

SIMULAÇÃO – UMA APLICAÇÃO AO PROBLEMA DA RUÍNA DO JOGADOR

Salomé Pedro

Agrupamento de Escolas de Pataias
e-mail: salomesilvapedro@gmail.com

Rui Santos

Escola Superior de Tecnologia e Gestão – Instituto Politécnico de Leiria
CEAUL – Centro de Estatística e Aplicações da Universidade de Lisboa
e-mail: rui.santos@ipleiria.pt

Luís Cotrim

Escola Superior de Tecnologia e Gestão – Instituto Politécnico de Leiria
LSRE – Laboratório de Processos de Separação e Reacção da Faculdade de
Engenharia da Universidade do Porto
e-mail: luis.cotrim@ipleiria.pt

Resumo: Neste trabalho recorreremos ao problema da ruína do jogador, um dos mais famosos problemas em probabilidades, para ilustrar a importância dos resultados de convergência estocástica no estudo dos fenómenos aleatórios. Para este fim são inicialmente apresentadas algumas soluções exatas do problema, obtidas com recurso à modelação do problema através de equações às diferenças. Estes resultados permitem averiguar a qualidade de soluções aproximadas obtidas recorrendo a simulação Monte Carlo (via *software* ) e aos principais resultados de convergência estocástica, tais como a Lei dos Grandes Números e o Teorema Limite Central. Por fim, far-se-á uma análise crítica à possibilidade de utilização deste problema (ou de outros semelhantes), nomeadamente no que se refere à utilização de simulação, no ensino das probabilidades.

Abstract In this work we use one of the most famous problems in probability – the gambler’s ruin problem – to point up the relevance of the classical convergence results for understanding the behavior of random phenomena. Thus, we illustrate some exact solutions of the problem and propose methods for obtaining approximate solutions using Monte Carlo simulation (via ) software) and the main stochastic convergence results, such as the Law of Large Numbers and Central Limit Theorem. Finally, we analyze the use of this problem (or other similar), mainly the use of simulation, in teaching probability.

palavras-chave: Simulação; Convergência Estocástica; História da Probabilidade; Ensino de Probabilidades.

keywords: Simulation; Stochastic Convergence; History of Probability; Teaching Probability.

1 Introdução

Em 1657 é publicado o primeiro livro sobre cálculo de probabilidades, de Christiaan Huygens (1629–1695). Esta pequena coletânea de problemas relativos a jogos de azar, baseada na correspondência entre Blaise Pascal (1623–1662) e Pierre de Fermat (1601–1665) em 1654, permitiu despertar a atenção de numerosos matemáticos durante os séculos XVII, XVIII e XIX para esta temática, razão pela qual surgiram variadas generalizações de alguns dos problemas propostos. O último desafio apresentado neste opúsculo de Huygens, e porventura um dos mais célebres problemas em probabilidades, é o problema da ruína do jogador, para o qual o autor não apresenta a resolução, indicando somente a sua solução e deixando a demonstração ao cuidado do leitor.

A autoria deste problema foi durante muitos séculos atribuída a Huygens. No entanto, o seu verdadeiro autor é Pascal, que já teria previamente trocado correspondência com Fermat acerca do referido problema. Este facto só seria revelado em 1888, com a publicação da correspondência de Huygens (*cf.* Huygens, 1656). No entanto, esta publicação é posterior à publicação de dois livros que foram (e são) obras fundamentais da História das Probabilidades, Gouraud (1848) e Todhunter (1865), o que contribuiu para que o nome de Pascal continuasse isolado do problema da ruína do jogador. Todavia, este problema está na origem de muita investigação em probabilidades nos últimos 350 anos, nos quais foram aparecendo diversas versões do enunciado deste problema, bem como distintas propostas para a sua resolução. Consulte-se, por exemplo, Thatcher (1957), Edwards (1983), Hald (2003) ou Pedro (2012), onde são desenvolvidas algumas das propostas de resolução apresentadas durante os séculos XVII e XVIII, de autores tais como Pascal, Fermat, Huygens, Johannes Hudde (1628–1704), Jakob Bernoulli (1654–1705), Abraham de Moivre (1667–1754), Montmort (1678–1719), Nicolas Struyck (1687–1769), entre diversos outros matemáticos⁽¹⁾.

¹David (1962), King e Read (1963), Hacking (1975), Stigler (1996), Bernstein (1998) e Hald (2003) fazem uma boa descrição das origens da Teoria da Probabilidade, das suas primeiras obras, da sua inicial dependência na análise de resultados de jogos de azar e

Por outro lado, a simulação pode ser encarada como um processo artificial que reproduz o comportamento de um fenómeno aleatório, permitindo, com recurso aos resultados de convergência estocástica, obter uma descrição das características desse fenómeno e, em particular, de valores aproximados das probabilidades de cada um dos seus possíveis resultados (Martins, 2011). Por este motivo, a simulação pode ser utilizada para explorar a interpretação frequentista de probabilidade, que dificilmente é compreendida sem o recurso a simulações computacionais uma vez que para a obtenção de resultados fiáveis é necessário repetir centenas, ou mesmo milhares, de vezes a experiência. Por conseguinte, a simulação é uma ferramenta educacional indispensável para os estudantes poderem modelar o comportamento de fenómenos aleatórios, uma vez que permite a visualização dos seus resultados de uma forma célere. Permite, ainda, explorar ideias que muitos manuais não abordam uma vez que a maioria dos livros escolares, sobretudo os do 12.º ano de escolaridade, apresentam uma visão do cálculo das probabilidades praticamente restrita à definição clássica (laplaceana) de probabilidade e o conseqüente recurso ao cálculo combinatório, *cf.* Batanero et al. (2004). Todavia, diversos autores⁽²⁾ defendem que o recurso à simulação deve ser, sempre que possível, acompanhada pelo cálculo formal da probabilidade, de forma a permitir ao estudante comparar os valores aproximados (obtidos por simulação) com os valores exatos, conforme ilustraremos neste trabalho com a utilização do problema da ruína do jogador. Deste modo, a simulação permite assimilar a tendência das proporções observadas em aproximarem-se do valor das respetivas probabilidades quando aumentamos o número de observações, uma ideia que é igualmente central na Estatística quando pretendemos generalizar as características do que observamos (a nossa amostra) para toda a população. A simulação permite ainda abordar situações mais realistas, podendo ser utilizada para obter soluções aproximadas de problemas complexos, cuja resolução analítica é complicada ou mesmo impossível (Fernandes, 1999) sendo, como tal, uma metodologia indispensável na investigação desses fenómenos aleatórios.

Neste trabalho começamos por apresentar uma versão atual do enunciado do problema da ruína do jogador na secção 2 e, na secção 3, descrevemos uma possível modelação de algumas das características associadas ao problema recorrendo a equações às diferenças. Na secção 4 expomos uma breve resenha histórica da simulação Monte Carlo, bem como das suas técnicas

do cálculo combinatório, bem como o aumento da sua importância na Estatística com a constatação de regularidade quando se possui uma grande quantidade de dados.

²Consulte-se, por exemplo, Coutinho (2001) ou Batanero (2003).

e vantagens. Na secção 5 recorreremos à simulação (via *software* \mathbb{R}) e ao problema da ruína do jogador para ilustrar a importância dos principais resultados de convergência estocástica para a obtenção de valores aproximados, onde aplicamos a Lei dos Grandes Números, a Lei do Logaritmo Iterado, o Teorema Limite Central e o Teorema de Glivenko-Cantelli. Por fim, na secção 6, analisamos a utilização da simulação como ferramenta fundamental para a compreensão do comportamento dos fenómenos aleatórios e os teoremas de convergência estocástica como a principal ferramenta para o estudo e modelação dos fenómenos aleatórios.

2 O Problema da ruína do jogador

Consideremos um jogo entre dois jogadores (**A** e **B**) dividido em partidas. O jogador **A** ganha cada partida com probabilidade p , recebendo um euro do jogador **B**, e perde com probabilidade $1 - p$, entregando um euro ao jogador **B**. A fortuna inicial do jogador **A** será representada por $a \in$, estando em jogo $m = a + b$ euros (b representará a fortuna inicial do jogador **B**). Sejam $a(n)$ e $b(n)$, respetivamente, as fortunas dos jogadores **A** e **B** após a realização de n partidas. O jogo termina quando um dos jogadores for à ruína (ficar sem dinheiro), isto é, se $a(n) = 0$ (a fortuna do jogador **A** após a realização de n partidas é nula) ou $b(n) = 0$ (a fortuna do jogador **B** no final da n -ésima partida é nula, o que corresponde a $a(n) = m$) para algum $n \in \mathbb{N}_0$, $a(0) = a$ e $b(0) = b$. Podemos recorrer à simulação para

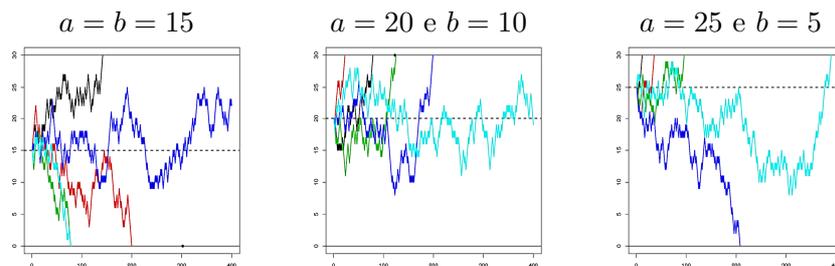


Figura 1: Simulação do jogo para diferentes valores de a e de b ($p = 0.5$)

visualizarmos o decorrer de alguns jogos. Em cada gráfico das Figuras 1 e 2 estão representadas 5 trajetórias relativas à evolução da fortuna do jogador **A** para os diferentes valores de a , b e p indicados. Notemos que se trata de um passeio aleatório (numa dimensão) onde em cada iteração o valor da fortuna do jogador **A** aumenta uma unidade, com probabilidade p , ou diminui uma unidade, com probabilidade $1 - p$. Podemos visualizar as linhas

de fronteira (linhas horizontais na qual o jogo termina) que correspondem às retas horizontais $y = 0$ (o jogador **A** faliu) e $y = m$ (o jogador **B** faliu); bem como a tendência esperada do montante detido pelo jogador **A** (representada a tracejado) onde é notório que, para $p = 0.5$, estamos perante um jogo justo (o valor esperado do ganho de cada jogador é nulo), para $p > 0.5$ a fortuna do jogador **A** tem uma tendência crescente e para $p < 0.5$ a fortuna do jogador **A** tenderá a diminuir.

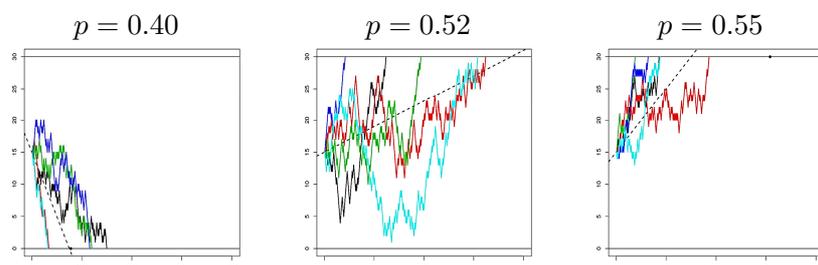


Figura 2: Simulação do jogo para diferentes valores de p ($a = b = 15$)

3 Modelação do problema da ruína do jogador

A probabilidade \mathbb{P}_a do jogador **A** ganhar o jogo tendo $a \in$ pode ser modelada pela equação às diferenças

$$\mathbb{P}_a = p \mathbb{P}_{a+1} + (1-p) \mathbb{P}_{a-1}, \quad 0 < a < m, \quad (1)$$

com $\mathbb{P}_0 = 0$ e $\mathbb{P}_m = 1$ como condições de fronteira (consultar, por exemplo, Feller (1967) ou Edwards (1983)). Assim, conclui-se

$$\mathbb{P}_a = \begin{cases} \frac{a}{a+b} & \text{se } p = \frac{1}{2} \\ \frac{(1-p)^a p^b - p^m}{(1-p)^m - p^m} & \text{se } p \neq \frac{1}{2} \end{cases}. \quad (2)$$

Este resultado permite deduzir diversas características associadas ao jogo, como por exemplo a sensibilidade de \mathbb{P}_a a variações nas fortunas dos jogadores bem como ao montante apostado em cada partida, a expressão de \mathbb{P}_a quando b é ilimitado ($b \rightarrow +\infty$) ou que a probabilidade de um jogo nunca terminar é nula, entre outras (consulte-se, por exemplo, Pedro (2012)). Por outro lado, o número esperado de partidas até o jogo acabar quando o jogador **A** tem $a \in$, representado por \mathbb{E}_a , é modelado pela equação às diferenças

$$p \mathbb{E}_{a+1} - \mathbb{E}_a + (1-p) \mathbb{E}_{a-1} = -1, \quad 0 < a < m, \quad (3)$$

com $\mathbb{E}_0 = \mathbb{E}_m = 0$ como condições de fronteira. Deste modo obtemos, como solução,

$$\mathbb{E}_a = \begin{cases} ab & \text{se } p = \frac{1}{2} \\ \frac{a}{1-2p} - \frac{m}{1-2p} \left[\frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^a - 1}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^m - 1} \right] & \text{se } p \neq \frac{1}{2} \end{cases} . \quad (4)$$

Apesar de ser possível deduzir diversas características do jogo da ruína do jogador de forma exata através das equações às diferenças, conforme as equações (1) e (3) ilustram, podemos igualmente obter resultados aproximados destas características recorrendo a simulação de Monte Carlo. Há igualmente especificidades do jogo que dificilmente se conseguem obter de forma analítica (sendo, em alguns casos, provavelmente impossível) e que a simulação nos permite obter uma descrição aproximada. Contudo, além da relevância que atualmente a simulação assume na investigação, esta pode igualmente desempenhar um papel fundamental no Ensino das Probabilidades, quer no ensino secundário quer no ensino superior, de forma a permitir uma melhor compreensão do comportamento dos fenómenos aleatórios.

4 Simulação

A realização de um elevado número de vezes de uma certa experiência aleatória e a determinação da frequência relativa de determinado acontecimento, com o objetivo de determinar um valor aproximado da probabilidade desse acontecimento, pode ser encontrada de uma forma isolada nos séculos XVIII ou XIX. Se considerarmos como simulação o uso de uma ferramenta que nos permita gerar dados aleatórios ou pseudo-aleatórios, com vista à visualização empírica de um determinado resultado matemático, podemos situar a sua origem em meados no século XVIII. De facto, nesta época, Conde de Buffon (1701–1788) efetuou 2048 conjuntos de lançamentos de moedas para tentar obter uma resposta para o famoso paradoxo de São Petersburgo⁽³⁾. Outro problema que suscitou a curiosidade dos matemáticos para a sua verificação empírica foi o *problema das agulhas de Buffon*⁽⁴⁾. Hall (1873)

³O problema de São Petersburgo foi proposto por Nicolas Bernoulli (1687–1759) e “resolvido” por Daniel Bernoulli (1700–1782). O problema consiste em determinar qual a quantia que um jogador deve apostar de forma a tornar o seguinte jogo justo: o jogador lança sucessivamente uma moeda ao ar até obter cara e se sair cara apenas no n -ésimo lançamento, receberá um prémio de 2^n moedas. Salientemos que o valor esperado de ganho é $\frac{1}{2} \times 2^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 2^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n \times 2^n + \dots = 1 + 1 + 1 + \dots$. Székely (1986) comenta diversos paradoxos na evolução da Teoria da Probabilidade e da Estatística.

⁴Problema proposto por Buffon (1777), e que consiste em determinar a probabilidade de uma agulha cair numa linha, num chão que se encontra dividido por um certo número

apresenta uma solução recorrendo à realização da experiência 590 vezes e, por exemplo, Mario Lazzarini (1901) obteve $\pi \approx \frac{355}{113} \approx 3,1415929$ com 3408 lançamentos, valores diversas vezes contestados por estarem muito próximos do valor real de π . Para Stigler (1991), se usarmos uma definição de simulação mais restrita, e considerarmos que o seu objetivo é aprender mais sobre um determinado processo que se está a estudar, então a origem da sua utilização será reportada apenas ao último quarto do século XVIII. Todavia, usualmente a sua origem é atribuída a William Gosset (1876–1937), mais conhecido por Student, que em Student (1908) afirma ter gerado 750 amostras de dimensão 4, começando por registar 3000 observações, fruto da escolha aleatória de cartões que possuíam as medidas antropométricas do dedo médio de 3000 criminosos, juntando-as depois em grupos de 4. Gosset usou este método para efetuar o estudo da distribuição t e da distribuição do coeficiente de correlação. No entanto, Stigler (1991) refere três matemáticos que previamente revelaram evidências de recurso à simulação, Erastus De Forest (1876), George Darwin (1877) e Francis Galton (1890).

Independentemente da definição de simulação que adotemos, esta consiste num processo artificial que imita o comportamento de um fenómeno aleatório, permitindo obter uma descrição aproximada das suas características. Todavia, para obtermos aproximações fiáveis, é necessário repetir esse processo um grande número de vezes, o que torna a simulação bastante morosa e pouco apelativa. Deste modo, apesar de haver registos de utilização da simulação nos séculos XVIII e XIX, esta começou a ser mais utilizada a partir da década de 40 do século XX, devido ao aparecimento do *método de simulação de Monte Carlo* e ao surgimento dos computadores eletrónicos, cf. Ulam e Metropolis (1949) e Metropolis (1987). Este recurso à simulação computacional permitiu resolver, usando métodos probabilistas, problemas cuja resolução teórica era difícil, morosa ou cuja experimentação real estava condicionada por aspetos económicos, temporais ou espaciais.

A simulação de Monte Carlo consiste num processo de simulação computacional que gera números pseudo-aleatórios (números gerados a partir de algoritmos conhecidos e, como tal, conhecido o número inicial e o algoritmo utilizado é possível determinar os números que irão ser gerados) e determina que proporção desses números verifica uma ou mais propriedades. Na base da simulação está o *Teorema da Transformação Uniformizante*, e suas generalizações, que permitem a geração de variáveis aleatórias (v.a.) com

de linhas igualmente espaçadas cuja distância é superior ao comprimento da agulha. Uma vez que a solução é uma função de π , obtendo-se um valor próximo da probabilidade (repetindo inúmeras vezes a experiência) podemos obter um valor próximo de π .

qualquer distribuição pretendida através da geração de v.a. U_i caracterizadas pela distribuição uniforme no intervalo $[0, 1]$ (consulte-se, por exemplo, Ross (2012) ou Rubinstein (2008)). Deste modo, através da geração dos números pseudo-aleatórios U_i (atualmente há métodos implementados em praticamente qualquer máquina de calcular) podemos imitar o comportamento de fenómenos aleatórios. Em particular, no jogo da ruína do jogador, o resultado de cada partida pode ser determinado pela geração de um número U_i , considerando que o jogador **A** ganha a i -ésima partida se $U_i \leq p$ e perde caso contrário. Para simular um jogo bastará continuar a gerar partidas até que um dos dois jogadores fique na ruína. Por fim, para podermos modelar de forma aproximada as características do jogo da ruína, teremos de simular um grande número de jogos, conforme ilustraremos graficamente na próxima secção.

5 Convergências ilustradas com recurso a simulação

Seja X uma variável aleatória com função de distribuição F_X , valor esperado μ e variância σ^2 . Sejam X_1, \dots, X_n n réplicas independentes de X , *i.e.* n v.a. independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.) a X . Sejam x_1, \dots, x_n uma concretização de X_1, \dots, X_n . Os teoremas de convergência asseguram, sob determinadas condições, que, para uma dimensão n elevada, podemos através de x_1, \dots, x_n inferir ou obter valores aproximados para algumas características de X , razão pela qual os resultados assintóticos são fundamentais como elo de ligação entre a Probabilidade e a Estatística. Ilustremos esta ideia recorrendo ao problema da ruína do jogador e a alguns dos mais famosos teoremas de convergência estocástica.

5.1 Lei dos Grandes Números e Lei do Logaritmo Iterado

O primeiro resultado de convergência foi demonstrado por Jacob Bernoulli (1654–1705), tendo sido publicada, em 1713, na sua obra póstuma *Ars Conjectandi*. Bernoulli, que considerava este resultado importante, chamou-lhe *Teorema de Ouro*, sendo depois designada por *Lei dos Grandes Números* por Poisson (1781–1840), em 1837, em contrapartida à sua Lei dos Pequenos Números (convergência, quando $n \rightarrow +\infty$, da distribuição binomial para a Poisson para valores de $p \approx 0$). Utilizando notação atual, considerando X uma prova de Bernoulli com probabilidade de sucesso p ($X \sim \text{Ber}(p)$), teremos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|\hat{p}_n - p| < \varepsilon) = 1, \forall \varepsilon > 0, \quad (5)$$

onde $\hat{p}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ representa a proporção amostral. Desta forma, a proporção amostral converge em probabilidade para a respetiva probabilidade. Este resultado foi consecutivamente generalizado por diversos autores, entre os quais se destacam Poisson, Chebycheff (1821–1894), Markov (1856–1922), Kolmogoroff (1903–1987), entre outros. Khintchine (1894–1959), em 1928, considerando μ finito, demonstra que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(\left| \bar{X}_n - \mu \right| < \varepsilon \right) = 1, \forall \varepsilon > 0, \quad (6)$$

onde $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ representa a média amostral. Temos, neste resultado, a convergência em probabilidade da média amostral para a média populacional. A versão forte da Lei dos Grandes Números, que assegura a convergência quase certa, surge com Borel (1871–1956), em 1909, restrita a provas de Bernoulli. Kolmogoroff, em 1928, supondo μ finito, conclui que

$$\mathbb{P} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \bar{X}_n = \mu \right) = 1. \quad (7)$$

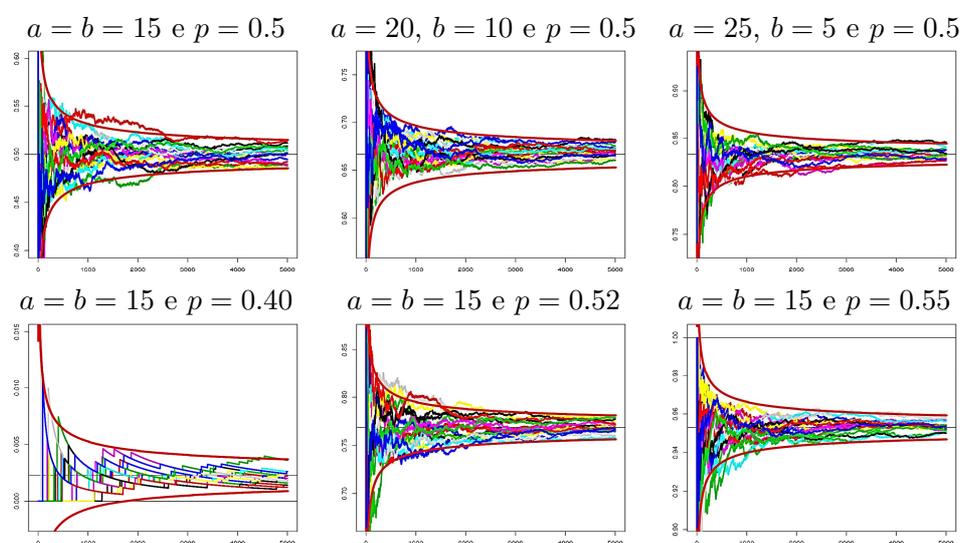


Figura 3: 20 réplicas da evolução da proporção amostral durante 5000 jogos

A Lei Forte dos Grandes Números está na origem de um outro resultado importante na Teoria da Probabilidade, a Lei do Logaritmo Iterado. Sendo um resultado de Hausdorff (1868–1942), de 1914, a sua forma usual é devida

a Khintchine que, em 1924, considerando variância finita deduz

$$\mathbb{P} \left(\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{|\bar{X}_n - \mu| \sqrt{n}}{\sqrt{\ln(\ln(n))}} = \sqrt{2} \sigma \right) = 1. \quad (8)$$

Intuitivamente a Lei do Logaritmo Iterado estabelece que a sequência estocástica \bar{X}_n flutua dentro dos limites $\mu \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{2 \ln(\ln(n))}$. Nos gráficos patentes das Figuras 3 e 4 é ilustrada a Lei dos Grandes Números e a Lei do Logaritmo Iterado (os limites definidos nesta lei estão representados a vermelho nos gráficos). Na Figura 3 é analisada a evolução da proporção (amostral) de jogos ganhos por **A** e na Figura 4 a evolução do número médio de partidas até um jogo terminar (a linha horizontal representa o valor teórico obtido pelas equações às diferenças presentes na secção 3). Os gráficos presentes nas Figuras 3 e 4 mostram comportamentos análogos, onde é notória a tendência do valor empírico aproximar-se do correspondente valor teórico à medida que n aumenta. Além disso, se considerarmos um valor específico de n , a Lei do Logaritmo Iterado identifica claramente os limites dos valores observados nas simulações, sendo evidente a diminuição da variabilidade dos valores empíricos com o aumento do valor de n .

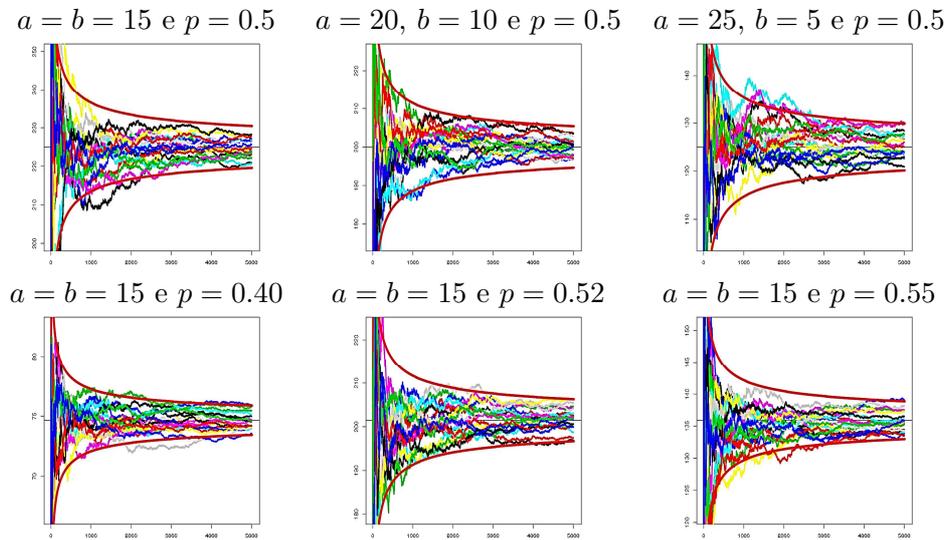


Figura 4: 20 réplicas da evolução da duração média do jogo durante 5000 jogos

5.2 Teorema Limite Central

O resultado de convergência estocástica mais célebre, não só pela controvérsia que gerou nos séculos XVIII e XIX, mas igualmente pelo papel preponderante que assume na Teoria da Probabilidade, foi denominado por Pólya (1887–1985), em 1920, por Teorema Limite Central devido ao papel fundamental que desempenha entre os resultados sobre convergência. A primeira versão do Teorema Limite Central foi obtido por de Moivre (1667–1754), em 1738, restrito a provas de Bernoulli (usualmente denominado Teorema Limite Central de Moivre-Laplace). Desta forma $X \sim \text{Ber}(p)$, obtendo-se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(\frac{\hat{p}_n - p}{\sqrt{p(1-p)}} \sqrt{n} \leq \varepsilon \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\varepsilon} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \Phi(\varepsilon), \quad (9)$$

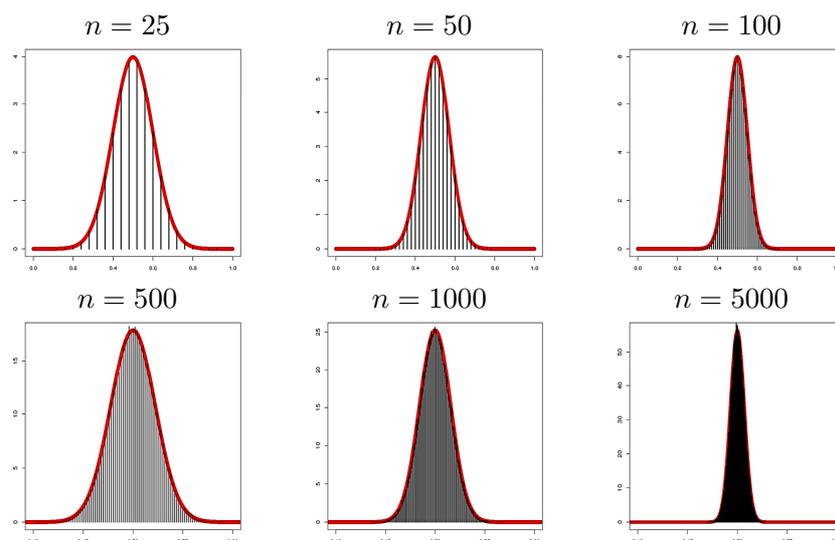


Figura 5: Distribuição da proporção amostral de n jogos, $a=b=15$ e $p=0.5$

onde Φ representa a função de distribuição de uma variável gaussiana standard. Este resultado tornou-se mais conhecido após os trabalhos de Laplace (1749–1827) e de Gauss (1777–1855). A Figura 5 compara as frequências, observadas em 10000 réplicas, da proporção de jogos ganhos pelo jogador **A** em n jogos, com a curva gaussiana. As frequências obtidas correspondem a valores aproximados de probabilidades que poderiam ser obtidas pela distribuição binomial com n provas e probabilidade de sucesso igual a 0.5, sendo

rápida a aproximação destas à distribuição gaussiana, pois mesmo para valores baixos de n os gráficos revelam que a função de probabilidade tem uma forma muito próxima da forma da curva gaussiana. Por outro lado, é igualmente notória a diminuição da variabilidade quando n aumenta, sendo observados cada vez mais valores mais próximos do valor pretendido (neste exemplo corresponde a 0.5, valor que pode ser obtido através da utilização da equação (2)) com uma probabilidade mais elevada.

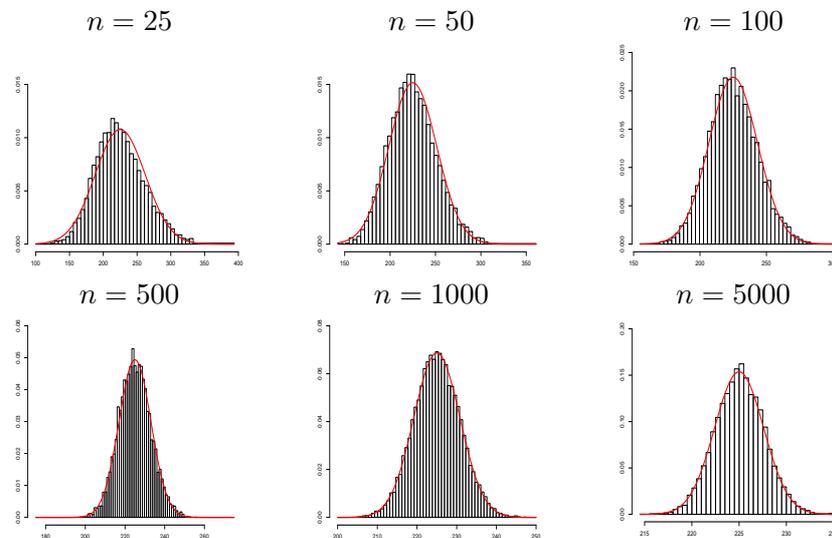


Figura 6: Distribuição da duração média em n jogos, $a=b=15$ e $p=0.5$

Atualmente existem diversas versões do Teorema Limite Central, na mais usualmente utilizada supõe-se variância finita, obtendo-se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \sqrt{n} \leq \varepsilon \right) = \Phi(\varepsilon) \quad \text{ou} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{F}_{\bar{X}_n}(x) = \Phi \left(\frac{\sqrt{n}(x - \mu)}{\sigma} \right). \quad (10)$$

Temos, neste teorema, a convergência em distribuição da média amostral para a distribuição gaussiana. A Figura 6 ilustra⁽⁵⁾ o Teorema Limite Central, analisando a média da duração de n jogos, em 10000 réplicas, onde

⁵Nestes gráficos, para analisar a aproximação do histograma à densidade da gaussiana, é importante a amplitude utilizada na definição das classes. Contudo, uma vez não ser nosso objetivo efetuar uma análise detalhada sobre esta convergência, não iremos desenvolver esta ideia mas salientamos que a definição da amplitude é importante quando utilizamos um histograma na estimação de uma densidade. Mais informação pode ser obtida, por exemplo, em Tenreiro (2010).

se pode observar que, à medida que n aumenta, o histograma dos valores observados de \bar{X}_n aproxima-se da curva gaussiana. A velocidade de convergência parece ser mais lenta que a convergência observada na Figura 5, pois para valores baixos de n o histograma ainda apresenta algumas diferenças significativas em relação à curva gaussiana. Todavia, tem um comportamento semelhante à medida que n aumenta, pois o histograma fica cada vez mais próximo da forma da curva gaussiana e a variabilidade vai diminuindo (os valores observados estão cada vez mais concentrados na vizinhança do valor pretendido, que neste caso corresponde a 225 jogos, valor que pode ser obtido com recurso à equação (4)).

6 Teorema de Glivenko-Cantelli

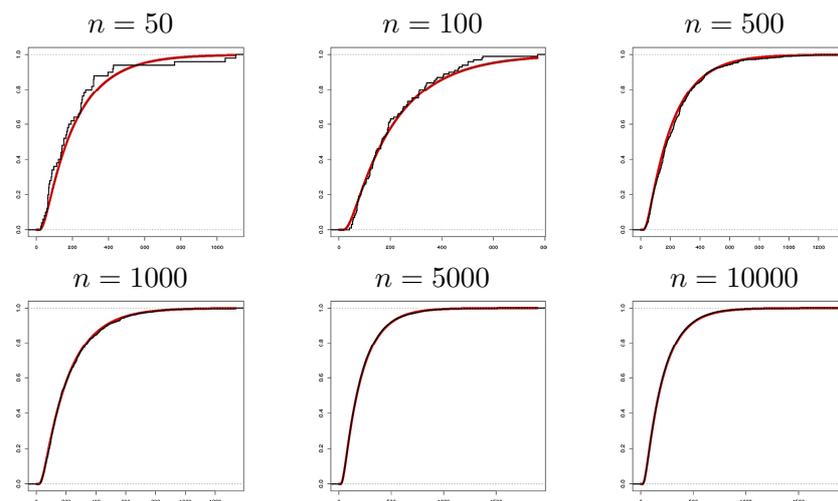


Figura 7: Função de distribuição empírica da duração do jogo, $a = b = 15$, $p = 0.5$

A ponte de ligação entre a probabilidade e as regularidades empíricas é a relação entre a função de distribuição teórica $\mathbf{F}_X(x)$ e a função de distribuição empírica $\hat{\mathbf{F}}_n(x)$ definida por

$$\hat{\mathbf{F}}_n(x) = \frac{\#\{x_i \leq x\}}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{I}_{]-\infty, x]}(x_i), \quad (11)$$

onde \mathbb{I} representa a função indicatriz. As várias facetas de inferência estatística podem ser interpretadas (direta ou indiretamente) pela relação entre a

função de distribuição empírica e a função de distribuição teórica, quer seja a estimação, quer sejam testes de hipóteses; sendo os resultados que ligam $\widehat{\mathbf{F}}_n(x)$ com $\mathbf{F}_X(x)$ fundamentais.

Se considerarmos a distância

$$\Delta_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \widehat{\mathbf{F}}_n(x) - \mathbf{F}_X(x) \right|, \quad (12)$$

então o Teorema de Glivenko-Cantelli garante

$$\mathbb{P} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \Delta_n = 0 \right) = 1, \quad (13)$$

certificando a convergência de $\widehat{\mathbf{F}}_n(x)$ para $\mathbf{F}_X(x)$.

Se representarmos por $\mathbf{F}_a(x)$ a probabilidade de, no máximo, um jogo durar x partidas até terminar quando o jogador \mathbf{A} detém $a \in$, então (cf. Takacs (1969) e Feller (1967))

$$\mathbf{F}_a(x) = 1 - \frac{(4p(1-p))^{\frac{x+1}{2}}}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\cos^x \frac{k\pi}{n} \sin \frac{k\pi}{n}}{1 - 2\sqrt{p(1-p)} \cos \frac{k\pi}{n}} \left[\left(\frac{p}{1-p} \right)^{\frac{a}{2}} \sin \frac{ka\pi}{n} + \left(\frac{1-p}{p} \right)^{\frac{b}{2}} \sin \frac{kb\pi}{n} \right]. \quad (14)$$

Na Figura 7 são comparadas as funções de distribuição empírica, para diversos valores de n , com a função de distribuição teórica $\mathbf{F}_a(x)$, onde se ilustra a aproximação entre $\widehat{\mathbf{F}}_n(x)$ e $\mathbf{F}_a(x)$ com o aumento de n . Notemos que com 1000 observações já praticamente não se consegue identificar diferenças entre a função de distribuição teórica, representada com recurso à fórmula (14), e a função de distribuição empírica obtida por simulação.

A visualização do Teorema Limite Central pode ser igualmente efetuada recorrendo ao Teorema de Glivenko-Cantelli, comparando a função de distribuição empírica da proporção amostral (Figura 8) ou a função de distribuição empírica da média amostral (Figura 9) com a função de distribuição da gaussiana, tendo sido utilizadas as mesmas simulações que deram origem aos gráficos das Figuras 5 e 6. Deste modo, a Figura 8 ilustra a convergência da proporção amostral para a probabilidade e a Figura 9 mostra a convergência da média amostral para o valor esperado. Na Figura 8 parece haver uma distância significativa para valores baixos de n . Esta diferença deriva do facto de as frequências só assumirem os valores $f_i = i \frac{n}{100}$ para $i = 0, \dots, n$, o que implica que a função de distribuição empírica seja constante nos intervalos $[f_{i-1}, f_i]$ para $i = 1, \dots, n$. Todavia, à medida que n aumenta a amplitude destes intervalos converge para 0 e a distância entre as duas funções tende a desaparecer.

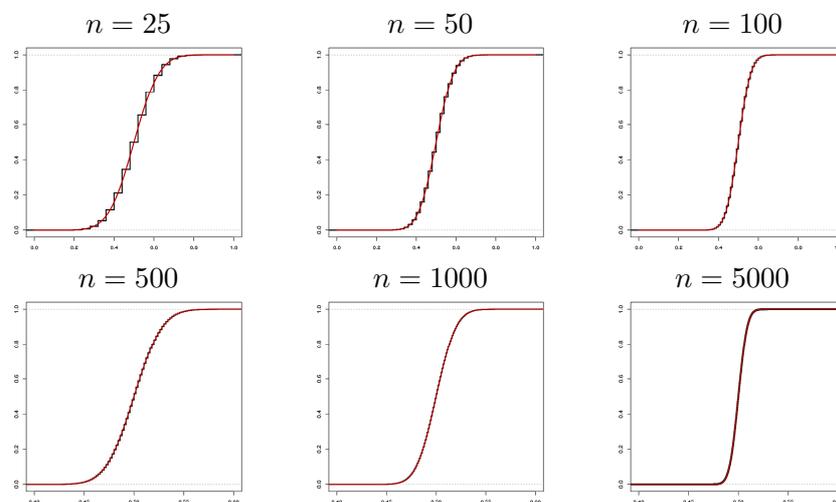


Figura 8: Distribuição da proporção amostral em n jogos, $a=b=15$ e $p=0.5$

De facto, o Teorema de Glivenko-Cantelli é essencial para a compreensão dos fenómenos aleatórios, razão pela qual Rényi (1970) utiliza o Teorema de Glivenko-Cantelli como ponte entre a regularidade das observações e os modelos de probabilidades, denominando-o de *fundamental theorem of mathematical statistics*.

7 Comentário final

O ensino das probabilidades no ensino secundário, muitas vezes dedicado quase exclusivamente ao cálculo combinatório, pouco intuitivo e de difícil compreensão, pode ser bastante enriquecido com a inclusão de problemas para os quais, apesar de existirem soluções exatas analiticamente complexas para alunos deste nível de ensino, podem ser obtidas soluções aproximadas recorrendo a simulações, que permitem igualmente ilustrar, de forma intuitiva e esclarecedora, o comportamento dos fenómenos aleatórios (consultar Martins e Ponte (2010), Ross (2012) ou outros exemplos disponíveis no *site* do projeto ALEA – <http://www.alea.pt>).

Deste modo, tal como, por exemplo, Batanero (2003) ou Batanero *et al.* (2004), acreditamos que algumas das metodologias de simulação que ilustramos poderão ser aplicados quer no ensino superior quer ao nível do décimo segundo ano, permitindo a compreensão do problema da ruína do jogador, e suas propriedades, bem como o estabelecer da li-

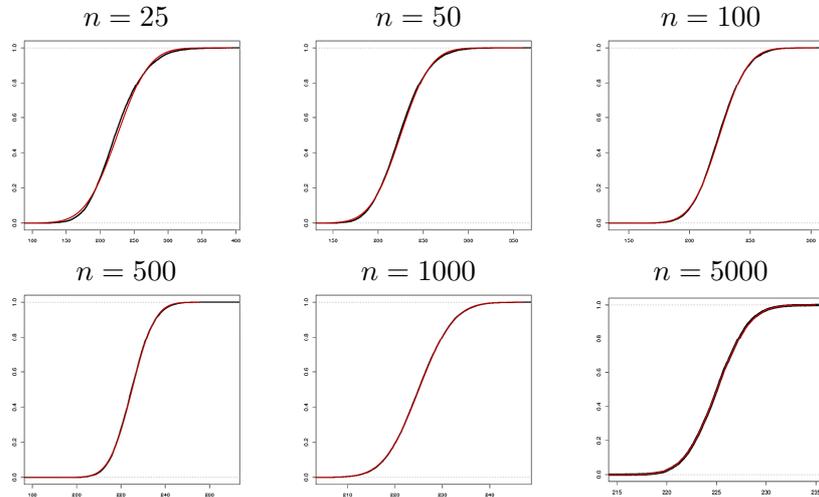


Figura 9: Distribuição da duração média de n jogos, $a=b=15$ e $p=0.5$

gação entre a definição frequencista e a definição clássica de probabilidade. Por outro lado, o problema da ruína do jogador permite igualmente a valorização do ensino da História da Matemática, servindo de fio condutor para o ensino da origem da Teoria das Probabilidades. Em <https://sites.google.com/site/problemadaruina> disponibilizamos tarefas para simulação, com vista ao estudo do problema da ruína do jogador, onde podem ser explorados simuladores (quer em *Excel*, quer em \mathbb{R}), permitindo explorar todas as potencialidades que acabámos de referir.

Em suma, consideramos que a simulação é uma ferramenta extremamente eficaz para ilustrar o comportamento dos fenómenos não determinísticos, nomeadamente dos resultados assintóticos, fundamentais para a compreensão do aleatório e da sua ligação com a Estatística, como por exemplo a Lei dos Grandes Números, a Lei do Logaritmo Iterado, o Teorema Limite Central e o Teorema de Glivenko-Cantelli.

Agradecimentos

Os autores agradecem as sugestões de melhoria no artigo apresentadas pelo revisor. Este trabalho foi financiado por Fundos Nacionais através da FCT–Fundação para a Ciência e a Tecnologia, no âmbito do projeto PEst-OE/MAT/UI0006/2014 e pelo Instituto Politécnico de Leiria.

Referências

- [1] C. Batanero, “La Simulación como Instrumento de Modelización en Probabilidade”, *Revista Educación y Pedagogía*, Medellín: Universidad de Antioquia, Facultad de Educación, Vol. XV, n.º 35 (2003), pp. 39–54.
- [2] C. Batanero, J. Godino e R. Roa, “Training Teachers To Teach Probability”, *Journal of Statistics Education*, Vol. 12, n.º 1 (2004).
- [3] J. Bernoulli, *Ars Conjectandi*, Basle, 1713 (traduzido para inglês em E.D. Sylla, *The Art of Conjecturing*, The Johns Hopkins University press, 2006).
- [4] P.L. Bernstein, *Against the gods: the remarkable story of risk*, John Wiley & Sons, New York, 1998.
- [5] G. Buffon, “Essai d’Arithmétique Morale” in *Suppléments à l’Histoire Naturelle Générale et Particulière*, Vol. 4 (1777), pp. 46–123.
- [6] C. Coutinho, “Introduction aux Situations Aléatoires dès le Collège: de la Modélisation à la Simulation d’expériences de Bernoulli dans l’environnement Informatique Cabri-géomètre II”, Thèse de Doctorat, Université Joseph Fourier-Grenoble, France, 2001.
- [7] F.N. David, *Games, Gods and Gambling: a History of Probability and Statistical Ideas*, Charles Griffin & Co., London, 1962.
- [8] G.H. Darwin, “On fallible measures of variable quantities, and on the treatment of meteorological observations”, *Philosophical Magazine*, Vol. 4 (1877), pp. 1–14.
- [9] A.W. Edwards, “Pascal’s Problem: The ‘Gambler’s Ruin’”, *International Statistical Review*, Vol. 51, n.º 1 (1983), pp. 73–79.
- [10] W. Feller, *Introduction to Probability Theory*, Vol. 1, John Wiley & Sons, 1967.
- [11] J. Fernandes, “Intuições e Aprendizagem de Probabilidades: uma Proposta de Ensino de Probabilidades no 9.º Ano de Escolaridade”, Tese de Doutoramento em Educação, Universidade do Minho, Braga, Portugal, 1999.
- [12] E.L. de Forest, *Interpolation and adjustment of Series*, Tuttle, Morehouse and Taylor, New Haven, 1876.

- [13] F. Galton, “Dice for stastical experiments”, *Nature*, Vol. 42 (1890), pp. 13–14.
- [14] C. Gouraud, *Histoire des Calculs des Probabilites Depuis ses Origines Jusqú à nos Jours*, Librairie D. Auguste Durand, Paris, 1848.
- [15] I. Hacking, *The Emergence of Probability: a Philosophical Study of Early Ideas about Probability Introduction and Statistical Inference*, Cambridge University Press, Cambridge, 1975.
- [16] A. Hald, *History of Probability and Statistics and their Applications Before 1750*, John Wiley & Sons, New Jersey, 2003.
- [17] A. Hall, “On an Experimental Determination of Pi”, *Messenger of Mathematics*, Vol. 2 (1873), pp. 113–114.
- [18] C. Huygens, “Correspondence of Huygens Regarding Games of Chance” (1656). In *Extracted from Volumes I and II of the oeuvres completes of Christiaan Huygens*, 1888.
- [19] C. Huygens, *Libellus de Ratiociniis in Ludo Aleae*, 1657 (translation by W. Browne in 1714).
- [20] A. King e C. Read, *Pathways to Probability: History of the Mathematics of Certainty and Chance*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1963.
- [21] M. Lazzarini, “Un’applicazione del calcolo della Probabilità alla ricerca sperimentale di un valore approssimato di π ”, *Periodico di Matematica*, Vol. 4 (1901), pp. 140–143.
- [22] M.E.G. Martins, “Como Estimar a Probabilidade de um Acontecimento por Simulação”, *Actas do PROFMAT 2011*, 2011, pp. 1–16.
- [23] M.E.G. Martins e J.P. PONTE, *Organização e tratamento de dados*, Ministério da Educação, Lisboa, 2010.
- [24] N. Metropolis, “The Beginning of the Monte Carlo Method”, *Los Alamos Science*, n.º 15 (1987), pp. 125-130.
- [25] S. Pedro, “Modelação e simulação – uma aplicação ao problema da ruína do jogador”, Mestrado em Educação e Tecnologia em Matemática, Instituto Politécnico de Leiria, Portugal, 2012.
- [26] A. Rényi, *Probability Theory*, North-Holland series in Applied Mathematics and Mechanics, Amsterdam, 1970.

-
- [27] S.M. Ross, *Simulation*, 5th ed., Elsevier Academic Press, 2012.
- [28] R.Y. Rubinstein, *Simulation and the Monte Carlo method*, 2nd ed., John Wiley & Sons, 2008.
- [29] S.M. Stigler, “Stochastic Simulation in the Nineteenth Century”, *Statistical Science*, Vol. 6, n.º 1 (1991), pp. 89-97.
- [30] S.M. Stigler, *The History of Statistics: The Measurement of Uncertainty Before 1900*, The Belknap Press of Harvard University Press, England, 1996.
- [31] Student, “The Probably Error of a Mean”, *Biometrika*, Vol. 6 (1908), pp. 1–25.
- [32] G.J. Székely, *Paradoxes in Probability Theory and Mathematical Statistics*, D. Reidel Publishing Company, Budapest, 1986.
- [33] L. Takacs, “On the Classical Ruin Problem”, *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 64 (1969), pp. 889–906.
- [34] C. Tenreiro, *Uma introdução à estimação não-paramétrica de densidade*, XVIII Congresso Anual da Sociedade Portuguesa de Estatística, 2010.
- [35] A.R. Thatcher, “Studies in the history of probability and statistics: VI. A note on the early solutions of the problem of the duration of play”, *Biometrika*, Vol. 44, n.º 3–4 (1957), pp. 515–518.
- [36] I. Todhunter, *A History of the Mathematical Theory of Probability from the Time of Pascal to that of Laplace*, Cambridge, London, 1865. (Reimpressão de 2010 da Bibliolife).
- [37] S. Ulam e N. Metropolis, “The Monte Carlo Method”, *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 44, n.º 247 (1949), pp. 335–341.

