

MOVIMENTO E FORMA

*Maria Pires de Carvalho, Ana Cristina Oliveira*¹

Departamento de Matemática & Centro de Matemática
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
Rua do Campo Alegre, 687, 4169-007 Porto
mpcarval@fc.up.pt

Associação Atractor (www.atractor.pt)
Rua de Ceuta, 118, 5º, 4050-190 Porto
amolivei@fc.up.pt

Resumo: Um sistema articulado é uma cadeia finita de hastes rígidas, com algumas junções fixas e outras móveis, que funciona movendo os nós sob algum constrangimento. O espaço de configuração de um tal sistema é a união de todas as suas posições permitidas. Descreveremos os espaços de configuração de quadriláteros e de pentágonos articulados no plano, sendo utilizada uma abordagem construtiva que nos permitirá também definir, em termos do mecanismo, uma topologia natural no espaço de configuração e alguns invariantes topológicos. Para além de conjuntos degenerados, obtaremos cada superfície compacta, conexa, orientável e sem bordo como espaço de configuração de um mecanismo devidamente construído.

Abstract: A mechanical linkage consists of a finite number of rods joined together by hinges, some of which are pinned down with respect to a fixed frame, so that the system is free to move in a plane. The configuration space of a linkage is the set of all its admissible positions. We will construct the configuration spaces of planar quadrilaterals and pentagons, endow them with a suitable topology and define a set of invariants. Apart from a few degenerate spaces, we will obtain any connected compact oriented closed surface as the configuration space of an appropriate mechanism.

palavras-chave: Mecanismo; espaço de configuração; topologia quociente.

keywords: Linkage; configuration space; quotient topology.

1 Introdução

Para quem não conheça o conceito de superfície, ou nunca se tenha questionado sobre quantos tipos topológicos de superfícies há, o que é essencial no

¹As autoras agradecem a Manuel Arala Chaves e a Maria Dedò os comentários que em muito melhoraram este texto.

conteúdo deste texto é a noção de espaço de configuração de um mecanismo e o modo como é possível transferir informação topológica de um conjunto de pontos e hastes em movimento no plano para um espaço abstracto onde se descrevem as posições admissíveis do sistema articulado, cuja representação conduz a modelos tão regulares como uma esfera ou um toro. A quem já tenha estudado superfícies e o respectivo Teorema de Classificação [3, 1, 7], o texto apresenta outro modo de construir esses espaços e de definir alguns dos invariantes topológicos que lhes estão associados, apelando essencialmente ao uso de relações de ordem entre comprimentos de hastes.

O processo indutivo, sugerido em [5], de construção dos espaços de configuração assegura que a lista desses espaços contém a família completa das superfícies orientáveis. Cada superfície compacta, conexa, sem bordo e orientável surge neste texto associada a um sistema de hastes articuladas, e as noções de genus e de componente conexa são expressas numa linguagem simples mas rigorosa. Observe-se, porém, que o argumento clássico para classificar as superfícies orientáveis começa com uma esfera e justifica matematicamente um procedimento que permite costurar ansas (isto é, cilindros) à esfera depois de se lhe retirarem círculos disjuntos (em número finito par). Com os mecanismos, o processo natural inicia-se numa esfera e num toro (obtidos com um mesmo pentágono articulado a que se variam os comprimentos das hastes) e indica como unir toros sucessivos, de que se excluem dois ou quatro círculos devidamente posicionados, para obter toros de genus g qualquer. Não se analisou neste texto se os mecanismos apresentados cumprem a função de construir espaços de configuração de genus g com esforço mínimo, em número de pontos e hastes.

Em [6, 10, 2, 9], os autores apresentam uma descrição dos espaços de configuração obtidos com pentágonos articulados ditos genéricos usando métodos distintos do utilizado neste texto para os identificar (como a Teoria de Morse ou fibrações). Em [4], pode aprender-se a construir um mecanismo gigantesco cujo espaço de configuração contém uma componente conexa que é o plano projectivo, uma garrafa de Klein ou outra superfície compacta, sem bordo e não orientável. Ao contrário do caso orientável, não se conhece um mecanismo cujo espaço de configuração tenha apenas uma componente conexa e que seja precisamente uma destas superfícies.

Seria interessante, e uma motivação adicional para o estudo dos mecanismos e respectivos espaços de configuração, obter reformulações elementares na linguagem dos mecanismos de propriedades relevantes de superfícies, como o Teorema da Esfera Cabeluda, o Teorema da Curva de Jordan, o Teorema de Euler para Poliedros ou o Teorema do Ponto Fixo de Brower.

Além disso, parte do que aqui se analisou é susceptível de generalização a variedades de dimensão superior. Por exemplo, é fácil descrever um mecanismo que construa um toro de dimensão 3 como o produto de três circunferências, $S^1 \times S^1 \times S^1$; e o processo de empilhar camadas que utilizámos, para obter as superfícies a partir de curvas, sugere que se investigue a viabilidade de um método geral que, empilhando superfícies ou apelando a fibrações, permita obter outras variedades de dimensão 3 como espaço de configuração de algum mecanismo.

Na maioria dos casos, este processo de construção de superfícies com mecanismos não permite fabricar modelos físicos, manipuláveis, porque as hastes apropriadas têm comprimentos demasiado grandes. Por isso, a segunda autora deste texto construiu um módulo virtual que, fornecendo uma lista sucinta de instruções e informações, permite uma aprendizagem interactiva do funcionamento de um mecanismo e do modo como as relações de ordem entre comprimentos de hastes determinam as características topológicas dos espaços de configuração. A programação das animações do módulo teve ainda como objectivo sincronizar as escolhas do utilizador com o movimento do mecanismo e a criação dos respectivos espaços de configuração. Neste contexto, o módulo interactivo serve também para sistematizar o que aqui se vai aprendendo, sugerindo-se aos leitores retornos oportunos a esse módulo. Está disponível em [8] e no site <http://www.atractor.pt/mat/MovimentoForma/pagini.html>

2 Mecanismos no plano

As estruturas articuladas que aqui consideraremos são versões planas de engenhos simples, mas capazes de tarefas complicadas, como os que encontramos em *robots*, na engrenagem das rodas de um comboio, nas suspensões das bicicletas, nas sanfonas das portas dos antigos elevadores, nos alicates de pressão, nos pantógrafos ou em cadeiras de balanço. Nesta secção, descreveremos formalmente o que se entende por um sistema de pontos e hastes articuladas no plano e estudaremos as suas posições possíveis.²

Definição 1. *Um conjunto de peças é um terno $\mathcal{M} = (\mathcal{V}, \mathcal{A}, d)$ constituído por:*

- *Um conjunto finito $\mathcal{V} = \mathcal{V}_F \cup \mathcal{V}_M$ de pontos, sendo $\mathcal{V}_F = \{V_1, \dots, V_m\}$, $\mathcal{V}_M = \{V_{m+1}, \dots, V_n\}$, $m, n \in \mathbb{N}$ e $n > m$.*

²Podem testar os conceitos que apresentaremos através dos Exemplos 1 a 3 das páginas 1-3 do módulo virtual.

- Um conjunto finito de hastes

$$\mathcal{A} = \{[V_i V_j] : i, j \in \{1, \dots, n\} \text{ e } i \neq j\}$$

tal que, para quaisquer dois pontos V_k e V_ℓ de \mathcal{V} , existe um subconjunto $\{[V_k V_{i_1}], [V_{i_1} V_{i_2}], \dots, [V_{i_s} V_\ell]\}$ não-vazio em \mathcal{A} .

- Uma função $d : \mathcal{A} \mapsto \mathbb{R}^+$.

Se fixarmos um ponto $V \in \mathcal{V}_F$ e uma haste $H = [V_i V_j] \in \mathcal{A}$, diremos que H e V estão ligados se $V \in H$. Duas hastes $H_1 = [V_i V_j]$ e $H_2 = [V_k V_\ell]$ dizem-se unidas se $H_1 \cap H_2 = V_s$ para algum $s \in \{i, j, k, \ell\}$.

Definição 2. Um conjunto de peças $\mathcal{M} = (\mathcal{V}, \mathcal{A}, d)$ com $n > 2$ pontos é uma *cadeia* se tiver um arranjo cíclico, isto é, se

- $\mathcal{V}_F = \{V_1, V_2\}$.
- $\mathcal{V}_M = \{V_3, \dots, V_n\}$.
- $\mathcal{A} = \{[V_1 V_2], [V_2 V_3], \dots, [V_{n-1} V_n], [V_n V_1]\}$.

Uma cadeia pode ser vista como uma linha poligonal articulada que tem dois vértices adjacentes fixos. Os exemplos 1 e 3 do módulo virtual são cadeias.

Definição 3. Um conjunto de peças $\mathcal{M} = (\mathcal{V}, \mathcal{A}, d)$ é *realizável* se existir uma função $\mathcal{R} : \mathcal{V} \mapsto \mathbb{R}^2$ tal que, para todos os pares de pontos $V_i, V_j \in \mathcal{V}$, se tem

$$\|\mathcal{R}(V_i) - \mathcal{R}(V_j)\| = d([V_i V_j])$$

onde $\|\cdot\|$ designa a distância euclidiana em \mathbb{R}^2 . A imagem de \mathcal{R} é uma *realização* de \mathcal{M} .

Uma realização permite visualizar o conjunto de peças no plano como pontos unidos por segmentos de recta. Isso nem sempre é possível, como a cadeia com três pontos P_1, P_2, P_3 do plano cujas hastes medem $\|P_1 - P_2\| = 11$, $\|P_2 - P_3\| = 5$ e $\|P_3 - P_1\| = 3$.

Definição 4. Um *mecanismo* é um conjunto de peças realizável.

Para cada realização $\{\mathcal{R}(v) : v \in \mathcal{V}\}$ de um mecanismo $\mathcal{M} = (\mathcal{V}, \mathcal{A}, d)$, designaremos por pontos fixos os elementos de $\mathcal{R}(\mathcal{V}_F)$, por pontos móveis os de $\mathcal{R}(\mathcal{V}_M)$ e por hastes os de $\{[\mathcal{R}(V_i), \mathcal{R}(V_j)] : [V_i V_j] \in \mathcal{A}\}$, onde $[A, B]$ designa o segmento de recta que une A a B em \mathbb{R}^2 . Note-se que o comprimento de cada haste $[\mathcal{R}(V_i), \mathcal{R}(V_j)]$ é precisamente $d([V_i V_j])$. Como é irrelevante o lugar no plano onde os pontos fixos se situam, adoptaremos como equivalentes todas as versões isométricas (por isometrias que preservem a orientação) da união dos pontos fixos e das hastes de um mecanismo.

Exemplo 1. Seja $\mathcal{M} = (\mathcal{V}, \mathcal{A}, d)$, com $V_F = \{V_1, V_2\}$, $\mathcal{V}_M = \{V_3\}$, $\mathcal{A} = \{[V_1V_2], [V_2V_3], [V_3V_1]\}$ e $d : \mathcal{A} \mapsto \mathbb{R}^+$ tais que $d(a) = \sqrt{3}$ para todo $a \in \mathcal{A}$. Então a função $\mathcal{R} : \mathcal{V} \mapsto \mathbb{R}^2$ definida por

$$\mathcal{R}(V_1) = (1, 0), \quad \mathcal{R}(V_2) = \left(\cos \frac{2\pi}{3}, \sin \frac{2\pi}{3} \right), \quad \mathcal{R}(V_3) = \left(\cos \frac{4\pi}{3}, \sin \frac{4\pi}{3} \right)$$

é uma realização de \mathcal{M} .

2.1 Mecanismos em cadeia

Numa cadeia de peças com n pontos, representaremos por ℓ_1, \dots, ℓ_n as imagens por d dos elementos do conjunto $\{[V_1V_2], [V_2V_3], \dots, [V_nV_1]\}$.

Proposição 1. Uma cadeia de peças \mathcal{M} com n pontos é um mecanismo se e só se

$$\ell_i \leq \sum_{k=1, k \neq i}^n \ell_k \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Demonstração. Suponhamos que \mathcal{M} é um mecanismo e seja \mathcal{R} uma sua realização.³ Os elementos desta realização são vértices de uma linha poligonal plana e fechada, com lados de comprimentos ℓ_1, \dots, ℓ_n . Por isso, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, tem-se

$$\ell_i \leq \sum_{k=1, k \neq i}^n \ell_k.$$

Reciprocamente, sejam $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^2$ tais que $\|P_1 - P_2\| = \ell_1$. Uma vez que

$$\ell_1 \leq \sum_{k=2}^n \ell_k \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{n-1} \ell_k \geq \ell_n,$$

concluimos que existe $1 \leq j \leq n - 2$ tal que

$$\sum_{k=1}^j \ell_k \leq \sum_{k=j+1}^n \ell_k \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{j+1} \ell_k \geq \sum_{k=j+2}^n \ell_k. \quad (1)$$

Sejam $S_1 = \sum_{k=1}^j \ell_k$ e $S_2 = \sum_{k=j+2}^n \ell_k$. A condição (1) é equivalente a

$$S_1 \leq S_2 + \ell_{j+1} \quad \text{e} \quad S_1 + \ell_{j+1} \geq S_2.$$

³Sugerimos que não avance neste argumento sem explorar a animação da página [pag5.html](#) do módulo.

Se $S_1 = S_2 + \ell_{j+1}$, consideremos P_3, P_4, \dots, P_{j+1} na semi-recta com origem em P_1 e que passa em P_2 (que designamos por $\overline{P_1P_2}$) de modo que:

$$\|P_2 - P_3\| = \ell_2, \quad \|P_3 - P_4\| = \ell_3, \dots \quad \text{e} \quad P_3 \notin \overline{P_2P_1}, \quad P_4 \notin \overline{P_3P_1}, \dots$$

Analogamente, sejam $P_{j+2}, P_{j+3}, \dots, P_n$ em $\overline{P_1P_2}$ tais que $\|P_{j+1} - P_{j+2}\| = \ell_{j+1}$, $\|P_{j+2} - P_{j+3}\| = \ell_{j+2}$, etc., e $P_{j+2} \in \overline{P_{j+1}P_1}$, $P_{j+3} \in \overline{P_{j+2}P_1}$, etc. Assim, a função

$$\begin{aligned} \mathcal{R}: \mathcal{V} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ V_i &\rightarrow P_i \end{aligned}$$

é uma realização de \mathcal{M} .

Por um argumento semelhante se conclui que, se $S_1 + \ell_{j+1} = S_2$ ou $\ell_{j+1} = S_1 + S_2$, então \mathcal{M} é um mecanismo. Falta analisar o caso em que

$$S_1 < S_2 + \ell_{j+1}, \quad S_1 + \ell_{j+1} > S_2 \quad \text{e} \quad \ell_{j+1} < S_1 + S_2,$$

condições que indicam que S_1 , ℓ_{j+1} e S_2 são os comprimentos dos lados de um triângulo. Para obter uma realização de \mathcal{M} , tomemos P_{j+1} como sendo o ponto de $\overline{P_1P_2}$ tal que $\|P_1 - P_{j+1}\| = S_1$, e P_{j+2} como um dos (dois) pontos do plano tais que

$$\|P_{j+2} - P_{j+1}\| = \ell_{j+1} \quad \text{e} \quad \|P_{j+2} - P_1\| = S_2.$$

De seguida, consideremos pontos P_3, P_4, \dots, P_j do segmento $[P_1, P_{j+1}]$, que une os pontos P_1 e P_{j+1} , tais que

$$\|P_2 - P_3\| = \ell_2, \quad \|P_3 - P_4\| = \ell_3, \dots$$

Finalmente, escolhamos $P_{j+3}, P_{j+4}, \dots, P_n$ em $[P_{j+2}, P_1]$ tais que

$$\|P_{j+2} - P_{j+3}\| = \ell_{j+2}, \quad \|P_{j+3} - P_{j+4}\| = \ell_{j+3}, \dots \quad \square$$

2.2 Espaço de configuração de um mecanismo

Dado um mecanismo \mathcal{M} , estamos interessados na união de todas as posições admissíveis às realizações de \mathcal{M} , isto é, dos sistemas articulados formados por m pontos fixos previamente escolhidos e que possuem $n-m$ junções entre as suas hastes como prescreve \mathcal{M} . Na verdade, queremos estabelecer um homeomorfismo entre este conjunto de posições, com uma topologia adequada, e um subconjunto de \mathbb{R}^N , para um natural N suficientemente elevado.

Seja $\mathcal{M} = (\mathcal{V}, \mathcal{A}, d)$ um mecanismo tal que V_1, \dots, V_m são pontos fixos e V_{m+1}, \dots, V_n são pontos móveis. Consideremos m pontos P_1, \dots, P_m do plano tais que $\|P_i - P_j\| = d([V_iV_j])$, para todo o $[V_iV_j] \in \mathcal{A}$ com V_i e V_j fixos.

Definição 5. O espaço de configuração de \mathcal{M} , que designaremos por $[\mathcal{M}]_{(P_1, \dots, P_m)}$ ou, mais abreviadamente, $[\mathcal{M}]$, é o conjunto, com a métrica induzida da métrica euclídeana em $(\mathbb{R}^2)^{n-m}$, dado por

$$\bigcup_{\mathcal{R}} \{(\mathcal{R}(V_{m+1}), \dots, \mathcal{R}(V_n)) \in (\mathbb{R}^2)^{n-m}\}$$

onde \mathcal{R} designa uma qualquer realização de \mathcal{M} tal que $\mathcal{R}(V_i) = P_i$ para todo o $i \in \{1, \dots, m\}$.

Note-se que a todo o m -uplo de pontos em \mathbb{R}^2 , digamos P_1, \dots, P_m , tal que $\|P_i - P_j\| = d([V_i V_j])$ para todo o $[V_i V_j] \in \mathcal{A}$ com $V_i, V_j \in \mathcal{V}_F$, está associado um espaço de configuração de \mathcal{M} . Contudo, até à Secção 7, interessar-nos-ão apenas espaços de configuração de mecanismos com dois pontos fixos e, neste caso, como veremos (Proposição 6), todos os espaços de configuração são homeomorfos. Até essa secção, falaremos do (único) espaço de configuração de \mathcal{M} .

2.3 Representação do espaço de configuração

Consideremos, a título de exemplo, um mecanismo M com um ponto fixo, V_1 , dois pontos móveis, V_2 e V_3 , e hastes $[V_1 V_2]$ e $[V_2 V_3]$. O seu espaço de configuração é o conjunto de pares de pontos do plano (P_2, P_3) tais que P_2 e P_3 são pontos móveis de uma qualquer realização do mecanismo. Nesse conjunto, consideremos a topologia induzida da métrica euclídiana de \mathbb{R}^4 . Tais pontos ficam completamente determinados por dois ângulos (μ, α) de $[-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$, onde α é o ângulo entre a direcção orientada $\overrightarrow{P_1 P_2}$ e a vertical, e μ entre $\overrightarrow{P_2 P_3}$ e a vertical, como indica a Figura 1. Será o quadrado $[-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$ uma representação adequada do espaço de configuração?

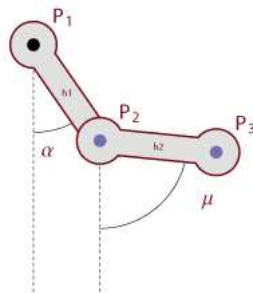


Figura 1: Ângulos α e μ .

Note-se que não há diferença, a nível do movimento do mecanismo e dos pontos que gera no espaço de configuração, no facto de α medir $-\pi$ ou π ; e a mesma situação ocorre com μ . Por esse motivo, para obtermos um modelo ajustado, precisamos de identificar, para qualquer $\mu \in]-\pi, \pi[$, os dois pontos $(\mu, -\pi)$ e (μ, π) e, analogamente, de entender como idênticos os dois pontos $(-\pi, \alpha)$ e (π, α) , para cada $\alpha \in]-\pi, \pi[$. Finalmente, temos ainda de identificar os quatro pontos $(-\pi, -\pi)$, $(-\pi, \pi)$, $(\pi, -\pi)$ e (π, π) .

No espaço quociente \mathcal{T} do quadrado com identificações, cada ponto representa uma e uma só posição do mecanismo. Contudo, há outra característica que pretendemos exigir do modelo: que a topologia que nele consideremos traduza correctamente a noção de proximidade entre pontos do espaço de configuração do mecanismo M . A topologia natural em \mathcal{T} é a topologia quociente, que é a maior família de abertos em \mathcal{T} que torna contínua a projecção do quadrado no espaço quociente [12]. Vejamos que ela é a topologia acertada para o espaço de configuração do mecanismo M .

Consideremos uma realização $\mathcal{R}_0 = (P_2, P_3)$ do mecanismo e o correspondente par de ângulos $(\mu, \alpha) \in \mathcal{T}$. Fixemos de seguida duas bolas abertas, \mathcal{B}_2 e \mathcal{B}_3 , centradas em P_2 e P_3 , respectivamente (Figura 2).

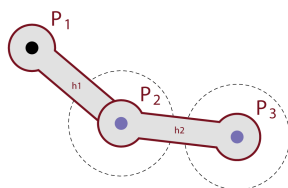


Figura 2: \mathcal{R}_0 , \mathcal{B}_2 e \mathcal{B}_3 .

O conjunto formado pelas realizações (Q_2, Q_3) de M tais que Q_2 e Q_3 estão contidos, respectivamente, em \mathcal{B}_2 e \mathcal{B}_3 , formam uma vizinhança \mathcal{W} de \mathcal{R}_0 . E, reciprocamente, qualquer vizinhança de \mathcal{R}_0 contém uma vizinhança deste tipo. Além disso, é possível encontrar uma vizinhança suficientemente pequena de $(\mu, \alpha) \in \mathcal{T}$ tal que todos os elementos desta vizinhança correspondem a realizações de M contidas em \mathcal{W} (Figura 3).

Reciprocamente, fixados um par $(\mu, \alpha) \in \mathcal{T}$, uma sua vizinhança U e a respectiva realização \mathcal{R}_0 do mecanismo M , existe uma vizinhança \mathcal{U} de \mathcal{R}_0 tal que toda a realização \mathcal{S} em \mathcal{U} corresponde a um par (μ_S, α_S) de U .

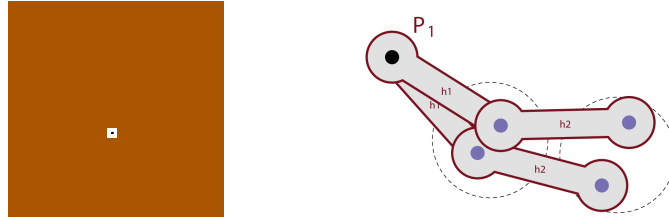


Figura 3: Vizinhança de (μ, α) , no quadrado e no mecanismo.

Conclusão: Um bom modelo para o espaço de configuração é o quadrado com as identificações que descrevemos; ou seja, é um toro.⁴

3 Propriedades dos espaços de configuração

Pretende-se agora reunir informação geral sobre o que podem ser os espaços de configuração dos mecanismos.

3.1 Mecanismos fixos

Em que circunstâncias o espaço de configuração de um mecanismo em cadeia se reduz a um ponto? Esperamos que uma tal rigidez resulte de uma relação desfavorável entre os comprimentos das hastes.⁵ E, de facto:

Proposição 2. *O espaço de configuração de um mecanismo em cadeia \mathcal{M} com n pontos é um conjunto com um só elemento se e só se existir $1 \leq i \leq n$ tal que $\ell_i = \sum_{k=1, k \neq i}^n \ell_k$.*

Demonstração. Se $\ell_i = \sum_{k=1, k \neq i}^n \ell_k$, então há apenas uma realização possível do mecanismo e, portanto, o espaço de configuração é constituído por um ponto. Quanto à implicação recíproca, sejam P_1 e P_2 pontos do plano tais que $\|P_1 - P_2\| = \ell_1$. Suponhamos, por absurdo, que $\ell_i \neq \sum_{k=1, k \neq i}^n \ell_k$, para todo o $i \in \{1, \dots, n\}$. Então, pela Proposição 1, tem-se $\ell_1 < \sum_{k=2}^n \ell_k$ e $\ell_n < \sum_{k=1}^{n-1} \ell_k$. Logo, existe $1 < j \leq n - 2$ tal que

$$\sum_{k=1}^j \ell_k \leq \sum_{k=j+1}^n \ell_k \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{j+1} \ell_k > \sum_{k=j+2}^n \ell_k.$$

⁴O Exemplo 5 do módulo, que consta da página [pag8.html](#), ilustra interactivamente este resultado.

⁵Sugere-se que consulte o Exemplo 4 do módulo, em [pag6.html](#).

Note-se, contudo, que, se se verificar a desigualdade estrita na primeira destas condições,

$$\sum_{k=1}^j \ell_k < \sum_{k=j+1}^n \ell_k,$$

então, como $\ell_{j+1} \neq \sum_{k=1, k \neq j+1}^n \ell_k$, os comprimentos

$$\sum_{k=1}^j \ell_k, \quad \ell_{j+1}, \quad \sum_{k=j+2}^n \ell_k$$

são lados de um triângulo, o que implica que o espaço de configuração possui, pelo menos, dois pontos distintos, correspondentes às realizações da Figura 4. Isto contradiz a hipótese de o espaço de configuração estar reduzido a um ponto. Devemos, portanto, ter

$$\sum_{k=1}^j \ell_k = \sum_{k=j+1}^n \ell_k.$$

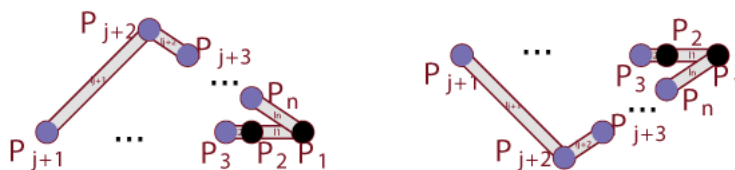


Figura 4: Duas realizações de um mecanismo.

Defina-se N^* como o máximo do conjunto

$$\left\{ \left(\ell_{j+1} - \sum_{k=j+2}^n \ell_k \right), \left(\ell_{j+2} - \sum_{k=j+1, k \neq j+2}^n \ell_k \right), \dots, \left(\ell_n - \sum_{k=j+1}^{n-1} \ell_k \right) \right\}$$

e consideremos λ tal que

$$\max \left\{ \left| \sum_{k=1}^{j-1} \ell_k - \ell_j \right|, N^* \right\} < \lambda < \sum_{k=1}^j \ell_k.$$

Os comprimentos

$$\sum_{k=1}^{j-1} \ell_k, \quad \ell_j, \quad \lambda$$

são lados de um triângulo, logo podemos considerar pontos $P_j \in \overline{P_1 P_2}$ e $P_{j+1} \neq Q_{j+1}$ tais que $\|P_1 - P_j\| = \sum_{k=1}^{j-1} \ell_k$ e, ainda,

$$\|P_j - P_{j+1}\| = \|P_j - Q_{j+1}\| = \ell_j \quad \text{e} \quad \|P_{j+1} - P_1\| = \|Q_{j+1} - P_1\| = \lambda.$$

Tomemos de seguida P_3, P_4, \dots, P_{j-1} em $[P_1 P_j]$ tais que

$$\|P_2 - P_3\| = \ell_2, \quad \|P_3 - P_4\| = \ell_3, \dots$$

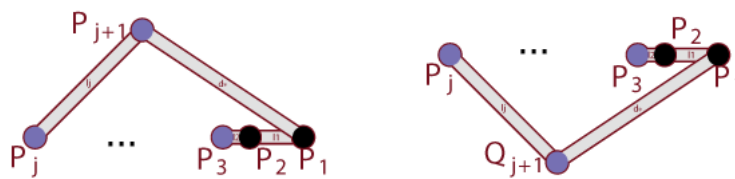


Figura 5: Duas realizações de \mathcal{M}' .

Consideremos agora a cadeia de peças \mathcal{M}' com $n - j$ hastes que se obtém de \mathcal{M} retirando os pontos V_2, V_3, \dots, V_j e as hastes a eles associadas, passando o ponto móvel V_{j+1} a fixo e acrescentando-se uma nova haste $[V_1 V_{j+1}]$ de comprimento λ . Uma vez que $\lambda > N^*$ e que $\lambda < \sum_{k=j+1}^n \ell_k$, este conjunto de peças é também um mecanismo. E, portanto, encontrámos duas realizações para \mathcal{M}' :

$$R_1 = \{P_{j+1}, P_{j+2}, \dots, P_n, P_1\} \quad \text{e} \quad R_2 = \{Q_{j+1}, Q_{j+2}, \dots, Q_n, P_1\}.$$

Deste modo, exibimos dois elementos distintos do espaço de configuração do mecanismo inicial, nomeadamente

$$\{P_3, \dots, P_j, P_{j+1}, P_{j+2}, \dots, P_n\} \quad \text{e} \quad \{P_3, \dots, P_j, Q_{j+1}, Q_{j+2}, \dots, Q_n\},$$

o que contradiz o facto de o espaço de configuração conter apenas um ponto. E, portanto, devemos ter

$$\left\{ i \in \{1, \dots, n\} : \ell_i = \sum_{k=1, k \neq i}^n \ell_k \right\} \neq \emptyset. \quad \square$$

3.2 Mecanismos com três pontos

A Proposição seguinte informa que, para obtermos espaços de configuração interessantes, devemos trabalhar com mecanismos com mais do que três pontos.

Proposição 3. *O espaço de configuração de um mecanismo em cadeia em que o cardinal de \mathcal{V} é 3 reduz-se a um ou dois pontos.*

Demonstração. Com efeito, ou existe $i \in \{1, 2, 3\}$ tal que $\ell_i = \sum_{k=1, k \neq i}^3 \ell_k$, caso em que a Proposição 2 determina que o espaço de configuração é singular; ou $\ell_i < \sum_{k=1, k \neq i}^3 \ell_k$, para todo o $i \in \{1, 2, 3\}$ e, portanto, ℓ_1, ℓ_2 e ℓ_3 são lados de um triângulo. Neste caso, dados dois pontos, P_1 e P_2 , de \mathbb{R}^2 tais que $\|P_1 - P_2\| = \ell_1$, existem duas, e apenas duas, escolhas para um ponto P_3 que pertença ao espaço de configuração: é o terceiro ponto de um dos dois triângulos com lados de comprimentos ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 e tendo P_1 e P_2 como vértices. \square

3.3 Polígonos articulados

Para determinarmos o espaço de configuração de um polígono articulado, precisamos de identificar o contributo de cada componente móvel, enquanto controlamos a posição relativa de todas as outras partes, fixas e móveis, do mecanismo. Se uma haste com base num ponto fixo Q fosse, de resto, inteiramente livre, traçaria no plano uma circunferência centrada em Q e de raio igual ao comprimento da haste. É a junção a outras hastes que condiciona esse movimento e, portanto, restringe o que afinal o espaço de configuração contém.

Consideremos um mecanismo em cadeia $\mathcal{M} = (\mathcal{V}, \mathcal{A}, d)$ com $n > 3$ pontos e $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^2$ tais que $\|P_1 - P_2\| = \ell_1$. Denotemos por:

- C_α , o ponto da circunferência de centro P_2 e raio ℓ_2 tal que $\overrightarrow{P_2 C_\alpha}$ faz um ângulo orientado $\alpha \in [0, 2\pi]$ com $\overrightarrow{P_2 P_1}$.

- $d_{\mathcal{M}}$, a função

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{M}} : [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}_0^+ \\ \alpha &\rightarrow \|P_1 - C_\alpha\|. \end{aligned}$$

que mede quão amplo pode ser o movimento conjunto das peças do mecanismo.

- $\mathcal{D}_{\mathcal{M}}$, o conjunto

$$\{\alpha \in [0, 2\pi] : \exists \text{ realização } \mathcal{R} : C_\alpha \equiv \mathcal{R}(V_3), \mathcal{R}(V_1) \equiv P_1, \mathcal{R}(V_2) \equiv P_2\}.$$

- $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$, o conjunto $[0, \pi] \cap \mathcal{D}_{\mathcal{M}}$.

Proposição 4. *Nas condições enunciadas, tem-se:*

(a) $d_{\mathcal{M}}(\alpha) = d_{\mathcal{M}}(2\pi - \alpha)$ para todo o $\alpha \in [0, 2\pi]$.

(b) $d_{\mathcal{M}|_{[0, \pi]}}$ é estritamente crescente e contínua.

(c) $d_{\mathcal{M}}$ tem um mínimo global em 0, com valor igual a $|\ell_1 - \ell_2|$, e um máximo global, atingido em π , de valor $\ell_1 + \ell_2$.

(d) $\alpha \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}}$ se e só se

$$d_{\mathcal{M}}(\alpha) \leq \sum_{k=3}^n \ell_k \quad e \quad d_{\mathcal{M}}(\alpha) \geq \max \left\{ \left[\ell_i - \sum_{k=3, k \neq i}^n \ell_k \right] : 3 \leq i \leq n \right\}.$$

(e) *Sejam $\alpha_1, \alpha_0 \in [0, \pi]$ tais que $0 < \alpha_1 < \alpha_0 < \pi$. Então:*

– α_0 é o máximo de $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ se e só se $d_{\mathcal{M}}(\alpha_0) = \sum_{k=3}^n \ell_k$.

– α_1 é o mínimo de $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ se e só se

$$d_{\mathcal{M}}(\alpha_1) = \max \left\{ \left[\ell_i - \sum_{k=3, k \neq i}^n \ell_k \right] : 3 \leq i \leq n \right\}.$$

(f) $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ é um intervalo fechado.

(g) $\mathcal{D}_{\mathcal{M}} = [\alpha_1, \alpha_0] \cup [2\pi - \alpha_0, 2\pi - \alpha_1]$, onde $0 \leq \alpha_1 < \alpha_0 \leq \pi$.

Demonstração. A primeira propriedade resulta do facto de as posições do mecanismo serem simétricas relativamente à recta P_1P_2 . Quanto à segunda, consideremos um referencial no plano para o qual $P_2 = (0, 0)$ e $P_1 = (\ell_1, 0)$. Então

$$C_{\alpha} = \ell_2 (\cos \alpha, \sin \alpha)$$

e

$$d_{\mathcal{M}}(\alpha) = \sqrt{(\ell_2)^2 + (\ell_1)^2 - 2 \ell_2 \ell_1 \cos(\alpha)}.$$

A função $d_{\mathcal{M}|_{[0, \pi]}}$ é, pois, contínua e estritamente crescente. Daqui resulta que $d_{\mathcal{M}}$ tem um mínimo global em 0 e um máximo global em π . Além disso, por construção, $d_{\mathcal{M}}(0) = |\ell_1 - \ell_2|$ e $d_{\mathcal{M}}(\pi) = \ell_1 + \ell_2$.

Designemos por X_1 a soma $\sum_{k=3}^n \ell_k$ e por X_2 o valor do

$$\max \left\{ \left(\ell_i - \sum_{k=3, k \neq i}^n \ell_k \right) : 3 \leq i \leq n \right\}.$$

Pela Proposição 1, dado $\alpha \in [0, 2\pi]$, tem-se $\alpha \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}}$ se e só se

$$d_{\mathcal{M}}(\alpha) \leq X_1 \quad \text{e} \quad d_{\mathcal{M}}(\alpha) \geq \left(\ell_i - \sum_{k=3, k \neq i}^n \ell_k \right), \quad \forall 3 \leq i \leq n$$

ou, equivalentemente,

$$d_{\mathcal{M}}(\alpha) \leq X_1 \quad \text{e} \quad d_{\mathcal{M}}(\alpha) \geq X_2. \quad (2)$$

Como \mathcal{M} é um mecanismo, sabemos que existe pelo menos um $\alpha \in [0, \pi]$ que satisfaz a condição (2). Se $d_{\mathcal{M}}(\alpha_0) = X_1$, então, como $d_{\mathcal{M}}|_{[0, \pi]}$ é estritamente crescente, para $\alpha_0 < \beta \leq \pi$ tem-se $d_{\mathcal{M}}(\beta) > X_1$ e um tal β não é um elemento de $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$. Consequentemente, $\alpha \leq \alpha_0$ e, por isso, $d_{\mathcal{M}}(\alpha_0) = X_1 \geq d_{\mathcal{M}}(\alpha) \geq X_2$. E, portanto, não só α_0 é um elemento de $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ como é o seu máximo. Analogamente se prova que, se $d_{\mathcal{M}}(\alpha_1) = X_2$, então α_1 é o mínimo de $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$. Reciprocamente, se $0 < \alpha_0 < \pi$ é o máximo de $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$, então $d_{\mathcal{M}}(\alpha_0) \leq X_1$ e, para todo o $\alpha_0 < \alpha \leq \pi$, tem-se $\alpha \notin \mathcal{E}_{\mathcal{M}}$; logo, $d_{\mathcal{M}}(\alpha) > X_1$. Por outro lado, como $d_{\mathcal{M}}$ é estritamente crescente, para todo o $\alpha < \alpha_0$, tem-se

$$d_{\mathcal{M}}(\alpha) < d_{\mathcal{M}}(\alpha_0) \leq X_1.$$

Assim, pela continuidade de $d_{\mathcal{M}}$, temos $d_{\mathcal{M}}(\alpha_0) = X_1$. Analogamente se prova que, se α_1 é o mínimo de $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$, então $d_{\mathcal{M}}(\alpha_1) = X_2$.

Pelo que acabámos de deduzir, se existir $\alpha_0 < \pi$ tal que $d_{\mathcal{M}}(\alpha_0) = X_1$, então α_0 é o máximo de $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$. Se não existir um tal α_0 , então é porque $d_{\mathcal{M}}(\alpha) < X_1$, para todo o $\alpha \in [0, \pi[$ e, nesse caso, o máximo de $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ é $\alpha_0 = \pi$. Do mesmo modo se argumenta sobre a existência do mínimo α_1 de $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$. Acresce que todo o $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_0]$ satisfaz a condição

$$X_2 \leq d_{\mathcal{M}}(\alpha_1) < d_{\mathcal{M}}(\alpha) < d_{\mathcal{M}}(\alpha_0) \leq X_1$$

pelo que α é um elemento de $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ e $\mathcal{E}_{\mathcal{M}} = [\alpha_1, \alpha_0]$.

Finalmente, da simetria de $d_{\mathcal{M}}$ e da caracterização de α_0 e α_1 , concluímos que $\mathcal{D}_{\mathcal{M}} = [\alpha_1, \alpha_0] \cup [2\pi - \alpha_0, 2\pi - \alpha_1]$. \square

Seja $\mathcal{M} = (\mathcal{V}, \mathcal{A}, d)$ um mecanismo em cadeia com $n > 3$ pontos. Se $n = 4$, diremos que \mathcal{M} é um **quadrilátero articulado**; se $n = 5$, \mathcal{M} é um **pentágono articulado**. Começaremos por analisar estes dois tipos simples de mecanismos, para mais tarde entendermos o efeito de lhes acrescentarmos pontos e hastes.

4 Quadriláteros articulados

Consideremos um quadrilátero articulado \mathcal{M} . Sejam P_1 e P_2 dois pontos de \mathbb{R}^2 tais que $\|P_1 - P_2\| = \ell_1$. O espaço de configuração de \mathcal{M} é

$$[\mathcal{M}] = \{(P_3, P_4) \in (\mathbb{R}^2)^2 : \|P_2 - P_3\| = \ell_2, \|P_3 - P_4\| = \ell_3, \|P_4 - P_1\| = \ell_4\}.$$

Além disso, por construção, $P_3 = C_\alpha$ para algum $\alpha \in \mathcal{D}_\mathcal{M}$.

Suponhamos que $\ell_1 \neq \ell_2$. Pela Proposição 4, existem $0 \leq \alpha_1 < \alpha_0 \leq \pi$ tais que $\mathcal{D}_\mathcal{M} = [\alpha_1, \alpha_0] \cup [2\pi - \alpha_0, 2\pi - \alpha_1]$. Além disso, se P_4 e P'_4 designam os pontos de intersecção das circunferências de centros C_α e P_1 e raios, respectivamente, ℓ_3 e ℓ_4 , então o espaço de configuração $[\mathcal{M}]$ é a união $\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$, onde \mathcal{M}_1 é o conjunto

$$\{(C_\alpha, P_4) : \alpha \in \mathcal{D}_\mathcal{M} \text{ e a concavidade entre } \overrightarrow{P_4 C_\alpha} \text{ e } \overrightarrow{P_4 P_1} \text{ é nula ou positiva}\}$$

e \mathcal{M}_2 é dado por

$$\{(C_\alpha, P'_4) : \alpha \in \mathcal{D}_\mathcal{M} \text{ e a concavidade entre } \overrightarrow{P'_4 C_\alpha} \text{ e } \overrightarrow{P'_4 P_1} \text{ é nula ou negativa}\}.$$

A proposição seguinte informa que podemos considerar \mathcal{M}_1 e \mathcal{M}_2 como subconjuntos de \mathbb{R}^2 e que, para os descrever, basta um parâmetro real.

Proposição 5. *Dado um quadrilátero articulado \mathcal{M} , os espaços \mathcal{M}_1 e \mathcal{M}_2 são homeomorfos a $\{C_\alpha : \alpha \in \mathcal{D}_\mathcal{M}\}$.*

Demonstração. Seja $\mathfrak{F} = \{C_\alpha : \alpha \in \mathcal{D}_\mathcal{M}\}$. As projecções

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}_1 : & \mathcal{M}_1 & \rightarrow \mathfrak{F} \\ & (C_\alpha, P_4) & \rightarrow C_\alpha \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{P}_2 : & \mathcal{M}_2 & \rightarrow \mathfrak{F} \\ & (C_\alpha, P'_4) & \rightarrow C_\alpha \end{array}$$

são homeomorfismos. □

4.1 Curvas

Consideremos um quadrilátero articulado \mathcal{M} , o seu espaço de configuração $[\mathcal{M}]$ e dois pontos P_1 e P_2 de \mathbb{R}^2 tais que $\|P_1 - P_2\| = \ell_1$. Sejam $\alpha_0, \alpha_1 \in [0, \pi]$ tais que $\mathcal{E}_\mathcal{M} = [\alpha_1, \alpha_0]$. A cada $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_0]$ correspondem dois pontos do espaço de configuração, nomeadamente (C_α, P_4) e (C_α, P'_4) , onde P_4 e P'_4 são os pontos que resultam da intersecção das circunferências de centros C_α e P_1 e raios, respectivamente, ℓ_3 e ℓ_4 (veja-se a Figura 6). Em

que circunstâncias é que os dois pontos indicados coincidem?⁶ Tal acontece se $\overrightarrow{P_4C_\alpha}$ e $\overrightarrow{P_4P_1}$ estiverem alinhados, isto é, se as circunferências da Figura 6 são tangentes, o que significa que

$$d_{\mathcal{M}}(\alpha) = \ell_3 + \ell_4 \quad \text{ou} \quad d_{\mathcal{M}}(\alpha) = |\ell_3 - \ell_4|.$$

E quando é que alguma das igualdades anteriores ocorre? Sabemos, pela Proposição 4, que, se $\ell_1 \neq \ell_2$, então

$$\exists \alpha \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}} : d_{\mathcal{M}}(\alpha) = \ell_3 + \ell_4 \Leftrightarrow \ell_1 + \ell_2 = \max(d_{\mathcal{M}}) \geq \ell_3 + \ell_4$$

e que

$$\exists \alpha \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}} : d_{\mathcal{M}}(\alpha) = |\ell_3 - \ell_4| \Leftrightarrow |\ell_1 - \ell_2| = \min(d_{\mathcal{M}}) \leq |\ell_3 - \ell_4|.$$

Interessa-nos, pois, analisar as relações de grandeza entre $\ell_1 + \ell_2$, $\ell_3 + \ell_4$, $|\ell_1 - \ell_2|$ e $|\ell_3 - \ell_4|$.

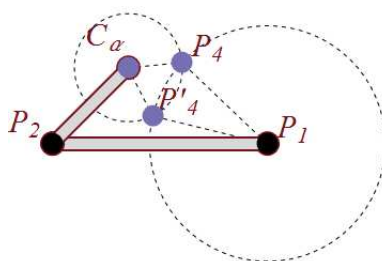






Figura 6: Dois pontos do espaço de configuração.

De seguida, identificaremos o espaço de configuração de um quadrilátero articulado, com $\ell_1 \neq \ell_2$, a partir das relações $>$, $=$ ou $<$ entre $\ell_1 + \ell_2$ e $\ell_3 + \ell_4$, e entre $|\ell_1 - \ell_2|$ e $|\ell_3 - \ell_4|$. Usaremos a expressão abreviada $(>, >)$ para designar as desigualdades $\ell_1 + \ell_2 > \ell_3 + \ell_4$ e $|\ell_1 - \ell_2| > |\ell_3 - \ell_4|$, e expressões análogas para as outras oito possibilidades de pares de símbolos do alfabeto $\{<, =, >\}$.

Proposição 6. *Num quadrilátero articulado $\mathcal{M} = (\mathcal{V}, \mathcal{A}, d)$ tal que $\ell_1 \neq \ell_2$ e $\ell_i \neq \sum_{j=1, j \neq i}^4 \ell_j$, para todo o $i \in \{1, \dots, 4\}$, o espaço de configuração é homeomorfo a uma curva da seguinte tabela:*

⁶Propomos que comece por explorar o conteúdo da página [pag9.html](#) do módulo, analisando depois os Exemplos 6 a 9.

$(<, <) \text{ ou } (>, >)$	
$(<, >) \text{ ou } (>, <)$	
$(<, =), (>, =), (=, >) \text{ ou } (=, <)$	
$(=, =)$	

Demonstração. Distinguiremos vários casos de acordo com as combinações possíveis das desigualdades representadas pelos símbolos $\{<, =, >\}$.⁷

Caso 1. $\ell_1 + \ell_2 > \ell_3 + \ell_4$ e $|\ell_1 - \ell_2| > |\ell_3 - \ell_4|$

Como vimos, existe $\alpha_0 \neq \pi$ em $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ tal que $d_{\mathcal{M}}(\alpha_0) = \ell_3 + \ell_4$. Sendo

$$|\ell_1 - \ell_2| > |\ell_3 - \ell_4|,$$

não existe α_1 em $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ tal que $d_{\mathcal{M}}(\alpha_1) = |\ell_3 - \ell_4|$. E, portanto, α_0 é o máximo de $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ e 0 é o seu mínimo. Além disso, como $\mathcal{D}_{\mathcal{M}} = [0, \alpha_0] \cup [2\pi - \alpha_0, 2\pi]$, podemos supor que $\mathcal{D}_{\mathcal{M}} = [-\alpha_0, \alpha_0]$ e, desse modo, \mathcal{M}_1 e \mathcal{M}_2 são ambos homeomorfos a arcos de circunferência. Note-se ainda que \mathcal{M}_1 e \mathcal{M}_2 se intersectam em dois pontos, nomeadamente (C_{α_0}, P) e $(C_{-\alpha_0}, Q)$, que, pela Proposição 5, podemos considerar como estando em \mathbb{R}^2 : são as extremidades dos referidos arcos de circunferência. Ou seja, o espaço de configuração do mecanismo é constituído por dois arcos de circunferência que se intersectam apenas nas extremidades. Do ponto de vista topológico (isto é, a menos de um homeomorfismo), $[\mathcal{M}]$ é uma **circunferência** (Figura 7).

Caso 2. $\ell_1 + \ell_2 > \ell_3 + \ell_4$ e $|\ell_1 - \ell_2| = |\ell_3 - \ell_4|$

Seja $\alpha_0 \neq \pi$ em $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ tal que $d_{\mathcal{M}}(\alpha_0) = \ell_3 + \ell_4$. Sendo

$$|\ell_1 - \ell_2| = |\ell_3 - \ell_4|,$$

temos $d_{\mathcal{M}}(0) = |\ell_3 - \ell_4|$. Logo α_0 é o máximo de $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ e 0 é o mínimo. Tal como anteriormente, podemos considerar que $\mathcal{D}_{\mathcal{M}} = [-\alpha_0, \alpha_0]$ e que

$$\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 = \{(C_{\alpha_0}, P), (C_{-\alpha_0}, Q), (C_0, R)\}$$

⁷Podemos acompanhar esta demonstração com a animação da página pag18.html do módulo.

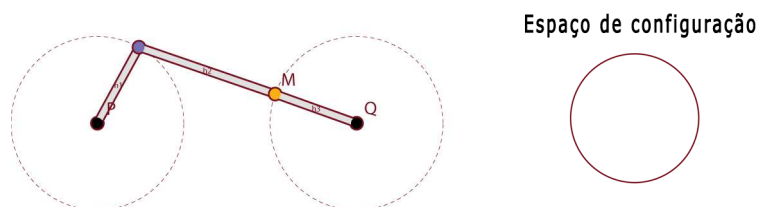


Figura 7: Espaço de configuração se $(>, >)$.

para três pontos P, Q, R distintos do plano. Novamente, \mathcal{M}_1 e \mathcal{M}_2 são ambos homeomorfos a arcos de circunferência que se intersectam nas extremidades; mas, como há um terceiro ponto, naturalmente do interior dos arcos, que está na intersecção destas componentes do espaço de configuração, forma-se uma figura topologicamente semelhante a um **oito** (Figura 8).⁸

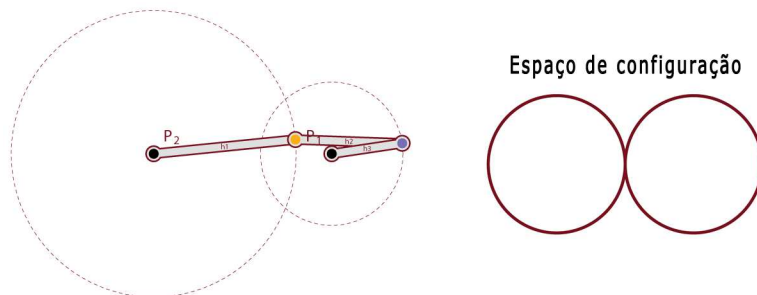


Figura 8: Espaço de configuração se $(>, =)$.

Caso 3. $\ell_1 + \ell_2 > \ell_3 + \ell_4$ e $|\ell_1 - \ell_2| < |\ell_3 - \ell_4|$
Seja $\alpha_0 \neq \pi$ em $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ tal que $d_{\mathcal{M}}(\alpha_0) = \ell_3 + \ell_4$. Como

$$|\ell_1 - \ell_2| < |\ell_3 - \ell_4|,$$

existe $\alpha_1 \neq 0$ em $\mathcal{D}_{\mathcal{M}}$ tal que $d_{\mathcal{M}}(\alpha_1) = |\ell_3 - \ell_4|$. E, portanto, α_0 é o máximo de $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ e α_1 é o mínimo. Note-se agora que $\mathcal{D}_{\mathcal{M}} = [\alpha_1, \alpha_0] \cup [2\pi - \alpha_0, 2\pi - \alpha_1]$ é constituído por dois intervalos disjuntos. Por esse motivo, \mathcal{M}_1 e \mathcal{M}_2 são homeomorfos, cada um deles, a dois arcos de circunferência. A sua intersecção resume-se a quatro pontos, (C_{α_0}, P) , (C_{α_1}, Q) , $(C_{2\pi - \alpha_0}, R)$ e $(C_{2\pi - \alpha_1}, S)$, correspondendo os dois primeiros às extremidades de um dos

⁸É útil comparar agora, usando o módulo, as vizinhanças no espaço de configuração do ponto de tangência do oito com as vizinhanças no mecanismo da posição correspondente.

arcos (em \mathcal{M}_1 e \mathcal{M}_2) e os outros às extremidades do outro arco. Assim, o espaço de configuração é constituído por **duas circunferências disjuntas** (Figura 9).

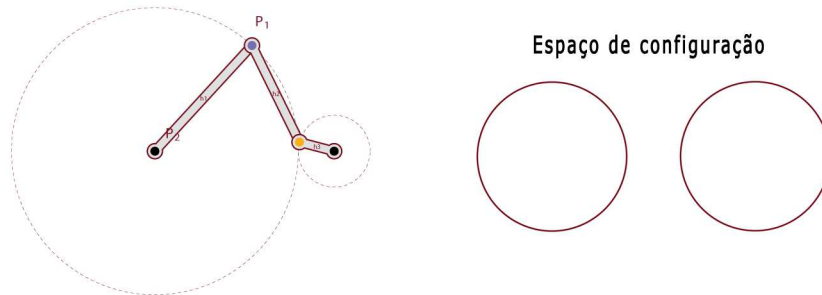


Figura 9: Espaço de configuração se $(>, <)$.

Caso 4. $l_1 + l_2 = l_3 + l_4$ e $|\ell_1 - \ell_2| > |\ell_3 - \ell_4|$

Sabemos que $d_{\mathcal{M}}(\pi) = l_3 + l_4$ e que não existe α_1 em $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ tal que $d_{\mathcal{M}}(\alpha_1) = |\ell_3 - \ell_4|$. Logo π é o máximo de $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ e 0 é o mínimo. Sendo $\mathcal{D}_{\mathcal{M}} = [0, 2\pi]$, as componentes \mathcal{M}_1 e \mathcal{M}_2 são ambas homeomorfas a circunferências. Note-se ainda que \mathcal{M}_1 e \mathcal{M}_2 se intersectam num único ponto (C_{π}, P) , para algum $P \in \mathbb{R}^2$. Por essa razão, o espaço de configuração é constituído por duas circunferências que se intersectam num ponto, ou seja, um **oito** (Figura 10).

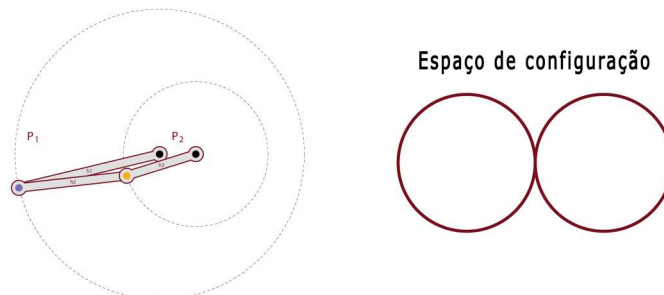


Figura 10: Espaço de configuração se $(=, >)$.

Caso 5. $l_1 + l_2 = l_3 + l_4$ e $|\ell_1 - \ell_2| = |\ell_3 - \ell_4|$

Como anteriormente, temos $d_{\mathcal{M}}(\pi) = l_3 + l_4$; mas agora também vale a igualdade $d_{\mathcal{M}}(0) = |\ell_3 - \ell_4|$. Consequentemente, π é o máximo de $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ e 0 é o mínimo. Uma vez que $\mathcal{D}_{\mathcal{M}} = [0, 2\pi]$, os conjuntos \mathcal{M}_1 e \mathcal{M}_2 são ambos homeomorfos a circunferências. Acresce que \mathcal{M}_1 e \mathcal{M}_2 se intersectam em

dois pontos (C_π, P) e (C_0, Q) , com $P, Q \in \mathbb{R}^2$. Por esse motivo, o espaço de configuração é constituído por duas circunferências (topológicas) que se intersectam em dois pontos. Trata-se pois de uma curva homeomorfa à ilustrada na Figura 11.

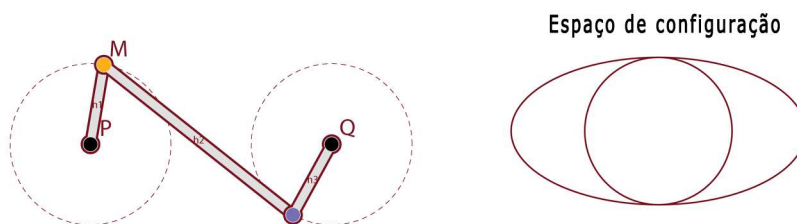


Figura 11: Espaço de configuração se $(=, =)$.

Caso 6. $\ell_1 + \ell_2 = \ell_3 + \ell_4$ e $|\ell_1 - \ell_2| < |\ell_3 - \ell_4|$

Como no caso anterior, $d_{\mathcal{M}}(\pi) = \ell_3 + \ell_4$. E, porque

$$|\ell_1 - \ell_2| < |\ell_3 - \ell_4|,$$

existe $\alpha_1 \neq 0$ em $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ tal que $d_{\mathcal{M}}(\alpha_1) = |\ell_3 - \ell_4|$. Logo π é o máximo de $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ e α_1 é o mínimo. Note-se que agora $\mathcal{D}_{\mathcal{M}} = [\alpha_1, 2\pi - \alpha_1]$ e, por isso, \mathcal{M}_1 e \mathcal{M}_2 são homeomorfos, cada um deles, a um arco de circunferência. A sua intersecção é $\{(C_{\alpha_1}, P), (C_{2\pi - \alpha_1}, Q), (C_\pi, R)\}$, onde $P, Q, R \in \mathbb{R}^2$ e (C_π, R) é interior aos arcos. Assim, do ponto de vista topológico, $[\mathcal{M}]$ é um **oito** (Figura 12).

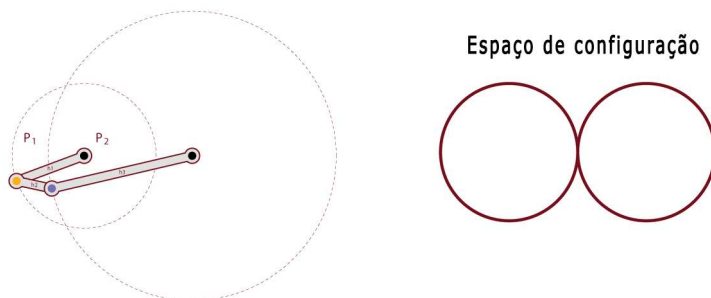


Figura 12: Espaço de configuração se $(=, <)$.

Caso 7. $\ell_1 + \ell_2 < \ell_3 + \ell_4$ e $|\ell_1 - \ell_2| > |\ell_3 - \ell_4|$

Como vimos, nestas condições não existe α em $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ tal que $d_{\mathcal{M}}(\alpha) = \ell_3 + \ell_4$. Logo, o máximo de $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ é π . Além disso, não existe α_1 em $\mathcal{D}_{\mathcal{M}}$ tal que

$d_{\mathcal{M}}(\alpha_1) = |\ell_3 - \ell_4|$. Logo π é o máximo de $\mathcal{D}_{\mathcal{M}}$ e 0 é o mínimo. Uma vez que $\mathcal{D}_{\mathcal{M}} = [0, 2\pi]$, os conjuntos \mathcal{M}_1 e \mathcal{M}_2 são ambos homeomorfos a circunferências. E, como $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 = \emptyset$, o espaço de configuração é constituído por **duas circunferências disjuntas** (Figura 13).

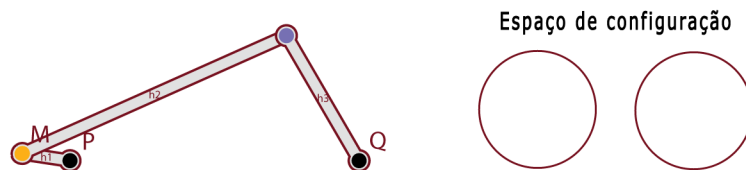


Figura 13: Espaço de configuração se $(<, >)$.

Caso 8. $\ell_1 + \ell_2 < \ell_3 + \ell_4$ e $|\ell_1 - \ell_2| = |\ell_3 - \ell_4|$

Como não existe α em $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ tal que $d_{\mathcal{M}}(\alpha) = \ell_3 + \ell_4$, sabemos que o máximo de $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ é π . E, de

$$|\ell_1 - \ell_2| = |\ell_3 - \ell_4|,$$

resulta que $d_{\mathcal{M}}(0) = |\ell_3 - \ell_4|$. Portanto, 0 é o mínimo de $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$. Como $\mathcal{D}_{\mathcal{M}} = [0, 2\pi]$, \mathcal{M}_1 e \mathcal{M}_2 são ambos homeomorfos a circunferências. Acresce que \mathcal{M}_1 e \mathcal{M}_2 se intersectam num único ponto (C_0, P) , onde $P \in \mathbb{R}^2$. Por esse motivo, o espaço de configuração é constituído por duas circunferências que se intersectam num ponto, tratando-se pois de um **oito** (Figura 14).

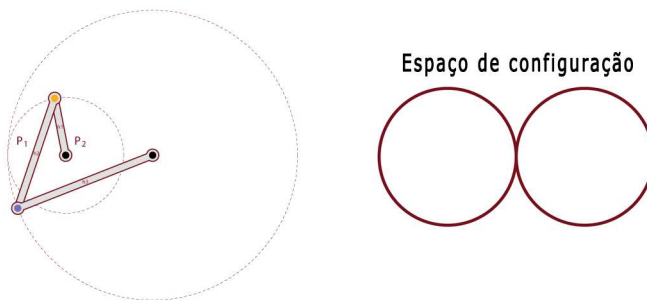


Figura 14: Espaço de configuração se $(<, =)$.

Caso 9. $\ell_1 + \ell_2 < \ell_3 + \ell_4$ e $|\ell_1 - \ell_2| < |\ell_3 - \ell_4|$

De novo, como não existe α em $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ tal que $d_{\mathcal{M}}(\alpha) = \ell_3 + \ell_4$, o máximo de $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ é π . Mas, neste caso, existe $\alpha_1 \neq 0$ em $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ tal que $d_{\mathcal{M}}(\alpha_1) = |\ell_3 - \ell_4|$. Portanto, π é o máximo de $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$, α_1 é o mínimo. Note-se ainda que $\mathcal{D}_{\mathcal{M}} = [\alpha_1, 2\pi - \alpha_1]$ e, portanto, \mathcal{M}_1 e \mathcal{M}_2 são homeomorfos, cada um deles, a um arco de circunferência. Como \mathcal{M}_1 e \mathcal{M}_2 se intersectam apenas em (C_{α_1}, P) e $(C_{2\pi - \alpha_1}, Q)$, para alguns P, Q em \mathbb{R}^2 , estes arcos estão unidos nas extremidades, formando (do ponto de vista topológico) uma **circunferência** (Figura 15).

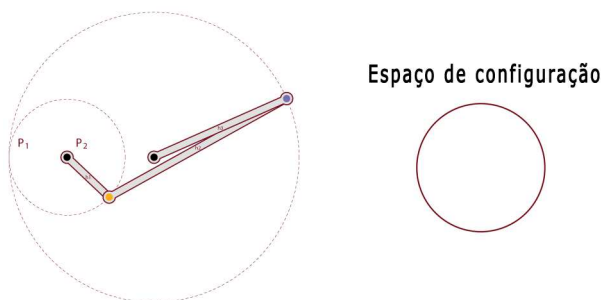


Figura 15: Espaço de configuração se $(<, <)$.

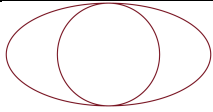
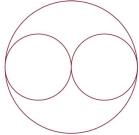
□

Observação 1. *Observe-se que, quando ocorrem igualdades, o espaço de configuração contém pontos singulares: pontos sem vizinhanças homeomorfas a \mathbb{R} . Podemos verificar que tais pontos correspondem, no mecanismo, a posições relativamente às quais o sistema articulado tem quatro alternativas de movimento, ao contrário dos outros pontos em que há apenas duas.*

No estudo anterior, suposemos que os dois comprimentos ℓ_1 e ℓ_2 são distintos para evitarmos que se desse o caso degenerado em que $0 \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}}$ e $d_{\mathcal{M}}(0) = 0$. Contudo, se $\ell_1 = \ell_2$ e $\ell_3 \neq \ell_4$, nunca se tem $0 \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}}$. Por esse motivo, na Proposição 6 podemos substituir a condição $\ell_1 \neq \ell_2$ por uma das condições $\ell_1 \neq \ell_2$ ou $\ell_3 \neq \ell_4$.

Quando nenhuma destas condições se verifica, pode provar-se, usando um argumento que difere em poucos detalhes do anterior, que:

Proposição 7. *Num mecanismo $\mathcal{M} = (\mathcal{V}, \mathcal{A}, d)$ em cadeia com 4 hastes tais que $\ell_1 = \ell_2$ e $\ell_3 = \ell_4$, o espaço de configuração é homeomorfo a:*

<i>Condição</i>	<i>Espaço de configuração</i>
$(<, =)$ ou $(>, =)$	
$(=, =)$	

No percurso opcional proposto no módulo virtual (veja-se <http://www.atractor.pt/mat/MovimentoForma/auxi1.html>), pode encontrar a lista completa dos espaços de configuração de quadriláteros articulados.

5 Pentágonos articulados

Dado um pentágono articulado \mathcal{M} , sejam P_1 e P_2 dois pontos de \mathbb{R}^2 tais que $\|P_1 - P_2\| = \ell_1$. Então o espaço de configuração $[\mathcal{M}]$ é o conjunto $\{(P_3, P_4, P_5) \in (\mathbb{R}^2)^3\}$ cujos pontos verificam as duas condições:

- $\|P_i - P_{i+1} \text{ (módulo } 5)\| = \ell_i$ para todo o $i \in \{2, 3, 4, 5\}$
- $P_3 = C_\alpha$ para algum $\alpha \in \mathcal{D}_\mathcal{M}$.

Seleccionemos no mecanismo \mathcal{M} uma componente com menos peças através do processo seguinte.

Definição 6. *Seja $\alpha \in \mathcal{D}_\mathcal{M}$. Se $\alpha \neq 0$ ou $d_\mathcal{M}(0) \neq 0$, então \mathcal{M}_α designa o mecanismo que se obtém de \mathcal{M} retirando-se o ponto V_2 e as duas hastes a ele ligadas, passando-se o ponto V_3 de móvel a fixo e acrescentando-se a haste $[V_1V_3]$ com comprimento $d_\mathcal{M}(\alpha)$.*

O conjunto de posições correspondente a cada \mathcal{M}_α permitirá reconstituir o espaço de configuração de \mathcal{M} . Antes dessa síntese, atentemos no Exemplo 10 do módulo interativo, em [pag19.html](#), onde se observa, em tempo real, um pentágono articulado, um modelo do seu espaço de configuração e um homeomorfismo que a cada posição do mecanismo faz corresponder um ponto do modelo.

5.1 Exemplo

Consideremos um pentágono articulado \mathcal{M} com comprimentos $l_1 = 20$, $l_2 = 9$, $l_3 = 3$, $l_4 = 4$ e $l_5 = 5$. Pela Proposição 4, $\max(d_{\mathcal{M}}) = l_1 + l_2 = 29$ e $\min(d_{\mathcal{M}}) = |l_1 - l_2| = 11$. Como $\max(d_{\mathcal{M}}) > l_3 + l_4 + l_5 = 12$, o máximo α_0 de $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ é diferente de π (de facto, é igual a $\arccos(337/360)$) e, portanto, novamente pela Proposição 4, temos $d_{\mathcal{M}}(\alpha_0) = l_3 + l_4 + l_5$. Logo, α_0 é o ângulo interno do triângulo de lados l_1 , l_2 e $l_3 + l_4 + l_5$, ou seja, 20, 9 e 12, compreendido entre os lados de comprimentos 20 e 9 (Figura 16).

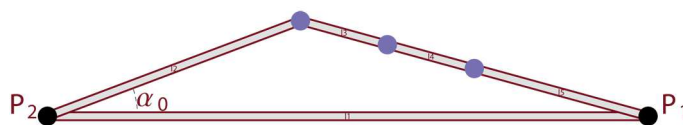


Figura 16: Ângulo α_0 .

Por outro lado, $11 = \min(d_{\mathcal{M}}) > -2 = \max L$, onde

$$L = \{l_3 - (l_4 + l_5), l_4 - (l_3 + l_5), l_5 - (l_3 + l_4)\}.$$

Consequentemente, pela Proposição 4, o mínimo de $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ é 0 e $\mathcal{D}_{\mathcal{M}} = [0, \alpha_0] \cup [2\pi - \alpha_0, 2\pi]$. Podemos pois reposicionar os elementos de $\mathcal{D}_{\mathcal{M}}$ e supor que $\mathcal{D}_{\mathcal{M}} = [-\alpha_0, \alpha_0]$.

Analisemos agora o espaço de configuração de \mathcal{M}_α para cada α em $[-\alpha_0, \alpha_0]$. Para isso, bastará determinar, para todo o α , o par de relações entre $d_{\mathcal{M}}(\alpha) + l_3$ e $l_4 + l_5$, e entre $|d_{\mathcal{M}}(\alpha) - l_3|$ e $|l_4 - l_5|$, e depois aplicar a Proposição 6. Eis o que se obtém:

- Para $\alpha = \pm\alpha_0$, tem-se $d_{\mathcal{M}}(\alpha) = l_3 + l_4 + l_5$, e portanto o espaço de configuração do mecanismo \mathcal{M}_α é um **ponto**.
- Quando $-\alpha_0 < \alpha < \alpha_0$, como

$$d_{\mathcal{M}}(\alpha) + l_3 \geq \min(d_{\mathcal{M}}) + l_3 = 14 > 9 = l_4 + l_5$$

e

$$|d_{\mathcal{M}}(\alpha) - l_3| \geq 8 > 1 = |l_4 - l_5|,$$

o espaço de configuração do mecanismo \mathcal{M}_α é uma **circunferência**.

Podemos entender o espaço de configuração do pentágono articulado \mathcal{M} como sendo obtido através da junção, *às camadas*, de todos os espaços

de configuração de \mathcal{M}_α , onde $\alpha \in [-\alpha_0, \alpha_0]$.⁹ É o que se representa na Figura 17, feita com o programa *Mathematica* exactamente como união parametrizada por α destas curvas. A justificação para este modo de unir as fatias \mathcal{M}_α será apresentada na Secção 5.2.

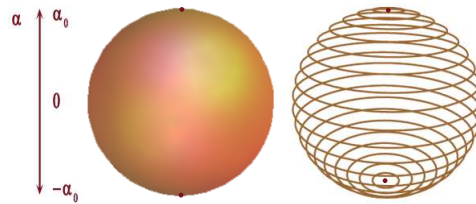


Figura 17: Espaço de configuração quando $\ell_1 = 20$.

Diminuamos agora progressivamente o comprimento ℓ_1 , mantendo-o sob a condição $\ell_1 > 15$. Obtemos espaços de configuração homeomorfos ao tipo descrito no caso anterior (Figura 18).

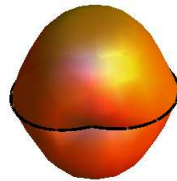


Figura 18: Espaço de configuração quando $15 < \ell_1 < 20$.

Quando $\ell_1 = 15$, continuamos a ter

$$\max d_{\mathcal{M}} > \ell_3 + \ell_4 + \ell_5 \quad \text{e} \quad \min d_{\mathcal{M}} > \max L,$$

e, portanto, podemos supor que $\mathcal{D}_{\mathcal{M}} = [-\alpha_0, \alpha_0]$, desta vez para $\alpha_0 = \arccos\left(\frac{3}{5}\right)$. Além disso, o espaço de configuração de \mathcal{M}_α é o que indica a tabela seguinte e a Figura 19:

Condição sobre α	Relações	Espaço de configuração de \mathcal{M}_α
$\alpha = \alpha_0$	$(>, >)$	Ponto
$0 < \alpha < \alpha_0$	$(>, >)$	Circunferência
$\alpha = 0$	$(=, >)$	Oito
$-\alpha_0 < \alpha < 0$	$(>, >)$	Circunferência
$\alpha = -\alpha_0$	$(>, >)$	Ponto

⁹Esta é a abordagem usada no módulo; veja-se, por exemplo, a página [pag21.html](#).

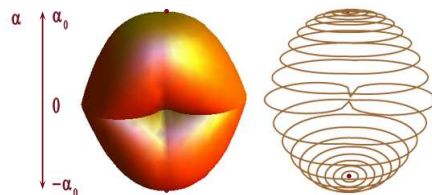


Figura 19: Espaço de configuração quando $l_1 = 15$.

Antes de avançar para o caso seguinte, sugerimos que o leitor analise o Exemplo 11 do módulo e as justificações apresentadas nas páginas 25 a 27.

Se diminuirmos o comprimento de l_1 , para valores em $]13, 15[$, continuaremos a ter $\mathcal{E}_{\mathcal{M}} = [-\alpha_0, \alpha_0]$, com $0 < \alpha_0 < \pi$, mas agora o tipo de espaço de configuração de \mathcal{M}_{α} varia para diferentes valores de α em $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$. Fixemos $l_1 \in]13, 15[$. Por um lado, temos $|d_{\mathcal{M}}(\alpha) - l_3| > |l_4 - l_5|$, para todo o $\alpha \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}}$. Por outro,

$$d_{\mathcal{M}}(\alpha_0) + l_3 > l_4 + l_5 > |l_1 - l_2| + 3 = d_{\mathcal{M}}(0) + l_3.$$

Existe, pois, $\beta_1 \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}} \setminus \{0\}$ tal que $d_{\mathcal{M}}(\beta_1) = l_4 + l_5 - l_3$, e a única mudança nas relações ocorre na vizinhança de β_1 (e de $-\beta_1$). Em resumo:

Condição sobre α	Relações	Espaço de configuração de \mathcal{M}_{α}
$\alpha = \alpha_0$	$(>, >)$	Ponto
$\beta_1 < \alpha < \alpha_0$	$(>, >)$	Circunferência
$\alpha = \beta_1$	$(=, >)$	Oito
$-\beta_1 < \alpha < \beta_1$	$(<, >)$	Duas circunferências disjuntas
$\alpha = -\beta_1$	$(=, >)$	Oito
$-\alpha_0 < \alpha < -\beta_1$	$(>, >)$	Circunferência
$\alpha = -\alpha_0$	$(>, >)$	Ponto

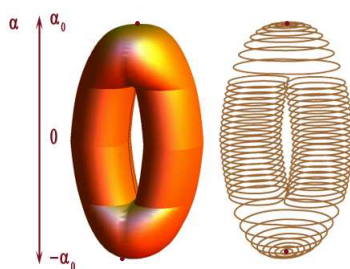


Figura 20: Espaço de configuração quando $13 < l_1 < 15$.

Quando $\ell_1 = 13$, mantém-se a igualdade $\mathcal{E}_{\mathcal{M}} = [-\alpha_0, \alpha_0]$, onde agora $\alpha_0 = \arccos\left(\frac{53}{117}\right)$. Também, como no caso anterior, existe $\beta_1 \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ tal que $d_{\mathcal{M}}(\beta_1) = \ell_4 + \ell_5 - \ell_3$, e a única mudança na primeira relação ocorre na vizinhança de β_1 (e de $-\beta_1$). Porém, $|d_{\mathcal{M}}(\alpha) - \ell_3| > |d_{\mathcal{M}}(0) - \ell_3| = |\ell_4 - \ell_5|$, para todo o $\alpha \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}} \setminus \{0\}$. Por este motivo, a única mudança na segunda relação ocorre em 0 (veja-se a Figura 21 e a próxima tabela).

Condição sobre α	Relações	Espaço de configuração de \mathcal{M}_{α}
$\alpha = \alpha_0$	($>$, $>$)	Ponto
$\beta_1 < \alpha < \alpha_0$	($>$, $>$)	Circunferência
$\alpha = \beta_1$	($=$, $>$)	Oito
$0 < \alpha < \beta_1$	($<$, $>$)	Duas circunferências disjuntas
$\alpha = 0$	($<$, $=$)	Oito
$-\beta_1 < \alpha < 0$	($<$, $>$)	Duas circunferências disjuntas
$\alpha = -\beta_1$	($=$, $>$)	Oito
$-\alpha_0 < \alpha < -\beta_1$	($>$, $>$)	Circunferência
$\alpha = -\alpha_0$	($>$, $>$)	Ponto

Se continuarmos a diminuir ℓ_1 , para valores em $]11, 13[$, teremos, para algum β_2 com $0 < \beta_2 < \beta_1$,

Condição sobre α	Relações	Espaço de configuração de \mathcal{M}_{α}
$\alpha = \alpha_0$	($>$, $>$)	Ponto
$\beta_1 < \alpha < \alpha_0$	($>$, $>$)	Circunferência
$\alpha = \beta_1$	($=$, $>$)	Oito
$\beta_2 < \alpha < \beta_1$	($<$, $>$)	Duas circunferências disjuntas
$\alpha = \beta_2$	($<$, $=$)	Oito
$-\beta_2 < \alpha < \beta_2$	($<$, $<$)	Circunferência
$\alpha = -\beta_2$	($<$, $=$)	Oito
$-\beta_1 < \alpha < -\beta_2$	($<$, $>$)	Duas circunferências disjuntas
$\alpha = -\beta_1$	($=$, $>$)	Oito
$-\alpha_0 < \alpha < -\beta_1$	($>$, $>$)	Circunferência
$\alpha = -\alpha_0$	($>$, $>$)	Ponto

Quando se atinge a igualdade $\ell_1 = 11$, obtemos um espaço de configuração como mostra a Figura 21, união das fatias:

Condição sobre α	Relações	Espaço de configuração de \mathcal{M}_α
$\alpha = \alpha_0$	$(>, >)$	Ponto
$\beta_1 < \alpha < \alpha_0$	$(>, >)$	Circunferência
$\alpha = \beta_1$	$(=, >)$	Oito
$\beta_2 < \alpha < \beta_1$	$(<, >)$	Duas circunferências disjuntas
$\alpha = \beta_2$	$(<, =)$	Oito
$0 < \alpha < \beta_2$	$(<, <)$	Circunferência
$\alpha = 0$	$(<, =)$	Oito
$-\beta_2 < \alpha < 0$	$(<, <)$	Circunferência
$\alpha = -\beta_2$	$(<, =)$	Oito
$-\beta_1 < \alpha < -\beta_2$	$(<, >)$	Duas circunferências disjuntas
$\alpha = -\beta_1$	$(=, >)$	Oito
$-\alpha_0 < \alpha < -\beta_1$	$(>, >)$	Circunferência
$\alpha = -\alpha_0$	$(>, >)$	Ponto

Finalmente, se $\ell_1 \in]9, 11[$, existe β_3 verificando $0 < \beta_3 < \beta_2$ tal que as camadas \mathcal{M}_α são as seguintes:

Condição sobre α	Relações	Espaço de configuração de \mathcal{M}_α
$\alpha = \alpha_0$	$(>, >)$	Ponto
$\beta_1 < \alpha < \alpha_0$	$(>, >)$	Circunferência
$\alpha = \beta_1$	$(=, >)$	Oito
$\beta_2 < \alpha < \beta_1$	$(<, >)$	Duas circunferências disjuntas
$\alpha = \beta_2$	$(<, =)$	Oito
$\beta_3 < \alpha < \beta_2$	$(<, <)$	Circunferência
$\alpha = \beta_3$	$(<, =)$	Oito
$-\beta_3 < \alpha < \beta_3$	$(<, >)$	Duas circunferências disjuntas
$\alpha = -\beta_3$	$(<, =)$	Oito
$-\beta_2 < \alpha < -\beta_3$	$(<, <)$	Circunferência
$\alpha = -\beta_2$	$(<, =)$	Oito
$-\beta_1 < \alpha < -\beta_2$	$(<, >)$	Duas circunferências disjuntas
$\alpha = -\beta_1$	$(=, >)$	Oito
$-\alpha_0 < \alpha < -\beta_1$	$(>, >)$	Circunferência
$\alpha = -\alpha_0$	$(>, >)$	Ponto

Note-se que, na maioria dos espaços de configuração deste exemplo, cada ponto tem uma vizinhança que é homeomorfa a um disco do plano.¹⁰ Esses espaços são portanto *superfícies*. Mas isso não acontece quando $\ell_1 = 11, 13, 15$, apesar de também serem parametrizáveis por dois parâmetros. Diremos que são espaços **degenerados** pois correspondem a posições degeneradas do mecanismo.

¹⁰Em [pag29.html](#), há animações que elucidam sobre os homeomorfismos entre os espaços de configuração destes mecanismos e os respectivos modelos.

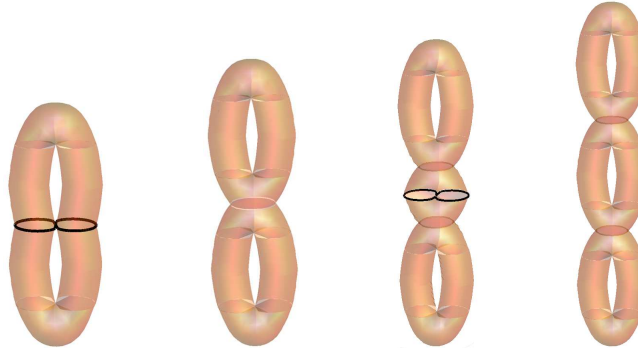


Figura 21: $\ell_1 = 13$, $11 < \ell_1 < 13$, $\ell_1 = 11$ e $9 < \ell_1 < 11$, respectivamente.

5.2 Escolha de um modelo para o espaço de configuração

Fixemos um pentágono articulado e uma sua realização. Se impusermos que a concavidade entre as hastes h_4 e h_5 é sempre não-negativa, a realização fica completamente determinada pelo ângulo orientado $\alpha \in [0, \alpha_0]$ entre as hastes h_1 e h_2 , e o ângulo orientado μ entre a haste h_3 e a direcção $\overrightarrow{P_3P_1}$, assinalados na Figura 22.

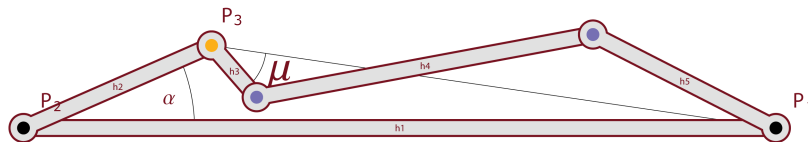


Figura 22: Ângulos α e μ .

Note-se que, para o mecanismo desta figura (cujas hastes medem 3, 1, 5, 3 e 11), temos $0 < \alpha_0 < \pi$, e que, para cada α , os valores permitidos de $\mu(\alpha)$ estão num intervalo $[-\mu_0(\alpha), \mu_0(\alpha)]$, onde $\mu_0(\alpha) \in [0, \pi[$ (a Figura 23 mostra uma posição do mecanismo em que $\mu(\alpha) = 0$). E, portanto, só uma parte do quadrado e do toro que construímos na Secção 2.3 intervém na descrição do espaço de configuração: o domínio de tais (μ, α) no toro forma a região sombreada \mathcal{D}_1 da Figura 24.

O mesmo argumento vale para realizações deste mecanismo em que a concavidade entre as hastes h_4 e h_5 é sempre não-positiva, sendo agora a posição do mecanismo descrita univocamente pelos ângulos $\alpha \in [-\alpha_0, \alpha_0]$ e $\mu \in [-\mu_0, \mu_0]$. Assim, obtemos duas regiões, \mathcal{D}_1 e \mathcal{D}_2 , que têm em comum os pares (μ, α) em que a concavidade é nula. Estes pares em comum situam-se na fronteira de cada uma das regiões uma vez que, para α não negativo, o

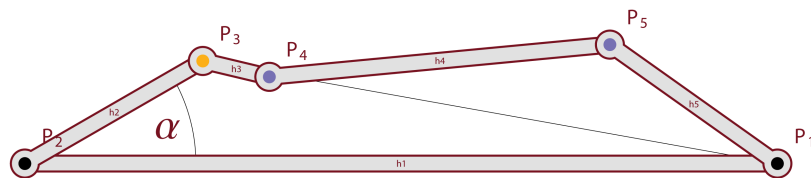


Figura 23: $\mu(\alpha) = 0$: P_3 , P_4 e P_1 alinhados.

ângulo $\mu_0(\alpha) \in [0, \pi]$ é função contínua e estritamente decrescente de α . Por isso, o modelo que descreve todas as realizações deste mecanismo obtém-se identificando as duas regiões pelos bordos, como mostra a Figura 25.

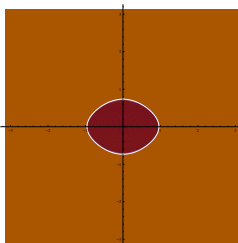


Figura 24: \mathcal{D}_1

Observe-se como cada nível de α com os extremos identificados forma uma curva homeomorfa a uma circunferência. Uma imagem mais simétrica do modelo, por ter em conta as amplitudes dos ângulos, pode obter-se desenhando um cilindro e impondo que o perímetro de cada circunferência seja exactamente o dobro da amplitude do intervalo $[-\mu_0(\alpha), \mu_0(\alpha)]$; depois acrescentamos ao cilindro um ponto para cada par $(0, \alpha_0)$ e $(0, -\alpha_0)$.

Analisemos, porém, com mais detalhe o que acontece quando $\alpha = \alpha_0$ ou $\alpha = -\alpha_0$. Face à primeira forma da Figura 26, que representa um cilindro aberto (na base e no topo), a intuição diz-nos que basta acrescentar um ponto em cima e outro em baixo para obter uma representação completa e adequada do espaço de configuração. Mas um cilindro como os outros dois da mesma figura também poderia ser usado como modelo se nos restringíssemos aos valores $-\alpha_0 < \alpha < \alpha_0$ e, aqui já não parece haver maneira única, ou natural, de acrescentar um ponto em cima e outro em baixo. À parte a forma, o que é essencialmente diferente nestas alternativas? No primeiro caso, por mais pequena que seja a vizinhança do ponto que é acrescentado no topo, ela contém circunferências inteiras (parametrizadas por μ , para α constante), enquanto que para as outras formas da Figura 26 isso não acontece.

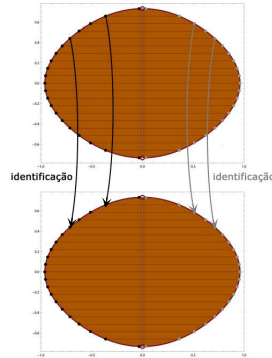
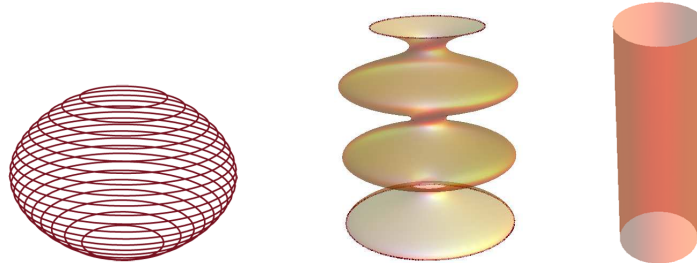
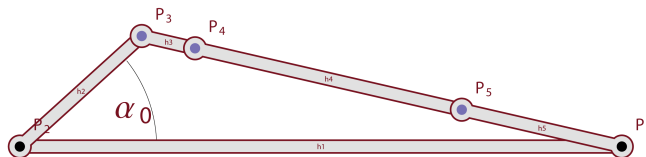
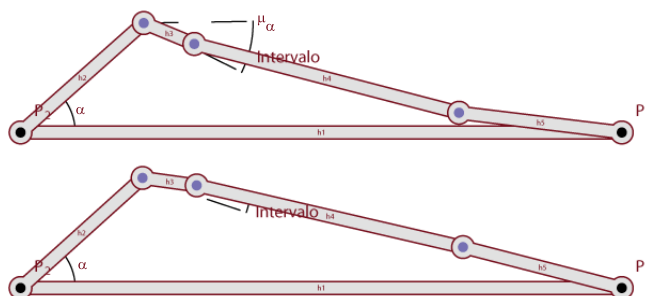
Figura 25: Colagem pelos bordos de \mathcal{D}_1 a \mathcal{D}_2 .

Figura 26: Três formas para o empilhamento das circunferências.

Para decidirmos qual é afinal a boa escolha, voltemos ao espaço de configuração: o ponto que se está a acrescentar em cima corresponde a $\alpha = \alpha_0$ e $\mu = 0$, valores que, no mecanismo, determinam a posição representada na Figura 27. Ora, por mais pequena que seja a vizinhança de $(0, \alpha_0)$, como $\mu_0(\alpha)$ tende para 0 quando α se aproxima de α_0 (Figura 28), é possível encontrar α suficientemente próximo de α_0 tal que o conjunto

$$\{(\mu, \alpha) : \mu \in [-\mu_0(\alpha), \mu_0(\alpha)]\}$$

está contido na vizinhança fixada. Consequentemente, por menor que seja a vizinhança no modelo do ponto de cima que se está a acrescentar, ela deverá conter circunferências de nível α do tipo indicado. A escolha apropriada para modelo é, portanto, a primeira forma da Figura 26. Alterando o perímetro das circunferências de nível α , podemos transformar o modelo numa esfera (geométrica) sem que ele perca qualquer uma das propriedades topológicas referidas.

Figura 27: $\alpha = \alpha_0$ e $\mu = 0$.Figura 28: $\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \mu_0(\alpha) = 0$.

6 Genus e simetria

Regressemos ao Exemplo 5.1 e observemos os espaços de configuração dos três casos não degenerados aí apresentados. Constatamos que a diferença mais relevante entre eles está no número de *oitos* que surgem no espaço de configuração de \mathcal{M}_α . Se conhecêssemos de antemão esse número de oitos, saberíamos descrever imediatamente o espaço de configuração do mecanismo: seria formado pela junção, *por camadas*, de um ponto, seguido de circunferências, seguido de um oito (se existisse), seguido de circunferências disjuntas, etc, seguido de circunferências e terminando num ponto. Ora, numericamente, esse número de oitos é precisamente o dobro do número de elementos do conjunto

$$\tilde{L} = \{\ell_3 + \ell_4 - \ell_5, \ell_4 + \ell_5 - \ell_3, \ell_5 + \ell_3 - \ell_4\}$$

que estão no intervalo $[|\ell_1 - \ell_2|, \ell_1 + \ell_2]$.

Analiseemos o exemplo seguinte para identificarmos outro aspecto de natureza topológica a ter em conta nos espaços de configuração. Consideremos pentágonos articulados \mathcal{M}_{ℓ_1} , com hastes de comprimentos

$$\ell_1 \in \{6, 7, 8\}, \ell_2 = 5, \ell_3 = 1, \ell_4 = 2, \ell_5 = 5. \quad (3)$$

Os correspondentes espaços de configuração são como se mostra na Figura 29 (e nas páginas `auxi17.html`, `auxi18.html` e `auxi19.html` do módulo virtual).

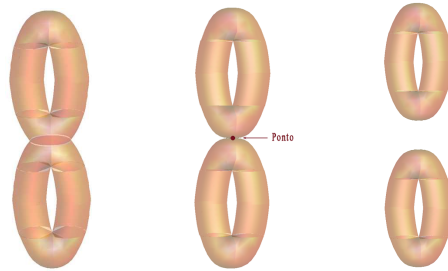


Figura 29: Espaços de configuração para $\ell_1 = 8$, $\ell_1 = 7$ e $\ell_1 = 6$, respectivamente.

Observe-se que começamos com um espaço de configuração conexo até terminarmos num espaço com duas componentes conexas. O que determinou essa mudança no número de componentes conexas? O facto de 0 ou π pertencerem a $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$. Em termos mecânicos, tal significa que as hastes móveis conseguem passar da posição no semiplano acima da linha que une P_1 a P_2 para a posição **simétrica** mas no semiplano abaixo. Assim, para sabermos quantas componentes conexas tem um espaço de configuração, há apenas que verificar quantos elementos de $\{0, \pi\}$ pertencem a $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ ou, equivalentemente, quantos elementos de $\{|\ell_1 - \ell_2|, \ell_1 + \ell_2\}$ pertencem ao intervalo $[\max L, \ell_3 + \ell_4 + \ell_5]$. Por isso, é imediato que:

Proposição 8. *Seja \mathcal{M} um pentágono articulado tal que $[\mathcal{M}]$ não é degenerado. O espaço de configuração de \mathcal{M} é conexo se e só se*

- $\{0, \pi\} \cap \mathcal{D}_{\mathcal{M}} \neq \emptyset$ e
- Existe $\alpha \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}}$ tal que $[\mathcal{M}_{\alpha}]$ não é um par de circunferências disjuntas.

Caso contrário, o espaço de configuração de \mathcal{M} tem duas componentes conexas.

As considerações anteriores sugerem a seguinte definição.

Definição 7. *Seja \mathcal{M} um pentágono articulado com espaço de configuração não degenerado. Designamos por **genus** de cada componente conexa de $[\mathcal{M}]$ o número*

$$\frac{n_1}{2} + n_2 - 1$$

onde

$$n_1 = \text{número de oitos existentes em } \bigcup_{\alpha \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}}} [\mathcal{M}_{\alpha}]$$

e

$$n_2 = \text{número de elementos de } \{0, \pi\} \text{ em } \mathcal{E}_{\mathcal{M}}.$$

Note-se que n_1 é sempre par, logo o genus é um inteiro maior ou igual a -1 . Foram os seguintes os valores obtidos nos casos do Exemplo 5.1 em que o espaço de configuração não é degenerado (é sempre conexo) e no exemplo descrito em (3):

ℓ_1	n_1	n_2	Genus
$15 < \ell_1 \leq 20$	0	1	0
$13 < \ell_1 < 15$	2	1	1
$11 < \ell_1 < 13$	4	1	2
$9 < \ell_1 < 11$	6	1	3

ℓ_1	n_1	n_2	Genus de cada componente conexa	Nº de componentes conexas
8	4	1	2	1
6	4	0	1	2

6.1 Genus menor ou igual a 4

Dado um pentágono articulado \mathcal{M} tal que $[\mathcal{M}]$ é não degenerado, como \tilde{L} tem no máximo 3 elementos, sabemos que $\frac{n_1}{2} \leq 3$. Além disso, como $\{0, \pi\}$ só tem dois elementos, $n_2 \leq 2$. Assim, o genus de cada componente conexa de $[\mathcal{M}]$ é menor ou igual a 4. Diremos que $[\mathcal{M}]$ é uma **esfera** se o genus de $[\mathcal{M}]$ for 0; um **toro** se o genus de $[\mathcal{M}]$ for 1; um **bi-toro** se o genus de $[\mathcal{M}]$ for 2; um **tri-toro** se o genus de $[\mathcal{M}]$ for 3; um **n-toro** se o genus de $[\mathcal{M}]$ for n , para algum natural $n \geq 3$. Vimos já exemplos de mecanismos cujo espaço de configuração é uma esfera ou um toro (Exemplo 5.1), um bi-toro (Exemplo 5.1 e o exemplo descrito em (3)) e um tri-toro (Exemplo 5.1). Será possível obter um 4-toro?

Teorema 9. *Seja \mathcal{M} um pentágono articulado tal que $\mathcal{E}_{\mathcal{M}} \neq [0, \pi]$ e $[\mathcal{M}]$ não é degenerado. Então o espaço de configuração é uma esfera, um toro, um bi-toro, um tri-toro ou um par de toros.*

Demonstração. Suponhamos que $\mathcal{E}_{\mathcal{M}} = [0, \alpha_0]$, para algum $\alpha_0 \neq \pi$. Então $n_2 = 1$ e o genus de cada componente conexa de $[\mathcal{M}]$ é não-negativo mas menor ou igual a 3. Por outro lado, como $0 \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ e $[\mathcal{M}_{\alpha_0}]$ é um ponto, $[\mathcal{M}]$ tem uma componente conexa. Concluimos assim que $[\mathcal{M}]$ é uma esfera, um

toro, um bi-toro ou um tri-toro. Conclusão análoga se $\mathcal{E}_{\mathcal{M}} = [\alpha_1, \pi]$, para algum $\alpha_1 \neq 0$.

Suponhamos agora que $\mathcal{E}_{\mathcal{M}} = [\alpha_1, \alpha_0]$, sendo $\alpha_0 \neq \pi$ e $\alpha_1 \neq 0$. Neste caso $[\mathcal{M}]$ é constituído por duas componentes conexas. Qual o genus de cada uma? Como $0 \notin \mathcal{D}_{\mathcal{M}}$, tem-se $|\ell_1 - \ell_2| < \max L$. Se $\max L = \ell_3 - (\ell_4 + \ell_5)$ (os outros casos são análogos), então

$$\ell_1 + \ell_2 > \ell_3 + \ell_4 + \ell_5 > \ell_3 + \ell_4 - \ell_5, \ell_3 + \ell_5 - \ell_4$$

e

$$\ell_3 + \ell_5 - \ell_4, \ell_3 + \ell_5 - \ell_4 > \max L > \ell_4 + \ell_5 - \ell_3.$$

Há, pois, dois elementos de \tilde{L} no intervalo $[\max L, \ell_3 + \ell_4 + \ell_5]$, e portanto $\frac{n_1}{2} = 2$. Por outro lado, como $n_2 = 0$, o genus é 1. O espaço de configuração é, pois, constituído por um par de toros. E, no exemplo descrito em (3), apresentou-se um pentágono articulado nas condições indicadas. \square

Analisemos agora pentágonos articulados em que $\mathcal{E}_{\mathcal{M}} = [0, \pi]$.

Teorema 10. *Seja \mathcal{M} um pentágono articulado tal que $\mathcal{E}_{\mathcal{M}} = [0, \pi]$ e $[\mathcal{M}]$ não é degenerado. Então o espaço de configuração é um toro, um bi-toro, um tri-toro, um 4-toro ou um par de toros.*

Demonstração. Como $\mathcal{E}_{\mathcal{M}} = [0, \pi]$, temos $n_2 = 2$. Se $n_1 = 0$, então cada componente conexa do espaço de configuração tem genus 1 e, portanto, é um toro. Além disso, para todo o $\alpha \in [0, \pi]$, tem-se uma das propriedades seguintes: $(>, >)$, $(<, <)$, $(<, >)$ ou $(>, <)$. Se for válida a primeira ou a segunda destas condições, então $[\mathcal{M}_{\alpha}]$ é uma circunferência, para todo o $\alpha \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}}$, e, por isso, $[\mathcal{M}]$ possui uma só componente conexa. Caso contrário, $[\mathcal{M}_{\alpha}]$ é formado por duas circunferências disjuntas, para todo o $\alpha \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}}$ e, portanto, $[\mathcal{M}]$ contém duas componentes conexas. Logo o espaço de configuração de \mathcal{M} é um toro ou um par de toros.

Se $n_1 > 0$, então existe β em $]0, \pi[$ tal que $[\mathcal{M}_{\beta}]$ é um oito. Por esse motivo, $[\mathcal{M}]$ só tem uma componente conexa. Como n_1 é par e

$$\frac{n_1}{2} = \#(\tilde{L}) \leq 3$$

concluimos que

$$2 \leq \frac{n_1}{2} + 1 \leq 4$$

logo o espaço de configuração tem genus 2, 3 ou 4. \square

A tabela seguinte indica exemplos de mecanismos para construir cada um destes espaços.

l_1, l_2, l_3, l_4, l_5	Espaço de configuração
4, 5, 11, 12, 13	dois toros disjuntos
20, 5, 11, 12, 13	toro
18, 5, 11, 12, 13	bi-toro
16, 5, 11, 12, 13	tri-toro
14, 5, 11, 12, 13	4-toro

Como vimos, a passagem de uma esfera a um toro, ou de um toro para um par de toros, pode ser feita como no Exemplo 5.1 e no exemplo apresentado em (3). Contudo, estas não são as únicas transições possíveis entre os diferentes tipos de espaços de configuração. Por exemplo, partindo novamente de um mecanismo \mathcal{M} tal que $[\mathcal{M}]$ é uma esfera e alterando o comprimento de uma haste por forma a que se obtenha $l_1 + l_2 = l_3 + l_4 + l_5$ e depois $l_1 + l_2 < l_3 + l_4 + l_5$, enquanto as restantes desigualdades se mantêm, encontramos uma esfera com dois pontos identificados e depois um toro, como mostra a Figura 30.

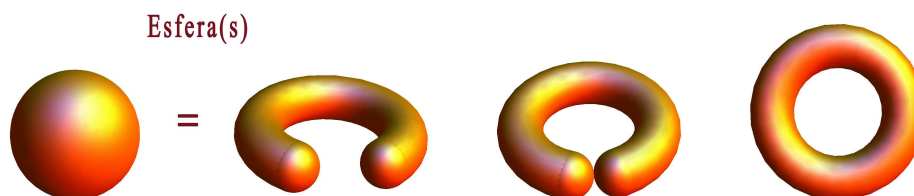


Figura 30: Transição entre espaços de configuração.

7 Genus superior a 4

Verificámos nas secções anteriores que, do ponto de vista topológico, só há cinco possibilidades para o espaço de configuração de um quadrilátero articulado e que a variedade de espaços de configuração resultantes de pentágonos articulados é também escassa. Sabemos, por exemplo, que se pretendermos obter um espaço de configuração com genus superior a 4, não basta um pentágono articulado \mathcal{M} , ainda que $[\mathcal{M}]$ não seja degenerado.

Uma possibilidade seria acrescentar uma haste unida a um novo ponto fixo, como indica a Figura 31.¹¹

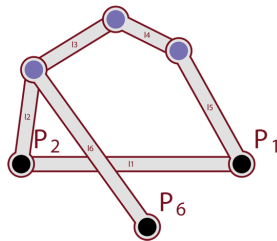


Figura 31: Pentágono com mais uma haste unida a um novo ponto fixo.

Porém, o mero acréscimo de um ponto fixo e de uma haste a ele ligada não conduz a um espaço de configuração mais rico (aliás, em geral, acontece o oposto). Mas, se acrescentarmos um ponto móvel, obtemos um espaço de configuração muito mais vasto do que o inicial: na verdade, até vasto de mais, pois o espaço de configuração é agora parametrizável por 4 variáveis livres. Uma maneira de reduzirmos a liberdade excessiva neste último cenário consiste em unir à haste adicionada uma outra haste ligada a um novo ponto fixo, P_7 , como ilustra a Figura 32.¹²

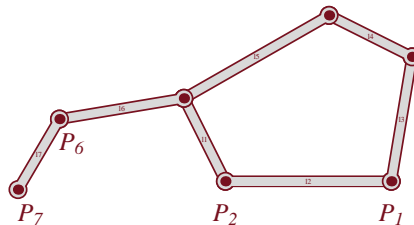


Figura 32: Pentágono com mais duas hastes e um novo ponto fixo.

É precisamente esse tipo de mecanismos que estudaremos de seguida, estabelecendo através deles um processo indutivo que constrói mecanismos cujos espaços de configuração têm genus arbitrariamente grande.

¹¹Como complemento a esta informação, sugerimos que consulte a página [auxi22.html](#) do módulo.

¹²Explicações adicionais são apresentadas, através do Exemplo 14, na página [auxi23.html](#) do módulo.

7.1 Pentágonos articulados aumentados

Definição 8. Um *pentágono articulado aumentado* $\widehat{\mathcal{M}}$ é um mecanismo que se obtém de um pentágono articulado \mathcal{M} acrescentando-lhe n pontos fixos, n pontos móveis e n pares de hastes do seguinte modo:

- O primeiro par de hastes une um novo ponto móvel, digamos \mathcal{P}_6 , a um ponto móvel já existente, \mathcal{P}_3 , e a um novo ponto fixo, digamos \mathcal{P}_7 .
- O segundo par de hastes une um outro novo ponto móvel, digamos \mathcal{P}_8 , a \mathcal{P}_6 e a um novo ponto fixo, digamos \mathcal{P}_9 ,
- Etc.

Uma vez que um pentágono articulado aumentado $\widehat{\mathcal{M}}$ contém de facto apenas um pentágono articulado, manteremos a notação anterior para \mathcal{M}_α , $d_{\mathcal{M}}$, $\mathcal{D}_{\mathcal{M}}$, $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$, etc, tendo em atenção que se referem ao sub-mecanismo \mathcal{M} de $\widehat{\mathcal{M}}$. A Figura 33 mostra uma realização de um pentágono articulado aumentado, sendo $n = 2$.

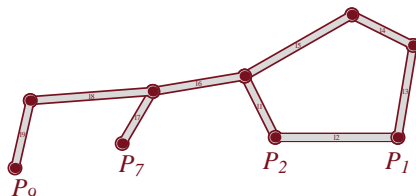


Figura 33: Pentágono articulado aumentado.

Recorde-se que, no caso dos quadriláteros e dos pentágonos articulados, só existem dois pontos fixos e conhecemos a distância entre eles porque, por definição, estão unidos por uma haste (de comprimento ℓ_1). Por esse motivo, é indiferente qual o par de pontos que escolhemos em \mathbb{R}^2 para fixar o mecanismo: escolhido outro par de pontos fixos, digamos P_3 e P_4 , que distem entre si ℓ_1 , existe uma isometria que preserva a orientação, leva $[P_1P_2]$ em $[P_3P_4]$ e associa a cada realização de \mathcal{M} com pontos fixos P_1 e P_2 uma realização de \mathcal{M} com pontos fixos P_3 e P_4 . E, portanto, os espaços de configuração $[\mathcal{M}]_{(P_1, P_2)}$ e $[\mathcal{M}]_{(P_3, P_4)}$ são homeomorfos. Do mesmo modo, dados $\ell_1 > 0$ e dois pontos P_1 e P_2 , a qualquer terno de pontos (P_1, P_2, P_7) verificando

$$\|P_1 - P_2\| = \ell_1 \quad \text{e} \quad \|P_7 - P_2\| \leq \ell_2 + \ell_6 + \ell_7$$

está associado um espaço de configuração $[\mathcal{M}]_{(P_1, P_2, P_7)}$. Contudo, o terceiro ponto fixo, P_7 , não está unido por uma haste aos restantes pontos fixos P_1 e P_2 . Isso faz com que o possamos escolher por forma a ficar a uma distância de P_1 e P_2 tal que o espaço de configuração associado a P_1, P_2, P_7 seja apenas um ponto, ou, pelo contrário, o possamos escolher por forma a duplicar o espaço de configuração do pentágono articulado que deu origem ao pentágono articulado aumentado. O que significa que, para diferentes escolhas de P_7 , os espaços de configuração podem não ser homeomorfos entre si.

7.2 Construção

No que se segue, partiremos de um pentágono articulado cujo espaço de configuração é um toro e acrescentaremos duas hastes, um ponto fixo e um ponto móvel. Desse modo, conseguiremos aumentar em 1 o genus do espaço de configuração. Depois prosseguiremos por indução. A Figura 34 esquematiza este processo indutivo e exhibe uma realização de um mecanismo cujo espaço de configuração tem genus g .



Figura 34: Esquema da indução até g .

Na Secção 5, vimos que, se $0 \leq g \leq 4$, basta usar um pentágono articulado com 2 pontos fixos, 3 pontos móveis e 5 hastes apropriadamente escolhidas para obter um espaço de configuração de genus g . Provaremos de seguida que, dado natural $g > 4$, existe um pentágono articulado aumentado cujo espaço de configuração tem genus g e que é formado por

$$\begin{cases} \frac{g+4}{2} \text{ pontos fixos, } \frac{g+6}{2} \text{ móveis e } g+5 \text{ hastes, se } g > 4 \text{ e } g \text{ é par;} \\ \frac{g+5}{2} \text{ pontos fixos, } \frac{g+7}{2} \text{ móveis e } g+6 \text{ hastes, se } g > 4 \text{ e } g \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Teorema 11. *Para cada $g \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, existe um pentágono articulado aumentado cujo espaço de configuração tem genus g .*

Demonstração. Regressemos ao caso $g = 1$ para iniciar o procedimento que, por indução, construirá um pentágono aumentado cujo espaço de configuração tem genus superior a quatro. Consideremos um pentágono articulado \mathcal{M} tal que $[\mathcal{M}]_{(P_1, P_2)}$ é um toro com $\alpha_0 < \frac{\pi}{2}$. Suponhamos, por exemplo, que as medidas das hastes em \mathcal{M} são 9, 3, 1, 5, 3. Obteremos um pentágono articulado aumentado $\widehat{\mathcal{M}}$ adicionando a \mathcal{M} um novo ponto fixo e duas novas hastes de comprimentos ℓ_6 e ℓ_7 . Recorde-se que, se P_1, P_2, P_7 são pontos do plano tais que

$$\|P_1 - P_2\| = \ell_1 \quad \text{e} \quad \|P_7 - P_2\| \leq \ell_2 + \ell_6 + \ell_7$$

então $[\widehat{\mathcal{M}}]_{(P_1, P_2, P_7)}$ é a união dos espaços $[\widehat{\mathcal{M}}_\alpha]_{(P_1, P_2, P_7)}$, para todo o $\alpha \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}}$.

Seja $\alpha' \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ tal que $[\mathcal{M}_{\alpha'}]$ é um oito. Suponhamos que escolhemos o novo ponto P_7 de modo que as duas novas hastes fiquem (esticadas) na mesma direcção quando $P_3 = C_\delta$, para algum δ com $\alpha' < \delta < \alpha_0$, e apenas nessas circunstâncias (Figura 35). Suponhamos ainda que P_7 pertence à semi-recta $\overrightarrow{C_\delta C_{-\alpha_0}}$. Desse modo, P_6 é C_β^* , para algum $\beta \in [-\pi, \pi]$, onde C_β^* é o ponto da circunferência de centro P_7 e raio ℓ_7 tal que $\overrightarrow{P_7 C_\beta^*}$ faz um ângulo igual a β com $\overrightarrow{P_7 C_\delta}$ (Figura 35).

Por fim, suponhamos que, por construção das novas hastes, se tem

- (a) o valor máximo de β , que designamos por β_0 , é menor que $\frac{\pi}{2}$ e é obtido quando $P_3 = C_{-\alpha_0}$,
- (b) o valor mínimo de β é $-\beta_0$ e é também obtido quando $P_3 = C_{-\alpha_0}$,
- (c) o ângulo $\angle P_7 C_{\beta_0}^* C_{-\alpha_0} = \angle P_7 C_{-\beta_0}^* C_{-\alpha_0} = \frac{\pi}{2}$

e analisemos, para cada $\alpha \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}}$, o espaço $[\widehat{\mathcal{M}}_\alpha]_{(P_1, P_2, P_7)}$.

Repare-se¹³ que $[\widehat{\mathcal{M}}]_{(P_1, P_2, P_7)} = \widehat{\mathcal{M}}_1 \cup \widehat{\mathcal{M}}_2$, onde

$$\widehat{\mathcal{M}}_1 = \bigcup_{\alpha \in [-\alpha_0, \delta]} [\widehat{\mathcal{M}}_\alpha] = \widehat{\mathcal{M}}_2.$$

Como $\widehat{\mathcal{M}}_1$ e $\widehat{\mathcal{M}}_2$ possuem o mesmo número de oitos que $[\mathcal{M}] = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}}} [\mathcal{M}_\alpha]$

e a curva de colagem $[\widehat{\mathcal{M}}_\delta]_{(P_1, P_2, P_7)}$ de $\widehat{\mathcal{M}}_1$ a $\widehat{\mathcal{M}}_2$ é uma circunferência¹⁴, então a reunião de $\widehat{\mathcal{M}}_1$ e $\widehat{\mathcal{M}}_2$ duplica o número de oitos existente em $[\mathcal{M}]$

¹³A página [auxi24.html](#) do módulo ajuda a compreender este detalhe do argumento.

¹⁴Este caso está ilustrado na página [auxi25.html](#) do módulo.

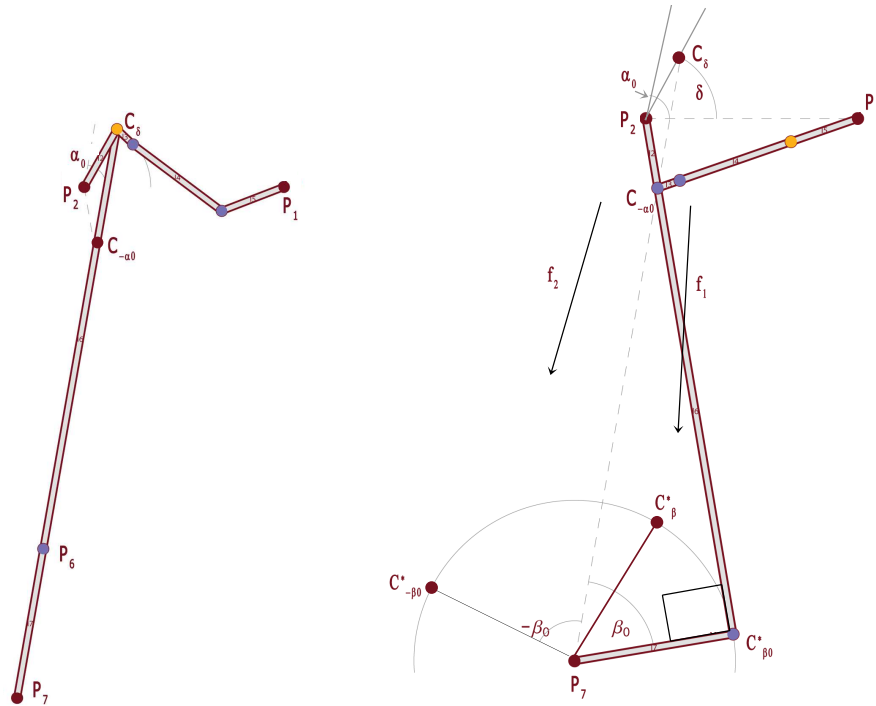


Figura 35: À esquerda: Posição do mecanismo com as duas novas hastes esticadas. À direita: Ligação entre P_6 , P_7 e C_δ .

e, portanto, $[\widehat{\mathcal{M}}]_{(P_1, P_2, P_7)}$ tem uma componente conexa e é um bi-toro. A tabela seguinte resume esta informação e a Figura 36 mostra o espaço de configuração.

Condição sobre α	Relações	$[\widehat{\mathcal{M}}]_{(P_1, P_2, P_7)}$
$\alpha = -\alpha_0$	$(>, >)$	Dois pontos
$-\alpha_0 < \alpha < -\alpha'$	$(>, >)$	Duas circunferências disjuntas
$\alpha = -\alpha'$	$(>, =)$	Dois oitos
$-\alpha' < \alpha < \alpha'$	$(>, <)$	Dois pares de circunferências disjuntas
$\alpha = \alpha'$	$(>, =)$	Dois oitos
$\alpha' < \alpha < \delta$	$(>, >)$	Duas circunferências disjuntas
$\alpha = \delta$	$(>, >)$	Uma circunferência

Em resumo, o processo que descrevemos consiste em adicionar um ponto fixo e um par de hastes a um pentágono articulado previamente fixado de modo a *cortar* o seu espaço de configuração por uma circunferência, depois

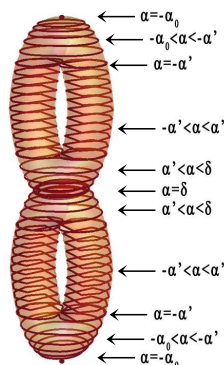


Figura 36: Bi-toro obtido com um pentágono aumentado.

duplicar a parte *cortada* e finalmente unir as duas partes, a original cortada e a sua cópia, pela circunferência. Assim, partindo de um toro, construímos um bi-toro.

Lema 12. *A construção anterior é possível.*

Demonstração. Observemos a Figura 37. Temos

$$\begin{aligned} \|P_7 - C_{-\alpha_0}\| &= \|P_7 - C_\delta\| - \|C_\delta - C_{-\alpha_0}\| = \ell_6 + \ell_7 - \|C_\delta - C_{-\alpha_0}\| \\ &= \ell_6 + \ell_7 - 2\ell_2 \cos(\gamma) \end{aligned}$$

onde

$$\gamma = \frac{\pi - (\delta + \alpha_0)}{2}.$$

Por outro lado,

$$\ell_6 = \|P_7 - C_{-\alpha_0}\| \cos(\gamma) \quad \text{e} \quad \ell_7 = \|P_7 - C_{-\alpha_0}\| \sin(\gamma)$$

de onde se conclui que

$$\|P_7 - C_{-\alpha_0}\| = \|P_7 - C_{-\alpha_0}\| \cos(\gamma) + \|P_7 - C_{-\alpha_0}\| \sin(\gamma) - 2\ell_2 \cos(\gamma)$$

isto é,

$$\|P_7 - C_{-\alpha_0}\| = \frac{2\ell_2 \cos(\gamma)}{\cos(\gamma) + \sin(\gamma) - 1}.$$

Daqui resulta que

$$\ell_6 = \frac{2\ell_2 \cos^2(\gamma)}{\cos(\gamma) + \sin(\gamma) - 1} \quad \text{e} \quad \ell_7 = \ell_2 (\cos(\gamma) + \sin(\gamma) + 1).$$

Além disso, $\beta_0 = \pi - \frac{\pi}{2} - \gamma < \frac{\pi}{2}$. □

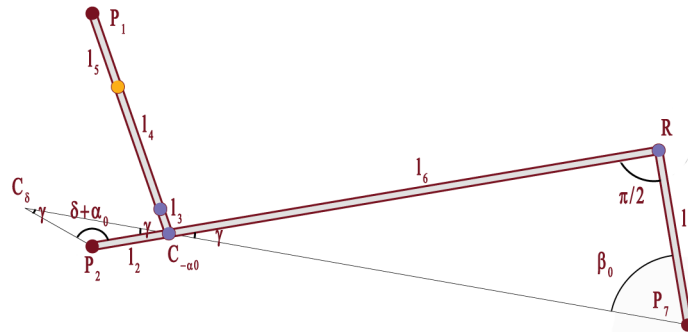


Figura 37: $\beta_0 < \frac{\pi}{2}$.

Observação 2. Consideremos a correspondência $f_1 : [-\alpha_0, \delta] \rightarrow [0, \beta_0]$ que a cada $\alpha \in [-\alpha_0, \delta]$ associa o valor em $[0, \beta_0]$ tal que $C_{f_1(\alpha)}^*$ pertence à circunferência de centro C_α e raio ℓ_6 e a concavidade entre $\overrightarrow{C_{f_1(\alpha)}^* P_7}$ e $\overrightarrow{C_{f_1(\alpha)}^* C_\alpha}$ é positiva ou nula; e também $f_2 : [-\alpha_0, \delta] \rightarrow [-\beta_0, 0]$ que a cada $\alpha \in [-\alpha_0, \delta]$ associa o elemento de $[-\beta_0, 0]$ tal que $C_{f_2(\alpha)}^*$ pertence à circunferência de centro C_α e raio ℓ_6 e a concavidade entre $\overrightarrow{C_{f_2(\alpha)}^* P_7}$ e $\overrightarrow{C_{f_2(\alpha)}^* C_\alpha}$ é negativa ou nula. Em [5], provou-se que f_1 e f_2 são funções e estritamente monótonas (respectivamente, decrescente e crescente). Por isso, em vez de analisarmos $[\widehat{\mathcal{M}}]_{(P_1, P_2, P_7)}$ em função do ângulo α em $[-\alpha_0, \delta]$, podemos transferir o estudo para a variável β no intervalo $[-\beta_0, \beta_0]$. Desse modo,¹⁵

$$\widehat{\mathcal{M}}_1 = \bigcup_{\beta \in [0, \beta_0]} [\widehat{\mathcal{M}}_{f_1^{-1}(\beta)}] \quad e \quad \widehat{\mathcal{M}}_2 = \bigcup_{\beta \in [-\beta_0, 0]} [\widehat{\mathcal{M}}_{f_2^{-1}(\beta)}].$$

O método anterior pode ser generalizado para se obter um espaço de configuração com uma componente conexa de genus $g = 3$. Vejamos como. Regressemos ao pentágono articulado aumentado anterior e consideremos a função $g : [-\beta_0, \beta_0] \rightarrow [-\alpha_0, \delta]$ tal que

$$g|_{[0, \beta_0]} \equiv f_1^{-1} \quad e \quad g|_{[-\beta_0, 0]} \equiv f_2^{-1}.$$

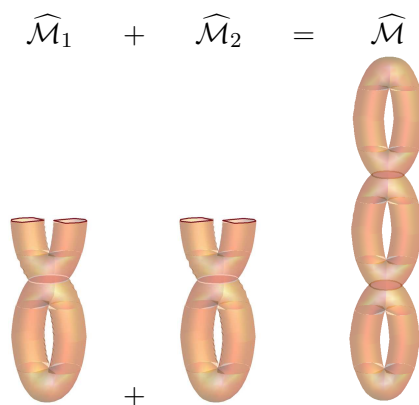
Seja $\varepsilon \in]0, \beta_0[$ tal que $\cup_{\beta \in [-\beta_0, \varepsilon]} [\widehat{\mathcal{M}}_{g(\beta)}]_{(P_1, P_2, P_7)}$ contém três oitos. Acrescentemos um ponto fixo P_9 e duas hastes, de comprimentos ℓ_8 e ℓ_9 , nas condições indicadas no Lema 12. Em particular, pretendemos que fiquem

¹⁵Sugerimos que explore esta construção na animação da página [auxi23.html](#) do módulo.

completamente esticadas quando (e só quando) $\beta = \varepsilon$ e que formem um triângulo rectângulo quando $\beta = -\beta_0$. Tal é possível, bastando tomar

$$\begin{aligned} \ell_8 &= \frac{2\ell_7 \cos^2(\gamma)}{\cos(\gamma) + \sin(\gamma) - 1} \\ \ell_9 &= \ell_7 (\cos(\gamma) + \sin(\gamma) + 1) \\ \gamma &= \frac{\pi - (\varepsilon + \beta_0)}{2} \\ P_9 &= \text{o ponto da semi-recta } \overline{C_\varepsilon^* C_{-\beta_0}^*} \text{ tal que } \|C_\varepsilon^* - P_9\| = \ell_8 + \ell_9. \end{aligned}$$

Esquemáticamente, temos:

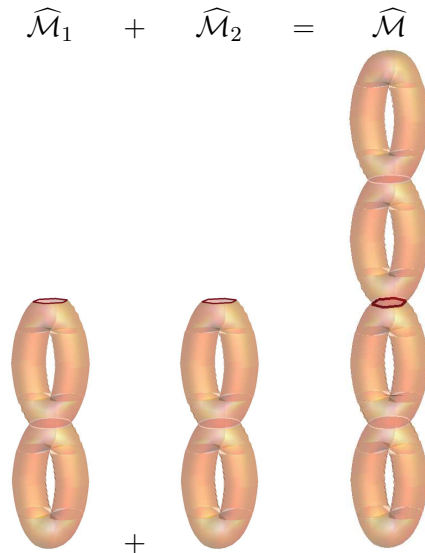


Resumindo: Adicionámos um ponto fixo e um par de hastes ao pentágono articulado aumentado obtido para o caso $g = 2$ de modo a *cortar* o seu espaço de configuração por um par de circunferências disjuntas, depois duplicar a parte *cortada* e finalmente unir as duas partes pelo par de circunferências referido. Desse modo, construímos um novo pentágono articulado aumentado $\widehat{\mathcal{M}}$ tal que $[\widehat{\mathcal{M}}]_{(P_1, P_2, P_7, P_9)}$ é um tri-toro (sendo $n_1 = 1$ e $n_2 = 6$).

Claramente, se se tivesse escolhido ε por forma a que

$$\bigcup_{\beta \in [-\beta_0, \varepsilon]} [\widehat{\mathcal{M}}_{g(\beta)}]_{(P_1, P_2, P_7)}$$

contivesse quatro oitos, o espaço final seria um 4-toro.



Repetindo o procedimento a partir dos últimos mecanismos, podemos produzir indutivamente espaços de configuração com uma componente conexa e genus arbitrariamente grande. Mais concretamente, para cada $n \in \mathbb{N}$, os pentágonos articulados aumentados com $n + 3$ pontos fixos, $n + 4$ pontos móveis e $2n + 7$ hastes permitem a construção de espaços de configuração não degenerados com genus $g = 2n + 1$ e $g = 2n + 2$. \square

Observação 3. *Sugere-se que o leitor verifique que espaços de configuração obterá se aplicasse o procedimento da secção anterior a quadriláteros, construindo quadriláteros articulados aumentados.*

Referências

- [1] R. Courant, H. Robbins, I. Stewart, *What is Mathematics? An elementary approach to ideas and methods*, Oxford University Press, 2^a edição, 1996.
- [2] R. Curtis, M. Steiner, *Configuration spaces of planar pentagons*, American Mathematical Monthly 114 (2007) 183–201.
- [3] G.K. Francis, J.R. Weeks, *Conway's ZIP Proof*, American Mathematical Monthly 106 (1999) 393–399.
- [4] D. Jordan, M. Steiner, *Configuration spaces of mechanical linkages*, Discrete and Computational Geometry 22 (1999) 297–315.

- [5] D. Jordan, M. Steiner, *Compact surfaces as configuration spaces of mechanical linkages*, Israel Journal of Mathematics 122 (2001) 175–187.
- [6] O. Mermoud, M. Steiner, *Visualisation of configuration spaces of polygonal linkages*, Journal for Geometry and Graphics 4, No. 2 (2000) 147–157.
- [7] J.R. Munkres, *Topology: a first course*, Prentice-Hall, 1975.
- [8] A.C. Oliveira, *Matemática Experimental*, Tese de Doutorado, Universidade do Porto, 2013.
- [9] W.P. Thurston, J.R. Weeks, *The mathematics of three-dimensional manifolds*, Scientific American 251 (1984) 94–107.
- [10] D. Shimamoto, C. Vanderwaart, *Spaces of polygons in the plane and Morse theory*, American Mathematical Monthly 112 (2005) 289–310.
- [11] <http://www.math.toronto.edu/drorbn/People/Eldar/thesis/>
- [12] S. Willard, *General Topology*, Addison-Wesley, 1970.