Subespaços lineares de $C(K)$

João Paulos, *Paulo R. Pinto*
Departamento de Matemática
Instituto Superior Técnico,
Universidade de Lisboa
Av. Rovisco Pais, 1049 –001 Lisboa
e-mail: joao.paulos@tecnico.ulisboa.pt
ppinto@math.tecnico.ulisboa.pt

Resumo: Abordamos alguns resultados provenientes da prolífica obra de Stefan Banach, que constituem pontos de referência no estudo dos espaços lineares. Provamos que qualquer espaço linear real X pode ser mergulhado isometricamente no espaço linear $C(K)$ das funções contínuas, para K um espaço compacto e Hausdorff. Se K é metrizável, mostramos que podemos mergulhar $C(K)$ em $C([0,1])$. Provamos ainda que a métrica de $C(K)$ determina a topologia de K.

Abstract We review some landmark results around the work of Stefan Banach from the viewpoint of linear spaces. We prove that any real linear space X can be isometrically embedded in the linear space $C(K)$ of continuous functions on a compact and Hausdorff space K. If K is metrizable then we show that we can embed $C(K)$ in $C([0,1])$. We also prove that the metric of $C(K)$ determines the topology of K.

palavras-chave: Espaço linear; Espaço de Banach.

keywords: Linear space; Banach Space.

1 Motivação e introdução

Um resultado de álgebra linear diz-nos que um espaço linear real X de dimensão finita é isomorfo a $\mathbb{R}^{\mathrm{dim(X)}}$. Neste trabalho, pretendemos mostrar que em dimensão infinita, $C(K)$ é o espaço linear que substitui $\mathbb{R}^{\mathrm{dim(X)}}$, onde $C(K)$ designa o espaço linear das funções reais contínuas com K compacto e Hausdorff. Provamos que todo o espaço linear (real) X pode ser mergulhado em algum $C(K)$ onde K depende do espaço linear inicial X. Em alguns casos, veremos que podemos considerar o intervalo unitário $K=[0,1]$. Veremos que a estrutura métrica de $C(K)$ determina a topologia de K. Estes resultados apareceram nos anos 1930 à volta da escola do matemático polaco Stefan Banach e podem ser encontrados em algumas monografias, e.g. em [1, 2, 4, 3, 5, 6].

Note-se que dado um conjunto finito $K=\{k_1,...,k_n\}$, munido com a topologia discreta, o espaço linear $C(K)$ das funções reais contínuas de K para $\mathbb{R}$ pode ser identificado com $\mathbb{R}^n$, pois dar uma função $f: K\to\mathbb{R}$ é dar um vector $(f(k_1),\ldots,f(k_n))$. Observamos ainda que um espaço linear (real) qualquer X pode sempre ser munido de uma norma, pois podemos considerar uma sua base de Hamel $\{e_i: i\in I\}$ – que existe, pelo Axioma da Escolha – e como, dado $x\in X$, existe um subconjunto finito F_x de I e escalares α_i, $i\in F_x$:

$$x=\sum_{i\in F_x}\alpha_i e_i$$

podemos definir a norma $||x|| = \max\{|\alpha_i| : \ i\in F_x\}$.

Dado um espaço compacto e Hausdorff, K, o espaço linear $C(K)$ das funções contínuas $f : K\to\mathbb{R}$ tem uma outra norma, nomeadamente

$$||f||_\infty := \sup_{t\in K}|f(t)|,$$

para a qual $C(K)$ é um espaço de Banach. Mais geralmente, podemos considerar uma norma num espaço linear X e pensar no chamado espaço dual $X^* = \{f : X\to\mathbb{R} \text{ linear e contínua}\}$, que também é um espaço de Banach para a norma $||f|| = \sup_{x\in X:||x||\leq 1}|f(x)|$. Podemos então considerar um conjunto limitado em X^*, por exemplo, a bola unitária $B_{X^*} = \{f\in X^* : ||f||\leq 1\}$. Todavia B_{X^*} não é compacto para a topologia induzida pela norma no dual, se $\dim(X)=\infty$. Usando a topologia fraca*, ver Definição 1, então o Teorema de Banach-Alaoglu (Teorema 3) garante-nos que B_{X^*} é um espaço compacto e Hausdorff, mas que *a priori* não tem de ser metrizável.

Sendo X espaço normado separável (i.e. existe um subconjunto numerável e denso em X), provamos que a bola unitária B_{X^*}, munida com a topologia fraca*, é na verdade um espaço metrizável. Mais, usando propriedades do conjunto de Cantor, podemos provar que de facto X pode ser mergulhado no espaço $C([0,1])$ (ver Teorema de Banach-Mazur (Teorema 13)).

Note que uma função contínua $h: K_2\to K_1$ entre espaços compactos e Hausdorff induz uma transformação linear contínua $T: C(K_1)\to C(K_2)$ dada por $T(f)=f\circ h$. Mais, T é sobrejectiva (isometria linear) se e só se h é injectiva (sobrejectiva), pelo que cada homeomorfismo h fornece uma isometria linear sobrejectiva T. Na verdade, qualquer aplicação contínua $a: K_2\to\mathbb{R}$, tal que $|a(k)|=1$ para qualquer k e qualquer homeomorfismo $h: K_2\to K_1$, fornece uma isometria sobrejectiva $T_a: C(K_1)\to C(K_2)$ definida por $T_a(f) = a\cdot(f\circ h)$. O Teorema de Banach-Stone (Teorema 14) demonstra que uma qualquer isometria (linear) sobrejectiva entre $C(K_1)$ e $C(K_2)$ é desta forma. Ainda hoje se exploram sob que condições uma aplicação linear $T: C(K_1)\to C(K_2)$ fornece um homeomorfismo entre K_2 e K_1.

2 O Teorema de Banach-Alaoglu

Vamos definir uma topologia muito natural no dual X^* do espaço normado X e estudamos alguns resultados interessantes que advêm da mesma. Considerem-se as aplicações $\Phi_x : X^* \to \mathbb{R}$ tal que $\Phi_x(f) = f(x)$, para $x \in X$.

Definição 1 *A topologia fraca* em X^* é a topologia gerada pela sub-base constítuida pelos conjuntos da forma $\{\Phi_x^{-1}(U)\}$, onde $U \subset \mathbb{R}$ são abertos e $x \in X$.*

Rapidamente nos apercebemos que se trata da topologia que X^* herda enquanto subespaço de $\mathbb{R}^X$, com a topologia produto. Assim sendo, a topologia fraca* é a topologia mais fraca em X^* que torna todas as aplicações Φ_x contínuas. Constata-se facilmente que, fixado $x^* \in X^*$, para $\epsilon > 0$ e F subconjunto finito de X, os conjuntos

$$B_{x^*}(\epsilon, F) := \{f \in X^* : |(f - x^*)(x_i)| < \epsilon, i \in \{i_1, ..., i_n\}\}$$

constituem uma base de vizinhanças de x^* na topologia fraca*. Como a topologia fraca* é induzida pela topologia produto (em $\mathbb{R}^X$) será de esperar que esta nos forneça o contexto ideal para estudarmos propriedades como a compacidade. Tal será concretizado ainda nesta secção com o Teorema de Banach-Alaoglu.

Lema 2 *1) Seja X^* munido com a topologia fraca*. Considere-se uma rede $\{f_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ em X^*. Então, $f_\alpha \to f$ em X^* se e só se $f_\alpha(x) \to f(x)$, para todo o $x \in X$.*
2) Seja X^* munido com a topologia fraca*. Então X^* é um espaço Hausdorff.

Prova: 1) Suponha-se que $f_\alpha \to f$ em X^* e seja $x \in X$. Para provar que $f_\alpha(x) \to f(x)$, seja $U \in N_{f(x)}$ (onde N_a designa a coleção das vizinhanças abertas de a). De acordo com a Definição 1, $\Phi_x^{-1}(U)$ é aberto em X^* e como $f_\alpha \to f$ em X^*, existe $\beta \in \Lambda$ tal que para $\alpha \geq \beta$ temos que $f_\alpha \in \Phi_x^{-1}(U)$, isto é, $f_\alpha(x) = \Phi_x(f_\alpha) \in U$. Logo, em $\mathbb{R}$, temos que $f_\alpha(x) \to f_x$. Reciprocamente, suponha-se que para todo $x \in X$ temos que $f_\alpha(x) \to f(x)$. Fixemos $\epsilon > 0$ e um subconjunto finito $F \subset X$. Consideremos agora a correspondente vizinhança $B_f(\epsilon, F) = \{g \in X^* : |g(x) - f(x)| < \epsilon, \forall x \in F\}$. Como $F \subset X$, temos que $f_\alpha(x) \to f(x)$ para todo $x \in F$ e consequentemente, para todo $x \in F$ existe $\beta_x \in \Lambda$ tal que $|f_\alpha(x) - f(x)| < \epsilon$, para todo $\alpha \geq \beta_x$. Como Λ é um conjunto dirigido, quaisquer dois elementos β_{x_i} e β_{x_j} (com x_i e x_j em F), têm um majorante em Λ. Assim sendo, e como a relação de pré-ordem

em Λ é transitiva, deve ser claro que existe $m \in \Lambda$ tal que majora todos os elementos β_x. Observe-se que $f_\alpha \in B_f(\epsilon, F)$ para todo $\alpha \geq m$. Logo, $f_\alpha \to f$ em X^*.
2) Sejam $f_1 \neq f_2$ em X^*. Então existe $x \in X$ tal que $f_1(x) \neq f_2(x)$ e como $\mathbb{R}$ é Hausdorff, sejam $U \in N_{f_1(x)}$ e $V \in N_{f_2(x)}$ disjuntos. Assim, $\Phi_x^{-1}(U) \in N_{f_1}$ e $\Phi_x^{-1}(V) \in N_{f_2}$ são disjuntos e X^* é Hausdorff. $\square$

Teorema 3 *(Banach-Alaoglu) Suponha-se X^* munido com a topologia fraca*. Então, $B_{X^*} = \{f \in X^* : ||f|| \leq 1\}$ é um conjunto compacto.*

Prova: Defina-se $D_x = \{\lambda \in \mathbb{R} : |\lambda| \leq ||x||\}$, um conjunto compacto de $\mathbb{R}$. Seja $D = \prod_{x \in X} D_x$ na topologia produto, ainda compacto pelo Teorema de Tychonoff. Defina-se agora $\Psi : B_{X^*} \to D$ tal que $\Psi(f) = (f(x))_{x \in X}$. Note-se que Ψ está bem definido pois $|f(x)| \leq ||f|| ||x||$ para $f \in X^*$, logo $\Psi(f) \in D$. Note-se ainda que Ψ é obviamente injectiva. Além disso, Ψ é contínua pois dada rede $f_\alpha \to f$ na topologia fraca*, vimos que $f_\alpha(x) \to f(x)$ para todo $x \in X$. Mas isto é a convergência na topologia produto em D e como tal, $\Psi(f_\alpha) \to \Psi(f)$. De forma muito análoga, verificamos que a inversa de Ψ é contínua, já que $(f_\alpha(x))_{x \in X} \to (f(x))_{x \in X}$ se e só se $f_\alpha(x) \to f(x)$ para todo o $x \in X$, pois D está na topologia produto. Mas isto é o mesmo que $f_\alpha \to f$ na topologia fraca*. Concluimos que Ψ é um homeomorfismo de B_{X^*} em D e como D é compacto, resta-nos provar que $\Psi(B_{X^*})$ é um conjunto fechado de D. Ora, seja $(f_n(x))_{x \in X} \to g$. Como D está munido com a topologia produto, $g = (\lim_n f_n(x))_{x \in X}$. Assim, tome-se $f : X \to \mathbb{R}$ tal que $x \mapsto \lim_n f_n(x)$. Torna-se claro que $\Psi(f) = g$ e que $||f|| \leq 1$. $\square$

3 O Teorema de Banach-Mazur

Nesta secção provamos o Teorema de Banach-Mazur, ver [2], que diz que qualquer espaço normado X separável (i.e. existe um conjunto numerável denso em X), pode ser mergulhado isometricamente em $C[0, 1]$. É inequivocamente um resultado profundo e poderoso, que *reduz* o estudo de um espaço normado separável qualquer, ao estudo de um espaço de funções contínuas num intervalo compacto de $\mathbb{R}$. Começamos com um lema que é consequência do Teorema de Banach-Alaoglu, que será posteriormente refinado por um intermediário talvez algo surpreendente - o Conjunto de Cantor - até culminar no aguardado Teorema de Banach-Mazur.

Teorema 4 *Seja X um espaço normado. Então, existe uma isometria entre X e $C(K)$, para algum compacto e Hausdorff K.*

Prova: Basta tomar $K = B_{X^*}$, compacto pelo Teorema de Banach-Alaoglu e Hausdorff quando munido com a topologia fraca*. Considere-se $\Phi : X \to C(K)$ tal que $x \mapsto \Phi_x$, com $\Phi_x : K \to \mathbb{R}$ tal que $\Phi_x(f) = f(x)$. Note-se que de acordo com a Definição 1 e as considerações que se lhe seguem, de facto $\Phi_x \in C(K)$. Além disso, Φ_x é claramente linear e temos que Φ é uma isometria, uma vez que $||\Phi(x)|| = \sup_{||f||=1}\{|f(x)|\} = ||x||$, onde a última igualdade é uma consequência do Teorema de Hanh-Banach. $\square$

Lema 5 *Seja X um espaço normado e separável. Então, B_{X^*} é metrizável.*

Prova: Seja $\{x_n\}$ um subconjunto denso e numerável de X. Assim, para $x^*, y^* \in B_{X^*}$, defina-se $d(x^*, y^*) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(x^*-y^*)(x_n)|}{2^n}$. Como $\{x_n\}$ é denso, d define uma métrica. É evidente que $d(x^*, y^*) \geq 0$ e que d é simétrica. Não é difícil provar a desigualdade triangular e por fim, $d(x^*, y^*) = 0$ se e só se $x^* = y^*$ e aqui tiramos partido da separabilidade de X. De facto, se $d(x^*, y^*) = 0$, é porque $|(x^* - y^*)(x_n)| = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, dado $z \in X$ qualquer, como $\{x_n\}$ é denso, existe existe uma subsucessão de $\{x_n\}$, que continuamos a designar por $\{x_n\}$, tal que $x_n \to z$ e, portanto, $x^*(z) = \lim_n x^*(x_n) = \lim_n y^*(x_n) = y^*(z)$. Assim, $x^* = y^*$. Resta provar que a topologia induzida por d coincide com a topologia fraca*.

O objectivo será provar que aplicação identidade id entre B_{X^*} com a topologia fraca* e B_{X^*} com a topologia induzida por d, é na verdade um homeomorfismo. Dada a compacidade do primeiro espaço topológico pelo Teorema de Banach-Alaoglu e dado o facto de que o segundo espaço é Hausdorff, por ser métrico, resta apenas provar que id é contínua[1]. Observe-se que $d(x^*, y^*) \leq \max_{1\leq n\leq M} |(x^*-y^*)(x_n)| \sum_{n=1}^{M} \frac{1}{2^n} + 2\sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$, uma vez que $||x^* - y^*|| \leq 2$. Assim, concluímos que $d(x^*, y^*) < \max_{1\leq n\leq M} |(x^* - y^*)(x_n)| + 2^{-M+1}$.

Seja $x^* \in X^*$ e fixe-se $\epsilon > 0$. Escolha-se M tal que $2^{-M+1} < \frac{\epsilon}{2}$. Atendendo às considerações feitas após a Definição 1, o conjunto $N_{x^*}^{1,\dots,M} = \{y^* \in X^* : |(y^* - x^*)(x_i)| < \epsilon/2,\ i \in \{1, ..., M\}\}$ é uma base de vizinhança de x^*. Assim, como $N_{x^*}^{1,\dots,M} \cap B_{X^*} \subset \{y^* \in B_{X^*} : d(x^*, y^*) < \epsilon\}$, conclui-se que a aplicação id é contínua. $\square$

Os dois lemas anteriores implicam o seguinte resultado.

Corolário 6 *Dado X espaço normado e separável, então existe uma isometria entre X e $C(K)$, com K compacto e metrizável.*

[1] Uma aplicação bijectiva e contínua de um espaço compacto para um espaço Hausdorff é necessariamente um homeomorfismo.

Antes de provar o próximo lema, recorde-se que um conjunto compacto e metrizável tem base numerável e portanto é separável.

Lema 7 *Seja K um espaço compacto e metrizável. Então K é homeomorfo a um subespaço fechado de $[0,1]^{\mathbb{N}}$.*

Prova: Seja $\{x_n\}$ um subconjunto numerável e denso em K (pelos comentários anteriores, sabemos que existe). Observe-se que podemos considerar, sem perda de generalidade, que a métrica d em K satisfaz $d(x,y) \leq 1$. Assim sendo, defina-se $\Psi : K \to [0,1]^{\mathbb{N}}$ tal que $x \mapsto (d(x,x_n))_{n\in\mathbb{N}}$. Como cada componente de Ψ é contínua e $[0,1]^{\mathbb{N}}$ está munido com a topologia produto, temos que Ψ é contínua. Para provar que $K \approx \Psi(K) \subset [0,1]^{\mathbb{N}}$, como K é compacto e $[0,1]^{\mathbb{N}}$ é Hausdorff, resta provar que Ψ é injectiva. Para estabelecer este facto, tiramos partido de que $\{x_n\}$ é denso em K: seja $\Psi(x) = \Psi(y)$. Como tal, para todo $n \in \mathbb{N}$ temos que $d(x,x_n) = d(y,x_n)$ e portanto, como existe uma subsucessão $x_m \to x$ em K, concluimos que $x_m \to y$ e como o limite é único, uma vez que K é Hausdorff (pois é métrico), logo $x = y$. $\square$

Já conseguimos relacionar um espaço normado e separável X com $C(K)$, onde K é compacto e métrico. Além disso, já conseguimos relacionar K com $[0,1]^{\mathbb{N}}$. Suponha-se, por um momento, que sabíamos que existe uma função contínua f tal que $K = f([0,1])$. Então, certamente que $C(K)$ seria isométrico a um subespaço de $C([0,1])$. É nesta fase que o Conjunto de Cantor -Δ - se revela central, servindo de *tradução contínua* entre os mundos de $[0,1]$ e de $[0,1]^{\mathbb{N}}$. A característica do Conjunto de Cantor Δ que o torna importante neste momento é o facto de que $\Delta \approx \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. É fácil de entender este facto se pensarmos num elemento de Δ como uma sucessão de zeros e dois, provenientes da expansão ternária.

Lema 8 $[0,1] = f(\Delta)$*, com f contínua*[2].

Prova: Basta considerar a aplicação $f : \Delta \to [0,1]$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^{n+1}}$, onde um elemento genérico do Conjunto de Cantor é da forma $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$ com $a_n \in \{0,2\}$ para todo o $n \in \mathbb{N}$. Por vezes, f é designada por *função de Cantor-Lebesgue.* $\square$

Concluimos assim que $C([0,1])$ é isométrico a um subespaço (fechado) de $C(\Delta)$. De facto, defina-se $\Psi : C([0,1]) \to C(\Delta)$ tal que $\Psi(g) = g \circ f$, onde f

[2] É fácil de mostrar que Δ é compacto. Assim, como $[0,1] = f(\Delta)$ e f é contínua, concluímos que $[0,1]$ é compacto. Temos assim uma prova alternativa do Teorema de Heine-Borel.

é a função do Lema 8. É imediato que Ψ é linear e que é uma isometria, pois $||g|| = \sup_{x\in[0,1]}\{g(x)\} = \sup_{k\in\Delta}\{(g\circ f)(k)\} = ||g\circ f|| = ||\Psi(g)||$. Além disso, $\Psi(C([0,1]))$ é fechado: seja $\{h_n\} \in \Psi(C[0,1])$ tal que $h_n \to h$, com $h_n = g_n \circ f$. Ora se $g_n \circ f \to h$, temos que $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é Cauchy e portanto $g = \lim g_n$ existe, uma vez que $C([0,1])$ é uma espaço de Banach. Além disso, como a convergência é uniforme, $g \in C([0,1])$. Assim, $h = g\circ f$ ou seja, $h = \Psi(g)$.

Lema 9 $[0,1]^{\mathbb{N}} = f(\Delta)$, *com* f *contínua.*

Prova: Recordemos que $\mathbb{N}$ admite uma partição infinita numerável em subconjuntos infinitos numeráveis, digamos $\mathcal{P} = \{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Para cada elemento $I_n \subset \mathbb{N}$ de $\mathcal{P}$, como $|I_n| = |\mathbb{N}|$ (onde $|A|$ designa o cardinal do conjunto A) temos que $\Delta \approx \{0,1\}^{|I_n|}$. Assim sendo, pelo Lema 8 existem funções contínuas $f_n : \{0,1\}^{|I_n|} \to [0,1]$ tais que $f_n(\{0,1\}^{|I_n|}) = [0,1]$. Defina-se então $f : \Delta \to [0,1]^{\mathbb{N}}$ dada por $f(x) = (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$, claramente contínua na topologia produto, uma vez que cada componente f_n é contínua. $\square$

Voltamos agora à tentativa de relacionar um conjunto compacto e métrico K com o Conjunto de Cantor.

Teorema 10 *Qualquer espaço compacto e métrico* K *é a imagem de* Δ *por uma aplicação contínua.*

Prova: Pelo Lema 7, já sabemos que K é homeomorfo a um subespaço fechado de $[0,1]^{\mathbb{N}}$. Assim, pelo Lema 9, K é a imagem de Δ por uma aplicação contínua de algum subconjunto fechado. Deste modo, se provarmos que cada fechado de Δ fôr a imagem de Δ por uma aplicação contínua, temos que K é imagem de Δ por uma aplicação contínua, por simples composição. Seja então $F \subset \Delta$ um fechado. Dado $x \in \Delta$, note-se que $d(x,F) = \inf_{y\in F}\{d(x,y)\}$ é atingido por algum y_0, uma vez que F é um subespaço fechado de Δ. Considere-se a função contínua auxiliar $d_x : F \to \mathbb{R}$ tal que $d_x(z) = d(x,z)$.[3] Observe-se que $Y = d_x^{-1}(d(x,F))$ é um subconjunto fechado de Δ e como tal, compacto. Assim, existe $y_0 = \min_{y\in Y}\{d(0,y)\}$. Definimos então $\varphi : \Delta \to F$ tal que $\varphi(x) = y_0$. Assim sendo, φ é contínua: seja $x_n \to x$ e como F é compacto (e portanto, como Δ é métrico, F é sequencialmente compacto), seja sem perda de generalidade, $\varphi(x_n) \to z \in \Delta$. Então, $d(x_n, \varphi(x_n)) \to d(x,z)$ e $d(x_n,\varphi(x_n)) = d(x_n, F) \to d(x,F)$. Ora, $d(x,F) = d(x,y_0)$ e como tal, $y_0 = z$. Assim, $\varphi(x_n) \to z = \varphi(x)$. $\square$

[3] Estamos a usar a métrica $d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n - b_n|}{3^n}$, onde a_n e b_n são os coeficientes da expansão ternária de x e de y respectivamente.

Corolário 11 *Se K é compacto e métrico, $C(K)$ é isométrico a um subespaço de $C(\Delta)$.*

Concluimos que $C(\Delta)$ é *universal* - no sentido explicitado no corolário anterior - para a classe $C(K)$, com K compacto e métrico. Notamos agora que dado $f \in C(\Delta)$, pelo Teorema da Extensão de Tietze, existe um prolongamento de f em $C([0,1])$. No entanto, vamos prolongar f de uma forma particular, que nos permitirá dar os últimos passos na prova do Teorema de Banach-Mazur. Ora o complementar de Δ em $[0,1]$ é uma união numerável de abertos disjuntos I_n. Assim, temos $I_n =]a_n, b_n[$ com $a_n, b_n \in \Delta$. Basta ligar $f(a_n)$ e $f(b_n)$ por uma recta e temos extensão de $f \in C(\Delta)$, uma aplicação $f^+ \in C[0,1]$. Além disso, $\sup_{0 \le x \le 1} |f^+(x)| = \sup_{x \in \Delta} |f(x)|$ e dados $f, g \in C(\Delta)$ é imediato verificar que $(f+g)^+ = f^+ + g^+$. Usando o Corolário 11, temos o seguinte resultado.

Lema 12 *1) Existe uma extensão de $C(\Delta)$ para $C([0,1])$, que é isometria linear.*
2) Seja K compacto e métrico. Então, $C(K)$ é isométrico a um subespaço de $C([0,1])$.

Estamos por fim em condições de deduzir como simples corolário, o Teorema de Banach-Mazur.

Teorema 13 *(Banach-Mazur) Seja X um espaço normado e separável. Então, existe uma isometria entre X e um subespaço de $C([0,1])$.*

Prova: Pelo Corolário 6, existe uma isometria $i_1 : X \to C(K)$, com K compacto e métrico. Pelo Lema 12, existe uma isometria $i_2 : C(K) \to C([0,1])$. Basta tomar a isometria $i : X \to C([0,1])$, tal que $i = i_2 \circ i_1$. $\square$

4 Teorema de Banach-Stone

Nesta última secção, esboçamos a prova de uma versão do Teorema de Banach-Stone, e.g. [7]. Este resultado estabelece de forma muito precisa a relação profunda entre equivalência de espaços compactos e Hausdorff K (onde naturalmente se quer dizer que K_1 e K_2 são equivalentes se forem homeomorfos) e os respectivos espaços $C(K)$ (onde se consideram $C(K_1)$ e $C(K_2)$ equivalentes se forem isométricos). Vale a pena mencionar que Banach provou uma versão mais fraca deste teorema em 1932, considerando apenas espaços métricos e compactos K. Em 1937, Stone provou o caso geral [7].

Teorema 14 *(Banach-Stone) Seja K_1 e K_2 espaços compactos de Hausdorff. Então $C(K_1)$ e $C(K_2)$ são isométricos se e só se K_1 e K_2 são homeomorfos. Mais, uma qualquer isometria linear $T : C(K_1) \to C(K_2)$ é da forma*

$$(Tf)(k_2) = a(k_2)(f \circ h)(k_2), \qquad k_2 \in K_2$$

onde $h : K_2 \to K_1$ é um homeomorfismo e $a : K_2 \to \mathbb{R}$ é uma função contínua tal que $|a(k_2)| = 1$ para cada $k_2 \in K_2$.

Os próximos lemas estabelecem a prova do Teorema 14.

Lema 15 *Sejam K e L espaços compactos e Hausdorff. Seja $h : K \to L$, um homeomorfismo. Então, $T : C(L) \to C(K)$ tal que $T(f) = f \circ h$, é uma isometria linear sobrejectiva.*

Prova: Deve ser claro que T é uma aplicação linear bem definida. Além disso, $||T(f)|| = \sup\{|f(h(k))| : k \in K\} \leq \sup\{|f(l)| : l \in L\} = ||f||$. Como h é sobrejectiva, temos que $||T(f)|| = ||f||$ e portanto, T é uma isometria. Resta provar que T é sobrejectiva: Sendo h injectiva, K compacto e L Hausdorff, temos que h restrito a K é um homeomorfismo. Em particular, dado $g \in C(K)$ temos que $g \circ h^{-1} : h(K) \to \mathbb{R}$ é contínua. Por outro lado, como L é Hausdorff e $h(K)$ é compacto, temos que $h(K) \subset L$ é fechado. Assim, pelo Teorema da Extensão de Tietze, existe $f \in C(L)$ tal que $f(x) = (g \circ h^{-1})(x)$ para $x \in h(K)$. Logo, $T(f) = g$. □

Dado um espaço compacto e Hausdorff K, designamos os *funcionais de avaliação* por δ_x, isto é as aplicações $\delta_x : C(K) \to \mathbb{R}$ tal que $\delta_x(f) = f(x)$. É fácil de verificar que $i : K \hookrightarrow C(K)^*$ tal que $i(x) = \delta_x$ constitui um mergulho. Designamos ainda o conjunto dos *pontos de extremo* de um conjunto convexo K, por $ext(K)$[4]. Se $T : K_1 \to K_2$ é uma isometria sobrejectiva, então $T(ext(B_{K_1})) = ext(B_{K_2})$, onde B_{K_1} e B_{K_2} designam as bolas unitárias em K_1 e em K_2. Recordamos ainda que se K é compacto e Hausdorff, então $ext(B_{C(K)^*}) = \{\pm\delta_x, x \in K\}$.

Lema 16 *Sejam K_1 e K_2 espaços compactos e Hausdorff e $T : C(K_1) \to C(K_2)$ uma isometria linear sobrejectiva. Então, T é da forma $T(f)(k_2) = a(k_2)(f \circ h)(k_2)$, onde $h : K_2 \to K_1$ é um homeomorfismo e $|a(k_2)| = 1$, com $a : K_2 \to \mathbb{R}$. Em particular, K_1 e K_2 são homeomorfos (cf. [8]).*

[4]Teorema de Krein-Milman: Se X é um espaço vectorial Hausdorff e localmente convexo e $C \subset X$ é um subconjunto não vazio, compacto e convexo, então $ext(C) \neq \emptyset$.

Prova: Seja $T : C(K_1) \to C(K_2)$, uma isometria linear sobrejectiva. Então, o operador adjunto de Banach $T^* : C(K_2)^* \to C(K_1)^*$, i.e. $(T^*\phi)f = \phi(T(f))$ com $\phi \in C(K_2)^*$, $f \in C(K_1)$, é ainda uma isometria linear sobrejectiva. Assim, T^* constitui uma bijecção entre $ext(B_{C(K_2)^*})$ e $ext(B_{C(K_1)^*})$. Para cada $k \in K_2$, seja $\delta_k \in ext(B_{C(K_2)^*})$. Assim, existe $a(k) = \pm 1$ tal que $T^*(\delta_k) = a(k)\delta_{h(k)}$. Obtêm-se aplicações $a : K_2 \to \mathbb{R}$ e $h : K_2 \to K_1$, como sugerido pela notação. Resta-nos pois provar que a é contínua e que h é um homeomorfismo. Os detalhes são omitidos, podendo ser consultados em [8]. Por fim, a partir de simples manipulações, podemos concluir que $Tf(k) = a(k)(f \circ h)(k)$. $\square$

Agradecimentos: Agradecemos as sugestões do revisor.

Referências

[1] L. Alaoglu, “Weak topologies of normed linear spaces”, *Annals of Mathematics*, Vol. **41** (1940), pp. 252–267.

[2] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Chelsea Publishing Co., New York, vii+254, 1955.

[3] N. L. Carothers, *A Short Course on Banach Space Theory*, London Mathematical Society Student Texts, Vol. **64**, 2004.

[4] John B. Conway, *A course in functional analysis*, Segunda Edição. GTM, Vol. **96**. Springer-Verlag, New York, pp. xvi+399, 1990.

[5] H. E. Lacey, *The Isometric Theory of Classical Banach Spaces*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Vol. **208**, Springer-Verlag, New York, 1974.

[6] P. R. Pinto, *Texto de apoio de Análise Funcional*, IST, 2013.

[7] M. Stone, “Applications of the theory of Boolean rings general topology”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol. **41** (1937), pp. 375–481.

[8] M. I. Garrido, J. A.Jaramillo, “Variations on the Banach-Stone Theorem”, *Extracta Mathematicae*, Vol. **17** No. 3, 2002.