Dinâmica de um truque de cartas

Maria Pires de Carvalho, *João Miguel Santos*
Departamento de Matemática & Centro de Matemática
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
Rua do Campo Alegre, 687, 4169-007 Porto
e-mails: `mpcarval@fc.up.pt`; `jmms69@gmail.com`

Resumo: Um dos truques com cartas mais populares entre os apreciadores destes passatempos é o seguinte. Com um baralho de 32 cartas, começamos por distribuir, ciclicamente e em sequência, as cartas por três montes, de modo que estes ficam com 11, 11 e 10 cartas, respectivamente, com as faces ilustradas pelos naipes voltadas para cima. Entretanto, um espectador escolhe em segredo uma das cartas e, no fim da repartição delas pelos três montes, aponta aquele que contém a carta que seleccionou. Após receber esta informação, reunimos os três montes, agora com as faces voltadas para baixo e de modo que o monte escolhido fique no meio, com um monte de 11 cartas por cima dele. Repetimos este procedimento quatro vezes, findas as quais exibimos a carta eleita. Como a descobrimos?, perguntará o leitor. No que se segue, contar-lhe-emos por que funciona este truque através do estudo de um sistema dinâmico que descreve o movimento e a posição da carta escolhida. E generalizaremos esta abordagem dinâmica a outros baralhos.

Abstract: One of the most appreciated playing card tricks runs as follows. We take a deck of 32 playing cards with the faces up and deal the cards, one by one, cyclically into three packs of 11, 11, 10 cards. Meanwhile, a bystander secretly chooses a card and tells us which pack contains it. We then collect the cards with the faces down into one deck, putting the indicated pack between the other two while ensuring that a pack with 11 cards goes on top. After four steps of this procedure, we display the elected card. How did we guess it? We will explain this riddle, after analyzing the properties of a dynamical system that models this game, and will generalize this dynamical approach to other decks.

palavras-chave: Sistema dinâmico discreto; ponto fixo; órbita pré-periódica.

keywords: Discrete dynamical system; fixed point; pre-periodic orbit.

1 O truque

No que se segue, usaremos o símbolo $\boxtimes$ para indicar que a carta está com a face ilustrada voltada para baixo e $\boxdot$ para a posição contrária. Consideremos um baralho de 32 cartas e posicionemo-lo com as faces ilustradas voltadas para baixo, que imaginamos numeradas de 1 a 32

$$\begin{array}{cc}
\boxtimes & 1 \\
\boxtimes & 2 \\
\downarrow & \vdots \\
\boxtimes & 31 \\
\boxtimes & 32
\end{array}$$

sendo a carta etiquetada com o número 1 a que está no topo do baralho e, portanto, a que sairá primeiro na distribuição das cartas por montes. Quando repartimos as cartas numa mesa por três montes, agora com as gravuras dos naipes voltadas para cima, formamos três sub-baralhos, com 11, 11 e 10 cartas, respectivamente, de faces voltadas para cima. A configuração delas é a representada pelo esquema

$$\begin{array}{cccc}
\boxdot & 31 & 32 & - \\
\boxdot & 28 & 29 & 30 \\
\boxdot & 25 & 26 & 27 \\
\uparrow & \cdots & \cdots & \cdots \\
\boxdot & 7 & 8 & 9 \\
\boxdot & 4 & 5 & 6 \\
\boxdot & 1 & 2 & 3
\end{array}$$

em que a última linha indica as cartas em contacto com a mesa. Entretanto um espectador escolhe uma carta e indica qual o monte que a contém. Com este dado, invertemos os três montes (as faces estão agora voltadas para baixo) e reunimo-los de modo que o monte escolhido fique no meio, com um monte de 11 cartas por cima dele.

Por exemplo, se o monte apontado tiver sido o primeiro (com as cartas $\boxdot$ $31, 28, 25, \cdots, 7, 4, 1$), pegamos no segundo monte, invertemo-lo, colocamos o primeiro monte igualmente invertido por baixo e finalmente pomos o terceiro no fundo, com as faces também voltadas para baixo. É o que mostra o diagrama que se segue

$$\boxtimes \quad 2\ 5\ 8\ \cdots\ 26\ 29\ 32 \qquad 1\ 4\ 7\ \cdots\ 25\ 28\ 31 \qquad 3\ 6\ 9\ \cdots\ 24\ 27\ 30$$

onde 2 é a carta do topo e 30 a do fundo do baralho. Se, pelo contrário, o monte indicado tiver sido o terceiro (o que tem a carta ⊡ 3), pegamos no primeiro e segundo montes, invertemo-los e colocamos o terceiro monte igualmente invertido no meio deles:

$$\boxtimes \quad 1\ 4\ 7\ \cdots\ 25\ 28\ 31 \qquad 3\ 6\ 9\ \cdots\ 24\ 27\ 30 \qquad 2\ 5\ 8\ \cdots\ 26\ 29\ 32$$

Depois de repetir 4 vezes este procedimento (rotina que designaremos por $\mathcal{R}$), retiramos a carta que está na 17ª posição do último baralho (a contar do topo), e essa é a carta eleita pelo espectador.

2 Formulação matemática do truque

O nosso objectivo é descobrir um modo expedito de descrever a posição da carta escolhida no fim da execução da rotina $\mathcal{R}$, apesar de não conhecermos tal carta nem a posição inicial dela.

Apliquemos a rotina $\mathcal{R}$ do truque à ordenação inicial do baralho, dada por $(\boxtimes\ 1, 2, \cdots, 32)$, e suponhamos que a carta escolhida em segredo é a i-ésima carta do baralho inicial (contando a partir do topo). Feitos os três montes, ela fica na posição

$$\left\lceil \frac{i}{3} \right\rceil$$

do seu monte, contando a partir da mesa, onde $\lceil x \rceil$ designa o menor inteiro não inferior a x. Antes de reunirmos estes montes, viramos cada um, invertendo portanto a posição das cartas. Esta operação garante que a posição no monte da carta eleita (isto é, $\lceil \frac{i}{3} \rceil$) é preservada se agora a determinarmos a partir do topo do monte. Reunidos os três montes no baralho, com o monte especial que contém a i-ésima carta no meio e um monte de 11 cartas em cima, a carta eleita, que era a $\lceil \frac{i}{3} \rceil$-ésima carta do seu monte, passa a estar na posição

$$11 + \left\lceil \frac{i}{3} \right\rceil$$

do novo baralho (contando a partir do topo).

Exemplo: Suponhamos que a carta escolhida é a 13ª do baralho inicial. Dispostos os três montes sobre a mesa, esta carta passa a ser a 5ª do primeiro monte, contando a partir da mesa:

$$\begin{array}{cccc}
\boxdot & 31 & 32 & - \\
\boxdot & 28 & 29 & 30 \\
\uparrow & \cdots & \cdots & \cdots \\
\boxdot & \boxed{13} & 14 & 15 \\
\boxdot & 10 & 11 & 12 \\
\boxdot & 7 & 8 & 9 \\
\boxdot & 4 & 5 & 6 \\
\boxdot & 1 & 2 & 3
\end{array}$$

Ao inverter os três montes, a carta escolhida fica na 5ª posição do seu monte mas agora a contar desde o topo:

$$\begin{array}{cccc}
\boxtimes & 1 & 2 & 3 \\
\boxtimes & 4 & 5 & 6 \\
\boxtimes & 7 & 8 & 9 \\
\boxtimes & 10 & 11 & 12 \\
\boxtimes & \boxed{13} & 14 & 15 \\
\downarrow & \cdots & \cdots & \cdots \\
\boxtimes & 28 & 29 & 30 \\
\boxtimes & 31 & 32 & -
\end{array}$$

Ao reunir os três montes invertidos, a carta escolhida fica na 16ª posição deste novo baralho:

$$\boxtimes \quad 2\ 5\ \cdots\ 29\ 32 \qquad 1\ 4\ 7\ 10\ \boxed{13}\ \cdots\ 28\ 31 \qquad 3\ 6\ \cdots\ 30$$

Assim sendo, a função $f : \{1, 2, \cdots, 32\} \to \{1, 2, \cdots, 32\}$ que à carta escolhida, a i-ésima contando a partir de cima do baralho inicial, atribui a sua posição ao fim de uma etapa completa da rotina $\mathcal{R}$, é dada por

$$i \in \{1, 2, \cdots, 32\} \mapsto f(i) = 11 + \left\lceil \frac{i}{3} \right\rceil .$$

E, portanto, a órbita dessa carta por f indica qual é a posição dela em cada novo baralho, obtido de cada vez que se completa o procedimento $\mathcal{R}$. O segredo do truque é então o seguinte: ao fim de quatro iterados de f (ou seja, depois de repetir a rotina $\mathcal{R}$ quatro vezes), sabemos onde está a carta escolhida mesmo não conhecendo a sua posição inicial i. É o que explicaremos nas próximas secções.

2.1 Órbitas

Consideremos um conjunto X e uma função $f : X \to X$. Como a imagem de f está contida no seu domínio, podemos compor f consigo mesma quantas vezes quisermos. Desse modo, associamos a f a família de funções

$$\begin{aligned} f^n &= f \circ f \circ \cdots \circ f, \quad \text{a composição de } f \text{ consigo mesma } n \text{ vezes, se } n \in \mathbb{N} \\ f^0 &= \text{ Identidade de } X \end{aligned}$$

e, para cada $x \in X$, temos definida uma sucessão, $(f^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$, que se designa *órbita* de x por f. O conjunto de todas as órbitas é o *sistema dinâmico* determinado por f.

Exemplo: (A referência [1] contém muitos outros.)

(1) Seja, para $x \geq 0$, $f(x) = \sqrt{2+x}$. A órbita de 2 é a sucessão constante de termo geral igual a 2, uma vez que 2 é *ponto fixo* de f: 2 é a solução da equação $f(x) = x$, ou seja, a abcissa do ponto de intersecção do gráfico de f com o gráfico da Identidade. A órbita de 0 é a sucessão

$$0, \ \sqrt{2}, \ \sqrt{2+\sqrt{2}}, \ \cdots, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots\sqrt{2}}}}, \cdots$$

que é monótona crescente e converge para o ponto fixo 2. Na Figura 1 podem ver-se os gráficos da função $f(x) = \sqrt{2+x}$ e da Identidade, e um esquema da evolução da órbita de 0 que se obtém desenhando segmentos verticais e horizontais que ligam sucessivamente os pontos $(f^n(0), f^n(0))$, $(f^n(0), f^{n+1}(0))$ e este a $(f^{n+1}(0), f^{n+1}(0))$, para $0 \leq n \leq N$, sendo N um natural suficientemente grande. (2) Se, para $x > 0$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$, a órbita de 1 é a sucessão constante de termo geral igual a 1 e a órbita de $0 < x_0 \neq 1$ é a sucessão

$$x_0, \ \frac{1}{x_0}, \ x_0, \cdots.$$

Ou seja, x_0 é um ponto fixo de f^2; diz-se *ponto periódico* de *período* 2 (Figura 2). (3) A função $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$, para $x > 0$, tem um único ponto fixo, $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, e a órbita de 1 é dada por

$$1, \ 2, \ \frac{3}{2}, \ \frac{5}{3}, \cdots, \frac{c_{n+1}}{c_n}, \cdots$$

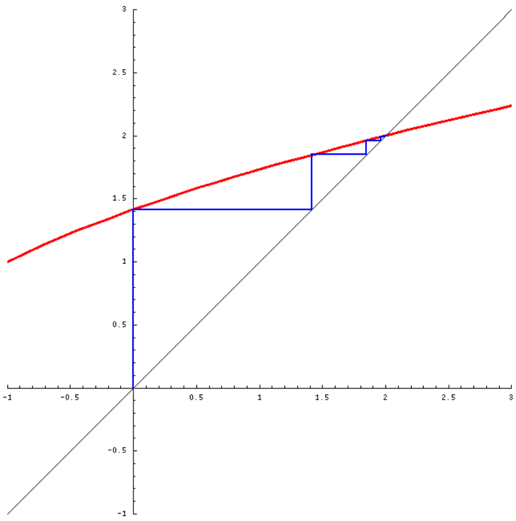

Figura 1: Órbita de 0 pela função $f(x) = \sqrt{2+x}$.

onde $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é a sucessão de Fibonacci. Para esta (ou qualquer outra órbita não fixa), as sucessões dos termos pares e dos termos ímpares são estritamente monótonas e limitadas, logo convergentes; além disso, a diferença entre termos sucessivos da órbita tende para zero. E, portanto, a órbita tem limite, que é o ponto fixo de f (Figura 3).

Quando a função $f : X \to X$ não é injectiva, pode acontecer que uma órbita atinja, ao fim de um número finito de iterados, uma órbita periódica. Por exemplo, se $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, então f tem dois pontos fixos (0 e 1) e a órbita de -1 é $-1, 1, 1, \cdots$. Em geral, dados um ponto fixo p de f e $q \neq p$ tais que existe $m \in \mathbb{N}$ verificando $f^m(q) = p$, diz-se que q é *pré-periódico* e o *pré-período* é o menor natural m nas condições anteriores.

2.2 Dinâmica do truque

Comecemos por determinar os pontos fixos da função

$$i \in \{1, 2, \cdots, 32\} \mapsto f(i) = 11 + \left\lceil \frac{i}{3} \right\rceil .$$

Fixado $x \in \{1, 2, \cdots, 32\}$, da divisão inteira de x por 3 obtemos $d \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $r \in \{0, 1, 2\}$ únicos tais que

$$x = 3d + r.$$

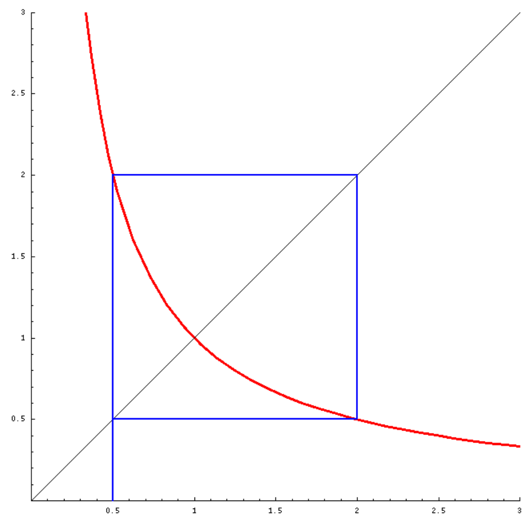

Figura 2: Órbita de $\frac{1}{2}$ pela função $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

A função $f(x) = 11 + \lceil \frac{x}{3} \rceil$ é, nesta formulação, dada por

$$f(3d+r) = \begin{cases} 11 + d & \text{se } r = 0 \\ 11 + d + 1 & \text{se } r = 1 \text{ ou } r = 2. \end{cases}$$

Assim, a equação que descreve os pontos fixos, $f(x) = x$, é

$$\begin{cases} 11 + d = 3d & \text{se } r = 0 \\ 11 + d + 1 = 3d + 1 & \text{se } r = 1 \\ 11 + d + 1 = 3d + 2 & \text{se } r = 2. \end{cases}$$

Ora, destas três equações, apenas a terceira (correspondente a $r = 2$) é solúvel no domínio de d, obtendo-se dela o valor $d = 5$. Consequentemente, $3d + r = 17$ é o único ponto fixo de f.

Recorde-se que a carta seleccionada secretamente tem, nos sucessivos baralhos obtidos pela iteração da rotina $\mathcal{R}$, uma posição dada pelos iterados de f. Provaremos que a carta seleccionada é fixa ou pré-periódica e que, neste caso, cai no ponto fixo que acabámos de calcular em não mais do que quatro iterações de f.

Proposição 1 *Para todo o* $x \in \{1, 2, \ldots 32\}$, *tem-se* $f^4(x) = 17$.

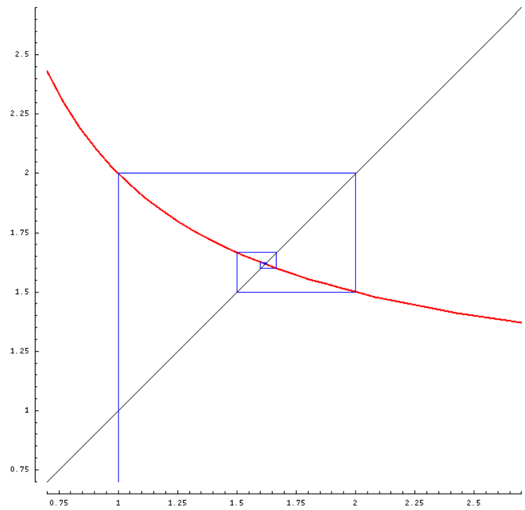

Figura 3: Órbita de 1 pela função $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$.

Demonstração: Basta que determinemos as pré-imagens de 17 por f, isto é, o conjunto

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(\{17\})$$

e mostremos que

$$\bigcup_{n=1}^{4} f^{-n}(\{17\}) = \{1, 2, \ldots 32\}.$$

O subconjunto A_1 dos elementos de $\{1, 2, \ldots, 32\}$ cuja imagem por f é 17 é dado por:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{x \in \{1, 2, \ldots, 32\} : f(x) = 17\} \\ &= \left\{x \in \{1, 2, \ldots, 32\} : 11 + \left\lceil \frac{x}{3} \right\rceil = 17\right\} \\ &= \left\{x \in \{1, 2, \ldots, 32\} : \left\lceil \frac{x}{3} \right\rceil = 6\right\} \\ &= \{16, 17, 18\}. \end{aligned}$$

Analogamente, o subconjunto A_2 de $\{1, 2, \ldots, 32\} \setminus A_1$ cuja imagem por f^2 é 17 é formado pelos elementos de $\{1, 2, \ldots, 32\} \setminus A_1$ cuja imagem por f está em A_1, ou seja:

$$\begin{aligned}
A_2 &= \left\{x \in \{1, 2, \ldots, 32\} \setminus A_1 : f^2(x) = 17\right\} \\
&= \{x \in \{1, 2, \ldots, 32\} \setminus A_1 : f(x) \in \{16, 17, 18\}\} \\
&= \left\{x \in \{1, 2, \ldots, 32\} \setminus A_1 : \left\lceil \frac{x}{3} \right\rceil \in \{5, 6, 7\}\right\} \\
&= \{13, 14, 15, 19, 20, 21\}\,.
\end{aligned}$$

Do mesmo modo, os elementos de $\{1, 2, \ldots, 32\} \setminus (A_1 \cup A_2)$ que ao fim de três iterados por f estão em $\{17\}$ são os de

$$\begin{aligned}
A_3 &= \left\{x \in \{1, 2, \ldots, 32\} \setminus (A_1 \cup A_2) : f^3(x) = 17\right\} \\
&= \{x \in \{1, 2, \ldots, 32\} \setminus (A_1 \cup A_2) : f(x) \in A_2\} \\
&= \left\{x \in \{1, 2, \ldots, 32\} \setminus (A_1 \cup A_2) : \left\lceil \frac{x}{3} \right\rceil \in \{2, 3, 4, 8, 9, 10\}\right\} \\
&= \{4, \cdots, 12\} \cup \{22, \cdots, 30\}\,.
\end{aligned}$$

Falta apenas calcular a imagem de f^4 restrita a $\{1, 2, 3, 31, 32\}$. Ora, $f(\{1, 2, 3\}) = \{12\}$ e $12 \in A_3$; analogamente, o primeiro iterado de $\{31, 32\}$ é $\{22\}$ e $22 \in A_3$. Logo, ao fim de quatro iterados, o conjunto $\{1, 2, 3, 31, 32\}$ é levado em $\{17\}$. ■

3 Generalização

Consideremos um baralho com N cartas, um número $1 < d < N$ de montes e seja $p = \left\lceil \frac{N}{d} \right\rceil$. Dividamos N por d, obtendo $q \in \mathbb{N}$ e $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tais que $0 \leq r < d$ e $N = dq + r$, e notemos que

$$\begin{cases} p = q & \text{se } r = 0 \\ p = q + 1 & \text{se } r > 0. \end{cases}$$

Distribuamos as cartas no baralho inicial, numeradas de 1 a N, de modo cíclico por d montes com as faces ilustradas voltadas para cima. Obtemos:

- se $r = 0$,

$$\begin{array}{llccr}
\boxdot & (q-1)d+1 & (q-1)d+2 & \cdots & qd \\
\uparrow & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\boxdot & 2d+1 & 2d+2 & \cdots & 3d \\
\boxdot & d+1 & d+2 & \cdots & 2d \\
\boxdot & 1 & 2 & \cdots & d
\end{array}$$

(e cada monte tem p cartas);

- se $r > 0$,

$$\begin{array}{llcccc}
\boxdot & qd+1 & \cdots & qd+r & - & \cdots & - \\
\boxdot & (q-1)d+1 & \cdots & (q-1)d+r & (q-1)d+r+1 & \cdots & qd \\
\uparrow & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\boxdot & 2d+1 & \cdots & 2d+r & 2d+r+1 & \cdots & 3d \\
\boxdot & d+1 & \cdots & d+r & d+r+1 & \cdots & 2d \\
\boxdot & 1 & \cdots & r & r+1 & \cdots & d
\end{array}$$

(e os montes maiores têm p cartas, os menores têm $p-1$).

Depois de indicado um dos montes, por conter uma carta seleccionada, inverte-se cada um dos d montes de cartas e, finalmente, reúnem-se num novo baralho, colocando-se um dos montes maiores (com p cartas) sobre o monte indicado e os montes que sobram por baixo.

Se a posição no baralho inicial (a contar do topo) da carta escolhida pelo espectador era i, a posição desta carta no baralho final é dada por

$$p + \left\lceil \frac{i}{d} \right\rceil .$$

Na próxima secção, estudaremos as funções

$$i \in \mathbb{N} \ \mapsto \ g_{p,d}(i) = p + \left\lceil \frac{i}{d} \right\rceil$$

para todo o par de naturais p e d com $d > 1$.

3.1 Dinâmica de $g_{p,d}$

A função $g_{p,d}$, de domínio $\mathbb{N}$, é monótona crescente, e, portanto, cada órbita é uma sucessão monótona. Se também for limitada, então converge e, se $g_{p,d}$ for contínua no limite, este tem de ser um ponto fixo de $g_{p,d}$. Comecemos portanto por determinar os pontos fixos desta função.

3.1.1 Pontos fixos

Trata-se de resolver a equação $g_{p,d}(x) = x$ em $\mathbb{N}$. Efectuando a divisão inteira de x por d, obtemos $x = dQ + R$, onde $Q, R \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $0 \leq R < d$. Então

$$g_{p,d}(x) = p + \left\lceil \frac{x}{d} \right\rceil = p + \left\lceil \frac{dQ+R}{d} \right\rceil = p + \left\lceil Q + \frac{R}{d} \right\rceil .$$

Lema 2 $\forall\, x \in \mathbb{R}\ \forall\, m \in \mathbb{Z} \quad \lceil m + x \rceil = m + \lceil x \rceil$.

Demonstração: Por definição, $\lceil x + m \rceil$ é o menor inteiro à direita de $x+m$. Logo

$$x + m \leq \lceil x + m \rceil \leq \lceil x \rceil + m.$$

Se a última desigualdade fosse estrita, o inteiro $\lceil x + m \rceil - m$ verificaria

$$x \leq \lceil x + m \rceil - m < \lceil x \rceil$$

contradizendo a definição de $\lceil x \rceil$. $\square$

Pelo Lema 2,

$$g_{p,d}(x) = \begin{cases} p + Q & \text{se } R = 0 \\ p + Q + 1 & \text{se } R > 0 \end{cases}$$

logo a equação $g_{p,d}(x) = x$ é equivalente a

$$\begin{cases} p + Q = dQ & \text{se } R = 0 \\ p + Q + 1 = dQ + R & \text{se } R > 0 \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{cases} Q(d-1) = p & \text{se } R = 0 \\ Q(d-1) + (R-1) = p & \text{se } R > 0 \end{cases}.$$

Ora, se $d - 1$ não divide p, devemos ter $R > 0$, $R > 1$ e

$$Q(d-1) + (R-1) = p.$$

Logo um tal ponto fixo x tem de verificar a igualdade

$$\begin{aligned} x = dQ + R &= dQ + (p - Q(d-1) + 1) \\ &= p + Q + 1. \end{aligned}$$

Note-se ainda que, como $1 < R \leq d - 1$, se tem

$$\left\lceil \frac{R}{d-1} \right\rceil = 1 = \left\lceil \frac{R-1}{d-1} \right\rceil$$

e, como $p = Q(d-1) + (R-1)$, de novo pelo Lema 2,

$$\begin{aligned} \left\lceil \frac{p}{d-1} \right\rceil &= \left\lceil \frac{Q(d-1) + (R-1)}{d-1} \right\rceil \\ &= \left\lceil Q + \frac{R-1}{d-1} \right\rceil \\ &= Q + \left\lceil \frac{R-1}{d-1} \right\rceil \\ &= Q + 1. \end{aligned}$$

O ponto fixo é assim dado por

$$x = p + \left\lceil \frac{p}{d-1} \right\rceil = \left\lceil \frac{pd}{d-1} \right\rceil .$$

É precisamente o que acontece quando o baralho tem $N = 32$ cartas e $d = 3$: $p = 11$ e a função $g_{11,3} = f$ tem um único ponto fixo, $\left\lceil \frac{11 \times 3}{2} \right\rceil = 17$.

Se $d-1$ divide p, R deve ser 0 ou 1. Se $R = 0$, então

$$x = dQ = \frac{pd}{d-1}.$$

Se $R = 1$, tem-se

$$x = dQ + 1 = \frac{pd}{d-1} + 1$$

É o caso de um baralho com $N = 36$ cartas e $d = 3$: $p = 12$ e a função $g_{12,3}$ tem dois pontos fixos, $\frac{12 \times 3}{2} = 18$ e $\frac{12 \times 3}{2} + 1 = 19$.

Conclusão:

Proposição 3
(a) Se $d-1$ não divide p, então $g_{p,d}$ tem um único ponto fixo, $\left\lceil \frac{pd}{d-1} \right\rceil$.
(b) Se $d-1$ divide p, então $g_{p,d}$ tem dois pontos fixos, $\frac{pd}{d-1}$ *e* $\frac{pd}{d-1} + 1$.

3.1.2 Outras órbitas

Nesta secção, provaremos que todas as órbitas por $g_{p,d}$ terminam, ao fim de um número finito de iterações, num ponto fixo. Comecemos por estabelecer uma expressão geral para os iterados da função $g_{p,d}$.

Proposição 4 *Dados $d > 1$ e $p \in \mathbb{N}$, para todo o $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e qualquer $x \in \mathbb{N}$, tem-se*

$$g_{p,d}^n(x) = \left\lceil \frac{pd}{d-1} + \left(x - \frac{pd}{d-1} \right) \frac{1}{d^n} \right\rceil .$$

Demonstração: Fixemos $x \in \mathbb{N}$. Para $n = 0$, a igualdade é imediata uma vez que

$$g_{p,d}^0(x) = \text{ Identidade } (x) = x$$

e, como $x \in \mathbb{N}$,

$$\left\lceil \frac{pd}{d-1} + \left(x - \frac{pd}{d-1}\right)\frac{1}{d^0}\right\rceil = \lceil x \rceil = x.$$

Suponhamos agora que, para este x e um natural fixado n, se tem

$$g_{p,d}^{n}(x) = \left\lceil \frac{pd}{d-1} + \left(x - \frac{pd}{d-1}\right)\frac{1}{d^n}\right\rceil.$$

Então

$$\begin{aligned} g_{p,d}^{n+1}(x) &= p + \left\lceil \frac{g_{p,d}^{n}(x)}{d} \right\rceil \\ &= p + \left\lceil \frac{\left\lceil \frac{pd}{d-1} + \left(x - \frac{pd}{d-1}\right)\frac{1}{d^n}\right\rceil}{d} \right\rceil \\ &= p + \left\lceil \frac{\left\lceil d\left(\frac{p}{d-1} + \left(x - \frac{pd}{d-1}\right)\frac{1}{d^{n+1}}\right)\right\rceil}{d} \right\rceil. \end{aligned}$$

Lema 5 $\forall\, z \in \mathbb{R}\ \forall\, \ell \in \mathbb{N}\quad \left\lceil \frac{\lceil \ell\, z \rceil}{\ell} \right\rceil = \lceil z \rceil.$

Demonstração: Consideremos um natural ℓ e um real z. Como $\mathbb{R}$ é a união (disjunta) dos intervalos $[s, s+1[$, onde $s \in \mathbb{Z}$, existem $s \in \mathbb{Z}$ e $t \in [0,1[$ (únicos) tais que $z = s + t$. Se $t = 0$,

$$\lceil z \rceil = s = \left\lceil \frac{\lceil \ell\, z \rceil}{\ell} \right\rceil.$$

Se $t > 0$, temos $\lceil z \rceil = s + 1$ e, como $0 < \ell\, t < \ell$, sabemos que

$$0 < \frac{\lceil \ell\, t \rceil}{\ell} \leq 1.$$

Por outro lado, pelo Lema 2,

$$\frac{\lceil \ell\, z \rceil}{\ell} = \frac{\lceil \ell\, s + \ell\, t \rceil}{\ell} = \frac{\ell\, s + \lceil \ell\, t \rceil}{\ell} = s + \frac{\lceil \ell\, t \rceil}{\ell},$$

e

$$\left\lceil \frac{\lceil \ell\, z \rceil}{\ell} \right\rceil = \left\lceil s + \left\lceil \frac{\lceil \ell\, t \rceil}{\ell} \right\rceil \right\rceil = s + \left\lceil \frac{\lceil \ell\, t \rceil}{\ell} \right\rceil = s + 1. \ \square$$

Dos Lemas 2 e 5, resulta que

$$\begin{aligned} g_{p,d}^{n+1}(x) &= p + \left\lceil \frac{p}{d-1} + \left(x - \frac{pd}{d-1}\right) \frac{1}{d^{n+1}} \right\rceil \\ &= \left\lceil p + \frac{p}{d-1} + \left(x - \frac{pd}{d-1}\right) \frac{1}{d^{n+1}} \right\rceil \\ &= \left\lceil \frac{pd}{d-1} + \left(x - \frac{pd}{d-1}\right) \frac{1}{d^{n+1}} \right\rceil . \blacksquare \end{aligned}$$

Consequentemente,

Teorema 6 *A função $g_{p,d}$ tem um atractor global, o conjunto dos seus pontos fixos.*

Demonstração: Mostraremos que, para todo o $x \in \mathbb{N}$, existe um iterado $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $g_{p,d}^{n}(x)$ é um ponto fixo de $g_{p,d}$. Uma vez que o número de pontos fixos de $g_{p,d}$ depende de $d-1$ dividir ou não p, faremos essa distinção no argumento que se segue.

Se $d-1$ não divide p, então, pela Proposição 3, a função $g_{p,d}$ tem um único ponto fixo, $\left\lceil \frac{pd}{d-1} \right\rceil$. Como $d > 1$, a sucessão $\left(\frac{1}{d^k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge para zero quando $k \to +\infty$ e, portanto, para n suficientemente grande, tem-se

$$\left| \left(x - \frac{pd}{d-1}\right) \frac{1}{d^{n}} \right| < 1.$$

Logo, como $d-1$ não divide p,

$$\left\lceil \frac{pd}{d-1} + \left(x - \frac{pd}{d-1}\right) \frac{1}{d^{n}} \right\rceil = \left\lceil \frac{pd}{d-1} \right\rceil$$

ou seja,

$$g_{p,d}^{n}(x) = \left\lceil \frac{pd}{d-1} \right\rceil .$$

Se $d-1$ divide p, então, pela Proposição 3, a função $g_{p,d}$ tem dois pontos fixos, $\frac{pd}{d-1}$ e $\frac{pd}{d-1}+1$. Se $x < \frac{pd}{d-1}$, temos, para n suficientemente grande,

$$-1 < \left(x - \frac{pd}{d-1}\right) \frac{1}{d^{n}} < 0$$

e, portanto,

$$\left\lceil \frac{pd}{d-1} + \left(x - \frac{pd}{d-1}\right) \frac{1}{d^{n}} \right\rceil = \frac{pd}{d-1}.$$

Analogamente, se $x > \dfrac{pd}{d-1}$, então, para n suficientemente grande,

$$0 < \left(x - \frac{pd}{d-1}\right)\frac{1}{d^n} < 1$$

logo

$$\left\lceil \frac{pd}{d-1} + \left(x - \frac{pd}{d-1}\right)\frac{1}{d^n} \right\rceil = \frac{pd}{d-1} + 1. \blacksquare$$

3.1.3 Tempo de paragem

Para o sucesso do truque não basta saber que a carta escolhida irá parar a uma posição fixa conhecida. Precisamos de conhecer também previamente o número de iterados que a carta gasta até chegar a essa posição, pois esse é o número de vezes que a rotina $\mathcal{R}$ do truque tem de ser repetida.

Para $x \in \mathbb{N}$, seja

$$T_x = \min\left\{n \in \mathbb{N} \cup \{0\} : g_{p,d}^n(x) \text{ é um ponto fixo de } g_{p,d}\right\}.$$

Este valor estima, em particular, o pré-período de cada x não fixo pela dinâmica.

Proposição 7 *Dado $x \in \mathbb{N}$:*

(a) Se $d-1$ não divide p e $x > \dfrac{pd}{d-1}$,

$$T_x = \left\lceil \frac{\ln\left(\dfrac{x - \frac{pd}{d-1}}{\left\lceil \dfrac{pd}{d-1}\right\rceil - \dfrac{pd}{d-1}}\right)}{\ln\, d} \right\rceil.$$

(b) Se $d-1$ não divide p e $x < \dfrac{pd}{d-1}$,

$$T_x = \left\lceil \frac{\ln\left(\dfrac{\frac{pd}{d-1} - x}{\dfrac{pd}{d-1} - \left\lceil \dfrac{pd}{d-1} \right\rceil + 1}\right)}{\ln d} \right\rceil .$$

(c) Se $d-1$ divide p e $x > \dfrac{pd}{d-1}$,

$$T_x = \left\lceil \frac{\ln\left(x - \dfrac{pd}{d-1}\right)}{\ln d} \right\rceil .$$

(d) Se $d-1$ divide p e $x < \dfrac{pd}{d-1}$,

$$T_x = \left\lceil \frac{\ln\left(\dfrac{pd}{d-1} - x\right)}{\ln d} \right\rceil .$$

(e) Se $d-1$ divide p e $x = \dfrac{pd}{d-1}$, então $T_x = 0$.

Demonstração:
(a) Como $d-1$ não divide p, a função $g_{p,d}$ tem um único ponto fixo, $\left\lceil \dfrac{pd}{d-1} \right\rceil$. Além disso, de acordo com a Proposição 4,

$$\begin{array}{rcl} g^n_{p,d}(x) & = & \left\lceil \dfrac{pd}{d-1} \right\rceil \\ & \Updownarrow & \\ \left\lceil \dfrac{pd}{d-1} + \left(x - \dfrac{pd}{d-1}\right) \dfrac{1}{d^n} \right\rceil & = & \left\lceil \dfrac{pd}{d-1} \right\rceil . \end{array}$$

Ora, se $x > \dfrac{pd}{d-1}$, a igualdade anterior dá-se se e só se

$$\left(x - \frac{pd}{d-1}\right) \frac{1}{d^n} \leq \left\lceil \frac{pd}{d-1} \right\rceil - \frac{pd}{d-1}$$

ou seja, se e só se,

$$n \geq \frac{\ln\left(\dfrac{x - \frac{pd}{d-1}}{\left\lceil \dfrac{pd}{d-1} \right\rceil - \dfrac{pd}{d-1}}\right)}{\ln d}.$$

Logo,

$$T_x = \left\lceil \frac{\ln\left(\dfrac{x - \frac{pd}{d-1}}{\left\lceil \dfrac{pd}{d-1} \right\rceil - \dfrac{pd}{d-1}}\right)}{\ln d} \right\rceil.$$

(b) Se $x < \dfrac{pd}{d-1}$, a igualdade

$$\left\lceil \frac{pd}{d-1} + \left(x - \frac{pd}{d-1}\right) \frac{1}{d^n} \right\rceil = \left\lceil \frac{pd}{d-1} \right\rceil$$

é válida se e só se

$$\left(\frac{pd}{d-1} - x\right) \frac{1}{d^n} < \frac{pd}{d-1} - \left(\left\lceil \frac{pd}{d-1} \right\rceil - 1\right).$$

Isto é, deve ser

$$n > \frac{\ln\left(\dfrac{\frac{pd}{d-1} - x}{\dfrac{pd}{d-1} - \left\lceil \dfrac{pd}{d-1} \right\rceil + 1}\right)}{\ln d}.$$

Por isso,

$$T_x = \left\lceil \frac{\ln\left(\dfrac{\frac{pd}{d-1} - x}{\dfrac{pd}{d-1} - \left\lceil \dfrac{pd}{d-1} \right\rceil + 1}\right)}{\ln d} \right\rceil.$$

(c) Suponhamos agora que $d-1$ divide p (caso em que $g_{p,d}$ tem dois pontos fixos, $\dfrac{pd}{d-1}$ e $\dfrac{pd}{d-1} + 1$) e que $x > \dfrac{pd}{d-1}$. Como x é inteiro, de facto

$x \geq \dfrac{pd}{d-1}+1$. Logo, como vimos no Teorema 6, a órbita de x termina no maior ponto fixo. E, de acordo com a Proposição 4, o iterado $g^n_{p,d}(x)$ é esse ponto fixo se e só se

$$\left(x-\frac{pd}{d-1}\right)\frac{1}{d^n}\leq 1.$$

Ou seja, se e só se,

$$n \geq \frac{\ln\left(x-\dfrac{pd}{d-1}\right)}{\ln d}.$$

Consequentemente,

$$T_x = \left\lceil \frac{\ln\left(x-\dfrac{pd}{d-1}\right)}{\ln d}\right\rceil .$$

(d) Por argumento análogo ao anterior, concluímos que, se $x < \dfrac{pd}{d-1}$, então a órbita de x termina no ponto fixo $\dfrac{pd}{d-1}$ e que $g^n_{p,d}(x)$ é esse ponto fixo se e só se

$$\left(x-\frac{pd}{d-1}\right)\frac{1}{d^n}> -1.$$

Devemos portanto ter

$$n > \frac{\ln\left(\dfrac{pd}{d-1}-x\right)}{\ln d}.$$

Assim,

$$T_x = \left\lceil \frac{\ln\left(\dfrac{pd}{d-1}-x\right)}{\ln d}\right\rceil .$$

(e) Obviamente, se $x = \dfrac{pd}{d-1}$, então $T_x = 0$. ■

Exemplo: Voltemos ao truque com 32 cartas, que corresponde à iteração da função $g_{11,3}$. Como 2 não divide 11, a função $g_{11,3}$ tem apenas um ponto fixo, 17, e

$$T_x = \begin{cases} \left\lceil \dfrac{\ln(2x-33)}{\ln 3}\right\rceil & \text{se } x \geq 17 \\[2ex] \left\lceil \dfrac{\ln(33-2x)}{\ln 3}\right\rceil & \text{se } x < 17\ . \end{cases}$$

Logo o tempo máximo que as órbitas pré-periódicas gastam para atingir o ponto fixo é

$$\max\left\{\left\lceil\frac{\ln(2\times 32-33)}{\ln 3}\right\rceil,\left\lceil\frac{\ln(33-2\times 1)}{\ln 3}\right\rceil\right\}=4.$$

4 Por que razão o truque usa 32 cartas?

Fixemos $d=3$ e voltemos a um baralho com um número de cartas $N>3$. Consideremos uma rotina $\mathcal{R}_N$ idêntica à descrita na Secção 3:

- Começamos por distribuir, ciclicamente e em sequência, as N cartas por três montes, com as gravuras dos naipes voltadas para cima; durante esse processo, o espectador escolhe em segredo uma das cartas.
- No fim da repartição das cartas pelos 3 montes, o espectador indica qual é o monte que contém a carta que seleccionou.
- Após recebermos esta informação, invertemos cada um dos três montes e reunimo-los, com as faces voltadas para baixo, num novo baralho, de modo que o monte escolhido fique no meio, com um monte dos de maior tamanho (isto é, com $p=\left\lceil\frac{N}{3}\right\rceil$ cartas) por cima dele.

Para a carta seleccionada, a repetição desta rotina corresponde à iteração da função $g_{p,d}$ restrita ao conjunto $\{1,2,\cdots,N\}$, isto é, a aplicação

$$i\in\{1,2,\cdots,N\}\mapsto g_{p,d}(i)=\left\lceil\frac{N}{3}\right\rceil+\left\lceil\frac{i}{3}\right\rceil.$$

Contudo, para que assim seja, é essencial que haja pelo menos dois montes com o número máximo de cartas: se a carta escolhida estiver num monte de maior tamanho, deverá haver outra igualmente grande para que, quando se agrupam os montes, se possa colocar um monte com $\left\lceil\frac{N}{3}\right\rceil$ cartas por cima do monte seleccionado como exige a rotina $\mathcal{R}_N$. Isso exclui vários valores de N. Supondo, como é usual, que um baralho completo tem 52 cartas, para este truque corresponder sempre à iteração da mesma função $g_{p,d}$, devemos ter $N>3$ e N congruente com 0 ou 2 módulo 3.

Além disso, para o truque ser bem sucedido, é essencial que $g_{p,d}$ tenha apenas um ponto fixo, ou a posição da carta seleccionada não está determinada. Por exemplo, com um baralho de 36 cartas, $p=\left\lceil\frac{36}{3}\right\rceil=12$ e a função correspondente

$$g_{12,3}(x) = 12 + \left\lceil \frac{x}{3} \right\rceil$$

tem dois pontos fixos, 18 e 19. E, portanto, embora a carta eleita tenha órbita por $g_{12,3}$ que termina num ponto fixo, qual dos pontos fixos a atrai depende da carta escolhida. Temos, portanto, de fazer nova exclusão nos valores que admitimos para N: de acordo com a Proposição 3, não servem os valores de N para os quais $\left\lceil \frac{N}{3} \right\rceil$ é par. Assim, restam os valores de $8 \leq N \leq 51$ tais que N é congruente com 2 ou 3 módulo 6:

$$N \in \{8, 9, 14, 15, 20, 21, 26, 27, 32, 33, 38, 39, 44, 45, 50, 51\}.$$

Qual destes valores de N é mais apropriado para realizar o truque? Pretende-se que ele surja como um feito de magia, numa tarefa de outro modo impossível, por isso não convém que o valor de N seja demasiado pequeno. Por outro lado, se N é elevado, o número de vezes que é necessário repetir a rotina que lhe está associada (e que depende do máximo do tempo de paragem T_x), envolvendo muitas cartas a distribuir por 3 montes, pode entediar a assistência, comprometendo-se a sua colaboração no truque.

Para termos uma estimativa do efeito, para cada N, destas duas componentes na eficiência do truque, representámo-las na tabela seguinte, construída a partir da informação das secções anteriores sobre a função $g_{p,3}$, onde $p = \left\lceil \frac{N}{3} \right\rceil$.

Note-se que a função $g_{p,3}$ tem um único ponto fixo, $\left\lceil \frac{3p}{2} \right\rceil$, e que, como para cada p ímpar, $\left\lceil \frac{3p}{2} \right\rceil - \frac{3p}{2} = \frac{1}{2}$, o tempo de paragem de cada órbita é dado por:

- Se $x > \frac{3p}{2}$,

$$T_x = \left\lceil \frac{\ln\left(\frac{x - \frac{3p}{2}}{\left\lceil \frac{3p}{2} \right\rceil - \frac{3p}{2}} \right)}{\ln 3} \right\rceil = \left\lceil \frac{\ln(2x - 3p)}{\ln 3} \right\rceil.$$

- Se $x < \dfrac{3p}{2}$,

$$T_x = \left\lceil \frac{\ln\left(\dfrac{\frac{3p}{2} - x}{\dfrac{3p}{2} - \left\lceil \dfrac{3p}{2} \right\rceil + 1}\right)}{\ln 3} \right\rceil = \left\lceil \frac{\ln(3p - 2x)}{\ln 3} \right\rceil.$$

Observe-se ainda que $g_{p,3}(\{1, 2, \cdots, N\}) \subseteq \{1, 2, \cdots, N\}$ uma vez que, para cada $i \in \{1, 2, \cdots, N\}$, se tem $\left\lceil \frac{i}{3} \right\rceil \geq 0$, que $\left\lceil \dfrac{N}{3} \right\rceil \leq \dfrac{N}{3} + 1$ e que, sendo $N \geq 8$, temos $1 < p$ e, portanto,

$$\begin{aligned} 1 &< p + \left\lceil \frac{i}{3} \right\rceil \leq p + \left\lceil \frac{N}{3} \right\rceil \\ &\leq \left(\frac{N}{3} + 1\right) + \left(\frac{N}{3} + 1\right) < N. \end{aligned}$$

N	p	*Ponto fixo*	*Pré-período máximo*
8	3	5	2
9	3	5	2
14	5	8	3
15	5	8	3
20	7	11	3
21	7	11	3
26	9	14	3
27	9	14	3
32	11	17	4
33	11	17	4
38	13	20	4
39	13	20	4
44	15	23	4
45	15	23	4
50	17	26	4
51	17	26	4

Entende-se agora que a versão mais popular do truque recaia sobre um baralho com 32 cartas: é o menor valor de N não demasiado pequeno para uma repetição não excessiva (4 vezes) da rotina do truque. Contudo, uma vez que, quando $N = 33$, o procedimento é idêntico mas os montes têm igual número de cartas, o que facilita a execução do truque, $N = 33$ é uma escolha mais apropriada. Note-se ainda que, para um espectador impaciente, ansioso pelo desfecho do truque, o valor recomendado é $N = 9$.

5 Uma versão alternativa do truque

Se o leitor praticou o truque que aqui analisámos, certamente notou que, se não tivesse de inverter as cartas de cada vez que reúne os montes, a rotina seria mais fácil de executar e o truque um pouco mais elegante, pois as faces ilustradas com os naipes estariam sempre à vista do espectador. Contudo, como se verá, o sistema dinâmico correspondente é um pouco mais complica--do. Verifiquemos como decorreria o truque e o que concluímos neste contexto.

Dado um baralho com N cartas, sendo N congruente com 0 ou 2 módulo 3 (pelas razões que explicámos na secção anterior: pelo menos dois dos montes têm o número máximo de cartas, $p = \left\lceil \frac{N}{3} \right\rceil$), distribuamo-las por 3 montes com as faces voltadas para cima. Uma vez assinalado o monte que contém a carta eleita, reunimos os três montes com as faces voltadas para cima, colocando o monte escolhido no meio com um de p cartas por cima. Deste modo, se a carta escolhida estava na posição inicial $x \in \{1, 2, \cdots, N\}$, no novo baralho está na posição:

- $2p - \left\lceil \dfrac{x}{3} \right\rceil$, se $N \equiv 2\,(mod\ 3)$ e a carta escolhida está no monte menor
- $2p + 1 - \left\lceil \dfrac{x}{3} \right\rceil$, caso contrário.

Para evitarmos o uso de duas expressões distintas, conforme a carta escolhida esteja ou não no monte menor, convirá que o truque se restrinja a valores de N que são múltiplos de 3 (e maiores do que 3, ou o truque não tem interesse). Nesse caso, se a carta escolhida estava na posição inicial $x \in \{1, 2, \cdots, N\}$, no novo baralho está na posição

$$2\left\lceil \frac{N}{3} \right\rceil + 1 - \left\lceil \frac{x}{3} \right\rceil .$$

A expressão acima sugere que analisemos o comportamento dinâmico da função decrescente $h_{p,d} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por

$$h_{p,d} = p - \left\lceil \frac{x}{d} \right\rceil$$

onde p e $d > 1$ são números naturais.

5.1 Pontos fixos de $h_{p,d}$

Fixemos dois naturais p e d. Dado $x \in \mathbb{N}$, dividamos x por d, obtendo inteiros Q e R tais que $x = dQ + R$, $Q \geq 0$ e $0 \leq R < d$. Nesta notação, a equação $h_{p,d}(x) = x$ é equivalente a

$$p - \left\lceil \frac{dQ + R}{d} \right\rceil = dQ + R$$

ou seja,

$$p - Q - \left\lceil \frac{R}{d} \right\rceil = dQ + R.$$

Se $R = 0$, devemos ter $p = (d+1)Q$, e portanto a função $h_{p,d}$ tem um (único) ponto fixo, $\frac{dp}{d+1}$.

Se $R > 0$, então p tem de verificar a equação $p = (d+1)Q + (R+1)$ (e, note-se, $d+1 > R+1 > 1$), o que significa que a função $h_{p,d}$ tem um (único) ponto fixo, igual a

$$x = dQ + R = dQ + (p - 1 - (d+1)Q) = p - (Q+1) = p - \left\lceil \frac{p}{d+1} \right\rceil.$$

Acabámos de demonstrar que:

Proposição 8 *A função $h_{p,d}$ tem um ponto fixo se e só se $d+1$ divide p ou o resto da divisão inteira de p por $d+1$ é estritamente maior do que 1.*

Exemplo: Se p e d estão associados a um truque com N cartas que se distribuem por 3 montes e N é múltiplo de 3, então

$$p = 2\left\lceil \frac{N}{3} \right\rceil + 1$$

é ímpar e portanto $d + 1 = 4$ não o divide. Para tais valores, $h_{p,3}$ tem um ponto fixo se e só se o resto da divisão inteira de p por 4 é estritamente maior do que 1. Por exemplo, se consideramos um baralho com $N = 9$ cartas, então $p = 2\left\lceil \frac{N}{3} \right\rceil + 1 = 7$ e a correspondente função $h_{7,3}$ tem um único ponto fixo, 5. Pelo contrário, se $N = 12$, então $p = 9$ e $h_{9,3}$ não tem pontos fixos. Em geral, se $N = 6Q$, para algum natural Q, então $p = 4Q+1$ e a função $h_{p,3}$ não tem pontos fixos; e reciprocamente.

5.2 Pontos periódicos de $h_{p,d}$

Falta analisar o caso em que a divisão inteira de p por $d+1$ dá resto 1, isto é, quando existe um inteiro não negativo Q tal que $p = (d+1)Q + 1$. Para estes valores de p, a função $h_{p,d}$ não tem pontos fixos; verifiquemos que tem pontos periódicos de período superior a 1.

Proposição 9 *Se p é congruente com 1 módulo 4, então a função $h_{p,d}$ tem uma (única) órbita periódica de período 2.*

Demonstração: Procuramos dois pontos x_1 e x_2 distintos tais que $h_{p,d}(x_1) = x_2$ e $h_{p,d}(x_2) = x_1$. Se dividirmos x_1 e x_2 por d, obtemos inteiros não negativos q_1, q_2, r_1 e r_2 tais que $0 \leq r_1 < d$, $0 \leq r_2 < d$, $x_1 = dq_1 + r_1$ e $x_2 = dq_2 + r_2$. Deste modo, x_1 e x_2 formam órbita de período 2 se e só se

$$\begin{cases} p - q_1 - \left\lceil \dfrac{r_1}{d} \right\rceil = dq_2 + r_2 \\ p - q_2 - \left\lceil \dfrac{r_2}{d} \right\rceil = dq_1 + r_1 \end{cases}$$

Lema 10 *Nestas condições, devemos ter $r_1 + r_2 > 0$ e $r_1 \times r_2 = 0$.*

Demonstração: Se $r_1 = 0 = r_2$, então as igualdades anteriores reduzem-se a

$$\begin{cases} p - q_1 = dq_2 \\ p - q_2 = dq_1 \end{cases}$$

Daqui deduzimos que $d(q_1 - q_2) = q_1 - q_2$ e, como $d > 1$, que $q_1 = q_2$. Logo $x_1 = x_2$, contradizendo o facto de a função $h_{p,d}$ não ter pontos fixos. E, portanto, $r_1 + r_2 > 0$.

Se $r_1 > 0$ e $r_2 > 0$, então as igualdades acima reescrevem-se como

$$\begin{cases} p - q_1 - 1 = dq_2 + r_2 \\ p - q_2 - 1 = dq_1 + r_1 \end{cases}$$

Logo $(d-1)(q_1 - q_2) = r_2 - r_1$ e, como $0 \leq |r_2 - r_1| < d - 1$, os restos r_1 e r_2 têm de ser iguais. E, portanto, como $d > 1$, deve ser $q_1 = q_2$, de onde resulta que $x_1 = x_2$, e de novo uma contradição. Assim, concluímos que $r_1 \times r_2 = 0$. $\square$

Terminemos a prova da Proposição 9. Sabemos, pelo Lema 10, que $r_1 = 0$ e $r_2 > 0$, ou $r_1 > 0$ e $r_2 = 0$. No primeiro caso (o outro é análogo), a descrição dos dois pontos de uma órbita de período 2, digamos $x_1 = dq_1$ e $x_2 = dq_2 + r_2$, onde $0 < r_2 < d$, é dada pelas equações

$$\begin{cases} p - q_1 = dq_2 + r_2 \\ p - q_2 - 1 = dq_1 \end{cases}$$

Delas resulta que $(d-1)(q_2 - q_1) = 1 - r_2$ e, como $0 \leq |1 - r_2| < d - 1$, que devemos ter $r_2 = 1$, logo $q_2 = q_1$ e $p - 1 = (d+1)q_1$. O que significa que existe órbita de período 2, formada pelos pontos

$$x_1 = dq_1 = \frac{dp - d}{d+1}$$

e

$$x_2 = dq_2 + r_2 = dq_2 + 1 = \frac{dp - d}{d+1} + 1. \ \square$$

Por exemplo, com um baralho de $N = 12$ cartas, tem-se $p = 9$ e o truque corresponde à iteração da função $h(x) = 9 - \left\lceil \frac{x}{3} \right\rceil$; h não tem pontos fixos e possui uma única órbita de período 2, dada por $x_1 = 6$ e $x_2 = 7$.

5.3 Dinâmica de $h_{p,d}$

Tal como para as funções $g_{p,d}$, queremos saber se o ponto fixo ou a órbita de período 2 de $h_{p,d}$ atraem as outras órbitas. Comecemos por deduzir, por um argumento recorrente análogo ao da Secção 3.1.2, uma expressão geral para os iterados de $h_{p,d}$.

Proposição 11 *Dados $d > 1$ e $p \in \mathbb{N}$, para todo o $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e todo o $x \in \mathbb{N}$, tem-se*

$$h_{p,d}^{2n}(x) = \left\lceil \frac{dp - d}{d+1} - \frac{\frac{dp-d}{d+1} - x}{d^{2n}} \right\rceil$$

$$h_{p,d}^{2n+1}(x) = \left\lceil \frac{dp - d}{d+1} + \frac{\frac{dp-d}{d+1} - x}{d^{2n+1}} + \frac{1}{d^{2n+1}} \right\rceil.$$

Demonstração: Para $n = 0$, a igualdade é imediata uma vez que, sendo x um número inteiro,

$$h_{p,d}^{0}(x) = x = \left\lceil \frac{dp - d}{d+1} - \frac{dp - d}{d^0(d+1)} + \frac{x}{d^0} \right\rceil.$$

Para $n = 1$, temos $h_{p,d}(x) = p - \left\lceil \frac{x}{d} \right\rceil$ e

$$\begin{aligned}\left\lceil \frac{dp-d}{d+1} + \frac{\frac{dp-d}{d+1} - x}{d} + \frac{1}{d} \right\rceil &= \left\lceil (p-1) - \frac{x-1}{d} \right\rceil \\ &= p - 1 + \left\lceil -\frac{x-1}{d} \right\rceil \\ &= p - 1 + \left\lceil \frac{1}{d} - \frac{x}{d} \right\rceil \\ &= p - \left\lceil \frac{x}{d} \right\rceil\end{aligned}$$

onde a última igualdade é consequência do seguinte lema quando aplicado a d, x e $\ell = 1$:

Lema 12 $\forall\ \ell,\ d,\ x \in \mathbb{N} \quad \ell - \left\lceil \frac{x}{d} \right\rceil = \left\lceil \ell - \frac{x}{d} - \frac{d-1}{d} \right\rceil$.

Demonstração: Fixemos naturais ℓ, d e x e dividamos x por d: obtemos inteiros não-negativos q e r únicos tais que $0 \leq r < d$ e $x = dq + r$.

Se $r = 0$, isto é, $\frac{x}{d} \in \mathbb{N}$, então

$$\ell - \left\lceil \frac{x}{d} \right\rceil = \ell - \frac{x}{d}$$

e, como $0 \leq \frac{d-1}{d} < 1$,

$$\left\lceil \ell - \frac{x}{d} - \frac{d-1}{d} \right\rceil = \ell - \frac{x}{d} + \left\lceil -\frac{d-1}{d} \right\rceil = \ell - \frac{x}{d}.$$

Se $r > 0$, então

$$\ell - \left\lceil \frac{x}{d} \right\rceil = \ell - \left\lceil q + \frac{r}{d} \right\rceil = \ell - q - \left\lceil \frac{r}{d} \right\rceil = \ell - q - 1.$$

Por outro lado,

$$\left\lceil \ell - \frac{x}{d} - \frac{d-1}{d} \right\rceil = \ell - q + \left\lceil -\frac{r}{d} - \frac{d-1}{d} \right\rceil = \ell - q + \left\lceil \frac{-r-d+1}{d} \right\rceil$$

e, como $1 \leq r \leq d - 1$, tem-se

$$-2d + 2 \leq -r - d + 1 \leq -d$$

logo

$$-2+\frac{2}{d}\leq\frac{-r-d+1}{d}\leq -1$$

e portanto

$$-2<\frac{-r-d+1}{d}\leq -1$$

o que implica que

$$\left\lceil \ell-q+\frac{-r-d+1}{d}\right\rceil=\ell-q-1.\ \square$$

Fixemos agora um natural n par e suponhamos que o enunciado da proposição, para esse valor de n e qualquer natural x, é válido. Então, dado x, tem-se:

$$\begin{aligned}
h_{p,d}^{n+1}(x) &= h_{p,d}^{n}(h_{p,d}(x))\\
&= \left\lceil \frac{dp-d}{d+1}-\frac{dp-d}{d^n(d+1)}+\frac{p-\lceil\frac{x}{d}\rceil}{d^n}\right\rceil\\
&= \left\lceil \frac{d^n(dp-d)+(d+1)\left(p-\left\lceil\frac{x}{d}\right\rceil\right)-(dp-d)}{d^n(d+1)}\right\rceil\\
&= \left\lceil \frac{\frac{d^n-1}{d+1}(dp-d)+\left(p-\left\lceil\frac{x}{d}\right\rceil\right)}{d^n}\right\rceil\\
&= \left\lceil \frac{\frac{d^n-1}{d+1}(dp-d)+\left\lceil p-\frac{x}{d}-\frac{d-1}{d}\right\rceil}{d^n}\right\rceil
\end{aligned}$$

resultando a última igualdade do Lema 12. Como n é par, $d+1$ divide d^n-1, logo $\dfrac{d^n-1}{d+1}\,(dp-d)$ é um inteiro e, portanto, pelo Lema 2,

$$\left\lceil \frac{\frac{d^n-1}{d+1}(dp-d)+\left\lceil p-\frac{x}{d}-\frac{d-1}{d}\right\rceil}{d^n}\right\rceil=\left\lceil \frac{\left\lceil\frac{d^n-1}{d+1}(dp-d)+p-\frac{x}{d}-\frac{d-1}{d}\right\rceil}{d^n}\right\rceil.$$

Além disso, pelo Lema 5,

$$\left\lceil \frac{\left\lceil\frac{d^n-1}{d+1}(dp-d)+p-\frac{x}{d}-\frac{d-1}{d}\right\rceil}{d^n}\right\rceil=\left\lceil \frac{\frac{d^{n+1}-d}{d+1}(dp-d)+dp-x-d+1}{d^{n+1}}\right\rceil.$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
h_{p,d}^{n+1}(x) &= \left\lceil \frac{\frac{d^{n+1}-d}{d+1}(dp-d)+dp-x-d+1}{d^{n+1}} \right\rceil \\
&= \left\lceil \frac{\frac{d^{n+1}-d}{d+1}(dp-d)+(dp-d)+1-x}{d^{n+1}} \right\rceil \\
&= \left\lceil \frac{\frac{d^{n+1}+1}{d+1}(dp-d)-x+1}{d^{n+1}} \right\rceil \\
&= \left\lceil \frac{dp-d}{d+1}+\frac{dp-d}{d^{n+1}(d+1)}-\frac{x-1}{d^{n+1}} \right\rceil .
\end{aligned}
$$

Iterando mais uma vez, obtemos

$$
\begin{aligned}
h_{p,d}^{n+2}(x) &= h_{p,d}^{n+1}(h_{p,d}(x)) \\
&= \left\lceil \frac{dp-d}{d+1}+\frac{dp-d}{d^{n+1}(d+1)}-\frac{p-\lceil\frac{x}{d}\rceil-1}{d^{n+1}} \right\rceil \\
&= \left\lceil \frac{d^{n+1}(dp-d)+dp-d-(d+1)\left(p-\left\lceil\frac{x}{d}\right\rceil-1\right)}{d^{n+1}(d+1)} \right\rceil \\
&= \left\lceil \frac{\frac{d^{n+1}+1}{d+1}(dp-d)-p+\left\lceil\frac{x}{d}\right\rceil+1}{d^{n+1}} \right\rceil .
\end{aligned}
$$

Como n é par, $\frac{d^{n+1}+1}{d+1}(dp-d)$ é inteiro e, portanto,

$$
\begin{aligned}
h_{p,d}^{n+2}(x) &= \left\lceil \frac{\left\lceil\frac{d^{n+1}+1}{d+1}(dp-d)-p+1+\frac{x}{d}\right\rceil}{d^{n+1}} \right\rceil \\
&= \left\lceil \frac{\frac{d^{n+2}+d}{d+1}(dp-d)-(dp-d)+x}{d^{n+2}} \right\rceil \\
&= \left\lceil \frac{\frac{d^{n+2}-1}{d+1}(dp-d)+x}{d^{n+2}} \right\rceil \\
&= \left\lceil \frac{dp-d}{d+1}-\frac{dp-d}{d^{n+2}(d+1)}+\frac{x}{d^{n+2}} \right\rceil . \blacksquare
\end{aligned}
$$

Consequentemente,

Teorema 13 *A função $h_{p,d}$ tem um atractor global: um ponto fixo ou uma órbita de período* 2.

Demonstração: Comecemos por considerar os valores de p e d tais que $h_{p,d}$ tem ponto fixo (veja-se a Proposição 8), e ajustemos a notação.

Lema 14 *O ponto fixo de $h_{p,d}$ é dado por $\left\lceil \frac{dp-d}{d+1} \right\rceil$ e $\frac{dp-d}{d+1}$ não é inteiro.*

Demonstração: Se $d+1$ divide p, então

$$\left\lceil \frac{dp-d}{d+1} \right\rceil = \frac{dp}{d+1} + \left\lceil -\frac{d}{d+1} \right\rceil = \frac{dp}{d+1}.$$

Além disso, se $d+1$ dividisse $dp-d$, então $d+1$ dividiria d.

Se $p=(d+1)Q+r$, sendo Q, r inteiros não-negativos e $1 < r < d+1$, então

$$p - \left\lceil \frac{p}{d+1} \right\rceil = p - \left\lceil \frac{(d+1)Q}{d+1} + \frac{r}{d+1} \right\rceil = p - Q - 1 = dQ + r - 1.$$

Por outro lado, como $-2 < -\frac{r+d}{d+1} < -1$, tem-se

$$\left\lceil \frac{dp-d}{d+1} \right\rceil = dQ + r + \left\lceil -\frac{r+d}{d+1} \right\rceil = dQ + r - 1.$$

E, se $d+1$ dividisse $dp-d$, então $d+1$ dividiria $d(p-r)+d(r-1)$ e, como $d+1$ divide $d(p-r)$, seria também divisor de $d(r-1)$. Mas, como d e $d+1$ são primos entre si, concluiríamos que $d+1$ divide $r-1$, o que não é possível pois $0 < r-1 < d+1$. □

Deste lema, e do facto de $\lim_{k \to +\infty} \frac{1}{d^k} = 0$, resulta que, quando há ponto fixo, se tem, para todo o x,

$$\begin{aligned} \lim_{n \to +\infty} h_{p,d}^{2n}(x) &= \lim_{n \to +\infty} \left\lceil \frac{dp-d}{d+1} - \frac{\frac{dp-d}{d+1} - x}{d^{2n}} \right\rceil = \\ &= \left\lceil \frac{dp-d}{d+1} \right\rceil \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \lim_{n \to +\infty} h_{p,d}^{2n+1}(x) &= \lim_{n \to +\infty} \left\lceil \frac{dp-d}{d+1} + \frac{\frac{dp-d}{d+1} - x}{d^{2n+1}} + \frac{1}{d^{2n+1}} \right\rceil = \\ &= \left\lceil \frac{dp-d}{d+1} \right\rceil. \end{aligned}$$

Analisemos agora o caso em que $h_{p,d}$ tem órbita periódica de período 2. Ela é formada pelos pontos $x_1 = \frac{dp-d}{d+1}$ e $x_2 = \frac{dp-d}{d+1} + 1$, e, recorde-se, $\frac{dp-d}{d+1}$ é inteiro. Por isso, os limites que calculámos há pouco dependem da posição de x relativamente a x_1 e a x_2. E são dados por:

- Se $x < \frac{dp-d}{d+1}$, então os iterados ímpares da órbita de x por $h_{p,d}$ situam-se estritamente à direita de $\frac{dp-d}{d+1}$ e, portanto,

$$\lim_{n\to+\infty} h_{p,d}^{2n+1}(x) = \frac{dp-d}{d+1} + 1$$

enquanto os pares são menores ou iguais a $\frac{dp-d}{d+1}$, daí que

$$\lim_{n\to+\infty} h_{p,d}^{2n}(x) = \frac{dp-d}{d+1}.$$

- Se $x = \frac{dp-d}{d+1}$, então $h_{p,d}(x) = \frac{dp-d}{d+1} + 1$, e vice-versa.

- Se $x > \frac{d\,p-d}{d+1}$, então $x \geq \frac{dp-d}{d+1} + 1$ e os termos ímpares da órbita de x por $h_{p,d}$ situam-se à esquerda de $\frac{dp-d}{d+1}$, logo

$$\lim_{n\to+\infty} h_{p,d}^{2n+1}(x) = \frac{dp-d}{d+1}$$

enquanto os pares estão estritamente à direita de $\frac{dp-d}{d+1}$, por isso

$$\lim_{n\to+\infty} h_{p,d}^{2n}(x) = \frac{dp-d}{d+1} + 1. \blacksquare$$

5.4 Pré-período

Continuamos interessados no truque com as cartas e, portanto, apenas nos casos em que $h_{p,d}$ tem um ponto fixo. Para terminar esta análise, falta obter o tempo T_x que a carta, escolhida em segredo e inicialmente na posição x do baralho, gasta até estacionar no ponto fixo de $h_{p,d}$. Esse é o número mínimo de vezes que a rotina do truque deve ser cumprida para ele ser bem sucedido.

Uma vez que os iterados pares da função $h_{p,d}$ são dados por expressão distinta da dos iterados ímpares, e que estamos apenas interessados numa estimativa do tempo de paragem T_x, de seguida procuraremos o menor natural k par tal que $h_{p,d}^k(x)$ é o ponto fixo, que designamos por U_x (sabendo de antemão que o pré-período T_x é U_x ou $U_x - 1$).

Proposição 15 *Dado $x \in \mathbb{N}$, tem-se:*

(a) Se $x > \dfrac{dp-d}{d+1}$, então U_x é o menor elemento par do conjunto de naturais maiores ou iguais a

$$\left\lceil \frac{\ln\left(\dfrac{x-\frac{dp-d}{d+1}}{\left\lceil\dfrac{dp-d}{d+1}\right\rceil-\dfrac{dp-d}{d+1}}\right)}{\ln d} \right\rceil.$$

(b) Se $x < \dfrac{dp-d}{d+1}$, então U_x é o menor elemento par do conjunto de naturais maiores ou iguais a

$$\left\lceil \frac{\ln\left(\dfrac{\frac{dp-d}{d+1}-x}{\dfrac{dp-d}{d+1}-\left\lceil\dfrac{dp-d}{d+1}\right\rceil+1}\right)}{\ln d} \right\rceil.$$

Demonstração:
(a) De acordo com a Proposição 11, basta encontrar um natural k par tal que

$$\frac{x-\frac{dp-d}{d+1}}{d^k} < \left\lceil\frac{dp-d}{d+1}\right\rceil - \frac{dp-d}{d+1}.$$

Ou seja, um tal valor de k deve verificar a inequação

$$d^k > \frac{x-\frac{dp-d}{d+1}}{\left\lceil\dfrac{dp-d}{d+1}\right\rceil-\dfrac{dp-d}{d+1}}$$

isto é,

$$k > \frac{\ln\left(\dfrac{x - \frac{dp-d}{d+1}}{\left\lceil \dfrac{dp-d}{d+1} \right\rceil - \dfrac{dp-d}{d+1}}\right)}{\ln d}.$$

(b) Procuramos o primeiro natural k par que verifique

$$\frac{\frac{dp-d}{d+1} - x}{d^k} < \frac{dp-d}{d+1} - \left(\left\lceil \frac{dp-d}{d+1} \right\rceil - 1\right)$$

ou seja,

$$d^k > \frac{\frac{dp-d}{d+1} - x}{\dfrac{dp-d}{d+1} - \left\lceil \dfrac{dp-d}{d+1} \right\rceil + 1}$$

isto é,

$$k > \frac{\ln\left(\dfrac{\frac{dp-d}{d+1} - x}{\dfrac{dp-d}{d+1} - \left\lceil \dfrac{dp-d}{d+1} \right\rceil + 1}\right)}{\ln d}. \blacksquare$$

Observe-se que, fixado N, de acordo com as fórmulas da Proposição 15 (ou as que se obteriam usando iterados ímpares) e uma vez que a função logaritmo é crescente, para o cálculo do número aconselhado de repetições da rotina do truque basta obter uma estimativa naquelas fórmulas para $x = N$ e $x = 1$, respectivamente.

Exemplo: Como vimos (no fim da Secção 5.1), interessam-nos $d = 3$ e baralhos com $3 < N \leq 52$ cartas tais que N é múltiplo de 3, isto é,

$$N = 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, 48, 51$$

mas não os valores de N que sejam múltiplos de 6. E, portanto, o truque deve fazer-se com

$$N = 9, 15, 21, 27, 33, 39, 45, 51$$

cartas. Para estes naturais N, o resto da divisão de $p = 2\left\lceil \frac{N}{3} \right\rceil + 1$ por $d + 1 = 4$ é 3. A tabela seguinte completa esta informação; os seus valores recomendam que o truque se realize com 15 cartas.

N	p	*Ponto fixo*	*Pré-período máximo*
9	7	5	2
15	11	8	2
21	15	11	3
27	19	14	3
33	23	17	4
39	27	20	4
45	31	23	4
51	35	26	4

6 Comentário

No livro [2] podem aprender-se outros truques, envolvendo o ordenamento de cartas, semelhantes ao que aqui analisámos, e com eles descobrir factos matemáticos não triviais. Por exemplo, com um baralho de 27 cartas, é possível encontrar a carta escolhida numa posição m também previamente indicada pelo espectador, ao fim de três passos de uma rotina análoga à que usámos mas executada numa ordem que é determinada por m. Deixamos ao leitor o desafio de elaborar este truque e de o justificar matematicamente.

Este artigo foi escrito no âmbito do *Programa Novos Talentos em Matemática*, da Fundação Calouste Gulbenkian.

Referências

[1] M. Brin, G. Stuck, *Introduction to dynamical systems*, Cambridge University Press, 2002.

[2] M. Gardner, *Mathematics, magic and mystery*, Dover, 1956.