, teria muitas vantagens adicionais sobre os logaritmos de Napier. Por morte deste último, Briggs prosseguiu o trabalho e em 1624 publicou a sua obra *Arithmetica Logarithmica*<sup>9</sup>, que continha uma tabela com os logaritmos decimais dos números inteiros de 1 a 20.000 e de 90.001 a 100.000 com uma precisão

---

<sup>9</sup>A obra de Briggs pode ser consultada em formato digital a partir do endereço <http://www.gap-system.org/~history/Miscellaneous/Briggs/>

de 14 casas decimais<sup>10</sup>, e a descrição do método de cálculo. O trabalho de Briggs é notável, pela originalidade e engenhosidade com que organizou os cálculos no sentido de reduzir o número de operações e de as simplificar ao máximo. Briggs construiu o seu sistema de modo a que  $\log 1 = 0$  e  $\log 10 = 1$ , e verificasse assim as propriedades:

$$\log(xy) = \log x + \log y, \quad \log\left(\frac{x}{y}\right) = \log x - \log y$$

Introduziu também as definições de característica (parte inteira do logaritmo) e mantissa (parte fraccionária do logaritmo) para demonstrar a conveniência do sistema de logaritmos de base 10. Briggs construiu a sua tabela determinando os logaritmos dos números primos, e a partir desses os logaritmos dos números compostos.

O método de Briggs baseia-se na obtenção de aproximações para os logaritmos dos números através da extracção sucessiva de raízes quadradas. Hutton ([10], páginas 61-75; [11], páginas 149-151) descreve em pormenor o método de Briggs. O primeiro passo consistiu em extrair sucessivamente a raiz quadrada de dez, até o número obtido ser muito próximo de um. Briggs extraiu a raiz quadrada de dez 54 vezes (!) com uma precisão de 32 casas decimais. Para simplificar os cálculos utilizou a aproximação (que terá descoberto empiricamente, sem a haver demonstrado):

$$\sqrt{1+x} \cong 1 + \frac{1}{2}x$$

válida para  $|x| \ll 1$ . Para determinar o logaritmo de um número qualquer  $y$ , que designaremos por  $x$ , extraem-se sucessivamente raízes quadradas de  $y$  até obter também um número suficientemente próximo de um (o número de vezes que a raiz quadrada é extraída e o número de casas decimais a reter dependem da precisão que se pretende obter). Recorrendo à tabela de raízes quadradas da base (dez), é então possível determinar por interpolação um número  $z$  tal que

$$y^{1/2^n} = 10^z$$

a partir do qual se obtém  $x = \log y = 2^n z$ , sendo  $n$  o número de vezes que a raiz quadrada do número  $y$  foi extraída. Dunham (1999, [4]) descreve o método de Briggs através de um exemplo concreto. Feynman (1963, [7]) descreve também um método para determinação de logaritmos decimais através

<sup>10</sup>A tabela de Briggs foi completada por Adriaan Vlacq (1600-1667), que publicou os logaritmos decimais dos números inteiros de 20.001 a 89.999 com dez casas decimais em 1628, na sua obra *Arithmetica Logarithmica*.

da extracção de raízes quadradas de dez, no qual o número cujo logaritmo se pretende determinar é representado como um produto de factores cujos logaritmos são conhecidos.

Euler introduziu em [5] outro método interessante para calcular os logaritmos decimais dos números através da extracção de raízes quadradas<sup>11</sup>, baseado na fórmula

$$\log(\sqrt{ab}) = \frac{1}{2} (\log a + \log b)$$

Para determinar o logaritmo de um número  $c$ , constroem-se a partir desta fórmula duas sucessões  $a_n$  e  $b_n$ , tais que  $a_n > c$ ,  $b_n < c$  e  $a_n b_n \rightarrow c$ . Nestas condições,  $\log(\sqrt{a_n b_n}) \rightarrow \log c$ . A Tabela 3 ilustra a determinação de  $\log 7$ , com uma precisão de três casas decimais, usando este método. Inicialmente, escolhe-se  $a_0 = 10$  e  $b_0 = \sqrt{10} = 3,16228$ , obtendo-se  $c_0 = \sqrt{a_0 b_0} = 5,62341$ . Seguidamente, aplica-se iterativamente a fórmula anterior, fazendo  $a_{n+1} = c_n$  se  $c_n > c$ , ou  $b_{n+1} = c_n$  se  $c_n < c$ . Com uma precisão de três casas decimais, obtém-se  $\log 7 = 0,845$ .

A relação entre o cálculo dos logaritmos e a extracção de raízes quadradas é patente na seguinte definição alternativa da função  $\ln x$ :

$$\ln x = \lim_{n \rightarrow \infty} n (\sqrt[n]{x} - 1)$$

da qual resulta a definição seguinte para o logaritmo de uma base  $b$ :

$$\log_b x = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{x} - 1}{\sqrt[n]{b} - 1}$$

No entanto, é fácil verificar que o cálculo dos logaritmos através de aproximações baseadas nesta definição é pouco eficiente.

O uso dos logaritmos expandiu-se rapidamente após a sua introdução. Dentre os primeiros “adeptos” estiveram Cavalieri (1598-1647) e sobretudo Kepler (1571-1630), que os utilizou nos cálculos que o conduziram à descoberta das três leis do movimento dos planetas. Em 1653, Xue Fengzuo publicou na China um tratado sobre logaritmos (Maor, 1999, [13]), o que demonstra a rapidez com que esta revolução na aritmética se propagou.

Por volta de 1632, William Oughtred (1574-1660) inventou<sup>12</sup> a régua de cálculo, composta por duas escalas logarítmicas que deslizam uma relativamente à outra e permitem multiplicar ou dividir adicionando ou subtraindo

<sup>11</sup> Euler introduziu também métodos muito mais eficientes para calcular logaritmos baseados em expansões em série, como veremos mais adiante.

<sup>12</sup> Informação obtida no endereço Internet [http://en.wikipedia.org/wiki/Slide\\_rule](http://en.wikipedia.org/wiki/Slide_rule)



| $A_n$   | $\log A_n$ | $B_n$   | $\log B_n$ | $C_n$   | $\log C_n$ |
|---------|------------|---------|------------|---------|------------|
| 10      | 1          | 3,16228 | 0,50000    | 5,62341 | 0,75000    |
| 10      | 1          | 5,62341 | 0,75000    | 7,49894 | 0,87500    |
| 7,49894 | 0,87500    | 5,62341 | 0,75000    | 6,49381 | 0,81250    |
| 7,49894 | 0,87500    | 6,49381 | 0,81250    | 6,97830 | 0,84375    |
| 7,49894 | 0,87500    | 6,97830 | 0,84375    | 7,23394 | 0,85938    |
| 7,23394 | 0,85938    | 6,97830 | 0,84375    | 7,10497 | 0,85157    |
| 7,10497 | 0,85157    | 6,97830 | 0,84375    | 7,04135 | 0,84766    |
| 7,04135 | 0,84766    | 6,97830 | 0,84375    | 7,00975 | 0,84571    |
| 7,00975 | 0,84571    | 6,97830 | 0,84375    | 6,99401 | 0,84473    |
| 7,00975 | 0,84571    | 6,99401 | 0,84473    | 7,00188 | 0,84522    |

Tabela 3: Cálculo de  $\log 7$  com uma precisão de três casas decimais pelo método descrito por Euler.

comprimentos. A régua de cálculo é uma “tabela de logaritmos mecânica” que permite realizar multiplicações, divisões e outros cálculos (extração de raízes quadradas e cúbicas, cálculo dos valores das funções trigonométricas, etc.), com uma precisão de três dígitos significativos. Durante 350 anos, até ao aparecimento das primeiras calculadoras electrónicas portáteis, as réguas de cálculo foram os instrumentos dos engenheiros e cientistas.

A Figura 5 ilustra uma régua de cálculo de bolso (em cima)<sup>13</sup> e uma régua de cálculo em cartolina, construída pelo autor a partir de um modelo disponível na Internet, posicionada para multiplicar por dois. As escalas de velocidade/tempo/distância das “plotting sheets” e das rosas de manobra ainda hoje usadas nos cálculos náuticos são escalas logarítmicas. A construção de réguas de cálculo em papel ou cartolina a partir de modelos (templates) disponíveis na Internet é uma actividade interessante nas disciplinas de matemática das escolas secundárias, como curiosidade histórica,

<sup>13</sup>Esta régua de cálculo foi oferecida ao autor pelo CMG EMQ Gonçalves Ribeiro, pelo que aqui ficam registados os agradecimentos devidos. Este instrumento de cálculo ainda foi utilizado na Escola Naval por volta de 1972, pouco antes da generalização do uso das calculadoras electrónicas.

como forma de explicar aos alunos a utilidade dos logaritmos, ou ainda para desenvolver sensibilidade e sentido crítico na realização de cálculos.

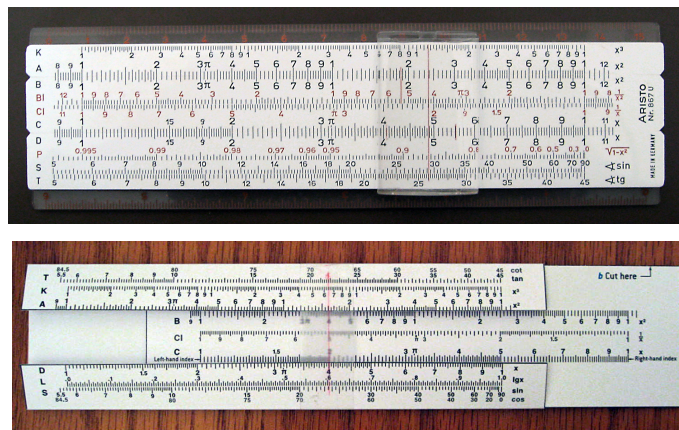


Figura 5: Uma régua de cálculo de bolso (em cima) e uma régua de cálculo em cartolina (em baixo) construída a partir de um modelo disponível em [http://www.scientificamerican.com/media/pdf/Slide\\_rule.pdf](http://www.scientificamerican.com/media/pdf/Slide_rule.pdf)

## 6 O número $e$

Porque é o número  $e = 2,71828 \dots$  tão importante? Porque razão os logaritmos de base  $e$  se designam por “naturais”? Segundo Eli Maor (1999, [13]), o número  $e$  terá surgido associado ao problema do cálculo de juros acumulados, e os primeiros documentos relacionados com este problema são tábuas de argila da Mesopotâmia datadas de 1700 a.C., hoje preservadas no museu do Louvre. Se  $C_0$  for o capital e  $r$  a taxa de juro, o capital acumulado  $C$  ao fim de  $t$  anos será  $C = C_0(1 + r)^t$ . Se o juro vencer  $n$  vezes durante o ano, o crescimento do capital no intervalo entre dois vencimentos será  $r/n$  e o capital acumulado final será  $C = C_0(1 + r/n)^{nt}$ . Coloca-se agora a questão de saber se existe um limite para o capital acumulado, caso o juro vença continuamente, e não é difícil mostrar que assim é. Para obter esse limite para qualquer taxa de juro e número de anos, convém introduzir uma nova variável  $m = n/r$ , o que conduz ao seguinte resultado:

$$C = C_0 \left[ \lim_{m \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{m} \right)^m \right]^{rt} = C_0 e^{rt}$$

pela definição do número  $e$

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,718281828 \dots$$

Vemos assim que número  $e$  surge associado aos processos discretos de crescimento (ou decaimento) natural quando o número de passos aumenta indefinidamente.

O limite que define o número  $e$  surge também como a “base natural” se pretendermos calcular logaritmos a partir de progressões geométricas (como fizeram Napier e Bürgi). Suponhamos que pretendíamos construir uma progressão geométrica com termos no intervalo  $[1, 10]$  e uma razão próxima de 1. Então, facilmente se verifica que o número de termos aumenta à medida que a razão da progressão se aproxima de 1:

$$10 \cong 1,0001^{23027}$$

$$10 \cong 1,00001^{230260}$$

$$10 \cong 1,000001^{2302586}$$

Para que a ordem de grandeza dos logaritmos seja independente da razão da progressão, é necessário introduzir um factor de escala

$$10 \cong \left(1 + \frac{1}{10^4}\right)^{2,3027 \times 10^4}$$

$$10 \cong \left(1 + \frac{1}{10^5}\right)^{2,30260 \times 10^5}$$

$$10 \cong \left(1 + \frac{1}{10^6}\right)^{2,302586 \times 10^6}$$

Note-se que o processo vai conduzindo a aproximações cada vez mais precisas do valor do logaritmo natural de 10, e que a razão “natural” da progressão é  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^n$ .

## 7 Desenvolvimentos posteriores

Poucas décadas após os trabalhos de Napier, Bürgi e Briggs, os matemáticos descobriram formas muito mais eficientes para calcular as tabelas de logaritmos. Essas descobertas tiveram por base a introdução da geometria analítica, o estudo da quadratura de certas curvas, as séries infinitas e por fim o cálculo diferencial e integral (Maor, 1994, [13]). Assim, Descartes

(1596-1650) introduziu a geometria analítica em 1637, ligando a geometria à álgebra. Fermat (1601-1665) conseguiu demonstrar as fórmulas de quadratura das curvas da forma  $y = x^n$ , para valores de  $n$  inteiros positivos, que depois generalizou para  $n = -2, -3, \dots$ , mas não conseguiu efectuar a quadratura da hipérbole  $y = 1/x$  pelo mesmo método. Gregory Saint-Vincent (1584-1667) relacionou a quadratura da hipérbole com a função  $y = \ln x$ .

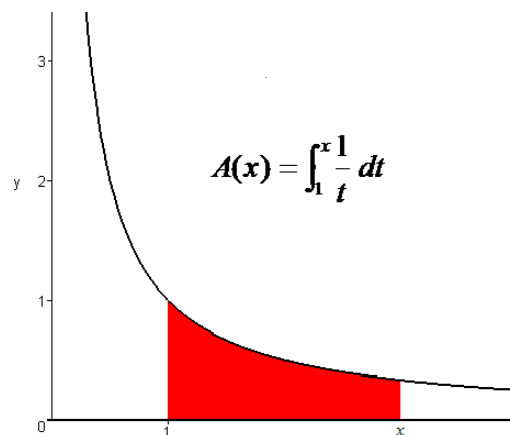


Figura 6: Relação entre a quadratura da hipérbole recta  $y = 1/t$  e a função  $\ln x$ .

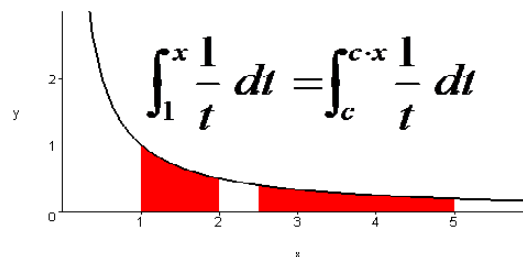


Figura 7: A área delimitada pela hipérbole recta  $y = 1/t$  mantém-se inalterada se os extremos do intervalo de integração forem multiplicados pelo mesmo factor.

Utilizando os métodos do cálculo integral, e definindo  $A(x)$  como sendo a área delimitada pela hipérbole  $y = 1/t$  entre os pontos 1 e  $x$  (Figura 6) é possível demonstrar que a função  $y = A(x)$  tem as mesmas propriedades da

função  $y = \ln x$  (devido à propriedade ilustrada na Figura 7).

$$\begin{aligned} A(x_1x_2) &= \int_1^{x_1x_2} \frac{1}{t} dt = \int_1^{x_1} \frac{1}{t} dt + \int_{x_1}^{x_1x_2} \frac{1}{t} dt \\ &= \int_1^{x_1} \frac{1}{t} dt + \int_1^{x_2} \frac{1}{x_1u} d(x_1u) \\ &= \int_1^{x_1} \frac{1}{t} dt + \int_1^{x_2} \frac{1}{v} dv = A(x_1) + A(x_2) \end{aligned}$$

donde se deduzem as propriedades seguintes, que são idênticas às das funções logarítmicas:

$$\begin{aligned} A(x_1x_2) &= A(x_1) + A(x_2) \\ A(1) &= 0 \\ A(x) &> 0 \quad \text{para } x > 1 \\ A(x) &< 0 \quad \text{para } x < 1 \end{aligned}$$

Por volta da segunda metade do século XVII as séries infinitas eram um tema que estava na primeira linha da investigação em matemática. Newton (1643-1727) descobriu a série binomial

$$(1+x)^r = 1 + rx + \frac{r(r-1)}{2}x^2 + \dots$$

e a partir dela uma expansão em série para  $\ln(1+x)$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

No entanto, esta série tem uma convergência muito lenta. Em 1748, na sua célebre obra *Introductio in analysin infinitorum*, [5], Euler (1707-1783) introduziu o conceito de função<sup>14</sup>. Definiu assim a função logaritmo como a inversa da função exponencial, i.e. se  $a^x = y$  então  $x = \log_a y$  e notou que a fórmula

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots\right]$$

converge de forma muito mais rápida do que a fórmula de Newton. Esta aproximação e outras do mesmo tipo permitem calcular os logaritmos dos números de forma muito mais eficiente do que os métodos baseados nas progressões geométricas e na extracção de raízes.

<sup>14</sup>Euler introduziu muita da notação moderna, nomeadamente a letra  $e$  para designar a base dos logaritmos naturais e  $f(x)$  para representar uma função da variável real  $x$ .

## 8 Os logaritmos na Astronomia Náutica - contribuição portuguesa

No século XV, os portugueses desenvolveram métodos que permitiam determinar a latitude de um navio no mar, através da observação da altura do Sol, da estrela Polar e de outros astros na passagem meridiana. A longitude era obtida a partir da posição estimada, pelo que a sua determinação estava sujeita a erros significativos. Estes métodos, embora limitados, representavam um grande avanço para a época, implicaram o aperfeiçoamento dos instrumentos de navegação, das cartas e das tabelas de declinação dos astros, e permitiram aos portugueses navegar por todos os oceanos (Pereira, 2009, [15]).

No século XVII, a determinação rigorosa da longitude no mar era um dos problemas científicos mais importantes, por ter naturalmente uma influência decisiva no rigor e na segurança da navegação. A relação entre a determinação da longitude e a capacidade para medir rigorosamente o tempo num meridiano de referência, a bordo de um navio, resulta da relação directa que existe entre a diferença entre os ângulos horários de um astro na posição do observador e no meridiano de referência, e a longitude do observador em relação a esse meridiano (Figura 8). A “navegação astronómica moderna” surgiu e foi aperfeiçoada a partir do segundo quartel do século XVIII, com a invenção dos instrumentos de dupla reflexão (sextante), a introdução do cronómetro e o desenvolvimento de métodos de resolução do triângulo de posição adaptados ao cálculo com logaritmos. É este aspecto que iremos tratar seguidamente, para destacar os contributos valiosos de alguns dos navegadores mais ilustres da nossa Marinha, em particular os comandantes Fontoura da Costa e Azevedo Coutinho. Para enquadrar o problema da resolução do triângulo de posição no contexto da astronomia náutica, é necessário fazer uma breve referência aos sistemas de coordenadas usados para descrever as posições dos astros (Apêndice 1) e aos métodos da determinação da longitude no mar.

Antes da invenção do cronómetro por John Harrison (1693-1776), já tinham sido propostos dois métodos para a determinação da longitude a bordo de um navio, baseados na observação dos eclipses dos satélites de Júpiter e na observação de distâncias lunares. No entanto, estes métodos eram difíceis de aplicar e sujeitos a grandes erros. A introdução generalizada do cronómetro veio finalmente permitir a determinação da longitude, resolvendo o triângulo de posição (Figura 9). O problema consiste em determinar o ângulo no pólo P num determinado instante, conhecidas a altura do astro (observada com o

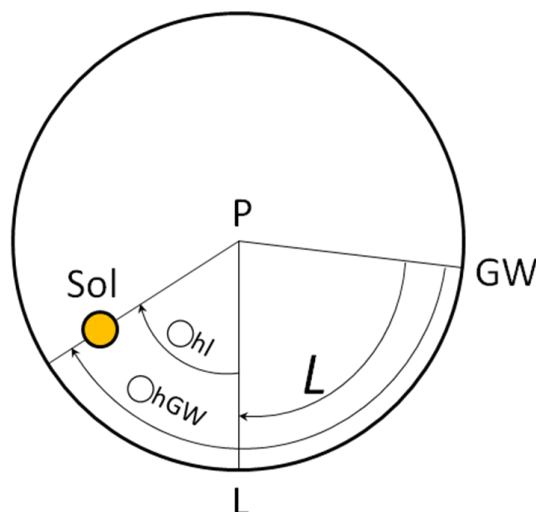


Figura 8: Relação entre a longitude  $L$  e a diferença entre os ângulos horários de um astro (neste exemplo, o Sol) em Greenwich e no lugar do observador. Nesta figura,  $P-L$  representa o meridiano do lugar,  $P-GW$  representa o meridiano de Greenwich e  $P-Sol$  o círculo horário do astro.

sextante), a declinação (obtida a partir de tabelas astronómicas) e a latitude estimada. Pela fórmula fundamental da trigonometria esférica, tem-se:

$$\cos P = \frac{\text{sen } a - \text{sen } \varphi \text{ sen } \delta}{\cos a \cos \varphi}$$

e a partir do ângulo  $P$  é possível determinar a longitude, uma vez que o cronómetro permite obter o ângulo horário em Greenwich ( $\odot_{hg}$ ) correspondente ao instante da observação. Este método tem o inconveniente de não permitir a determinação simultânea da latitude (que é estimada) e da longitude (calculada a partir da observação da altura). Para além disso, a fórmula fundamental da trigonometria esférica não se presta ao cálculo eficiente com logaritmos, porque envolve uma adição ou subtracção (consoante o sinal da declinação).

Em 1837, o comandante Thomas Sumner da marinha americana notou, ao efectuar o cálculo da longitude para três latitudes diferentes (com intervalos de 10 minutos entre elas), que os pontos correspondentes caíam sensivelmente sobre uma linha recta (Pereira, 2009, [15]). Descobriu assim a linha de posição astronómica conhecida por “recta de altura”, que corresponde a uma aproximação da “circunferência de altura” (lugar geométrico

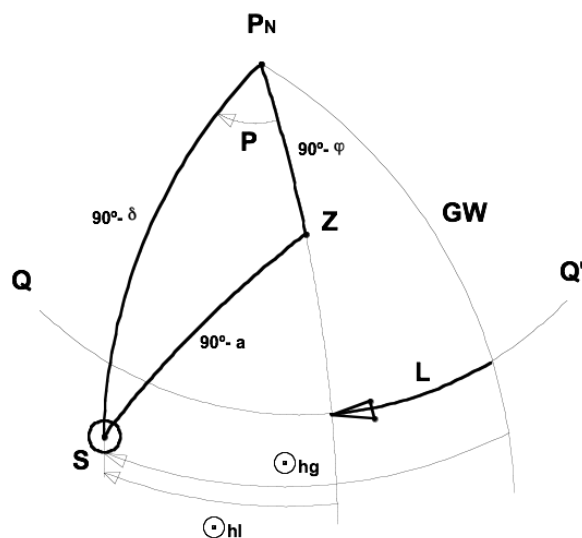


Figura 9: Determinação da longitude para uma latitude estimada  $\varphi$  a partir de uma observação da altura do Sol (altura  $a$ ), e do ângulo no pólo, pela resolução do triângulo de posição. Nesta figura  $P_N$  é o pólo elevado (neste caso o pólo Norte),  $QQ'$  representa o Equador,  $Z$  representa o zênite do observador e  $S$  representa o Sol.  $P_N$ ,  $Z$  e  $S$  são os vértices do triângulo de posição. A latitude é sempre positiva (igual à altura do pólo elevado em relação ao horizonte). A declinação pode ser positiva ou negativa, consoante seja do mesmo nome (+) ou de nome contrário (-) da latitude (neste exemplo, a declinação é negativa).

dos pontos sobre os quais, num determinado instante, se observa um determinado astro com a mesma altura).

O método de Sumner requeria duas resoluções do triângulo de posição por cada recta de altura. Este método foi aperfeiçoado pelo comandante Marcq de Saint-Hilaire, que concebeu por volta de 1873 o “método da posição estimada” (Pereira, 2009, [15]). Este método, que perdurou até aos nossos dias, consiste em determinar um ponto da circunferência de altura através do cálculo da altura e do azimute com que se observaria o astro na posição estimada (Figura10), resolvendo o triângulo de posição (Figura 11). A partir destes valores, acha-se o ponto determinante, por marcação gráfica da distância em milhas correspondente à diferença entre a altura observada e a altura calculada, segundo a direcção do azimute, no sentido do astro (se a altura observada for superior à estimada) ou no sentido contrário (no caso



contrário). A recta de altura é obtida traçando a perpendicular à linha do azimute que passa pelo ponto determinante. Este método pode ser usado para obter a posição do navio, quer a partir de rectas sucessivas do Sol, quer a partir de observações simultâneas de vários astros durante os crepúsculos.

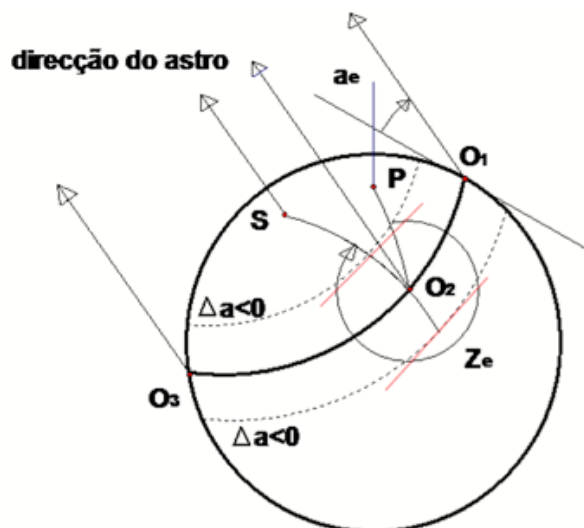


Figura 10: Ilustração do princípio do método de Marcq de Saint-Hilaire. Na figura à esquerda, todos os observadores sobre a circunferência  $O_1O_2O_3$  observam o astro  $S$  com a altura estimada  $a_e$ , e um observador na posição estimada (ponto determinante) observa esse astro pelo azimute  $Z_e$ . A recta de altura é obtida traçando uma perpendicular ao azimute, na direcção do astro ou na direcção contrária, conforme a altura observada seja maior ou menor que a altura estimada.

Vemos assim que a moderna astronomia náutica se baseia na resolução do triângulo de posição para a determinação da altura e do azimute na posição estimada. Recorrendo à fórmula fundamental da trigonometria esférica, a altura e o azimute podem ser obtidos a partir das expressões seguintes:

$$\operatorname{sen} a = \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos P$$

$$\cos Z = \frac{\operatorname{sen} \delta - \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} a}{\cos \varphi \cos a}$$

mas estas contêm adições e subtracções, pelo que não permitem o cálculo eficiente com logaritmos.

Ao longo do tempo, foram propostos vários métodos que permitem o cálculo eficiente da altura e do azimute com logaritmos, tendo os navegadores portugueses contribuído com algoritmos originais e eficientes, para os quais conceberam tabelas especialmente desenhadas para facilitar a sua aplicação. Assim, em 1889 o Comandante Fontoura da Costa publicou nos *Anais do Club Militar Naval* um artigo sobre o cálculo do ponto pelo método de Saint-Hilaire usando as tabelas náuticas de Estrada (Pereira, 2009, [15]). Em 1907, publicou em parceria com Azevedo Coutinho a primeira edição das *Tábuas Náuticas*, especialmente adaptadas para a aplicação do método de Fontoura e Coutinho. As tábuas de Fontoura e Coutinho conheceram três edições (a segunda em 1921 e a terceira em 1945) e foram usadas na nossa Marinha até à introdução das tabelas de inspecção directa, já depois da segunda guerra mundial. Em 1921, Fontoura da Costa publicou os seus *Elementos de Navegação Astronómica Moderna*. Merece também referência a publicação de um caderno de cálculos náuticos pelo tenente Francisco Penteado em 1921, e a publicação em 1933 de um *Caderno de Pilotagem*, pelos capitães-tenentes Francisco Penteado e E. Soares Branco, [14], com prefácio do Comandante Fontoura da Costa, no qual se pode ler o seguinte comentário:

... “*Conheço tudo o que sobre êste assunto tem sido publicado no estrangeiro; posso, por isso, garantir que o presente trabalho é o melhor que no género existe.*”

*Os oficiais da Marinha Portuguesa foram sempre afamados pilotos, especialmente na execução dos cálculos necessários à condução do navio; conservar essa honra é a mais elevada homenagem que podem prestar aos seus antecessores da colossal época dos Descobrimentos.*”

(in *Caderno de Pilotagem*, de F. Penteado e E. Soares Branco, [14])

Estas palavras atestam bem a qualidade do ensino da navegação da Escola Naval entre o início e os meados do século XX, e o nível técnico-científico dos seus mais ilustres mestres.

Seguidamente, iremos expor o método de Fontoura e Coutinho, e compará-lo com outros métodos equivalentes. Para o cálculo da altura, a fórmula fundamental da trigonometria é transformada substituindo o cosseno do ângulo no pólo pelo semiverso desse ângulo:

$$\text{sen } a = \text{sen } \varphi \text{ sen } \delta + \cos \varphi \cos \delta (1 - 2 \text{sem}vP)$$

$$\text{sen } a = \cos(\varphi - \delta) - 2 \text{sem}vP \cos \varphi \cos \delta$$

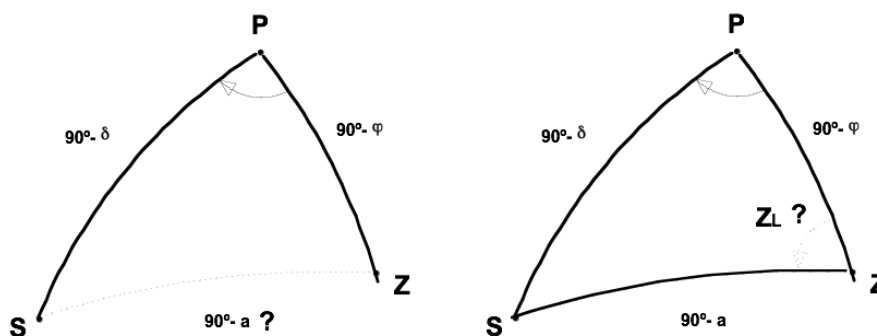


Figura 11: Determinação da altura e do azimute para a posição estimada, através do triângulo de posição.

A função semiverso,  $\text{semv}\theta = \frac{1}{2}(1 - \cos \theta) = \text{sen}^2(\theta/2)$  é sempre não negativa. É encontrada frequentemente na adaptação ou transformação das fórmulas da trigonometria esférica para o cálculo com logaritmos. Multiplicando ambos os membros da equação anterior por  $\sec(\varphi - \delta)$  obtém-se

$$\text{sen } a \sec(\varphi - \delta) = 1 - 2 \text{semv}P \cos \varphi \cos \delta \sec(\varphi - \delta)$$

A chave do método de Fontoura e Coutinho é a introdução de um ângulo auxiliar  $X$  tal que

$$\text{semv}X = \text{semv}P \cos \varphi \cos \delta \sec(\varphi - \delta)$$

Assim, o cálculo da altura é efectuado nos dois passos seguintes, que só envolvem produtos dos valores das funções trigonométricas e se prestam ao cálculo eficiente recorrendo a tabelas de logaritmos:

$$\begin{cases} \text{semv}X = \text{semv}P \cos \varphi \cos \delta \sec(\varphi - \delta) \\ \text{cosec } a = \sec(\varphi - \delta) \sec X \end{cases}$$

As tabelas de Fontoura e Coutinho, a que já aludimos, encontram-se dispostas de modo a que os valores dos logaritmos do semiverso e da secante se encontram em colunas adjacentes, para que os valores que entram nas fórmulas possam ser lidos à vista e sem interpolações, ao passar da primeira fórmula para a segunda.

No método de Fontoura e Coutinho, o cálculo do azimute é feito a partir dos mesmos elementos do cálculo da altura (o ângulo no pólo, a latitude e

a declinação). Mas, como para o cálculo do azimute basta um rigor de ½ grau (ao contrário do cálculo da altura, onde é necessário um rigor de um minuto), o cálculo pode ser simplificado. Assim, recorrendo à fórmula de Delambre ou das cotangentes da trigonometria esférica, obtém-se:

$$\underbrace{\cot Z \sec \varphi}_c = - \underbrace{\tan \varphi \cot P}_a + \underbrace{\tan \delta \operatorname{cosec} P}_b$$

As tábuas de Fontoura e Coutinho nr. 33 (a,b,c) contêm os valores de a, b e Z em função de P e φ (tabela para a), P e δ (tabela para b), e por último φ e c (da tabela c lê-se o azimute). A Figura 14, extraída das tábuas

**Táb. 31 — Logaritmos das funções trigonométricas**

The image shows a page from a nautical table with the title 'Táb. 31 — Logaritmos das funções trigonométricas'. The table is organized into columns for different trigonometric functions: 'sem. ver.', 'sec', 'cos', 'tg', 'colog', 'sen', 'cosec', and '10 - log'. Each column contains a series of values corresponding to angles from 43 degrees to 54 degrees. The values are arranged in a grid format, with some columns having multiple sub-columns for different parts of the function's value. The page number '125' is visible in the top right corner.

Figura 12: Extrato da Tabela 31 – Logaritmos das funções trigonométricas, das Tábuas Náuticas de Fontoura e Coutinho (3ª edição, 1945). Note-se a disposição das tabelas dos logaritmos do semiverso e da secante, que se encontram em colunas adjacentes para permitir a leitura à vista e sem interpolações, de modo a tornar o processo mais expedito e menos sujeito a erros. Aos logaritmos negativos (valores das funções trigonométricas inferiores a 1) foi adicionado o valor 10, como se pode ver nos logaritmos do semiverso, do cosseno, da tangente (a página refere-se a um ângulo inferior a 45 graus) e do seno.

náuticas de Fontoura e Coutinho (3ª edição, 1945), ilustra a sequência de cálculo de uma recta de altura por observação do Sol, utilizando o método desenvolvido por estes dois autores. Nas primeiras linhas deste exemplo,

estão indicados vários cálculos auxiliares para a determinação da altura verdadeira e do ângulo no pólo para a posição estimada. Depois, o cálculo é disposto em duas colunas, uma para os valores do ângulo no pólo, a latitude estimada, a declinação e a soma da latitude estimada com a declinação, e outra para os logaritmos das funções trigonométricas que intervêm nos dois passos do cálculo da altura, dispostos paralelamente aos ângulos correspondentes. Uma vez determinada a altura, o azimute é obtido por leitura directa nas Tabelas 33, a, b e c (canto inferior esquerdo). Podemos concluir que o método é bastante compacto, e que a disposição das tabelas contribui significativamente para tornar a execução manual dos cálculos bastante eficiente. É interessante comparar o método de Fontoura e Coutinho com outros mé-

The image shows two pages of a nautical table, labeled 'Táb. 33 a' and 'Táb. 33 b'. Each page contains a grid of numbers for different declination and latitude values. The columns are labeled with declination values (e.g., 0°, 1°, 2°, etc.) and the rows with latitude values (e.g., 1°, 2°, 3°, etc.). The numbers in the grid represent the results of trigonometric calculations used for determining azimuth. The tables are arranged in two columns on each page, with the left column for declination and the right column for latitude. The numbers are arranged in a way that allows for quick lookup of values based on the given declination and latitude.

Figura 13: Extrato das tabelas 33.a e 33.b das *Tábuas Náuticas de Fontoura e Coutinho* (1945, [3]), para o cálculo do azimute

todos de resolução do triângulo de posição. Por exemplo, Airy (1855, [2], página 37), refere um método de decomposição da fórmula fundamental da trigonometria esférica adaptado ao cálculo com logaritmos, envolvendo dois passos e a introdução do seno verso de um ângulo auxiliar, mas a transição entre os dois passos é feita através do quadrado da tangente e do quadrado da secante do ângulo auxiliar, portanto muito menos eficiente que o método de Fontoura e Coutinho, que foi especialmente desenvolvido para astronomia náutica. O *Admiralty Manual of Navigation* (1955, [1]) descreve, no

|                                    |                                    |
|------------------------------------|------------------------------------|
| $Hc_1 = 9\ 16\ 26 \dots\dots\dots$ | $\odot_e = 42^\circ\ 39' \cdot 6$  |
| $E_c = 11\ 01\ 03$                 | $c = +\ 9 \cdot 2$                 |
| $Hmg = 8\ 17\ 29\ (13)$            | $\ominus_v = 42^\circ\ 48 \cdot 8$ |
| $E = 12\ 00\ 13 \cdot 4$           |                                    |
| $\odot_v hg = 20\ 17\ 42 \cdot 4$  |                                    |
| $Lt = 1\ 44\ 40\ E$                |                                    |
| $\odot_v hl = 22\ 02\ 22 \cdot 4$  |                                    |
| $\odot_v P = 1\ 57\ 37 \cdot 6\ E$ | $lg\ semv = 8 \cdot 80\ 844$       |
| $\varphi_e = 14^\circ\ 16'\ S$     | $lg\ cos = 9 \cdot 98\ 640$        |
| $\delta = 23\ 11 \cdot 9\ N$       | $lg\ cos = 9 \cdot 96\ 338$        |
| $c + \delta = 37\ 27 \cdot 9$      | $lg\ sec = 10\ 034$                |
|                                    | $lg\ semv\ X = 8 \cdot 85\ 856$    |
|                                    | $lg\ sec\ X = 10 \cdot 770$        |
| $a_1 = - \cdot 44$                 | $lg\ csec\ a = 16 \cdot 804$       |
| $b_1 = - \cdot 89$                 | $\odot_e = 42^\circ\ 47'$          |
| $c_1 = -1 \cdot 33$                | $\ominus_v = 42\ 49$               |
| $Z_1 = 38^\circ\ NE$               | $\Delta a_1 = +\ 2$                |

|             |                                  |                   |
|-------------|----------------------------------|-------------------|
| $2/38\ NE$  | $\varphi_e = 14^\circ\ 16'\ S$   |                   |
|             | $\Delta\varphi = 1 \cdot 6\ N$   | $ap = 1 \cdot 2$  |
| $60/80\ SE$ | $\varphi_1 = 14\ 14 \cdot 4\ S$  |                   |
|             | $\Delta\varphi = 10 \cdot 4\ S$  | $ap = 59 \cdot 1$ |
|             | $\varphi'_1 = 14\ 24 \cdot 8\ S$ |                   |

Figura 14: Extrato da última página das Tábuas Náuticas de Fontoura e Coutinho (1945, [3]), ilustrando a disposição do cálculo de uma recta de altura pelo método destes dois autores (comentário no texto).

seu capítulo X, um conjunto de métodos que até àquela data haviam sido propostos para a resolução do triângulo de posição (nomeadamente os métodos de Martelli, Yonemura e Ageton). No entanto, todos esses métodos têm algumas desvantagens, seja na precisão, seja no número de tabelas a utilizar para os vários passos do cálculo, seja ainda no número de passos e na resolução de ambiguidades. O método proposto no *Admiralty Manual of Navigation*, [1], para o cálculo da altura é o recurso à fórmula do cosseno-semiverso, que se deduz a partir da fórmula fundamental da trigonometria esférica:

$$semv(90^\circ - a) = semv(90^\circ - \varphi \sim 90^\circ - \delta) + \cos \delta \cos \varphi semv P$$

Esta fórmula é eficiente, porque um dos termos é obtido por consulta de uma



tabela de semiversos e o outro pode ser calculado rapidamente com logaritmos. Contudo, não está totalmente adaptado ao cálculo com logaritmos, e a sua utilização requer uma tabela dos semiversos e dos logaritmos dos senos, cossenos e semiversos. Para o cálculo do azimute, é apresentado um método analítico na página 96 do *Admiralty Manual of Navigation*, [1], mas esse método é bastante laborioso, pelo que é recomendada a utilização de um método gráfico ou de tabelas do tipo “ABC” como as de Fontoura e Coutinho. Verifica-se que, em termos práticos, este método não oferece vantagens relativamente ao método de Fontoura e Coutinho, usado na nossa Marinha até à introdução das chamadas “tabelas de inspecção directa” (que contêm soluções tabeladas para as combinações de valores inteiros da declinação, latitude e ângulo no pólo).

## 9 Os logaritmos na Cartografia - a Carta de Mercator

Nesta secção, faremos uma breve referência à importância da introdução dos logaritmos noutra ciência náutica de importância fundamental: a cartografia. Para os navegadores, interessa dispor de cartas de navegação nas quais as representações dos meridianos sejam paralelas (indicam a direcção Norte-Sul) e perpendiculares às linhas que representam os paralelos. Também é importante que as derrotas loxodrómicas (linhas em forma de espiral sobre a superfície da Terra que cortam todos os meridianos segundo um ângulo constante) possam ser representadas na carta por meio de linhas rectas, traçadas entre o ponto de partida e o ponto de chegada, e que os azimutes traçados sobre a carta correspondam aos azimutes verdadeiros, para distâncias entre pontos que não sejam muito grandes (Fernandes, 1967, [6], Capítulo IV; *Admiralty Manual of Navigation*, [1], Capítulo X). Para obter uma projecção com estas características, é necessário que os arcos dos paralelos ( $AB$ ,  $A_1B_1$  e  $A_2B_2$  na Figura 15) sejam representados na carta por linhas horizontais com espaçamento vertical crescente e variável em função da latitude. De facto, uma vez que na carta os meridianos são paralelos e na superfície terrestre são convergentes, a escala da latitude tem que aumentar para compensar essa convergência. Por essa razão, a função  $z = z(\varphi)$ , que é a distância na carta entre as representações do paralelo de latitude  $\varphi$  e do Equador, é designada por latitude crescida (Fernandes, 1967, [6]).

Pedro Nunes concebeu a ideia fundamental para a construção de uma projecção cartográfica deste tipo no capítulo “Em defensam da carta de marear”, na sua famosa obra “Tratado da Esfera” de 1537, mas não conse-

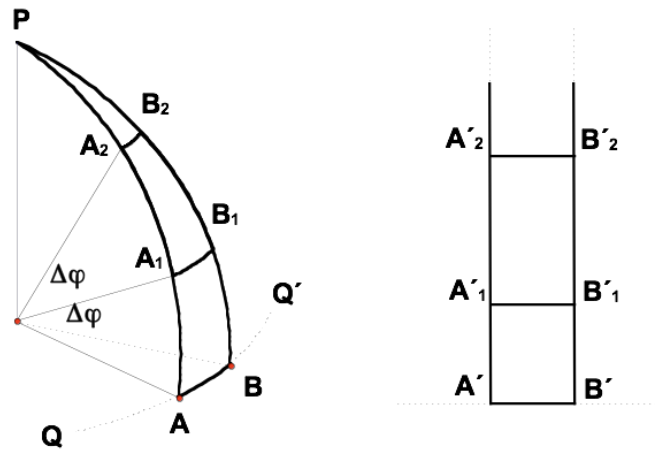


Figura 15: Esquema ilustrativo do princípio da projecção de Mercator. Para que na carta os meridianos sejam representados com um afastamento constante, é necessário dilatar a escala das latitudes, para que a escala seja idêntica em todas as direcções e não haja deformação local.

guiu definir correctamente a latitude crescida (Fernandes, 1967.[6]) Mercator (nome latino do holandês Gerard Kramer) publicou uma carta baseada neste princípio em 1569, que também não era rigorosa para latitudes superiores a  $40^\circ$ . A fórmula correcta das latitudes crescidas envolve a função logaritmo, e só foi apresentada por Bond em 1645 (*Admiralty Manual of Navigation*, [1], Capítulo X).

A dedução dessa fórmula pode hoje fazer-se recorrendo aos métodos bem conhecidos do cálculo diferencial e integral. A Figura 16 esquematiza a representação na carta de um segmento de comprimento infinitesimal sobre a superfície da Terra, admitida como uma esfera de raio  $R$ . Neste esquema,  $\mu$  é a escala da representação (relação entre os comprimentos na carta e na superfície terrestre). Para que os azimutes traçados sobre a carta correspondam aos azimutes verdadeiros, e a escala seja a mesma para todas as direcções (o que significa que a projecção é conforme) os ângulos  $\alpha$  e  $\alpha'$  têm que ser iguais. Por conseguinte:

$$\frac{1}{\mu} \frac{dz}{dL} = \frac{R d\varphi}{R \cos \varphi dL}$$

$$\frac{1}{\mu} \int_0^z dz' = \int_0^\varphi \frac{d\varphi'}{\cos \varphi}$$



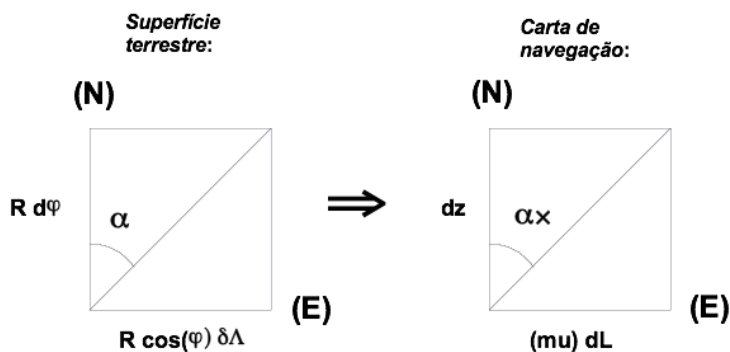


Figura 16: Esquema para a dedução da fórmula das latitudes crescidas.  $R$  é o raio da Terra (assumida como uma esfera) e  $\mu$  é o factor de escala (relação entre a distância na carta e a distância na superfície terrestre).

Integrando esta equação, obtém-se

$$z = \mu \ln \left[ \tan \left( \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right]$$

que é a fórmula das latitudes crescidas. Vemos assim que a expressão matemática para a latitude crescida, usada nas cartas náuticas modernas, envolve a função logaritmo. A projecção de Mercator é uma projecção convencional, porque não é obtida a partir de uma construção geométrica. Para um elipsóide de revolução de excentricidade  $e$ ,<sup>15</sup> que aproxima melhor a forma da Terra, a expressão da latitude crescida é (Fernandes, 1967, [6]):

$$z = \mu \ln \left[ \tan \left( \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \left( \frac{1 - e \sin \varphi}{1 + e \sin \varphi} \right)^{e/2} \right]$$

## 10 Outras aplicações dos logaritmos nas Ciências Náuticas

A função logaritmo e a sua inversa, a função exponencial, surgem na descrição matemática de muitos problemas das ciências naturais. Por esse motivo, existem muitas outras áreas de interesse para quem desenvolve actividades profissionais relacionadas com as ciências náuticas nas quais um bom conhecimento das propriedades dos logaritmos é essencial.

<sup>15</sup>Não confundir com a base dos logaritmos naturais.

Uma dessas áreas é a acústica. A relação entre a intensidade sonora de uma fonte (potência transmitida por unidade de área) e o nível de intensidade (que é o nível percebido pelo ouvido humano) é expressa em unidades logarítmicas de decibéis através da expressão:

$$L_I = 10 \log \left( \frac{I}{I_{ref}} \right) \quad (\text{dB})$$

sendo  $I_{ref}$  uma intensidade de referência, que corresponde ao limiar da audição. Dado que a intensidade sonora é proporcional ao quadrado da amplitude da pressão sonora, o nível da pressão sonora  $P_{rms}$ <sup>16</sup> pode ser expresso em (dB) através da expressão:

$$L_P = 20 \log \left( \frac{P_{rms}}{P_{ref}} \right) \quad (\text{dB})$$

Esta expressão permite explicar muitos fenómenos ligados à percepção auditiva, por exemplo o facto de podermos ouvir uma pessoa a falar a várias dezenas de metros numa noite silenciosa, mas não nos fazer diferença que entre mais uma pessoa a falar num café onde o nível de ruído já é elevado.

Outra situação interessante, em que surgem os logaritmos, é a relação entre as grandezas absoluta e aparente de uma estrela, e a distância a que esta se encontra. Hiparco (190-120 a.C.) foi o primeiro a introduzir uma escala para classificar as estrelas segundo o seu brilho aparente. Atribuiu às estrelas mais brilhantes a grandeza  $m = 1$  e às menos brilhantes a grandeza  $m = 6$ . Já no século XIX, foi descoberto que a diferença entre as grandezas aparentes  $m_1$  e  $m_2$  de duas estrelas está relacionada com o quociente entre os fluxos de radiação correspondentes através da expressão

$$m_1 - m_2 = 2,5 \log \left( \frac{F_2}{F_1} \right)$$

Uma vez que o fluxo de radiação depende da distância a que a estrela se encontra, os astrónomos definiram uma grandeza absoluta  $M$ , que corresponde à grandeza que a estrela teria caso se encontrasse à distância de 10 *parsec*. A grandeza absoluta é assim uma característica intrínseca da estrela, e a diferença entre a grandeza aparente  $m$  e a grandeza absoluta  $M$  está relacionada com a distância  $d$  a que a estrela se encontra pela expressão:

$$m - M = 5 \log d - 5$$

---

<sup>16</sup> *Rms* – root mean square.

sendo a distância  $d$  expressa em *parsec*<sup>17</sup>. Esta equação tem uma grande importância em astronomia, porque é a base para a determinação das distâncias a que se encontram as estrelas e as galáxias.

## 11 Conclusões

No presente artigo, foi apresentado um breve apontamento histórico sobre a introdução dos logaritmos na matemática e as suas aplicações nas ciências náuticas.

Foram referidas as condições, motivações e ideias-chave que levaram à invenção dos logaritmos por Napier, nos finais do século XVI e início do século XVII, e os métodos de cálculo, extremamente laboriosos e algo obscuros (mas muito interessantes), usados na construção das primeiras tabelas de logaritmos por Napier, Bürgi e Briggs. Foi também feita uma referência ao papel dos logaritmos no nascimento e no desenvolvimento do cálculo diferencial e integral. Neste âmbito, foi destacada a associação entre os logaritmos naturais e a quadratura da hipérbole, bem como o desenvolvimento, por Newton e depois por Euler, de métodos eficientes para o cálculo dos logaritmos, baseados nas séries infinitas. Alguns dos conceitos e ideias usados na introdução dos logaritmos e no cálculo das primeiras tabelas, tais como a “definição cinemática” de Napier e os artifícios numéricos usados por Briggs no cálculo da sua tabela de logaritmos decimais, seriam mais tarde desenvolvidos e aplicados na invenção do cálculo e dos métodos de interpolação. O contributo dos logaritmos para o desenvolvimento da ciência foi enorme, porque aumentou de forma decisiva a capacidade dos astrónomos, físicos e outros cientistas para realizar os cálculos manuais essenciais ao processamento das observações e à verificação das suas teorias (como foi o caso de Kepler).

No tocante à astronomia náutica, os logaritmos vieram permitir a realização eficiente dos cálculos necessários à determinação da longitude no mar e posteriormente da posição do navio a partir do traçado de rectas de altura, através da resolução do triângulo de posição pela fórmula fundamental da trigonometria esférica. Foi realçado o contributo de ilustres professores de navegação da Marinha Portuguesa, em particular os comandantes Fontoura da Costa e Azevedo Coutinho, para a adaptação da fórmula fundamental da trigonometria esférica para o cálculo eficiente com logaritmos, bem como

---

<sup>17</sup>Um *parsec* é a distância à qual uma unidade astronómica (valor médio da distância da Terra ao Sol) subtende um ângulo de um segundo de arco. Um *parsec* corresponde a cerca de 3,26 anos-luz.

as Tábuas Náuticas, de disposição especial, que também conceberam para a aplicação eficiente do seu método. Comparando este método com outros propostos pela mesma altura, somos levados à conclusão de que, desde o início do século XX até à 2<sup>a</sup> Guerra Mundial, os navegadores e os métodos de navegação usados na Marinha Portuguesa estavam ao nível dos melhores em todo o mundo.

Para além da astronomia náutica, é feita também uma referência à carta de Mercator, cuja construção rigorosa depende de uma fórmula logarítmica para a determinação das latitudes crescidas, bem como a outras áreas de interesse para as ciências náuticas.

As funções logarítmicas surgem em muitas outras descrições de fenómenos naturais com interesse para as ciências náuticas, tais como a astronomia, a acústica, a termodinâmica, a química, etc. O estudo do desenvolvimento histórico destas áreas de interesse e do papel dos logaritmos na descrição de resultados importantes em cada uma delas poderá constituir uma ponto de partida para novos desenvolvimentos do presente trabalho.

## Referências

- [1] *Admiralty Manual of Navigation*, Vol. 3, B. R. 45 (3), Her Majesty's Stationery Office, 1955.
- [2] George Biddell Airy, *A Treatise on Trigonometry*, Richard Griffin and Company, London and Glasgow, 1855.
- [3] Fontoura da Costa e Azevedo Coutinho, *Tábuas Náuticas*, 3<sup>a</sup> edição, Edição a Cooperativa Militar, Lisboa, 1945.
- [4] William Dunham, *Euler: The Master of Us All*, The Mathematical Association of America, Dolcian Mathematical Expositions No. 22, 1999.
- [5] Leonhard Euler, *Introductio in analysin infinitorum*, Vol. 1, Lausanne, 1748 (consultada a tradução de latim para francês por J. B. Labey, edição Barrois, Paris, 1796).
- [6] José A. Barahona Fernandes, *Manual de Hidrografia*, Instituto Hidrográfico, Lisboa, 1967.
- [7] Feynman, *The Feynman Lectures on Physics*, Vol. 1, Addison Wesley Capítulo 22, pp. 22-4-22-7, 1963.

- 
- [8] E. da Silva Gameiro, *Astronomia Náutica*, Edição do Autor, Lisboa, 1964.
- [9] E. W. Hobson, *John Napier and the Invention of Logarithms, 1614*, Cambridge University Press, 1914.
- [10] Charles Hutton, *Mathematical Tables; Containing the Common, Hyperbolic and Logistic Logarithms, and Sines, Tangents, Secants & Versed Sines, both Natural and Logarithmic*, London, 1811.
- [11] Charles Hutton, *A Course of Mathematics*, Vol. 1, London, 1811.
- [12] Felix Klein, *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint*, English translation from the 3rd German Edition, Dover Publications, 1924.
- [13] Eli Maor, *e: The Story of a Number*, Princeton University Press, 1994.
- [14] Francisco Penteado e Eugénio Soares Branco *Caderno de Pilotagem*, Lisboa, Papelaria Fernandes, 1933.
- [15] J. Malhão Pereira, *História Breve da Recta de Altura*, Anais do Clube Militar Naval, Vol. 139, Outubro-Dezembro, pp. 583-606, 2009.
- [16] Denis Roegel, *Bürgi's "Progress tabulen" (1620): logarithmic tables without logarithms*, 2011.
- [17] Dava Sobel, *Longitude. The True Story of a Lone Genius Who Solved the Greatest Scientific Problem of His Time*, Fourth Estate, London, 1995.

## Apêndice 1 – Sistemas de Coordenadas Celestes

Para localizar os astros na esfera celeste, e para relacionar a posição destes com a posição geográfica (latitude e longitude), é necessário estabelecer sistemas de coordenadas apropriados. Na astronomia náutica são utilizados três sistemas de coordenadas diferentes: equatoriais, horizontais e horárias.

Seguidamente, é apresentado um resumo das definições dos principais sistemas de coordenadas usados na astronomia náutica. Para uma descrição mais completa, pode ser consultada a obra “Astronomia Náutica”, da autoria do Capitão-de-fragata E. da Silva Gameiro (1964, [8]), ou o *Admiralty Manual of Navigation*, [1].

As coordenadas equatoriais são a declinação e o ângulo sideral (Figura 17)<sup>18</sup>. A declinação é o arco do meridiano do astro (também designado por círculo de declinação) compreendido entre o equador e o astro. Conta-se de 0° (astro no equador) e 90°, e considera-se positiva ou negativa consoante seja do mesmo nome ou de nome contrário da latitude do observador, respectivamente. O ângulo sideral é o arco do equador compreendido entre o ponto vernal e o meridiano do astro, contado de 0° a 360° no sentido de Leste para Oeste (sentido dos ponteiros do relógio, para um observador no pólo Norte). Em vez do ângulo sideral, usa-se por vezes a ascensão recta, que é o arco do equador compreendido entre o ponto vernal e o meridiano do astro, contado de 0 a 24 horas no sentido de Oeste para Leste. As coordenadas equatoriais são independentes da posição do observador.

As coordenadas horizontais (Figura 18) são referidas, como o seu nome indica, ao plano do horizonte, sendo por isso dependentes da posição do observador. As coordenadas horizontais que normalmente se usam são a altura e o azimute. A altura é o arco do vertical do astro<sup>19</sup> compreendido entre o horizonte e o astro, e conta-se de 0° (astro no horizonte) a 90° (astro no zénite). A distância zenital é o arco do vertical do astro compreendido entre o zénite e o astro, pelo que  $\zeta = 90^\circ - a$ . O azimute é o arco do horizonte compreendido entre um dos pontos cardeais, Norte ou Sul, tomado como origem, e o vertical do astro. Na navegação, é usual contar o azimute de 0° a 360° a partir do ponto cardinal Norte, no sentido dos ponteiros do relógio, mas também pode ser contado por quadrantes a partir dos pontos cardeais Norte ou Sul, ou de 0° a 180° a partir do ponto cardinal do mesmo nome do pólo elevado, para Leste ou para Oeste.

<sup>18</sup>As figuras incluídas neste apêndice foram facultadas pelo CTEN Jaime Carlos do Vale Ferreira da Silva, pelo que aqui ficam registados os agradecimentos do autor.

<sup>19</sup>Vertical do astro: circunferência máxima que contém a vertical do lugar (zénite e nadir) e o astro.

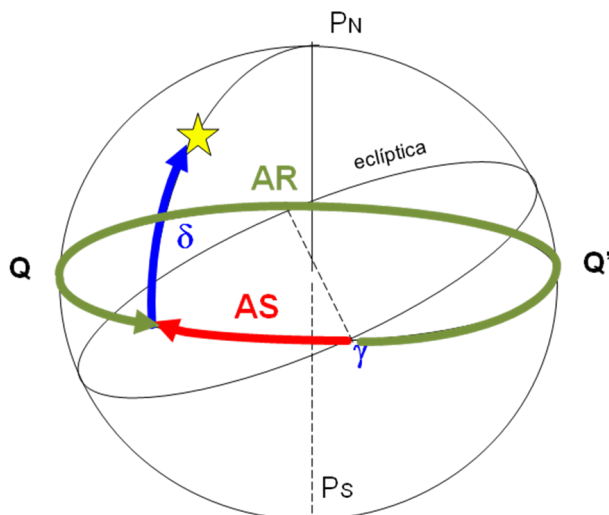


Figura 17: Coordenadas equatoriais.  $P_N$  e  $P_S$  são os polos  $N$  e  $S$ ,  $QQ'$  é o Equador e  $\gamma$  é o ponto vernal.

As coordenadas horárias (Figura 19) são o ângulo horário ( $h$ ) e a distância polar ( $\Delta$ ). O ângulo horário é o arco do equador compreendido entre o meridiano superior do lugar e o meridiano do astro. Conta-se de  $0^\circ$  a  $360^\circ$ , no sentido de Leste para Oeste. O ângulo no pólo  $P$  é o arco do equador compreendido entre o meridiano superior do lugar e o meridiano do astro, contado de  $0^\circ$  a  $180^\circ$  a partir do meridiano do lugar, para Leste ou para Oeste. Está relacionado com o ângulo horário, e é um dos elementos do triângulo de posição. A distância polar é o arco do meridiano do astro compreendido entre o pólo elevado e o astro. O triângulo de posição é um triângulo esférico cujos vértices são o pólo elevado, o zênite do observador e o astro, e cujos lados são a colatitude, a distância zenital e a distância polar. Combina as coordenadas equatoriais (declinação), geográficas (latitude) e horárias (ângulo no pólo), e a sua resolução está na base de toda a astronomia náutica.

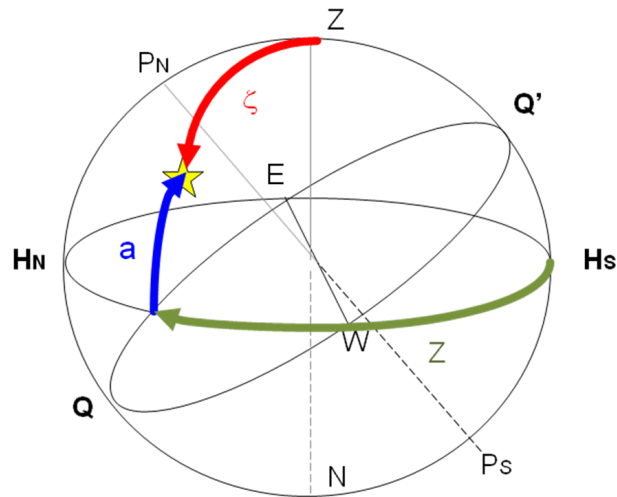


Figura 18: Coordenadas horizontais.  $H_N H_S$  é o plano do horizonte,  $Z$  é o zênite,  $N$  é o nadir,  $P_N$  é o pólo elevado e  $P_S$  é o pólo abaixado (neste caso, a posição do observador é no hemisfério norte).

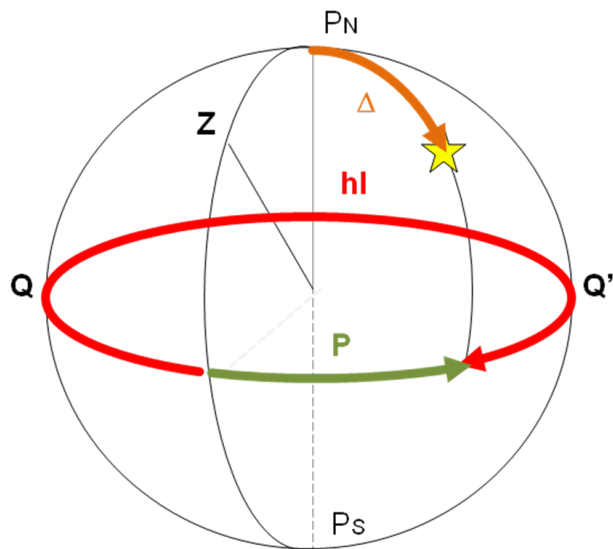


Figura 19: Coordenadas horárias.  $QQ_S$  é o equador,  $Z$  é o zênite,  $P_N$  é o pólo elevado e  $P_S$  é o pólo abaixado (neste caso, a posição do observador é no hemisfério norte).