

# ESTRADAS PARA RODAS EXÓTICAS<sup>†</sup>

*Maria Carvalho*

Departamento de Matemática da Universidade do Porto  
Rua do Campo Alegre, 687  
4169-007 Porto, Portugal  
e-mail: mpcarval@fc.up.pt

*Ana Oliveira*

Associação Atractor—Matemática Interactiva  
Rua de Ceuta n.º 118, 5.º  
4050-190 Porto, Portugal  
e-mail: amolivei@fc.up.pt

*The miraculous paradox of smooth round objects  
conquering space by simply tumbling over and over,  
instead of laboriously lifting heavy limbs in order to progress,  
must have given young mankind a most salutary shock.*

Vladimir Nabokov, *Speak, Memory*

**Resumo:** No estudo de rodas não-circulares é natural procurar uma estrada que se lhe adapte, isto é, cuja forma garanta que o centro da roda se move sem solavancos. A equação diferencial que descreve essa conexão, entre a roda e a sua estrada perfeita, nem sempre pode ser resolvida explicitamente, mas é possível desenhar uma figura aproximada por integração numérica, por vezes com precisão elevada. Foi o que tentámos obter no caso em que a roda tem o formato de um triângulo de Reuleaux. A animação, elaborada com o programa *Mathematica*, permitiu-nos considerar outros formatos de rodas e estradas e, em particular, encontrar a única roda-estrada.

**Abstract** The search of a road where a wheel shaped as a Reuleaux triangle could roll without jolting inspired us to generate a computer animation of this motion. The triangle should travel along the road in such a way that the hub could be held at a fixed height above the ground, thus ensuring a smooth horizontal journey. We were then able to explore other shapes of roads and wheels and, in particular, to find a wheel that has the shape of its suitable road.

**palavras-chave:** Movimento suave; triângulo de Reuleaux.

**keywords:** Rolling smoothly; Reuleaux triangle.

---

<sup>†</sup>Este artigo foi escrito no âmbito do *Programa de Doutoramento em Ensino e Divulgação das Ciências*, da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, e apoiado pela FCT através do CMUP

## 1 Introdução

Não sabemos o que se usou primeiro, se a estrada de piso plano ou a roda redonda, mas parece claro que um terreno irregular, com desníveis, seixos e ribeiros de permeio, não é fonte inspiradora para uma tal roda. Contudo, custa-nos a imaginar o mundo sem ela, e este objecto tão útil e bem sucedido talvez tenha sido inventado há mais de trinta séculos, em vários lugares e momentos independentes.

Num veículo com quatro rodas circulares, cada par é ligado por um eixo que passa pelo seu centro. A forma desta roda garante que cada ponto do seu bordo está à mesma distância do centro e, por isso, para alguém sentado no eixo, o movimento faz-se sem oscilações. Essa estrutura, de rodas e eixos acoplados, pode ser substituída por uma plataforma que rola sobre um cilindro, e o que estiver em cima dela também se move, numa estrada plana, tranquilamente. Mas agora a propriedade responsável por essa suavidade é o facto de a circunferência ter largura constante ([1]).

São essas qualidades que, por exemplo, uma elipse ou um quadrado não têm. Se colocarmos um quadrado a rolar no plano, damos-nos conta de que esta curva não serve como formato de roda se queremos que o centro viaje numa linha paralela ao chão – porque a distância do centro do quadrado aos pontos do bordo não é constante – nem como secção de rolamento, se o que se pretende é um movimento sem solavancos, porque o quadrado não tem largura constante (figura 1). Neste cenário, é natural perguntar como deveria ser a estrada para que uma roda quadrada rolasse sobre ela sem balanços incómodos. A estrada adequada, mas com bossas, tem de compensar as diferenças na largura da curva para direcções distintas. O propósito deste texto, inspirado na referência [2], é precisamente o de deduzir a equação diferencial que relaciona uma curva e a estrada onde uma roda, cujo bordo seja essa curva, role com movimento suave, para depois a aplicar a alguns exemplos de rodas, entre eles o triângulo de Reuleaux. Para esta figura, a determinação explícita da expressão matemática que representa a estrada depende do cálculo de um integral elíptico, e não há meios para obter a solução exacta. Indicaremos, contudo, uma solução numérica aproximada e mostraremos imagens de uma animação elaborada com o programa *Mathematica*<sup>1</sup>.

O artigo está organizado do seguinte modo: depois de recordarmos alguns aspectos sobre curvas de largura constante, discutiremos a descrição matemática de uma roda a rolar sem deslizamento numa estrada e o que

---

<sup>1</sup><http://www.wolfram.com/>

se entende por movimento suave; de seguida, analisaremos alguns exemplos; fecharemos o texto com um esquema das instruções que desenham simultaneamente a roda com formato de triângulo de Reuleaux e a estrada que se lhe adequa, e geram a animação de ambas.

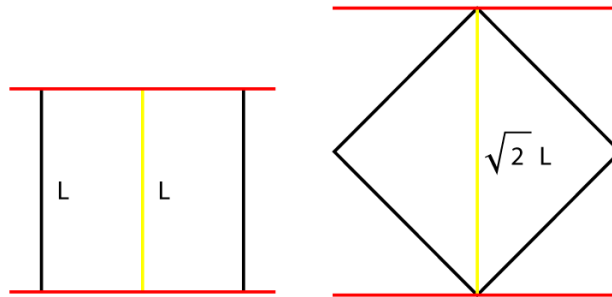


Figura 1: Largura do quadrado em duas direcções.

## 2 Curvas de largura constante

**Definição 1** Dada uma curva plana e fechada<sup>2</sup>  $C$ , a sua largura numa direcção fixada  $\ell$  é o comprimento do segmento de recta que se obtém projectando cada ponto de  $C$ , em  $\ell$ , perpendicularmente a  $\ell$ . Diz-se que a largura da curva é constante se esse comprimento for o mesmo para todas as direcções do plano.

A circunferência é o exemplo mais simples de uma curva com largura constante, cujo valor é o seu diâmetro. Mas há uma infinidade de outras curvas com esta propriedade, cuja construção ilustraremos com o triângulo de Reuleaux. Este triângulo de lados bojudos é formado por três arcos de circunferência com o mesmo raio,  $L$  digamos, cada um com centro num dos vértices de um triângulo equilátero de lado  $L$  (figura 3).

Verifiquemos que esta curva tem largura constante. Designamos por *linha de suporte* de uma curva uma recta que tem intersecção não vazia com a curva e tal que esta está contida num dos semi-planos determinados pela recta (é o caso das linhas assinaladas na figura 1). Sabe-se que cada curva fechada tem exactamente duas linhas de suporte em cada direcção ([6]). Fixemos uma direcção e consideremos o par de linhas de suporte,

<sup>2</sup>isto é, se viajarmos ao longo da curva a partir de um ponto  $P$ , mantendo o sentido do movimento, retornamos a  $P$

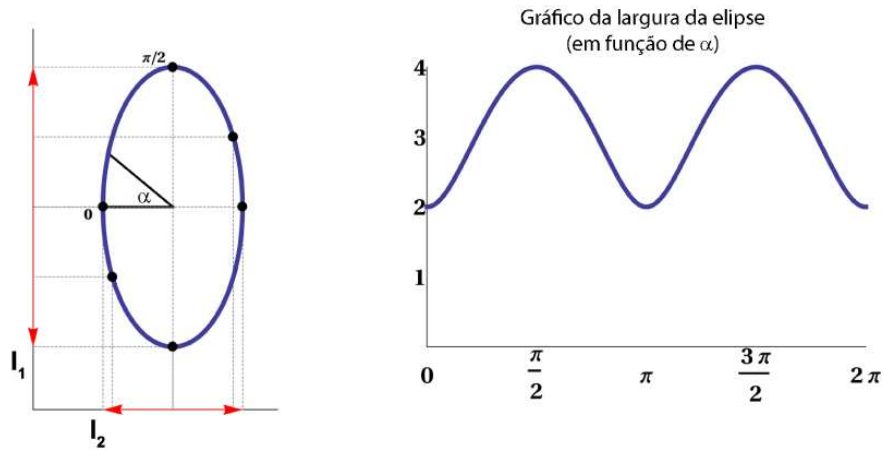


Figura 2: Larguras de uma elipse.

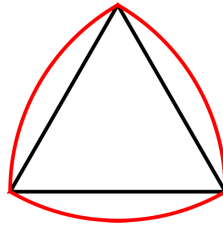


Figura 3: Triângulo de Reuleaux.

$l_1$  e  $l_2$ , do triângulo de Reuleaux nessa direcção. Se uma destas rectas, digamos  $l_1$ , intersectar o triângulo de Reuleaux num ponto  $P$  interior a um dos arcos de circunferência que o constituem, terá de ser tangente à curva em  $P$  (imagem à esquerda na figura 4). E, portanto, o segmento que une  $P$  ao vértice  $V$  do triângulo equilátero que se opõe a esse arco de circunferência é um raio, perpendicular a  $l_1$  e de comprimento  $L$ . Além disso a recta que passa pelo vértice  $V$  perpendicularmente ao segmento  $[PV]$  é precisamente a outra linha de suporte  $l_2$  do triângulo de Reuleaux na direcção fixada e, por conseguinte, a largura da curva nessa direcção é  $L$ . Se, pelo contrário, ambas as linhas de suporte intersectam a curva em vértices do triângulo equilátero (imagem à direita na figura 4), então são tangentes a extremos de arcos de circunferência distintos e, por isso, perpendiculares ao segmento que une tais vértices, que é um lado, de comprimento  $L$ , do triângulo equilátero que deu origem ao de Reuleaux.

Substituindo o triângulo equilátero por outro polígono regular com um

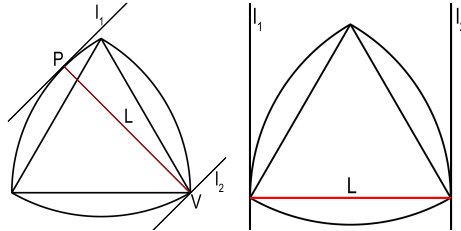


Figura 4: Largura do triângulo de Reuleaux

número ímpar de lados, este método gera um número ilimitado de curvas com largura constante, formadas por arcos de circunferência de igual raio (figura 5). Se usarmos arcos com raios distintos, arranjados de modo que os arcos opostos têm o mesmo centro, obtemos curvas com um número par de arcos de circunferência.<sup>3</sup> Na referência [1] podem ler-se mais informações sobre curvas de largura constante.



Figura 5: Moeda inglesa em circulação.

### 3 A estrada perfeita

Tal como acontece com a roda circular, suporemos que, em cada instante, a estrada tem um só ponto de contacto com a roda. Além disso, queremos que o centro geométrico da roda viaje na horizontal e fique sempre estritamente acima do ponto de contacto da roda com a estrada. E a estrada deve permitir um movimento suave da roda, isto é, o contorno da roda, que rola sem deslizamento, deve encaixar perfeitamente, sem folgas, nas indentações da estrada. Em resumo:

<sup>3</sup>Mas há curvas de largura constante que não são feitas por arcos de circunferência ([6]).

- (H1) A roda e a estrada mantêm-se em contacto e, em cada instante, o comprimento do arco percorrido no bordo da roda é igual ao descrito sobre a estrada.
- (H2) O centro geométrico da roda desloca-se na horizontal, sem oscilações.

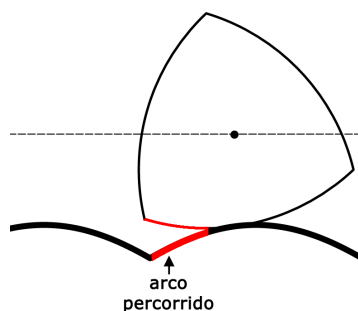


Figura 6: Condição [H1].

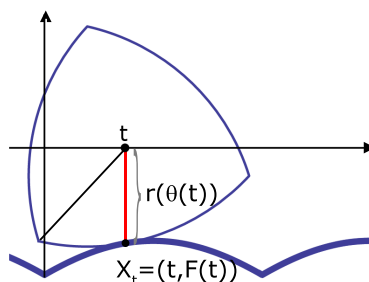


Figura 7: Condição [H2].

Precisamos de traduzir matematicamente estas condições. No movimento, a variável  $t$  designa o tempo e  $C$  é o bordo da roda. Procuramos uma estrada que seja o gráfico de uma função derivável, digamos  $F$ , real e de variável real, tal que  $F(t) < 0$  para todo o  $t$ . Na descrição que faremos das mudanças de posição de  $C$ , é mais útil a sua representação em coordenadas polares relativamente ao centro geométrico da roda. São elas:  $\theta$ , um ângulo de posição, e  $r$  que, para cada  $\theta$ , regista o valor da distância de  $P_\theta$  ao centro  $O$  da roda (que se está a mover), onde  $P_\theta$  é o ponto de  $C$  tal que, no instante  $t = 0$ , o vector  $\overrightarrow{OP_\theta}$  faz um ângulo  $\theta$  com o eixo positivo dos  $t$ 's, contado em sentido horário (figura 8). Deste modo, o rolamento da roda é descrito

por uma função  $t \mapsto \theta(t)$  que mede a variação angular da roda entre  $F(0)$  e  $F(t)$ .

Suponhamos que, no instante inicial  $t = 0$ , o ponto de contacto da roda com a estrada está imediatamente abaixo de  $(0, 0)$  (imagem à esquerda na figura 8). O movimento da roda que aí se inicia pode ser desdobrado em duas componentes: uma translação no eixo dos  $t$ 's e uma rotação da roda sobre si mesma, que pode ser descrita por uma função  $\Omega$  que regista, em radianos, a amplitude desse ângulo de rotação (imagem ao centro da figura 8). Para descrevermos a posição do ponto  $P_t$  de  $C$  que, no instante  $t$ , está em contacto com o ponto da estrada  $X_t = (t, F(t))$ , usaremos as suas coordenadas polares,  $(\theta(t), r(\theta(t)))$ , onde  $\theta(t) = -\Omega(t) - \pi/2$  (imagem à direita da figura 8). Formulemos a condição inicial e as exigências [H1] e [H2] nesta notação.

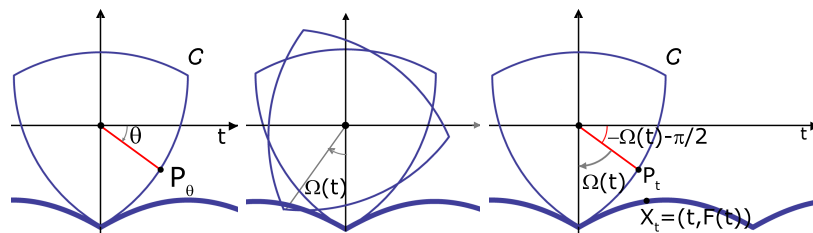


Figura 8

- (H0) No instante  $t = 0$ , o vector  $\overrightarrow{OP_0}$  faz um ângulo com o eixo positivo dos  $t$ 's de  $-\pi/2$ :  $\theta(0) = -\pi/2$ .
- (H1) Para cada  $t$ , o comprimento do arco na curva  $C$  entre  $\theta(0)$  e  $\theta(t)$  é igual à distância percorrida na estrada entre  $F(0)$  e  $F(t)$ .
- (H2) O raio da roda é igual à profundidade da estrada, i.e., para cada  $t$ ,  $F(t) = -r(\theta(t))$ .

O requisito [H1] traduz-se pela equação

$$\int_0^t \sqrt{1 + \left(\frac{dF}{dt}\right)^2} dt = \int_{-\pi/2}^{\theta(t)} \sqrt{[r(\theta)]^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta.$$

Derivando ambos os termos em ordem a  $t$  e elevando-os de seguida ao quadrado, obtemos

$$1 + \left(\frac{dF}{dt}\right)^2 = \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \left[ [r(\theta)]^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 \right].$$

A igualdade de [H2] permite a substituição  $\frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = -\frac{dF}{dt}$ , que simplifica a expressão anterior para

$$1 + \left(\frac{dF}{dt}\right)^2 = [r(\theta)]^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dt}\right)^2,$$

de onde resulta que

$$\frac{d\theta}{dt} = \pm \frac{1}{r(\theta(t))}.$$

Como  $\theta$  é uma função crescente (sob a condição inicial [H0]) e  $r$  é positiva, concluímos que  $\theta'(t) = \frac{1}{r(\theta(t))}$  e, por [H2],

$$F(t) = -r(\theta(t)) = -\frac{1}{\theta'(t)}. \quad (1)$$

Note-se que esta equação, cujo propósito inicial era o de, dada uma roda, se encontrar a estrada que se lhe adequa, permite também resolver o problema dual, o de, para cada estrada, determinar a roda que nela se move suavemente. Exemplifiquemos.

### 3.1 Roda circular

Neste caso, a função  $r$  é constante, igual ao raio  $R$  da circunferência, e portanto  $F(t) = -r(\theta(t)) = -R$ . A boa estrada é, portanto, a plana, gráfico da função  $t \geq 0 \mapsto -R$ . (figura 9).

### 3.2 Roda quadrada

A simetria no quadrado permite-nos restringir o estudo a um único lado, como o assinalado na figura 10, com comprimento  $L$ . Mudando o sistema de unidades se necessário, podemos admitir que  $L = 2$ .

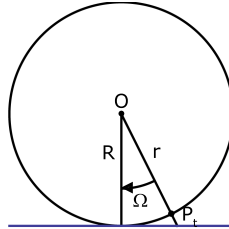


Figura 9: Roda redonda.



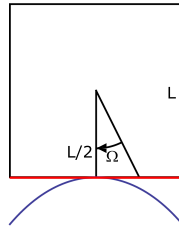


Figura 10: Roda quadrada.

Como, para cada  $\Omega \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ , se tem

$$\frac{(L/2)}{r(\theta)} = \cos(\Omega),$$

deduzimos que, na variável  $\theta = -\Omega - \frac{\pi}{2}$  e no intervalo  $\theta \in [-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}]$ ,

$$r(\theta) = \frac{1}{\cos(-\theta - \frac{\pi}{2})} = -\frac{1}{\text{sen}(\theta)}.$$

Além disso, pela relação entre  $F$  e  $\theta$  incluída na igualdade (1), temos

$$\theta'(t) = -\text{sen}(\theta(t)).$$

Esta equação diferencial tem solução explícita dada por

$$\theta(t) = -2 \arctan(\exp(-t + c))$$

em que a constante  $c$  é determinada pela condição inicial indicada em [H0]:

$$\theta(0) = -\frac{\pi}{2} = -2 \arctan(\exp(c)),$$

isto é,  $c = 0$ . Ainda pela fórmula (1), para todo o  $t \in [\theta^{-1}(-\frac{3\pi}{4}), \theta^{-1}(-\frac{\pi}{4})]$ , temos

$$F(t) = -r(\theta(t)) = -\frac{1}{\text{sen}(2 \arctan(\exp(-t)))}.$$

Atendendo a que  $1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$  e que, no domínio de  $t$  que estamos a considerar,  $\text{sen}(\arctan(\exp(-t))) < 0$  e  $\cos(\arctan(\exp(-t))) > 0$ , a expressão anterior reduz-se a:

$$F(t) = -\frac{1}{2 \text{sen}(\arctan(\exp(-t))) \cos(\arctan(\exp(-t)))}$$

$$= -\frac{1 + \exp(-2t)}{2\exp(-t)} = -\frac{\exp(t) + \exp(-t)}{2} = -\cosh(t).$$

Conclusão: A estrada adequada a uma roda quadrangular é periódica, formada por cópias deste arco de catenária que, nas junções, fazem um ângulo de  $\frac{\pi}{2}$ , onde cada vértice do quadrado encaixa perfeitamente.

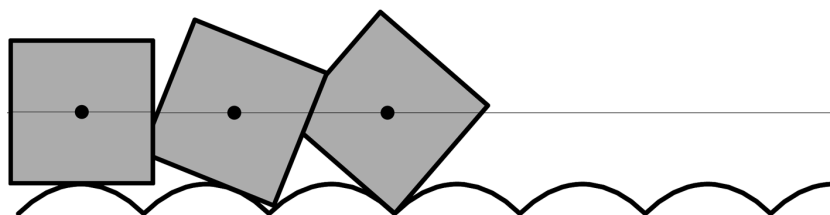


Figura 11: Estrada para rodas quadradas.

O mesmo argumento serve para rodas que são polígonos regulares com qualquer número  $n$  de lados. Se da catenária invertida de equação  $\mathbf{C}(t) = -\cosh(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , considerarmos apenas o arco com valores de  $t$  entre  $t_1 = -\sinh^{-1}(\tan(\frac{\pi}{n}))$  e  $t_2 = \sinh^{-1}(\tan(\frac{\pi}{n}))$ , então o ângulo na junção de cópias deste arco de catenária é  $\frac{(n-2)\pi}{n}$ , uma vez que a inclinação da tangente à catenária em  $t_1$  é  $\mathbf{C}'(t_1) = -\tan(\frac{\pi}{n})$ . E, portanto, ajusta-se perfeitamente ao ângulo interno do polígono regular de  $n$  lados, que é também  $\frac{(n-2)\pi}{n}$ . Contudo, quando  $n = 3$ , este ângulo é menor que  $\frac{\pi}{2}$  e isso impede que a roda triangular encaixe na cúspide de duas bossas da estrada, uma vez que o bico do triângulo, antes do vértice entrar na junção, colide com a catenária.

### 3.3 Roda-estrada

A primeira menção que conhecemos, sem demonstração, da existência de uma roda que é a sua própria estrada, remonta a [4]. Em [2], o assunto é retomado, mas de novo apenas referido. Provemos que uma tal roda tem formato parabólico e que é única.

Às condições que descrevem o movimento suave da roda na estrada,

$$\forall t \quad F(t) = -r(\theta(t)) = -\frac{1}{\theta'(t)},$$

precisamos de acrescentar que a roda é idêntica à estrada e que, no movimento, os pontos correspondentes se identificam. Para isso, o gráfico da função  $t \mapsto F(t)$  deverá ser a imagem do bordo da roda pela reflexão numa

recta  $y = c$ , onde  $c < 0$  é um parâmetro que verifica  $c = F(0)$  e que teremos de determinar. O que corresponde ao sistema de equações:

$$\begin{cases} r(\theta(t)) \cos(\theta(t)) &= t \\ r(\theta(t)) \operatorname{sen}(\theta(t)) &= -F(t) + 2c \end{cases}$$

Juntando todas as exigências, obtemos

$$\begin{cases} \cos(\theta(t)) &= \frac{-t}{F(t)} \\ \operatorname{sen}(\theta(t)) &= \frac{F(t) - 2c}{F(t)}. \end{cases}$$

Derivando a primeira equação em ordem a  $t$ , deduzimos que

$$-\operatorname{sen}(\theta(t)) \theta'(t) = \frac{-F(t) + tF'(t)}{F^2(t)}$$

ou seja, que

$$-\left(\frac{F(t) - 2c}{F(t)}\right) \theta'(t) = \frac{-F(t) + tF'(t)}{F^2(t)}$$

e, portanto, atendendo a (1),

$$-\left(\frac{F(t) - 2c}{F(t)}\right) \left(\frac{-1}{F(t)}\right) = \frac{-F(t) + tF'(t)}{F^2(t)}.$$

Concluimos assim que a função  $F$  é solução da equação diferencial

$$tF' - 2F + 2c = 0.$$

Uma solução é  $F : t \mapsto -t^2 + c$ , para um qualquer  $c \in \mathbb{R}$ ; as outras são da forma  $t \mapsto -t^2 + c + \lambda t^2$ , onde  $\lambda$  é um parâmetro real.<sup>4</sup> Como a estrada tem de ficar estritamente abaixo do eixo dos  $t$ 's, devemos ter  $1 - \lambda > 0$ . O que garante que podemos mudar a escala em  $t$  e em  $F(t)$ ,

$$(1 - \lambda)F(t) = -[(1 - \lambda)t]^2 + c(1 - \lambda),$$

e concluir que a solução geral corresponde a uma reparametrização da família  $(t \mapsto -t^2 + c)_{\{c < 0\}}$ . Por isso, bastará analisar de seguida este último conjunto de soluções, que exige o controle de apenas um parâmetro, o valor de  $c$ .

<sup>4</sup>De facto, se  $G$  e  $H$  são soluções desta equação diferencial, então  $I = G - H$  satisfaz a igualdade  $tI' - 2I = 0$ , equação de variáveis separadas equivalente a  $\ln(I) = \ln(t^2) + \ln(\lambda)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ ; e, portanto,  $I(t) = \lambda t^2$ .

Voltemos então a (1) para, com a expressão  $F(t) = -t^2 + c$ , determinarmos  $\theta$ ,  $r$  e  $c$ . Quanto a  $\theta$ , a equação a resolver é

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{t^2 - c},$$

sujeita à condição inicial  $\theta(0) = -\frac{\pi}{2}$ . A solução é

$$\theta(t) = \frac{1}{\sqrt{-c}} \arctan\left(\frac{t}{\sqrt{-c}}\right) - \frac{\pi}{2},$$

e, portanto,

$$t = \sqrt{-c} \tan\left[\sqrt{-c}\left(\theta(t) + \frac{\pi}{2}\right)\right].$$

Assim,

$$r(\theta) = -F(t(\theta)) = t(\theta)^2 - c = -c \tan^2\left[\sqrt{-c}\left(\theta(t) + \frac{\pi}{2}\right)\right] - c$$

isto é,

$$r(\theta) = -c \sec^2\left[\sqrt{-c}\left(\theta(t) + \frac{\pi}{2}\right)\right].$$

O sistema de equações que define a roda-estrada obriga agora a que se satisfaça a igualdade  $y = -F(x) + 2c$ , ou seja,  $y = x^2 + c$ , o que se traduz por

$$\begin{aligned} \left[-c \sec^2\left(\sqrt{-c}\left(\theta(t) + \frac{\pi}{2}\right)\right) \cos(\theta(t))\right]^2 + c &= \\ &= -c \sec^2\left[\sqrt{-c}\left(\theta(t) + \frac{\pi}{2}\right)\right] \operatorname{sen}(\theta(t)). \end{aligned}$$

Como  $c \neq 0$ , a expressão anterior é equivalente a

$$\begin{aligned} c \sec^4\left[\sqrt{-c}\left(\theta(t) + \frac{\pi}{2}\right)\right] \cos^2(\theta(t)) + 1 &= \\ &= -\sec^2\left[\sqrt{-c}\left(\theta(t) + \frac{\pi}{2}\right)\right] \operatorname{sen}(\theta(t)). \end{aligned}$$

No instante  $\mathcal{T}$  em que  $\theta(\mathcal{T}) = 0$ , esta expressão reduz-se a

$$c \sec^4\left(\frac{\pi\sqrt{-c}}{2}\right) + 1 = 0,$$

isto é,

$$-c = \cos^4\left(\frac{\pi\sqrt{-c}}{2}\right)$$

ou

$$\cos(\pi\sqrt{-c}) = 2\sqrt{-c} - 1,$$

o que indica que devemos ter  $-1 < c < 0$  e informa que  $c = -\frac{1}{4}$  é o único valor neste intervalo que serve para descrever uma roda-estrada. A unicidade resulta do facto de as funções  $z \mapsto \cos(\pi\sqrt{z})$  e  $z \mapsto 2\sqrt{z} - 1$  serem, respectivamente, estritamente decrescente e estritamente crescente no intervalo  $]0, 1[$ . Em resumo, o bordo da roda é a imagem da estrada  $x \mapsto -x^2 - \frac{1}{4}$  por uma reflexão na recta  $y = -\frac{1}{4}$ , ou seja, é a parábola de equação cartesiana  $y = x^2 - \frac{1}{4}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

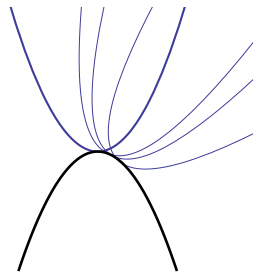


Figura 12: Roda-estrada.

### 3.4 Roda em triângulo de Reuleaux

Tanto quanto sabemos, na bibliografia sobre este assunto não está feita a dedução da estrada adequada a um triângulo de Reuleaux. É o que trataremos nesta secção.

Como no caso de uma circunferência, ou de qualquer outra curva de largura constante, fixada uma direcção e o par de linhas de suporte correspondente, enquanto rolamos o triângulo de Reuleaux entre as duas linhas paralelas, ele mantém-se tangente a ambas. Mas, ao contrário do que sucede com a circunferência, quando o triângulo de Reuleaux se move nesta faixa, o centro geométrico oscila, não se mantém numa mesma linha horizontal, porque não está a igual distância do par de linhas de suporte paralelas (figura 13). A construção de uma estrada perfeita para esta roda deverá contrabalançar este pequeno defeito. Mas precisamos de descrever primeiro a curva em coordenadas polares.

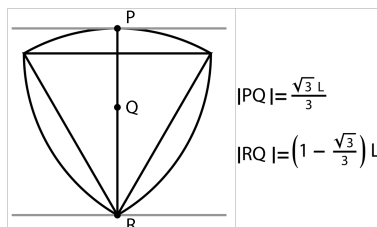


Figura 13: Centro oscilante.

Seja  $L$  o comprimento do lado do triângulo equilátero envolvido na construção do triângulo de Reuleaux de largura  $L$ , isto é, o raio da circunferência cujos arcos formam esta curva. Designemos por  $D$  a distância do centro geométrico do triângulo equilátero a cada um dos seus vértices e posicionemos o triângulo de Reuleaux como na figura 14 para respeitar a condição inicial [H0]. Seja  $r(\Omega)$  a distância polar de um ponto do triângulo de Reuleaux com coordenadas polares  $(\theta, r(\theta))$ , onde, como anteriormente,  $\theta = -\Omega - \frac{\pi}{2}$  e  $\Omega \in [-\frac{2\pi}{3}, 0]$ . Pelo Teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo cinzento (na imagem à esquerda da figura 14, se  $-\frac{\pi}{3} \leq \Omega \leq 0$ ; na imagem central da figura 14, se  $-\frac{2\pi}{3} \leq \Omega \leq -\frac{\pi}{3}$ ), temos

$$L^2 = r^2(\Omega) + D^2 - 2r(\Omega)D \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \Omega\right),$$

ou seja,

$$r^2(\Omega) - 2r(\Omega)D \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \Omega\right) + (D^2 - L^2) = 0,$$

igualdade que, na variável  $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}]$ , se reescreve

$$r^2(\theta) + 2r(\theta)D \sin\left(\frac{2\pi}{3} + \theta\right) + (D^2 - L^2) = 0.$$

Resolvendo esta equação de segundo grau em ordem a  $r$ , que é não-negativo, concluímos que, para todo o  $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}]$ ,

$$r(\theta) = -D \sin\left(\frac{2\pi}{3} + \theta\right) + \sqrt{D^2 \sin^2\left(\frac{2\pi}{3} + \theta\right) + (L^2 - D^2)}.$$

Na igualdade acima,  $L$  e  $D$  não são constantes independentes. Como elucidada a imagem da direita na figura 14,  $D^2 + D^2 - 2D^2 \cos(\frac{2\pi}{3}) = L^2$  e, portanto,  $D = \frac{L}{\sqrt{3}}$ . Para simplificarmos os cálculos, suporemos, mudando o sistema de unidades se necessário, que  $D = 1$  e, conseqüentemente,  $L = \sqrt{3}$ . Substituindo estes valores na igualdade anterior, obtemos a equação que

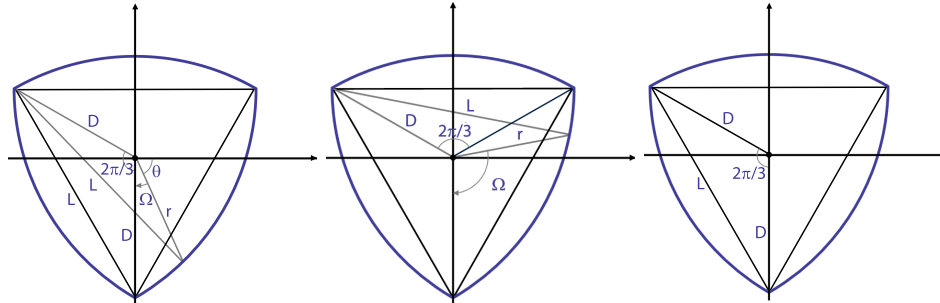


Figura 14: Parametrização do triângulo de Reuleaux

descreve um arco do triângulo de Reuleaux em coordenadas polares: para  $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}]$ ,

$$r(\theta) = -\text{sen}\left(\frac{2\pi}{3} + \theta\right) + \sqrt{\text{sen}^2\left(\frac{2\pi}{3} + \theta\right) + 2}.$$

De acordo com a fórmula geral (1), para encontrar o caminho ajustado ao triângulo de Reuleaux, bastará agora resolver a equação  $-r(\theta(t)) = -\frac{1}{\frac{d\theta}{dt}}$ , isto é,

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{-\text{sen}\left(\frac{2\pi}{3} + \theta\right) + \sqrt{\text{sen}^2\left(\frac{2\pi}{3} + \theta\right) + 2}}. \quad (2)$$

Esta é uma equação de variáveis separadas equivalente a

$$d\theta \left[ -\text{sen}\left(\frac{2\pi}{3} + \theta\right) + \sqrt{\text{sen}^2\left(\frac{2\pi}{3} + \theta\right) + 2} \right] = dt. \quad (3)$$

Para a resolver, precisamos de primitivar a função  $\theta \mapsto -\text{sen}\left(\frac{2\pi}{3} + \theta\right) + \sqrt{\text{sen}^2\left(\frac{2\pi}{3} + \theta\right) + 2}$ . A primeira parcela é de primitivação imediata. Contudo, a segunda é um integral elíptico e, portanto, não se pode calcular em termos elementares, isto é, não se pode exprimir, usando as operações usuais entre funções, como combinação finita de polinómios, fracções racionais, funções algébricas, exponenciais, logaritmos ou funções trigonométricas ([3], [5]). Recorremos então à integração numérica, usando o programa *Matematica*, que forneceu uma solução aproximada:

$$t(\theta) = -\frac{\cos(\theta)}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \text{sen}(\theta) + \sqrt{3} \text{EllipticE} \left[ \frac{\pi}{6} + \theta, \frac{1}{3} \right] + \gamma,$$

onde  $\text{EllipticE}$  é o símbolo que, no *Mathematica*, representa os integrais elípticos de segundo tipo e  $\gamma$  é uma constante que fica determinada pela condição inicial  $t(-\frac{\pi}{2}) = 0$ . Esta última igualdade é equivalente a

$$\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} \text{EllipticE} \left[ -\frac{\pi}{3}, \frac{1}{3} \right] + \gamma = 0$$

e o *Mathematica* calculou também um valor aproximado de  $\gamma$ .

Recorde-se, porém, que queremos  $\theta$  em função de  $t$ . Bastaria agora inverter<sup>5</sup> a função  $t(\theta)$ , mas o *Mathematica* não o conseguiu fazer. Por isso, lançámos mão de uma amostra numérica: construímos uma lista extensa de pontos da forma  $(\theta, t(\theta))$ , invertemo-la e interpolámo-la com o comando *Interpolation* que, face a um conjunto finito de pontos do plano, determina um polinómio de grau menor ou igual a 3 cujo gráfico passa por tais pontos.

Com estes dados, foi finalmente possível determinar uma aproximação da função  $F$ , cujo gráfico é a estrada adequada ao triângulo de Reuleaux, e fazer uma animação que simulasse o movimento da roda na sua estrada perfeita. É o que mostra a figura 15. A rotina completa<sup>6</sup> que a desenhou está na figura 16.

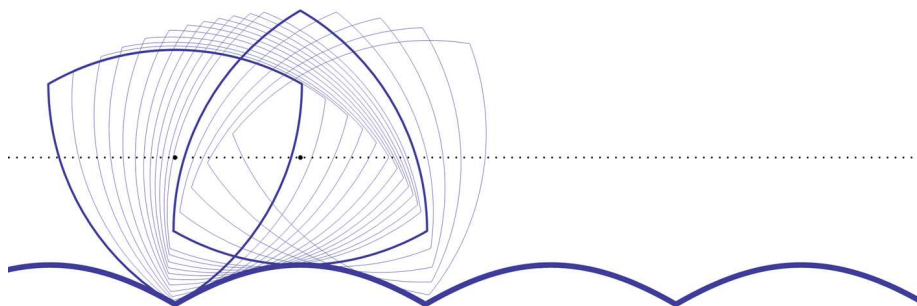


Figura 15: Estrada do triângulo de Reuleaux.

## Referências

- [1] Atractor (<http://www.atractor.pt/>), *À volta da roda*, *Gazeta de Matemática*, n.º 162 (2010) 3–5

<sup>5</sup>Note-se que a função  $t \mapsto \theta(t)$  tem derivada que não se anula e que é contínua, logo mantém o sinal no intervalo que estamos a considerar.

<sup>6</sup>Esta versão concisa foi obtida na *Associação Atractor* com as sugestões do Professor Manuel Arala Chaves.



- [2] L. Hall, S. Wagon, *Roads and Wheels*, Mathematics Magazine, Vol. 65, n° 5 (1992) 283–301
- [3] T. Kasper, *Integration in finite terms: the Liouville theory*, Mathematics Magazine, Vol. 53, n° 4 (1980) 195–201
- [4] G. B. Robison *Rockers and rollers*, Mathematics Magazine 33(1960) 139–144
- [5] J. Ritt *Integration in finite terms*, New York, 1948
- [6] H. Rademacher, O. Toeplitz, *The enjoyment of mathematics*, Princeton University Press, 1970

```

r[α_] := ((-Sin[α + 2 Pi / 3] + Sqrt[Sin[α + 2 Pi / 3]^2 + 2]) // N) /;
(α >= -Pi / 2 && α <= Pi / 6); Mod2[x_, a_, b_] :=
Module[{k, u}, k = b - a; u = (x - a) / k; Mod[u, 1] * k + a // N;
r[α_] := r[Mod2[α, -Pi / 2, Pi / 6]] /; (α >= -Pi / 2 && α ≤ 3 Pi / 2);
T[α_] :=
Integrate[-Sin[αα + 2 Pi / 3] + Sqrt[Sin[αα + 2 Pi / 3]^2 + 2], αα] /.
αα → α; t[α_] := T[α] - T[-Pi / 2];
n = 48; lis1 = Table[{α // N, t[α] // N}, {α, -Pi / 2, Pi / 6, 2 Pi / (3 n)}];
lis2 = (Reverse[#] &) /@ lis1 // N; θ = Interpolation[lis2];
x1 = N[t[Pi / 6], 15];
F[x_] := -r[θ[x]]; /; 0 ≤ x ≤ x1;
F[x_] := F[Mod2[x, 0, x1]] /; x < 0 || x1 < x;
pp[α_, ω_, x_: 0] := {x, 0.} + r[α] {Cos[α + ω], Sin[α + ω]} /; 0 ≤ x ≤ x1;
ppp[ω_, x_: 0, opts___] :=
ParametricPlot[pp[α, ω, x], {α, -Pi / 2, Pi / 6 + 4 Pi / 3}, opts];
ll = {.11, .22, .3, .38, .46, .52, .57, .615, .66,
.71, .75, .96, 1.09, 1.22, 1.38};
gr = Show[Graphics@{Thickness[.0018], Dashing[{0.0017, .007}],
PointSize[.005], Point[{0, 0}], Line[{{-2 / 3 x1, 0}, {3 x1, 0}}]},
ppp[-θ[#] - Pi / 2, #] & /@ ll, Plot[F[x], {x, -2 / 3 x1, 3 x1},
PlotStyle → Thickness[.006]],
AspectRatio → Automatic, ImageSize → {2400},
Axes → None, PlotRange → {{-2 / 3 x1, 3 x1}, {-1.02, 1.05}}]

```

Figura 16