# Propriedade do valor intermédio vs. continuidade†

*Maria Carvalho* e *Alexandre Rodrigues*
Centro de Matemática
Universidade do Porto
Rua do Campo Alegre 687
4169–007 Porto, Portugal
e-mail: `mpcarval@fc.up.pt`
`alexandre.rodrigues@fc.up.pt`

*O cheiro da flor pode ser interceptado entre a flor*
*e o céu. E é aí que melhor o cheiro existe.*
*Na flor, em plena flor, é ainda uma potência;*
*e no céu, se chega lá, é já elemento abstracto.*
*Mas há então uns segundos de existência*
*nesse percurso intermédio.*
Gonçalo M. Tavares, *Uma Viagem à Índia*

**Resumo:** A definição de *continuidade* nem sempre foi a que aceitamos actualmente e, em particular, chegou a confundir-se com a *propriedade do valor intermédio.* Esclarecidas as duas noções, certo é que a segunda é consequência da primeira mas não equivalente a ela. Este artigo aborda em detalhe alguns resultados inspirados em exemplos que distinguem estes dois conceitos, e dedica a última secção a aplicações. A bibliografia, sem ser exaustiva, contém informação complementar cuja leitura se recomenda.

**Abstract:** For real-valued functions whose domain is an interval, it was thought at one time that a *continuous* function should be defined as one such that the image of every interval in its domain is an interval. As it turns out, this *intermediate value property* does not force a function to have all those attributes that continuity conveys. However, although odd and sometimes rather elaborate, the examples used to distinguish these two concepts have been a powerful source of particularly interesting results, a sample of which will be discussed in this article. We have not sought generality or completeness, and resisted the temptation to insert a considerable number of references, but the reader may still find significant material concerning this subject on the selected bibliography.

**palavras-chave:** Propriedade do Valor Intermédio; Continuidade.

**keywords:** Intermediate Value Property; Continuity.

†Trabalho apoiado pela FCT através do CMUP e da bolsa de doutoramento SFRH/BD/28936/2006.

# 1 Introdução

Julgado como inerente à natureza, o conceito de *continuidade* viveu tempos irresolutos enquanto se debatiam fenómenos físicos, a estrutura da matéria e as noções de limite e infinito. O atomismo, que sugeriu paradoxos a Zenão, e a integridade dos pontos que compõem o espaço e o tempo, cuja interpretação física Galileu apoiou [12], vieram a conciliar-se, através dos infinitésimos, com a homogeneidade do mundo natural que os físicos observavam. Séculos antes, Aristóteles [1], que defendia a divisibilidade infinita em todos os objectos, naturais ou matemáticos, formulava, para o movimento, o que veio a entender-se como a *propriedade do valor intermédio*:

> *A thing that is in motion from one place to another cannot at the moment when it was in motion both be in motion and at the same time have completed its motion at the place to which it was in motion: e.g. if a man is walking to Thebes, he cannot be walking to Thebes and at the same time have completed his walk to Thebes:* $(\cdots)$*neither was at rest nor had completed its passage but was in an intermediate state.*

A clarificação, porém, só chegou com Cauchy [7] e Darboux [9]. Dados um intervalo $I$ e uma função $f : I \to \mathbb{R}$, diz-se que $f$ tem a *propriedade do valor intermédio* se, para quaisquer $a, b \in I$ e $d$ no intervalo de extremos $f(a)$ e $f(b)$, existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = d$. Na versão impressa da análise que Cauchy ensinava na L'École Royale Polytechnique, um dos primeiros resultados sobre funções contínuas é o que hoje conhecemos como *teorema dos valores intermédios*:

> $4^e$. ***Théorème.*** *Si la fonction $f(x)$ est continue par rapport à la variable $x$ entre les limites $x = x_0$, $x = X$, et que l'on designe par $b$ une quantité intermédiaire entre $f(x_0)$ et $f(X)$, on pourra toujours satisfaire à l'équation $f(x) = b$ par une ou plusieurs valeurs réeles de $x$ comprises entre $x_0$ et $X$.*

Cauchy tenta convencer o leitor da validade deste enunciado, sugerindo-lhe que siga pela curva que é o gráfico da função e, apelando à sua intuição, que aceite que a continuidade garante que a viagem se faz sem sobressaltos – o que se traduz hoje pela conexão por caminhos do gráfico. Contudo, prudentemente, acrescenta que, na adenda à obra (*Note III*), apresentará uma demonstração de que a imagem de $f$ é um intervalo *par une métode directe et purement analytique.* Assim faz, de facto, num argumento que gasta três páginas mas é irrepreensível, a menos de uma justificação da existência de limite para qualquer sucessão limitada e monótona em $\mathbb{R}$. Essa explicação só surgiu meio século depois, com Dedekind e Weierstrass, aquando da construção axiomática dos números reais como corpo ordenado completo, a partir de uma ordem compatível com as operações algébricas e do axioma do supremo que assegura a sua existência.

Todavia, até ao contributo de Darboux, que provou que a derivada de uma função num intervalo tem a propriedade do valor intermédio e construiu uma derivada em $\mathbb{R}$ que é descontínua em todos os racionais, a propriedade do valor intermédio não se distinguia da continuidade. Seguiram-se-lhe outros exemplos, como o de Volterra (de uma derivada que não é Riemann-integrável, [28]), o de Lebesgue (de uma função com a propriedade do valor intermédio e descontínua em todos os pontos, [16]) e o de Halperin (de uma função com a propriedade do valor intermédio que não é sequer mensurável, [13]).

Esclarecida a diferença entre a continuidade e a propriedade do valor intermédio, e explorado o seu carácter prático, esquecemo-nos por vezes que não são conceitos equivalentes. Este texto tem o propósito de o recordar. Aproveitando o pretexto, discutiremos algumas caracterizações da continuidade e faremos uma digressão breve por várias aplicações relevantes do 4$^{e}$ *théorème* de Cauchy.[1]

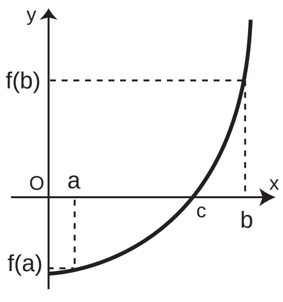



Figura 1: Propriedade do valor intermédio: no caso de $f(x) = x^2 - 2$, garante que existe um número real cujo quadrado é 2.

[1] É atribuída a Bolzano [5] a primeira demonstração deste teorema no caso em que $b = 0$.

# 2 Preliminares

A propriedade do valor intermédio de uma função de variável real precisa que o domínio da função seja um intervalo. Por isso, começaremos com uma revisão breve sobre a noção de conexidade. Depois analisaremos alguns exemplos que nos permitem distinguir a propriedade do valor intermédio da continuidade.

## 2.1 Conexidade

Consideremos $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbf{N}$, com a métrica euclidiana usual. Diz-se que um subconjunto $K$ de $\mathbb{R}^n$, com a métrica induzida, é *conexo* se e só se $K$ não é união disjunta de dois abertos não vazios. Por exemplo, um conjunto singular é sempre conexo porque não contém pontos que cheguem para formar dois abertos disjuntos e não vazios. Por exemplo, $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$ também são conexos; $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $[0,1] \cup [2,3]$ não são. O resultado clássico seguinte indica que, em $\mathbb{R}$, podemos identificar facilmente todos os conexos.

**Proposição 2.1** *Um subconjunto $K$ de $\mathbb{R}$ é conexo se e só se é um intervalo.*

**Prova:** Suponhamos que existe um subconjunto $K$ de $\mathbb{R}$ conexo que não é um intervalo, ou seja, para o qual podemos encontrar reais $a < b < c$ tais que $a, c \in K$ e $b \notin K$. Assim, os conjuntos $U_1 = (-\infty, b) \cap K$ e $U_2 = (b, +\infty) \cap K$ são abertos, disjuntos, não-vazios ($a \in U_1$ e $c \in U_2$) de $K$ e, como $b \notin K$, $U_1 \dot{\cup} U_2 = K$. O que contradiz a hipótese de $K$ ser conexo. Reciprocamente, verifiquemos que todo o intervalo é conexo. Suponhamos que não, e fixemos um tal intervalo $J$ e abertos não vazios de $J$, digamos $U$ e $V$, tais que $J$ é a união disjunta de $U$ e $V$. Tomemos $a \in U$ e $b \in V$; como $U$ e $V$ são disjuntos, tem-se $a < b$ ou $a > b$; prossigamos com o primeiro caso, o segundo trata-se de modo análogo. Defina-se $C = \{x \in U : x < b\}$. Este conjunto é não vazio ($a \in C$) e majorado por $b$. Logo, tem supremo, digamos $s$. Sabemos que, por ser o menor majorante de $C$, $s \leq b$; e que $s$ está em $J$ porque $J$ é um intervalo. Ora, se $s \in U$, então $s < b$ uma vez que $b \notin U$; além disso, como $U$ é um aberto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $[s, s+\varepsilon) \subset U$ e $s + \varepsilon < b$. Em particular, $s + \frac{\varepsilon}{2} \in C$, o que contradiz a propriedade de $s$ ser um majorante de $C$. Concluimos deste modo que, como $J = U \dot{\cup} V$, devemos ter $s \in V$. Estando $s$ em $V$, deduzimos que $s > a$ porque, como $a \in C$, temos $s \geq a$, mas $a \notin V$. E, portanto, como $V$ é um aberto de $J$ e $s$ não é o extremo esquerdo de $J$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $(s - \varepsilon, s] \subset V$. Como não há elementos de $C$ à direita de $s$, o número $s-\varepsilon$ é um majorante de $C$. Contudo, isso não é compatível com o facto de $s$ ser o menor dos majorantes deste conjunto.$\blacksquare$

Dados dois pontos $X$ e $Y$ de $\mathbb{R}^n$, um *caminho* $\alpha$ de $X$ para $Y$ é uma aplicação contínua $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ tal que $\alpha(0) = X$ e $\alpha(1) = Y$. Um subconjunto $K$ de $\mathbb{R}^n$ diz-se *conexo por caminhos* se e só se quaisquer $X$ e $Y$ de $K$ puderem ser unidos por um caminho dentro de $K$. Por exemplo, $[0,1]$ e $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ são conexos por caminhos; $\{(x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} : y = \sin\left(\frac{1}{x}\right)\} \cup \{(0,0)\}$ é conexo mas não é conexo por caminhos ([29], pág. 201). Em $\mathbb{R}$, estas duas noções coincidem pois os intervalos são conexos por caminhos: se $I$ é um intervalo, dados $a, b \in I$, com $a \leq b$, a aplicação $\alpha : [0,1] \to I$ tal que $\alpha(t) = a + t(b-a)$ é contínua e une $a$ a $b$ dentro de $I$. Em geral, podemos apenas garantir que, *se $K$ é conexo por caminhos, então é conexo.* De facto, dados $U$ e $V$ abertos, não-vazios e disjuntos de $K$ cuja união é $K$, então, escolhendo $a \in U$ e $b \in V$ e um caminho $\alpha : [0,1] \to K$ tal que $\alpha(0) = a$ e $\alpha(1) = b$, deduzimos que os conjuntos $I = \{t \in [0,1] : \alpha(t) \in U\}$ e $J = \{t \in [0,1] : \alpha(t) \in V\}$ são abertos de $[0,1]$ (porque $\alpha$ é contínua), não vazios ($0 \in I$, $1 \in J$) e disjuntos cuja união é $[0,1]$, o que não é possível pela Proposição anterior.

## 2.2 Propriedade do valor intermédio

É à distinção entre a continuidade e esta propriedade que se dedica esta secção: apresentaremos dois exemplos de funções que a verificam mas que não são contínuas. O primeiro servirá também para, mais tarde, relacionarmos a continuidade com características do gráfico da função; o segundo, de Lebesgue [16], descreve uma função que verifica a propriedade do valor intermédio mas é descontínua em todos os pontos.

## 2.3 Exemplo 1

Seja $f$ a aplicação definida em $\mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

A imagem de $f$ é o intervalo $[0,1]$ e $f$ verifica a propriedade do valor intermédio embora não seja contínua em $x = 0$ (figura 2).

O próximo resultado revela que este exemplo, que nos parece bizarro, é o que devemos esperar no contexto das funções com a propriedade do valor intermédio mas não contínuas.

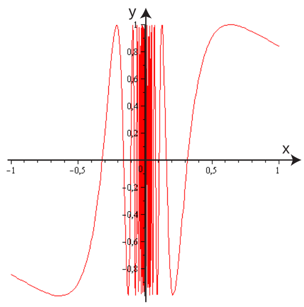



Figura 2: Gráfico do Exemplo 1, obtido pelo Maple

**Proposição 2.2** *Sejam $I$ um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função que verifica a propriedade do valor intermédio e não é contínua em algum ponto de $I$. Então existe uma imagem $d \in f(I)$ tal que $\#\{f^{-1}(\{d\})\}$ é infinito.*

**Prova:** Sejam $x_0$ um ponto onde $f$ não é contínua e $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeno. Existe uma sucessão $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ monótona em sentido estrito que converge para $x_0$ e tal que é válida uma das duas condições seguintes:

1. $\forall n \in \mathbf{N}\, f(x_n) > f(x_0) + \varepsilon$.
2. $\forall n \in \mathbf{N}\, f(x_n) < f(x_0) - \varepsilon$.

Suponhamos que a sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é estritamente crescente e que é a primeira condição que se verifica (o argumento para os outros casos é inteiramente análogo). Como $f$ tem a propriedade do valor intermédio, fixado $d \in ]f(x_0), f(x_0) + \varepsilon[$, existe $z_1 \in ]x_1, x_0[$ tal que $f(z_1) = d$. Uma vez que $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge para $x_0$, existe $n_1 \in \mathbf{N}$ tal que

$$x_0 > x_{n_1} > z_1$$

e, de novo pela propriedade do valor intermédio, podemos encontrar $z_2 \in ]x_{n_1}, x_0[$ verificando $f(z_2) = d$. Prosseguindo deste modo, construímos uma sucessão injectiva de números reais $(z_n)_n$ cuja imagem, por $f$, é $d$ (figura 3). $\blacksquare$

**Corolário 2.3** *Sejam $I$ um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função que verifica a propriedade do valor intermédio e tal que, para qualquer $x \in \mathbb{Q}$, o conjunto $\#\{f^{-1}(\{d\})\}$ é finito. Então $f$ é contínua.*

Em particular, se $f$ verifica a propriedade do valor intermédio e é injectiva, então é contínua. Em geral,

**Proposição 2.4** *Sejam $I$ um intervalo e $f: I \to \mathbb{R}$ uma função que verifica a propriedade do valor intermédio e é monótona. Então $f$ é contínua.*[2]

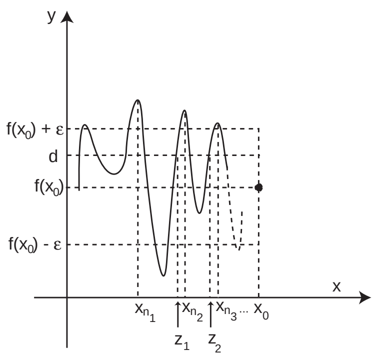



Figura 3: Infinitas pré-imagens

**Prova:** Suponhamos que $f$ é crescente (se for decrescente, considere-se $-f$) e descontínua em $c \in I$. Então a descontinuidade é de tipo *salto*: existem e são finitos os limites $\alpha = \lim_{x \to c^-} f(x)$ e $\beta = \lim_{x \to c^+} f(x)$, o primeiro é estritamente menor que o segundo e o valor de $f(c)$ situa-se no intervalo delimitado por eles [3]. Mas isso implica que existe $\delta > 0$ tal que a propriedade do valor intermédio falha em $[c, c+\delta]$ ou $[c-\delta, c]$. ∎

## 2.4 Exemplo 2

Dado $x \in ]0,1[$, seja $0.a_1a_2a_3\ldots$ a sua representação decimal infinita, que existe e é única. Associemos a $x$ o número $z_x = 0.a_1a_3a_5\ldots$. Defina-se $f: ]0,1[ \to [0,1]$ de acordo com as condições seguintes:

[2] Sem a propriedade do valor intermédio, podemos apenas afirmar que uma função monótona definida num intervalo é contínua no complementar de um conjunto numerável, e derivável no complementar de um conjunto de medida zero [22]. Recorde-se que um subconjunto $\mathcal{M}$ de $\mathbb{R}$ tem *medida zero* se, dado $\varepsilon > 0$, existe cobertura de $\mathcal{M}$ por família numerável de intervalos cuja soma dos comprimentos não excede $\varepsilon$.

[3] Note-se que $\alpha = \sup\{f(x) : x < c\}$ e $\beta = \inf\{f(x) : x > c\}$.

- Se $z_x$ é dízima periódica com período que começa no dígito $a_{2n-1}$,

$$z_x = 0.a_1a_3a_5\ldots\overline{a_{2n-1}a_{2n+1}\ldots a_k},$$

então $f(x) = 0.a_{2n}a_{2n+2}a_{2n+4}\ldots$.

- Caso contrário, $f(x) = 0$.

Por exemplo, $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$; $f\left(\frac{1}{3}\right) = f(0.\overline{3}) = 0.\overline{3}$; $f\left(\frac{1}{2}\right) = f(0.4\,\overline{9}) = 0$; $f(0.\overline{01}) = \frac{1}{9}$; $f(0.\overline{10}) = 0$; $f(0.00\overline{9}) = 1$.

**Lema 2.5** *A função $f$ assim definida tem a propriedade do valor intermédio.*

**Prova:** Sejam $a < b$ de $]0,1[$ e $y_0 = 0.b_1b_2\ldots \in\, ]0,1[$ com $b_i \in \{0,1,\ldots,9\}$. Existe um natural $n$ suficientemente grande tal que, em $[a,b]$, podemos encontrar uma dízima finita $0.c_1c_2\ldots c_{2n-1}$ (estas dízimas formam subconjunto denso de $[a,b]$) de modo que

$$\frac{1}{10^{2n-1}} < \max\left\{|0.c_1c_2\ldots c_{2n-1} - a|, |0.c_1c_2\ldots c_{2n-1} - b|\right\}.$$

Assim sendo, todos os números da forma $0.c_1c_2\ldots c_{2n-1}d_{2n}d_{2n+1}\ldots$, onde $d_i \in \{0,1,\ldots,9\}$, pertencem a $[a,b]$. Escolham-se $d_{2n+1}$, $d_{2n+3}$, $\ldots$ tais que

$$0.c_1c_3\ldots c_{2n-1}d_{2n+1}d_{2n+3}\cdots$$

seja dízima periódica com período que começa em $c_{2n-1}$. Então o número

$$x_0 = 0.c_1c_2\ldots c_{2n-1}b_1d_{2n+1}b_2d_{2n+3}b_3\ldots$$

satisfaz a igualdade $f(x_0) = y_0$. ■

Em resumo, a restrição de $f$ a qualquer subintervalo de $]0,1[$ é sobrejectiva sobre $[0,1]$, e portanto o gráfico de $f$ é denso no quadrado $[0,1]\times[0,1]$. Além disso,

**Corolário 2.6** *$f$ não é contínua em nenhum ponto.*

**Prova:** Sejam $c \in\, ]0,1[$ e $\varepsilon > 0$ definido por

$$\varepsilon = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se} \quad f(c) = 0 \text{ ou } f(c) = 1 \\ \frac{\min\{f(c), 1-f(c)\}}{2} & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Como vimos no lema 2.5, para todo o $\delta > 0$, $f(]c-\delta, c+\delta[\,\cap\,]0,1[) \supseteq\, ]0,1[$, e portanto $f(]c-\delta, c+\delta[\,\cap\,]0,1[) \not\subseteq\, ]f(c)-\varepsilon, f(c)+\varepsilon[$ como deveria, para algum $\delta$, se $f$ fosse contínua em $c$. ■

Em [14] pode ler-se uma discussão sobre uma condição necessária e suficiente para que se verifique a propriedade do valor intermédio, e uma generalização deste conceito.

# 3 Condições suficientes

No que se segue, recordaremos algumas consequências da continuidade de uma função definida num conexo. E, uma vez que a propriedade do valor intermédio é condição necessária mas não suficiente para a continuidade de uma função definida num intervalo, procuraremos condições adicionais sobre a função (como a monotonia na secção anterior) que, com a propriedade do valor intermédio, garantam a continuidade.

## 3.1 Funções contínuas

Da secção anterior, desconfiamos que a conexidade da imagem de uma função e a propriedade do valor intermédio devem estar relacionadas. De facto assim é.

**Proposição 3.1** *Seja $K$ um conjunto conexo e $f$ uma função contínua definida em $K$. Então $f(K) = \{f(x) : x \in K\}$ é conexo.*

**Prova:** Sejam $U$ e $V$ dois abertos disjuntos de $f(K)$ tais que $f(K) = U \cup V$. Como $f$ é contínua, os conjuntos $A = f^{-1}(U)$ e $B = f^{-1}(V)$ são abertos; além disso, são disjuntos porque $U$ e $V$ o são; e $K = A \cup B$, uma vez que a união de $U$ e $V$ é a imagem de $f$. Mas, como $K$ é conexo, devemos ter $A = \emptyset$, caso em que $U = \emptyset$, ou $B = \emptyset$ e portanto $V = \emptyset$. O que significa que $f(K)$ é conexo. ∎

Em particular, como os conexos de $\mathbb{R}$ são os intervalos, podemos concluir, por exemplo, que *não existe função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que leve os números racionais em irracionais e os irracionais em racionais.* A lista de consequências deste resultado é extensa; vejamos uma amostra, de demonstração imediata.

**Corolário 3.2** *Sejam $I$ um intervalo de $\mathbb{R}$ e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua.*

1. *Dados $a < b$ em $I$ e $y_0$ um elemento do intervalo de extremos $f(a)$ e $f(b)$, existe $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) = y_0$.*

2. *Se* $x_1, x_2, \cdots, x_n$ *são elementos de* $I$*, então existe* $t \in I$ *tal que* $f(t) = \frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$.

3. *Se existem* $a < b$ *em* $I$ *tais que* $f(a) < 0 < f(b)$*, então* $f$ *tem um zero em* $]a, b[$.

4. *Se* $f$ *é um polinómio de grau ímpar, então a equação* $f(x) = 0$ *tem uma solução em* $\mathbb{R}$.

5. *Se* $f$ *é injectiva, então é estritamente monótona.*[4]

6. *Não existe um natural* $n$ *par tal que* $f$ *toma cada valor da imagem exactamente* $n$ *vezes.*[5]

O exemplo 1 mostra que a conexão do gráfico de uma função definida num intervalo não basta para a continuidade. O gráfico desse exemplo, apesar de conexo, não só não é conexo por caminhos como não é fechado. E estes dois defeitos têm origem na descontinuidade em 0.

**Proposição 3.3** *Seja* $f : I \to \mathbb{R}$ *uma função contínua num intervalo fechado* $I$*. Então o gráfico de* $f$ *é um fechado de* $\mathbb{R}^2$.

**Prova:** Seja $(x_n, f(x_n))_{n \in \mathbf{N}}$ uma sucessão de elementos do gráfico de $f$ convergente para $(c, d) \in \mathbb{R}^2$. Então $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge para $c$ e, como $I$ é fechado, $c \in I$, logo $f$ é contínua em $c$. E, portanto, a sucessão $(f(x_n))_{n\in\mathbf{N}}$ converge para $f(c)$. Como o limite é único, $d = f(c)$ e o par $(c, d)$ pertence ao gráfico de $f$.[6] ∎

Podemos agora traduzir matematicamente a noção intuitiva de continuidade, a que corresponde à possibilidade de percorrer o gráfico da função sem levantar o lápis.

**Teorema 3.4** *Seja* $f : I \to \mathbb{R}$ *uma função definida num intervalo fechado* $I$*. Então* $f$ *é contínua se e só se o gráfico de* $f$ *é conexo por caminhos.*

[4] De facto, $f$ é um homeomorfismo entre $I$ e o intervalo imagem de $f$.

[5] Mas pode acontecer, como no exemplo $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, que exista $n$ par tal que cada elemento da imagem é atingido não mais de $n$ vezes. Em geral, *existe uma função contínua de um intervalo em* $\mathbb{R}$ *que atinge cada valor da imagem exactamente* $n$ *vezes se e só se* $n$ *é ímpar.* Detalhes em [25] e [26].

[6] O recíproco deste enunciado é falso, como mostra a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = \frac{1}{x}$ se $x \neq 0$ e $g(0) = 0$.

**Prova:** Suponhamos que $f$ é contínua em $I$ e designemos por $\mathcal{G}_f$ o gráfico de $f$. Sejam $(x_0, f(x_0))$ e $(x_1, f(x_1))$ dois elementos de $\mathcal{G}_f$ com $x_0 < x_1$ e considere-se o caminho $\alpha : [0,1] \to \mathcal{G}_f$ definido por $\alpha(t) = (x_0 + t(x_1 - x_0), f(x_0 + t(x_1 - x_0)))$. A função $\alpha$ é contínua porque $f$ o é, e liga, dentro de $\mathcal{G}_f$, os dois pontos.

Reciprocamente, suponhamos que o gráfico de $f$ é conexo por caminhos. O lema que se segue prova que, para $f$ ser contínua, é suficiente que o seu gráfico seja fechado.

**Lema 3.5** *Seja $I$ um intervalo fechado e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função cujo gráfico é um fechado de $\mathbb{R}^2$. Então as afirmações seguintes são equivalentes:*

1. *$f$ é contínua.*
2. *$f$ tem a propriedade do valor intermédio.*
3. *O gráfico de $f$ é conexo.*

**Prova:** Já vimos que $(1) \Rightarrow (2), (3)$. Verifiquemos agora que, sendo o gráfico fechado, (2) implica (1) e que, mesmo sem se supor que o gráfico é fechado, (3) implica (2).
$(2) \Rightarrow (1)$**:** Suponhamos que $f$ tem a propriedade do valor intermédio mas não é contínua num ponto $c \in I$. Então, para algum $\varepsilon > 0$, existe uma sucessão $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente para $c$ tal que

$$\forall n \in \mathbf{N} \;\; f(x_n) \geq f(c) + \varepsilon \;\; \text{ou} \;\; \forall n \in \mathbf{N} \;\; f(x_n) \leq f(c) - \varepsilon.$$

Prossigamos com a primeira alternativa, sendo o argumento análogo se valer a segunda. Pela propriedade do valor intermédio, para cada $n \in \mathbf{N}$, existe $z_n$ entre $c$ e $x_n$ tal que $f(z_n) = f(c) + \varepsilon$. E, portanto, a sucessão do gráfico de $f$ definida por $(z_n, f(z_n))_{n \in \mathbf{N}}$ converge para $(c, f(c) + \varepsilon)$ que não pertence ao gráfico de $f$, contrariando a hipótese de o gráfico de $f$ ser um fechado de $\mathbb{R}^2$.

$(3) \Rightarrow (2)$**:** Admitamos agora que o gráfico de $f$ é conexo e consideremos $y$ entre duas imagens distintas de $f$, digamos $f(a)$ e $f(b)$, sendo $a < b$.

**Lema 3.6** $\mathfrak{A} = \{(x, f(x)) : a \leq x \leq b\}$ *é um conexo de* $\mathbb{R}^2$.

**Prova:** Se assim não fosse, existiriam conjuntos $A$ e $B$ não-vazios, disjuntos, fechados de $\mathfrak{A}$ tais que $\mathfrak{A} = A \cup B$. Então o gráfico de $f$ seria a união disjunta dos quatro conjuntos seguintes

$$\{(x, f(x)) : x < a\}, \quad A, \quad B, \quad \{(x, f(x)) : x > b\}$$

e teríamos uma destas alternativas:

- $(a, f(a)) \in A$ e $(b, f(b)) \in B$.

  Neste caso em que o gráfico de $f$ seria a união disjunta dos fechados não vazios $\{(x, f(x)) : x < a\} \cup A$ e $B \cup \{(x, f(x)) : x > b\}$, o que contradiria a hipótese de o gráfico ser conexo.

  Dualmente, se $(a, f(a)) \in B$ e $(b, f(b)) \in A$, o argumento é idêntico.

- $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ estão ambos em $A$.

  Então o gráfico de $f$ seria a união disjunta dos fechados não vazios $B$ e $A \cup \{(x, f(x)) : x \notin [a, b]\}$, o que não é compatível com a conexão do gráfico de $f$.

  Se $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ estão ambos em $B$, a prova faz-se de modo análogo, com $A$ no lugar de $B$. ■

Finalmente, se $y$ não pertencesse à imagem de $f$ restrita ao intervalo $[a, b]$, então $\{(x, f(x)) : a \leq x \leq b \text{ e } f(x) < y\}$ e $\{(x, f(x)) : a \leq x \leq b \text{ e } f(x) > y\}$ seriam subconjuntos disjuntos, não-vazios ($a$ pertence a um deles e $b$ ao outro) e fechados do gráfico de $f_{|[a,b]}$ cuja união é $\mathfrak{A}$. ■

Terminemos a prova de que, sendo conexo por caminhos, o gráfico de $f$ também é fechado. Seja $(x_n, f(x_n))_{n \in \mathbf{N}}$ uma sucessão de $\mathcal{G}_f$ convergente para um ponto $(c, d)$. Como $I$ é fechado, $c \in I$; queremos provar que $d = f(c)$. De $(x_n, f(x_n))_{n \in \mathbf{N}}$ podemos retirar subsucessão $(x_{n_k}, f(x_{n_k}))_{k \in \mathbf{N}}$ estritamente monótona (crescente, digamos). Por hipótese, para cada $k$, existe um caminho $\gamma_k$ dentro de $\mathcal{G}_f$ que liga $(x_{n_k}, f(x_{n_k}))$ a $(c, f(c))$. Como a sucessão $(x_{n_k})_{k \in \mathbf{N}}$ é crescente e $f$ é uma função, devemos ter Imagem $(\gamma_{k+1}) \subset$ Imagem $(\gamma_k)$, ou seja, podemos definir um caminho $\gamma_1 : [0, 1] \to \mathcal{G}_f$ que liga $(x_{n_1}, f(x_{n_1}))$ a $(c, f(c))$ e passa por $(x_{n_k}, f(x_{n_k}))$ para todo o $k$. E, portanto, $(c, d)$ está na aderência da imagem de $\gamma_1$. Mas, como $\gamma_1$ é função contínua definida num compacto, a imagem de $\gamma_1$ é um fechado de $\mathcal{G}_f$. Em particular, isto implica que $(c, d)$ pertence ao gráfico de $f$. ■

Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é aditiva se, para todo o $x, y \in \mathbb{R}$, se tem $f(x + y) = f(x) + f(y)$. Uma tal função ou é contínua em todos os pontos ou descontínua em todo o domínio. Isso tem a ver com o facto de ser uma aplicação linear do espaço vectorial $\mathbb{R}$ sobre o corpo dos racionais, o que implica que, sendo contínua num ponto, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \lambda x$, para todo o $x \in \mathbb{R}$. Usando uma base deste espaço vectorial[7], digamos

[7] Cada $x \in \mathbb{R}$ é combinação linear finita, com coeficientes racionais, dos elementos desta família de vectores, e uma tal escrita é única.

$\prec \alpha, \beta, \gamma, \cdots \succ$, podemos construir funções que mostram que a hipótese do gráfico ser fechado é essencial em algumas instâncias do lema 3.6. Nomeadamente:

1. Existe uma função aditiva $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ descontínua em todos os pontos, não limitada em nenhum intervalo não degenerado, cujo gráfico é denso em $\mathbb{R}^2$, não fechado e totalmente desconexo: basta indicar as imagens dos elementos da base, que são $F(\alpha) = 1$ e $F(\beta) = F(\gamma) = \cdots = 0$. Deste modo, para cada $x = a\alpha + b\beta + c\gamma + \cdots$, temos $F(x) = a$, logo a imagem de $F$ é $\mathbb{Q}$ e, portanto, $F$ não tem a propriedade do valor intermédio.

2. Existe uma função aditiva $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ descontínua em todos os pontos cujo gráfico é um conexo de $\mathbb{R}^2$ que intersecta cada intervalo aberto horizontal de $\mathbb{R}^2$, e portanto $G$ tem a propriedade do valor intermédio. A construção é feita com uma base de Hamel, tal como no item anterior para gerar $F$, e famílias ordenadas de conjuntos perfeitos de $\mathbb{R}^2$ (detalhes em [15]).

3. Existe uma função $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ descontínua em todo o domínio, com a propriedade do valor intermédio mas cujo gráfico não é conexo: seguindo [6], consideremos a circunferência $\mathcal{S}$ centrada em $(0, 0)$ de raio 1 e defina-se $H(x) = G(x)$ se $G(x) \notin \mathcal{S}$ e $H(x) = G(x)+3$ se $G(x) \in \mathcal{C}$. Deste modo, não se destrói o facto de o gráfico de $G$ intersectar cada intervalo aberto horizontal de $\mathbb{R}^2$, logo $H$ tem a propriedade do valor intermédio, mas o gráfico de $H$ tem pontos interiores e exteriores a $\mathcal{S}$ embora não em $\mathcal{S}$.

## 3.2 Funções primitiváveis

A derivada de uma função pode não ser contínua, como mostra o exemplo

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

Contudo, as descontinuidades da derivada de uma função não são de qualquer tipo e, se definida num intervalo, não podem ocorrer em todos os pontos. Por exemplo, a função definida em $\mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x < 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \\ -1 & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$$

não é a derivada de nenhuma função em $\mathbb{R}$. O que há de especial numa derivada é que ela pode ser representada como o limite pontual de uma sucessão de funções contínuas. De facto, se $f : J \to \mathbb{R}$ é uma função derivável num intervalo aberto $J$, então, para cada $x \in J$, temos

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)}{\frac{1}{n}}.$$

Por isso, o conjunto de pontos onde $f'$ é descontínua é topologicamente pequeno: em [21], pode ler-se uma prova de que o limite pontual de uma sucessão de funções contínuas é uma função contínua excepto num conjunto de primeira categoria[8]. Em particular, porque $J$ é um espaço de Baire [29], o conjunto dos pontos de continuidade de $f'$ é denso em $J$. Além disso, como provou Darboux em [9]:

**Proposição 3.7** *$f' : J \to \mathbb{R}$ tem a propriedade do valor intermédio.*

**Prova:** [20] Fixemos $a < b$ em $J$ e $z_0 \in \,]f'(a), f'(b)[$; procuramos $x_0 \in \,]a, b[$ tal que $f'(x_0) = z_0$. Consideremos as funções contínuas definidas por

$$f_a(t) = \begin{cases} f'(a) & \text{se} \quad t = a \\ \frac{f(t)-f(a)}{t-a} & \text{se} \quad t \neq a \end{cases} \quad \text{e} \quad f_b(t) = \begin{cases} f'(b) & \text{se} \quad t = b \\ \frac{f(t)-f(b)}{t-b} & \text{se} \quad t \neq b \end{cases}$$

Note-se que $f_a(a) = f'(a)$, $f_b(b) = f'(b)$ e que $f_a(b) = f_b(a)$. Como $z_0 \in \,]f'(a), f'(b)[\,=\,]f_a(a), f_b(b)[$, pelo menos uma das seguintes afirmações é válida:

1. $z_0$ está entre $f_a(a)$ e $f_a(b)$.

   Neste caso, como $f_a$ é contínua no intervalo $[a, b]$, existe $t \in ]a, b[$ tal que
   $$z_0 = f_a(t) = \frac{f(t) - f(a)}{t - a}.$$
   Por outro lado, pelo Teorema de Lagrange, existe $x_0 \in ]a, b[$ tal que
   $$\frac{f(t) - f(a)}{t - a} = f'(x_0).$$

2. $z_0$ está entre $f_b(a)$ e $f_b(b)$.

   Prosseguimos como no caso anterior, usando $f_b$ em vez de $f_a$. ■

[8] Um conjunto diz-se de *primeira categoria* se for uma união numerável de conjuntos fechados de interior vazio. Recorde-se que um conjunto tem interior vazio se e só se o seu complementar é denso.

# 4 Operações com funções

Como sabemos, a soma, produto e composição de funções preservam a continuidade dos factores e portanto, se a propriedade do valor intermédio vem assegurada pela continuidade, não se perde quando efectuamos estas operações. Além disso, da Proposição 3.7 e da igualdade $(f \pm g)' = f' \pm g'$, decorre imediatamente que, se $f, g : J \to \mathbb{R}$ são duas funções deriváveis num intervalo aberto $J$, então $f' \pm g'$ tem a propriedade do valor intermédio. Mais: se $I$ e $J$ são intervalos, $f : J \to \mathbb{R}$ e $g : I \to J$ funções com a propriedade do valor intermédio, então a composta $f \circ g : I \to \mathbb{R}$ herda essa propriedade. De facto, dados $a < b$ de $I$, seja $d$ um elemento do intervalo de extremos $f(g(a))$ e $f(g(b))$; como $f$ tem a propriedade do valor intermédio, existe $z$ no subintervalo de $J$ com extremos $g(a)$ e $g(b)$ tal que $f(z) = d$; e, como $g$ tem a mesma propriedade, existe $c \in [a, b]$ tal que $g(c) = z$; logo $f(g(c)) = d$.

Contudo, em geral, a propriedade do valor intermédio não é preservada pelas operações algébricas usuais entre funções. Por exemplo, as aplicações $f$, $g$ e $h$ de domínio $\mathbb{R}$ dadas por

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se} \quad x \neq 0 \\ -1 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

verificam a propriedade do valor intermédio mas $f - g$ e $g \times h$ não.[9] É, pois, natural perguntar se a soma de uma função contínua com uma função que verifica a propriedade do valor intermédio herda esta propriedade. A resposta está no próximo exemplo.

## 4.1 Exemplo de Neuser e Wayment

No texto [18], os autores construíram duas funções definidas em $[0, 1]$, digamos $f$ contínua e $g$ com a propriedade do valor intermédio, tais que $f + g$ não satisfaz esta propriedade. Usaram de modo essencial a noção de conjunto ternário de Cantor; relembremos, por isso, sucintamente alguns aspectos essenciais deste subconjunto de $[0, 1]$.

[9] O que indica que, apesar de verificarem a propriedade do valor intermédio, alguma das funções $f$, $g$ ou $h$ não é a derivada de nenhuma função em $\mathbb{R}$.

### 4.1.1 Escrita na base $p$

Seja $p \in \mathbf{N}\backslash\{1\}$. Para cada $x \in ]0,1[$, existe uma sucessão $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de números inteiros de $\{0,\cdots,p-1\}$ tal que

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{p^n}.$$

Esta soma reescreve-se $x = 0.a_1a_2\cdots_{(p)}$ e designa-se *representação de $x$ na base $p$*. Se $x$ é fracção irredutível $\frac{m}{d}$ e o denominador só tem factores primos comuns à base, então a sucessão $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ não é única: de facto, há exactamente duas, uma quase constante e igual a zero[10], que chamaremos representação finita, e outra quase constante e igual a $p-1$, que se diz representação infinita periódica de período $p-1$. Todos os outros reais têm representações únicas na base $p$. Por exemplo, se $p=10$, $\frac{1}{5} = 0.2_{(10)} = 0.1\overline{9}_{(10)}$; se $p=5$, $\frac{1}{5} = 0.1_{(5)} = 0.0\overline{4}_{(5)}$; se $p=3$, $\frac{1}{5} = 0.\overline{0121}_{(3)}$. Reciprocamente, se $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ é uma sucessão de inteiros de $\{0,1,\cdots,p-1\}$, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{p^n}$ converge para um (único) número real de $[0,1]$. Se $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ não é identicamente nula e algum dos seus termos é distinto de $p-1$, o limite está em $]0,1[$. (Mais detalhes em [19]).

### 4.1.2 Conjunto ternário de Cantor

Para obter o conjunto ternário de Cantor, começamos por remover do intervalo $[0,1]$ o terço médio $]\frac{1}{3},\frac{2}{3}[$; depois, do que sobra, excluímos de novo o terço médio, isto é, retiramos os subintervalos $]\frac{1}{9},\frac{2}{9}[$ e $]\frac{7}{9},\frac{8}{9}[$; e assim sucessivamente. Note-se que, apesar de tantas exclusões, o conjunto $\mathcal{C}$ que resta no final é não vazio: por exemplo, 0 e $\frac{1}{3}$ não são retirados em nenhuma etapa. Por ser intersecção numerável de fechados do compacto $[0,1]$, $\mathcal{C}$ é compacto. E tem medida zero uma vez que a soma total dos comprimentos dos intervalos excluídos é $\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{9}+4\times\frac{1}{27}+\cdots+2^n\times\frac{1}{3^{n+1}}+\cdots = 1$. Logo $\mathcal{C}$ não contém nenhum intervalo não degenerado e, por isso, tem interior vazio e é totalmente desconexo[11]. Apesar disso, é um conjunto perfeito (todo o seu elemento é ponto de acumulação) e infinito não numerável. Além disso, tem uma descrição aritmética de vasto uso: é o conjunto de todos os nú-

[10] Uma sucessão é *quase constante* e igual a $\omega$ se os seus termos são iguais a $\omega$ a partir de uma certa ordem.

[11] Um conjunto $\mathcal{D}$ é *totalmente desconexo* se, para qualquer ponto $P \in D$, o maior subconjunto conexo de $\mathcal{D}$ que o contém é $\{P\}$.

meros reais de $[0,1]$ que admitem uma (e uma só)[12] representação na base 3 onde só figuram os dígitos 0 e 2. Por exemplo, ficamos assim a saber imediatamente que $\frac{1}{4} = 0.\overline{02}_{(3)}$ está em $\mathcal{C}$.

### 4.1.3 A escada do diabo

Sejam $x \in \mathcal{C}$ e $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ a sua representação na base 3 só com os dígitos 0 e 2. Defina-se $f(x) = 0.b_1b_2\cdots b_n\cdots_{(2)}$, onde a sucessão $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tem termo geral igual a $b_n = \frac{a_n}{2}$. Note-se que, estando $a_n$ em $\{0,2\}$, os números $b_n$ pertencem a $\{0,1\}$ e $0.b_1b_2\cdots b_n\cdots$ pode ser entendida como uma representação na base 2. Temos assim uma função $f : \mathcal{C} \to [0,1]$ que é sobrejectiva: dado $y \in [0,1]$ escrito na base 2 como $y = 0.a_1a_2\cdots a_n\cdots_{(2)}$, o real $x = 0.c_1c_2\cdots c_n\cdots_{(3)}$, onde $c_n = 2 \times b_n$ para todo o $n \in \mathbf{N}$, representa um elemento de $\mathcal{C}$ tal que $f(x) = y$. O que indica que $\mathcal{C}$ não é numerável.

Se $x \notin \mathcal{C}$, denote-se por $I_x$ o maior intervalo aberto de $(0,1)$ tal que $x \in I_x$ e $I_x \cap \mathcal{C} = \emptyset$.[13] Os extremos de $I_x$ são dois números reais da forma $\frac{r}{3^s}$, com $r, s \in \mathbf{N}$ e $r < 3^s$, que pertencem a $\mathcal{C}$ e têm a mesma imagem por $f$. O que nos permite estender $f$ a $I_x$ mantendo a monotonia de $f$ na aderência de $I_x$: a extensão é constante e igual ao valor de $f$ num qualquer dos extremos de $I_x$. Por exemplo:

- $f(\frac{1}{3}) = f(0.1_{(3)}) = f(0.0\overline{2}_{(3)}) = 0.0\overline{1}_{(2)} = 0.1_{(2)} = \frac{1}{2}$.
- $f(\frac{2}{3}) = f(0.2_{(3)}) = 0.1_{(2)} = \frac{1}{2}$, e a extensão de $f$ a $]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$ é constante e igual a $\frac{1}{2}$.
- $f(\frac{1}{3^2}) = f(0.01_{(3)}) = f(0.00\overline{2}_{(3)}) = 0.00\overline{1}_{(2)} = 0.01_{(2)} = \frac{1}{4}$.
- $f(\frac{2}{3^2}) = f(0.02_{(3)}) = 0.01_{(2)} = \frac{1}{4}$, e a extensão de $f$ a $]\frac{1}{9}, \frac{2}{9}[$ é constante, igual $\frac{1}{4}$.

Ou seja, a extensão da função $f$ a $[0,1]$, que designamos por $F$, é constante em cada componente conexa[14] do complementar de $\mathcal{C}$ em $[0,1]$. E, portanto, $F'(x) = 0$ num subconjunto denso de $[0,1]$, mas, apesar disso, $F$ não é constante. A razão está no facto de o complementar de $\mathcal{C}$ ser um

[12]Há elementos de $\mathcal{C}$ com mais do que uma escrita na base 3, como é o caso de $\frac{1}{3} = 0.1_{(3)} = 0.0\overline{2}_{(3)}$; contudo, cada um deles só tem uma representação onde não aparece o dígito 1.

[13]Existe um tal maior intervalo. Porquê?

[14]Uma *componente conexa* de um conjunto de $\mathbb{R}^n$ é um seu subconjunto conexo que é maximal para a relação de inclusão.

conjunto também grande: de facto, pela Proposição 3.7, se uma função é derivável num intervalo e tem derivada nula no complementar de um conjunto numerável, então é constante.

**Lema 4.1** $F : [0,1] \to [0,1]$ *é sobrejectiva, crescente e contínua.*

**Prova:** A sobrejectividade já era válida, como vimos, para $F$ restrita a $\mathcal{C}$. Quanto à monotonia, comecemos por verificar que $F$ é crescente em $\mathcal{C}$. Fixemos dois elementos $a < b$ de $\mathcal{C}$, sendo $a = 0.a_1a_2\cdots_{(3)}$ e $b = 0.b_1b_2\cdots_{(3)}$ as suas (únicas) representações na base 3 só com os dígitos 0 e 2. Uma vez que $a \neq b$, podemos considerar o $\min\{i \in \mathbf{N} : a_i \neq b_i\}$, que denotamos por $N$. Em particular, devemos ter $a_N = 0$ e $b_N = 2$. Então:

- se $i < N$, os termos de índice $i$ das representações binárias *correspondentes* de $f(a)$ e $f(b)$ são iguais;
- os $N$-ésimos termos dessas representações binárias de $f(a)$ e $f(b)$ são 0 e 1, respectivamente.

De onde se conclui que $f(a) < f(b)$. Se $a$ (ou $b$) não pertence a $\mathcal{C}$, uma vez que a função $F$ é constante em $I_a$ (ou $I_b$), repetimos o argumento anterior para os pontos extremos de $I_a$ (ou $I_b$), que pertencem a $\mathcal{C}$. Logo $F(a) \leq F(b)$.

Finalmente, como $F$ é uma função monótona (crescente), as descontinuidades que poderia ter seriam de tipo *salto*. Se $c$ fosse um tal ponto de descontinuidade, então, do intervalo $]\lim_{x\to c^-} F(x), \lim_{x\to c^+} F(x)[$, só $F(c)$ estaria na imagem de $F$, o que contradiria a sobrejectividade desta função.[15] ∎

**Observação 4.1** *Dados $a < b$, é possível repetir a construção de $\mathcal{C}$ em $[a,b]$. E também se pode definir uma função análoga a $F$ com domínio $[a,b]$: basta compor $F$ com a aplicação $T : [a,b] \to [0,1]$ dada por $T(x) = \frac{x-a}{b-a}$.*

### 4.1.4 Construção de $g$

Considere-se o conjunto ternário de Cantor em $[0,1]$, que designamos por $\mathcal{C}_{11}$. No intervalo de maior amplitude contido em $[0,1]$ que não intersecta $\mathcal{C}_{11}$, isto é, $]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$, constrói-se um novo conjunto de Cantor $\mathcal{C}_{21}$, nos mesmos moldes do primeiro, removendo sucessivamente os terços médios. Em cada

[15] Há mais informações relevantes sobre este tipo de funções em [22].

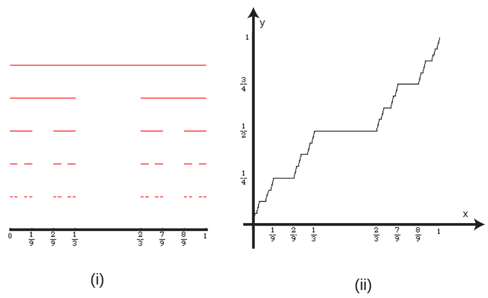



Figura 4: (i): Construção de $\mathcal{C}$. (ii): Escada do diabo

um dos três intervalos de maior amplitude contidos em $[0,1] \setminus \cup_{i=1}^{2} \mathcal{C}_{i1}$, isto é, $]\frac{1}{9}, \frac{2}{9}[$, $]\frac{4}{9}, \frac{5}{9}[$ e $]\frac{7}{9}, \frac{8}{9}[$, construímos um novo conjunto ternário de Cantor $\mathcal{C}_{3j}$, para cada $j \in \{1,2,3\}$, e assim sucessivamente.

De seguida, para cada conjunto de Cantor ternário $\mathcal{C}_{nk}$, consideremos uma função $g_{nk} : \mathcal{C}_{nk} \to [0,1]$ contínua, crescente e sobrejectiva, idêntica à da secção 4.1.3. A função $g$ que procuramos é dada por:

$$g(x) = \begin{cases} g_{nk}(x) & \text{se} \quad x \in \mathcal{C}_{nk} \\ 0 & \text{se} \quad x \in [0,1] \setminus \cup_{i,j} \mathcal{C}_{ij} \end{cases}$$

Note-se que, qualquer subintervalo $]a,b[$ de $[0,1]$ contém um conjunto de Cantor $\mathcal{C}_{ij}$ – logo a união $\cup_{i,j}\mathcal{C}_{ij}$ é densa em $[0,1]$ – e que $g(\mathcal{C}_{ij}) = [0,1]$. Por isso, $g$ verifica a propriedade do valor intermédio mas não é contínua em nenhum ponto.

Desta construção, resulta ainda que:

**Corolário 4.2** *Para toda a função $H : [0,1] \to \mathbb{R}$, existe $G : [0,1] \to \mathbb{R}$ com a propriedade do valor intermédio e descontínua em todo o domínio diferindo de $H$ apenas num conjunto de medida nula.*

**Prova:** Considere-se a família de conjuntos de Cantor $(\mathcal{C}_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$ e a função $g$ definidas anteriormente. Seja $G : [0,1] \to \mathbb{R}$ a função

$$G(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se} \quad x \in \cup_{i,j}\mathcal{C}_{ij} \\ H(x) & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Naturalmente, em vez de $[0,1]$, podemos considerar funções definidas noutro intervalo $[a,b]$ não degenerado – veja-se a observação 4.1. ■

### 4.1.5 Construção de $f$

Uma vez que a aplicação $g_{11}$ é contínua em $\mathcal{C}_{11}$, fixado $\varepsilon_1 < \frac{1}{3}$, existe uma família finita de intervalos abertos de $[0,1]$, digamos $A_1 = \{A_{1i}\}_{i\in\{1,\ldots,k_1\}}$, tal que:

1. $\forall i \neq j \in \{1,\ldots,k_1\} \quad \overline{A_{1i}} \cap \overline{A_{1j}} = \emptyset$.
2. $\forall i \in \{1,\ldots,k_1\} \quad \mathcal{C}_{11} \subset \cup_i A_{1i}$.
3. $\forall i\ \forall x,y \in A_{1i} \quad |g_{11}(x) - g_{11}(y)| < \varepsilon_1 < \frac{1}{3}$.

Seja $B_1$ a subfamília de intervalos abertos de $A_1$ que intersectam $g_{11}^{-1}(\{\frac{1}{2}\})$. Defina-se a aplicação $f_1 : \cup_i A_{1i} \to [0,1]$ por:

$$f_1(x) = \begin{cases} \varepsilon_1 & \text{se} \quad x \text{ pertence a algum elemento de } B_1 \\ 0 & \text{se} \quad x \in \cup_i A_{1i} \text{ mas não à união dos elementos de } B_1. \end{cases}$$

Por exemplo, $f_1(0) = 0$ uma vez que, pela escolha de $\varepsilon_1 < \frac{1}{3}$ e a propriedade (3) acima, 0 não pertence a nenhum elemento de $B_1$; pelo contrário, $f_1(\frac{1}{3}) = \varepsilon_1$. Como os abertos $A_{1i}$ têm aderências disjuntas, a função $f_1$ é contínua e pode estender-se continuamente a $[0,1]$ de modo que seja não negativa e $\max_{x\in[0,1]} |f_1(x)| \leq \varepsilon_1$, extensão que, para simplificar a notação, continuaremos a chamar $f_1$.

Da propriedade (3), deduz-se que, se $x \in \mathcal{C}_{11}$ pertence a algum elemento de $B_1$ (onde, por definição de $B_1$, existe $z_0$ tal que $g_{11}(z_0) = \frac{1}{2}$), então

$$|g_{11}(z_0)| - |g_{11}(x)| \leq |g_{11}(x) - g_{11}(z_0)| < \varepsilon_1$$

e portanto, tendo em conta que $g_{11}$ é função não negativa, $g_{11}(x) > \frac{1}{2} - \varepsilon_1$. Logo

$$(f_1 + g)(x) = (f_1 + g_{11})(x) > \frac{1}{2}.$$

Além disso, se $x \in \mathcal{C}_{11}$ mas não está em nenhum elemento de $B_1$, então $(f_1 + g)(x) = f_1 + g_{11}(x) = g_{11}(x)$ e $g_{11}(x) \neq \frac{1}{2}$, logo também temos $(f_1 + g)(x) \neq \frac{1}{2}$. Daqui resulta que $\delta_1 = \min_{x\in\mathcal{C}_{11}} |\frac{1}{2} - (f_1 + g)(x)| > 0$. E, como $g_{11}$ é crescente e os elementos da família $B_1$ são abertos, o conjunto $g_{11}^{-1}(\{\frac{1}{2}\})$ contém pontos com imagem menor que $\frac{1}{2}$ mas maior que $\frac{1}{2} - \varepsilon_1$, e portanto temos $\delta_1 < \varepsilon_1$. Em resumo:

- $f_1 + g_{11}$ é contínua em $\mathcal{C}_{11}$.
- $\forall x \in \mathcal{C}_{11} \quad (f_1 + g)(x) \neq \frac{1}{2}$.

- $0 < \delta_1 < \varepsilon_1$.

Considere-se agora $\varepsilon_2 < \frac{\delta_1}{3^2} < \frac{1}{3^3}$. Como anteriormente, dado que a aplicação $f_1 + g_{21}$ é contínua em $\mathcal{C}_{21}$, existe uma família finita de intervalos abertos de $[0,1]$, digamos $A_2 = \{A_{2i}\}_{i\in\{1,\ldots,k_2\}}$, tal que:

1. $\forall i \neq j \in \{1,\ldots,k_2\} \quad \overline{A_{2i}} \cap \overline{A_{2j}} = \emptyset$.
2. $\forall i \in \{1,\ldots,k_2\} \quad \mathcal{C}_{21} \subset \cup_i A_{2i}$.
3. $\forall i\ \forall x,y \in A_{2i} \in A_2 \quad |(f_1 + g_{21})(x) - (f_1 + g_{21})(y)| < \varepsilon_2 < \frac{\delta_1}{3^2}$.

Seja $B_2$ a subfamília de intervalos abertos de $A_2$ que intersectam $(f_1 + g_{21})^{-1}(\{\frac{1}{2}\})$. Considere-se a aplicação

$$f_2(x) = \begin{cases} \varepsilon_2 & \text{se } \ x \text{ pertence a algum elemento de } B_2 \\ 0 & \text{se } \ x \in A_2 \text{ mas não à união de elementos de } B_2. \end{cases}$$

De novo, a função $f_2$ é contínua, pode estender-se continuamente a $[0,1]$ de modo que seja não negativa e $\max_{x\in[0,1]} |(f_1+f_2)(x)| \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2$. Além disso, se $x \in \mathcal{C}_{21}$ pertence a algum elemento de $B_2$, então $(f_1+g)(x) > \frac{1}{2} - \varepsilon_2$, de onde se conclui que $(f_1 + f_2 + g)(x) > \frac{1}{2}$. E, se $x \in \mathcal{C}_{21}$ não está em nenhum elemento de $B_2$, então $(f_1 + f_2 + g)(x) = (f_1 + g)(x)$, e já vimos que $(f_1 + g)(x) \neq \frac{1}{2}$, logo também temos $(f_1 + f_2 + g)(x) \neq \frac{1}{2}$. Ou seja:

- $f_1 + f_2 + g_{21}$ é contínua em $\mathcal{C}_{21}$.
- $\forall x \in \mathcal{C}_{21} \quad (f_1 + f_2 + g)(x) \neq \frac{1}{2}$.
- $\delta_2 = \min_{x\in\mathcal{C}_{21}} |\frac{1}{2} - (f_1 + f_2 + g)(x)| \in \,]0, \varepsilon_2[$.

Prosseguindo deste modo, para cada natural $i$ e escolha de $\varepsilon_i < \frac{\delta_{i-1}}{3^i} < \frac{1}{3^{i+1}}$, construímos função $f_i$ contínua, não negativa, definida em $[0,1]$ e tal que:

1. $\forall i \quad \max_{x\in[0,1]} |(f_1 + f_2 + \cdots + f_i)(x)| \leq \sum_{k=1}^{i} \varepsilon_k$.
2. $\forall i,j \quad f_1 + f_2 + \cdots + f_i + g_{ij}$ é contínua em $\mathcal{C}_{ij}$.
3. $\forall i,j \quad \forall x \in \mathcal{C}_{ij}\ (f_1 + f_2 + \cdots + f_i + g)(x) \neq \frac{1}{2}$.
4. $\delta_i = \min_{x\in\mathcal{C}_{ij}} |\frac{1}{2} - (f_1 + f_2 + \cdots + f_i + g)(x)| \in \,]0, \varepsilon_i[$.

Juntemos agora toda esta informação.

**Proposição 4.3** *Para cada* $x \in [0,1]$*, seja* $f(x) = \sum_{i=1}^{+\infty} f_i(x)$*. Então:*

- $f$ *é contínua em* $[0,1]$*;*
- $f+g$ *não tem a propriedade do valor intermédio.*

**Prova:** A continuidade de $f$ resulta do critério de Weierstrass [25] que garante que $\sum_{i=1}^{+\infty} f_i$ converge uniformemente: para todo o $x \in [0,1]$, tem-se $|f_i(x)| \leq \varepsilon_i$ e, pela escolha dos valores dos $\varepsilon_i$'s, a série $\sum_{i=1}^{+\infty} \varepsilon_i$ converge. Para concluir, bastará verificar que, para qualquer $x \in [0,1]$, se tem $(f+g)(x) \neq \frac{1}{2}$, uma vez que $(f+g)(0) = 0$ e $(f+g)(1) = 1$. Ora, se $x \notin \cup_{ij}\mathcal{C}_{ij}$, então $g(x) = 0$ e $f(x) \leq \sum_i^{+\infty} \varepsilon_i < \frac{1}{2}$, logo $(f+g)(x) \neq \frac{1}{2}$. Se $x \in \cup_{ij}\mathcal{C}_{ij}$, note-se que a sucessão $(\delta_n)_n \in \mathbf{N}$ é estritamente decrescente e que

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{2} - (f+g)(x)\right| &= \left|\frac{1}{2} - \left[\left(\sum_{i=1}^{j} f_i\right)(x) + g(x)\right] + \sum_{i=j+1}^{+\infty} f_i(x)\right| \geq \\
&\geq \frac{1}{2} - \left|\left[\left(\sum_{i=1}^{j} f_i\right)(x) + g(x)\right] + \sum_{i=j+1}^{+\infty} f_i(x)\right| \\
&\geq \frac{1}{2} - \left[\left(\sum_{i=1}^{j} f_i\right)(x) + g(x)\right] - \sum_{i=j+1}^{+\infty} f_i(x) \\
&\geq \delta_j - \sum_{i=j+1}^{+\infty} f_i(x) \geq \delta_j - \sum_{i=j+1}^{+\infty} \varepsilon_i \\
&\geq \delta_j - \sum_{i=j+1}^{+\infty} \frac{\delta_{i-1}}{3^i} \geq \delta_j - \sum_{i=j+1}^{+\infty} \frac{\delta_j}{3^i} \\
&\geq \delta_j - \delta_j \sum_{i=j+1}^{+\infty} \frac{1}{3^i} \geq \delta_j - \frac{\delta_j}{2} = \frac{\delta_j}{2} > 0,
\end{aligned}$$

o que garante que $(f+g)(x) \neq \frac{1}{2}$ para todo o $x$. ∎

Tal como acontece com a continuidade, uma perturbação pequena de uma função com a propriedade do valor intermédio pode perdê-la[16]. Analogamente, o limite pontual de funções com a propriedade do valor intermédio pode não satisfazer esta propriedade[17]. Contudo, do exemplo de Neuser e Wayment podemos concluir que, ao contrário da continuidade:

[16]Considere-se, por exemplo, a função $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ identicamente nula, $\epsilon > 0$ arbitrariamente pequeno e a perturbação $M$ de $L$ dada por $M(x) = 0$, se $x < 0$ e $M(x) = \epsilon$, se $x \geq 0$.

[17]Como indica a sucessão $H_n : [0,1] \to [0,1]$ tal que $H_n(x) = x^n$.

**Corolário 4.4** *A propriedade do valor intermédio não é preservada pelo limite uniforme.*

De facto, a sucessão de funções $\left((\sum_{i=1}^{n} f_i) + g\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para $f+g$, mas o limite não herda a propriedade do valor intermédio de cada termo da sucessão.

# 5 Aplicações

## 5.1 Existência de pontos fixos

Dada função $f$ real e de variável real, as abcissas dos pontos de intersecção do gráfico de $f$ com a recta de equação cartesiana $y = x$ dizem-se *pontos fixos* de $f$. Tais abcissas são soluções da equação $f(x) = x$, ou seja, zeros da função $g(x) = f(x) - x$. Se for possível compor $f$ consigo mesma $k$ vezes, obtemos função, que denotaremos por $f^k$, cujos pontos fixos, se existirem, são designados *pontos periódicos* de $f$ de período $k$. Se $f^k(x) = x$ e $f^j(x) \neq x$ para todo o $j \in \{1, 2, \cdots, k-1\}$, diremos que $x$ é *periódico de período mínimo* $k$.

Apesar de nem sempre ser possível exibi-lo explicitamente, há condições sobre $f$ e o seu domínio que, com o Corolário 3.2, garantem que uma função contínua tem um ponto fixo.

**Teorema 5.1** *Sejam $I$ um intervalo fechado e limitado e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(I) \supseteq I$ ou $f(I) \subseteq I$. Então $f$ tem um ponto fixo.*

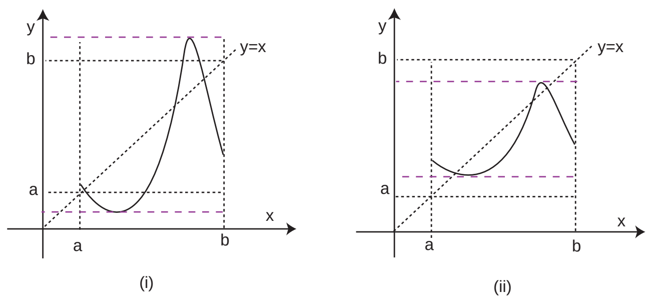



Figura 5: (i): $f([a,b]) \supseteq [a,b]$. (ii): $f([a,b]) \subseteq [a,b]$.

**Prova:** Suponhamos que $I = [a, b]$ e que $f([a, b]) \supseteq [a, b]$. Então existem $x_0 \geq a$ e $x_1 \leq b$ tais que $f(x_0) \leq a$ e $f(x_1) \geq b$. Considere-se a aplicação contínua de domínio $[a, b]$ definida por $g(x) = f(x) - x$. Uma vez que $g(x_0) = f(x_0) - x_0 \leq a - x_0 \leq 0$ e $g(x_1) = f(x_1) - x_1 \geq b - x_1 \geq 0$, sabemos que $g$ tem pelo menos um zero, que é um ponto fixo de $f$. Se $f([a, b]) \subseteq [a, b]$, deduzimos que $f(a) \geq a$ e $f(b) \leq b$ e que a aplicação $g$ verifica as desigualdades $g(a) = f(a) - a \geq 0$ e $g(b) = f(b) - b \leq 0$, logo anula-se em $[a, b]$.[18] ■

A hipótese sobre a inclusão de $f(I)$ em $I$ pode ser substituída por outra que, embora possa ser difícil de testar, é potencialmente mais interessante.

**Corolário 5.2** *Sejam $J$ um intervalo e $f : J \to \mathbb{R}$ uma função contínua que tem um ponto periódico de período mínimo $k > 1$. Então $f$ tem um ponto fixo.*

**Prova:** Designemos por $x_0$ o ponto periódico de período mínimo $k$ de $f$ e considere-se o conjunto $S = \{y_0, y_1, \cdots, y_{k-1}\}$, em que os elementos estão ordenados por ordem crescente e, para cada $i$, existe um $j \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$ tal que $y_i = f^j(x_0)$. Como $k > 1$, o cardinal de $S$ é maior ou igual a dois e portanto $f(y_0) > y_0$ e $f(y_{k-1}) < y_{k-1}$. Seja $m$ o maior índice $i$ tal que $f(y_i) > y_i$. Sabemos que $m \geq 0$, $m < k-1$ e que, se $j > m$, então $f(y_j) < y_j$. Considere-se o intervalo $I = [y_m, y_{m+1}]$. Tem-se $f(y_m) > y_m$, o que implica que $f(y_m) \geq y_{m+1}$. Analogamente, $f(y_{m+1}) \leq y_{m+1}$, o que, com a hipótese $k > 1$, indica que $f(y_{m+1}) \leq y_m$. Logo $f(I) \subseteq I$ e portanto $f$ tem um ponto fixo. ■

Note-se que:

1. Nesta demonstração, não bastam a conexão do domínio e a continuidade da função: é essencial a possibilidade de ordenar os elementos do domínio de $f$ de um modo compatível com as operações algébricas. Por exemplo, este enunciado é falso para uma rotação de 90 graus na circunferência unitária.

2. Para a função contínua $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \frac{1}{1-x}$, todos os pontos do domínio, que não é um intervalo, são periódicos de período 3.

Em [10], pode ler-se uma prova da seguinte generalização deste corolário:

[18] O teorema do ponto fixo de Brouwer generaliza este resultado, estabelecendo que *qualquer endomorfismo contínuo de um disco fechado e limitado do plano tem um ponto fixo.*

**Teorema 5.3 (Sarkovsky, 1964)** *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua num intervalo com um ponto periódico de período 3. Então $f$ tem pontos periódicos de todos os períodos.*

De facto, Sarkovsky [24] provou mais: existe uma ordem total nos números naturais, $\lhd$, distinta da ordem usual, tal que, se $p \lhd q$ e $f$ tem um ponto periódico de período mínimo $p$, então tem um ponto periódico de período mínimo $q$. Nessa ordem, $3 \lhd n \lhd 1$, para todo o $n \in \mathbf{N}$. (Detalhes em [3].)

## 5.2 Mundo antípoda

No plano euclidiano, considere-se uma circunferência $\mathcal{C}$ de raio positivo $r$. Dado $P \in \mathcal{C}$, designe-se por $P^*$ o ponto de $\mathcal{C}$ diametralmente oposto a $P$, e por $\widehat{PP^*}$ o arco de $\mathcal{C}$ de extremos $P$ e $P^*$ percorrido em sentido anti-horário. Note-se que $(P^*)^* = P$. Dizemos que uma função $f : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ é *anti-simétrica* se $f(P^*) = -f(P)$, para todo o $P \in \mathcal{C}$.

Admitindo que a função *temperatura* na Terra varia continuamente com o lugar, o que é plausível, podemos concluir, usando a propriedade do valor intermédio, que, *em cada instante, existem dois pontos antípodas com a mesma temperatura*; coincidência que resulta do seguinte resultado:

**Teorema 5.4 (Borsuk-Ulam I)** *Se $f : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, então existe um par de pontos diametralmente opostos que têm a mesma imagem.*

**Prova:** Consideremos a função anti-simétrica $g : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ definida por $g(X) = f(X) - f(X^*)$. $g$ é contínua uma vez que $f$ e a aplicação $X \to X^*$ o são. Procuramos $R \in \mathcal{C}$ tal que $g(R) = 0$. Fixemos $P \in \mathcal{C}$. Se $g(P) = 0$, então $R = P$ serve. Caso contrário, $g(P^*)$ e $g(P)$ têm sinais contrários, uma vez que $g$ é anti-simétrica. Além disso, cada arco $\widehat{PP^*}$ é essencialmente um intervalo, isto é, existe um homeomorfismo $\mathfrak{F} : \widehat{PP^*} \to [0, 1]$ tal que $\mathfrak{F}(P) = 0$ e $\mathfrak{F}(P^*) = 1$. O lema que se segue completa a prova. ∎

**Lema 5.5** *Se $h : \widehat{PP^*} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua tal que $h(P)h(P^*) < 0$, então existe $R \in \widehat{PP^*}$ tal que $h(R) = 0$.*

**Prova:** A função $H = h \circ \mathfrak{F}^{-1}$ é contínua e está definida num intervalo. Uma vez que $H(0) = h \circ \mathfrak{F}^{-1}(0) = h(P)$ e $H(1) = h \circ \mathfrak{F}^{-1}(1) = h(P^*)$ e dado que, por hipótese, $h(P)h(P^*) < 0$, temos $H(0)H(1) < 0$. Logo existe $c \in ]0, 1[$ tal que $H(c) = 0$. O ponto $R = \mathfrak{F}^{-1}(c) \in \widehat{PP^*}$ é o que se procurava. ∎

## 5.3 Bissecção de uma área

A construção da função área[19] é um capítulo extenso e delicado da Matemática que exige verificações cuidadosas de consistência axiomática. Não sabemos qual é exactamente o seu domínio e, para alguns conjuntos mensuráveis, não conhecemos o seu valor, mas podemos provar algumas propriedades dela que se relacionam com a continuidade e a existência de valores intermédios. No que se segue, utilizaremos apenas regiões planas tais que qualquer recta que as intersecte divide-as em dois subconjuntos que também têm área – e admitiremos como certo que, se a região é um aberto, limitado e conexo, isto é válido. Omitiremos algumas verificações, que se podem ler na referência [8].

**Teorema 5.6 (Borsuk-Ulam II)** *Dado um conjunto $K$ aberto, limitado e conexo do plano, existe uma recta que o divide em dois subconjuntos com igual área.*

**Prova:** Cada recta vertical de equação cartesiana $x = x_0$ divide $K$ em dois subconjuntos, um à esquerda e outro à direita, que designaremos por $K^{esq}_{x_0}$ e $K^{dir}_{x_0}$. Naturalmente pode acontecer que $K^{esq}_{x_0} = \emptyset$ ou $K^{esq}_{x_0} = K$. Procuramos uma tal recta para a qual as áreas de $K^{esq}_{x_0}$ e $K^{dir}_{x_0}$ são iguais. Seja $\alpha > 0$ a área de $K$ e considere-se a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+_0$ que a cada valor de $x_0$ associa a área de $K^{esq}_{x_0}$. Como $K$ é limitado, existe $a$ tal que, para todo o $x_0 \leq a$, se tem $f(x_0) = 0$, isto é, a recta vertical cujos pontos têm abcissa igual a $a$ está à esquerda de $K$. De igual modo, existe $b > a$ tal que, para todo $x_0 \geq b$ se tem $f(x_0) = \alpha > 0$, isto é, $K$ está todo à esquerda da recta vertical $x = b$. Ao transladarmos a recta vertical de $x_0 = a$ até $x_0 = b$ (figura 6(i)), a área de $K^{esq}_{x_0}$ cresce de 0 até $\alpha$. Além disso, $f$ é sobrejectiva porque a área da intersecção de $K$ com cada recta é zero. Logo, como vimos, $f$ é contínua. E, portanto, existe $c \in ]a, b[$ tal que $f(c) = \frac{\alpha}{2}$, ou seja, a recta vertical de equação $x = c$ bissecta $K$.[20] ∎

## 5.4 Bissecção simultânea de duas áreas

O leitor poderá verificar que o argumento anterior prova de facto mais: para toda a direcção do plano, existe uma recta perpendicular a ela que

[19] Uma apresentação primorosa deste assunto pode ler-se em [17] ou [4].

[20] Substituindo rectas por planos, podemos generalizar este resultado para abertos limitados e conexos de $\mathbb{R}^3$: dada uma recta em $\mathbb{R}^3$, existe um plano perpendicular à recta que bissecta o conjunto.

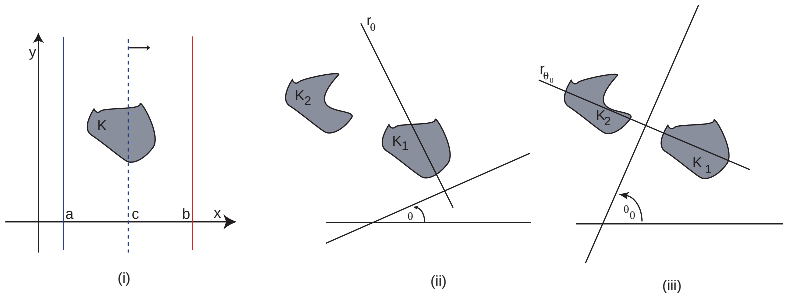



Figura 6: Bissecção de áreas

bissecta o conjunto $K$. Por isso, fixada uma recta que bissecte um conjunto, se a rodarmos, poderemos ter a sorte de também bissectar o outro. É este o guião que, beneficiando da acção conjunta de translações e rotações, prova o seguinte:

**Teorema 5.7 (Borsuk-Ulam III-1)** *Sejam $K_1$ e $K_2$ dois abertos limitados e conexos do plano tais que nenhum está contido na região delimitada pelo outro. Então existe uma recta que os bissecta simultaneamente.*

**Prova:** Sejam $\alpha_1$ e $\alpha_2$ as áreas de $K_1$ e $K_2$. Pelo teorema 5.6, dada uma direcção $\theta$ do plano, existe uma recta $r_\theta$ perpendicular a essa direcção que bissecta $K_1$. Variemos agora $\theta$ de modo que $r_\theta$ rode em sentido anti-horário (figura 6(ii)) e considere-se a função $g$ que a cada ângulo $\theta$ associa a área de $K_{2,\theta}^{esq}$, o subconjunto de $K_2$ que está à esquerda de $r_\theta$. Como $K_2$ é limitado e nenhum dos conjuntos está contido na região delimitada pelo outro, existem ângulos $\theta_1 < \theta_2$ tais que $g(\theta_0) = \alpha_2$ e $g(\theta_1) = 0$. Como $g$ é contínua, existe um ângulo $\theta_0$ tal que $g(\theta_0) = \frac{\alpha_2}{2}$. E, para esse ângulo, a recta $r_{\theta_0}$ que, por definição, bissecta $K_1$, também bissecta $K_2$ (figura 6(iii)). ■

Poderíamos ter seguido outro argumento, usando o teorema 5.4, com a vantagem de não precisarmos da condição sobre a disposição no plano dos conjuntos $K_1$ e $K_2$, provando-se assim que:

**Teorema 5.8 (Borsuk-Ulam III-2)** *Dados dois conjuntos $K_1$ e $K_2$ abertos, limitados e conexos do plano, existe uma recta que os bissecta simultaneamente.*

**Prova:** Uma vez que $K_1$ e $K_2$ são conjuntos limitados, podemos considerar uma circunferência $\mathcal{C}$ de centro $\mathcal{O}$ que delimita $K_1 \cup K_2$. Definam-se, para cada ponto $P$ de $\mathcal{C}$ e para $i \in \{1, 2\}$, o ponto $X_i$ de intersecção da recta $PP^*$ com a recta que bissecta $K_i$ e é perpendicular à direcção $PP^*$. Seja $g_i$ a função que a cada $P \in \mathcal{C}$ associa a *distância orientada* [21] de $X_i$ a $\mathcal{O}$ (figura 7(ii)).

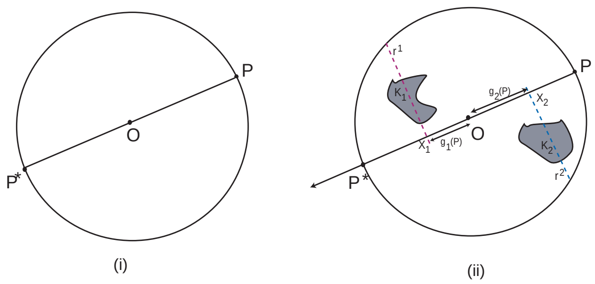



Figura 7

A aplicação $h$ dada por $h(P) = g_1(P) - g_2(P)$ é contínua, logo, pelo teorema 5.4, existe $R \in \mathcal{C}$ tal que $h(R) = h(R^*)$. Por outro lado, como $h$ é anti-simétrica, para um tal $R$ temos $h(R) = -h(R^*)$, e portanto $h(R) = 0$. Ou seja, existe uma recta em $\mathbb{R}^2$ perpendicular à direcção $PP^*$ que bissecta os dois conjuntos simultaneamente. ∎

## 5.5 Bissecção simultânea de três volumes

A demonstração anterior admite uma generalização para $\mathbb{R}^3$, onde a circunferência é substituída por $\mathbf{S}^2$, a superfície esférica de dimensão 2, e a *troca de sinal* pelos *sentidos opostos* de vectores convenientemente escolhidos em pontos diametralmente opostos.

**Teorema 5.9 (Borsuk Ulam IV)** *Dados três subconjuntos $K_1$, $K_2$ e $K_3$ abertos, limitados e conexos de $\mathbb{R}^3$, existe um plano que os bissecta simultaneamente.*

**Prova:** Consideremos uma superfície esférica $\mathcal{S}$ de centro em $\mathcal{O}$ que delimita $K_1 \cup K_2 \cup K_3$. Definam-se, para cada $P$ de $\mathcal{S}$ e para $i \in \{1, 2, 3\}$, o ponto $X_i$ de intersecção da recta $PP^*$ com o plano que bissecta $K_i$ e é perpendicular

[21] *Orientada* significa que, se $X_i$ está entre $P$ e $\mathcal{O}$, então $g_i(P) < 0$.

a $PP^*$. Seja $g_i$ a função que a cada $P \in \mathcal{S}$ associa a *distância orientada* de $X_i$ a $\mathcal{O}$. A aplicação $h$ definida por $h(P) = (g_1(P) - g_2(P), g_1(P) - g_3(P))$ é contínua e anti-simétrica.

**Lema 5.10 ([8])** *Sejam $f$ e $g$ duas funções contínuas e anti-simétricas definidas numa superfície esférica $\mathbf{S}^2$. Então $f$ e $g$ têm um zero comum.*

Daqui resulta que existe $P \in \mathcal{S}$ tal que $h(P) = (0, 0)$. O que significa que existe uma direcção em $\mathbb{R}^3$ e um plano perpendicular a essa direcção que bissecta os três conjuntos simultaneamente. ∎

E, portanto, *em cada instante, existem dois pontos antípodas da Terra com as mesmas temperatura e pressão atmosférica.*

## 5.6 Congruência segundo Cavalieri

Cavalieri foi discípulo de Galileu. A sua obra mais apreciada, *Geometria indivisibilibus*, é dedicada ao *método dos indivisíveis*, que conhecemos hoje como um caso particular do Teorema de Fubini [23]. Um *indivisível* de uma região plana seria, para Cavalieri, uma componente atómica da figura – uma *corda* – e a região seria formada por uma família, finita ou infinita, de tais cordas. O *princípio de Cavalieri* asseguraria então que, se numa tal região com área deslocarmos cada membro dessa família de cordas numa mesma direcção de modo que os extremos das cordas ainda tracem um bordo contínuo, então a área não se altera. O sucesso deste método deriva do facto de ele permitir determinar áreas sem ter de se apelar a técnicas avançadas de cálculo: para determinar a área de uma figura, bastaria encontrar outra com área conhecida que fosse formada por uma mesma família de cordas empilhadas, segundo uma única direcção e pela mesma ordem.[22]

**Definição 5.1** *Duas regiões do plano dizem-se* C-congruentes *se existe uma direcção tal que todas as rectas do plano paralelas a essa direcção intersectam as duas regiões em segmentos de igual comprimento.*

Naturalmente, duas figuras C-congruentes têm área igual. A propriedade do valor intermédio permite-nos provar o recíproco na família dos triângulos.

**Teorema 5.11** *Dois triângulos com a mesma área são C-congruentes.*

**Prova:** [11] Sejam $ABC$ e $A'B'C'$ dois triângulos com lados de comprimentos, respectivamente, $a, b, c$ e $a', b', c'$.

[22] O que nem sempre é fácil ou possível. Por exemplo, para um círculo, não existe um polígono com estas características.

**Caso 1**. Os dois triângulos têm um lado em comum, digamos $a = a'$.

Situemos os dois triângulos no plano de modo que o lado comum esteja sobre uma linha recta $r$ fixada e os vértices $A$ e $A'$ fiquem do mesmo lado de $r$ (figura 8). Como as áreas dos dois triângulos são iguais, estes têm a mesma altura relativamente às bases $a$ e $a'$, e portanto os vértices $A$ e $A'$ estão numa recta paralela a $r$. Logo todas as rectas paralelas a $r$ intersectam os dois triângulos em segmentos de igual comprimento. De facto, cada um desses segmentos divide cada um dos triângulos na união de um triângulo menor e um trapézio; estes últimos têm a mesma base e a mesma altura, logo a mesma área; por isso, os subtriângulos também têm área igual; e, como têm a mesma altura, têm de ter a mesma base na direcção de $r$. O que significa que os dois triângulos são C-congruentes.

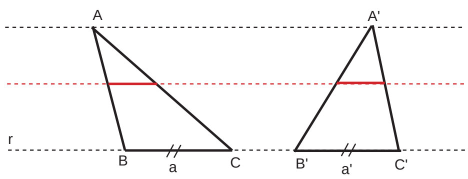


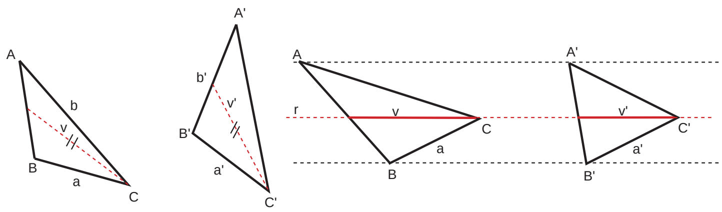

Figura 8: Caso 1.

**Caso 2**. Os lados estão relacionados por desigualdades estritas mas não todas do mesmo sentido: por exemplo, $a > a'$ e $b < b'$.

Consideremos uma corda que ligue o vértice $C$ do triângulo $ABC$ ao lado oposto a este vértice. No triângulo $A'B'C'$, fixemos corda idêntica que passa em $C'$, intersecta o lado oposto a este vértice e divide o triângulo em duas regiões com áreas iguais às correspondentes no triângulo $ABC$ (figura 9).

Quando a corda no triângulo $ABC$ liga $C$ a $B$, a correspondente em $A'B'C'$ liga $C'$ a $B'$, e a relação de comprimentos é $\frac{a}{a'} > 1$. Como os triângulos têm a mesma área, quando a corda no triângulo $ABC$ une $C$ a $A$, a correspondente em $A'B'C'$ une $C'$ a $A'$, e a relação de comprimentos é agora $\frac{b}{b'} < 1$. Pela propriedade do valor intermédio, existe uma corda de comprimento $v$ entre $a$ e $b$ tal que $\frac{v}{v'} = 1$. Coloquemos os dois triângulos no plano de modo que os segmentos de comprimento $v$ e $v'$ recém-obtidos estejam sobre uma linha recta $r$ fixada e os vértices $A$ e $A'$ fiquem do mesmo lado de $r$. Então, como os dois triângulos têm a mesma área, os vértices $A$ e

$A'$ estão à mesma altura relativamente a $r$, e $v$ e $v'$ dividem os triângulos em dois subtriângulos de áreas correspondentes iguais. E agora, cada um dos pares de subtriângulos com igual área está nas condições do que foi descrito como Caso 1.




■

Figura 9: Caso 2.

**Caso 3**. Os lados estão relacionados por desigualdades estritas e todas do mesmo sentido: por exemplo, $a < a'$, $b < b'$ e $c < c'$.

Seja $m'$ o comprimento de uma altura interior do triângulo $A'B'C'$, digamos pelo vértice $C'$, e consideremos o comprimento $m$ de uma corda que liga $C$ ao lado oposto e divide o triângulo $ABC$ em dois subtriângulos com áreas iguais às obtidas no triângulo $A'B'C'$ através da divisão efectuada pela altura de comprimento $m'$ (figura 10).

Note-se que $m > m'$, uma vez que, se $h$ é a altura em $C$ no triângulo $ABC$, então $m \geq h$ e, como os triângulos têm a mesma área $m'c'$ e $c < c'$, podemos deduzir que $h = m'\frac{c'}{c} > m'$. Como anteriormente, consideremos agora cordas que ligam $C$ e $C'$ aos lados opostos e dividem os respectivos triângulos em regiões de áreas correspondentes iguais. Quando a corda é a de comprimento $m'$ seleccionada há pouco, a relação de comprimentos é $\frac{m}{m'} > 1$. Como os triângulos têm a mesma área, quando a corda no triângulo $ABC$ liga $C$ a $A$, a correspondente em $A'B'C'$ liga $C'$ a $A'$ e a relação de comprimentos é agora $\frac{b}{b'} < 1$. Pela propriedade do valor intermédio, existe uma corda de comprimento $v$ tal que $\frac{v}{v'} = 1$. O argumento prossegue agora como nos casos anteriores.

## 5.7 Nota final

Acontece por vezes sentarmo-nos a uma mesa de aparência firme que afinal balança sempre que nos reclinamos. Reparamos então que, apesar de

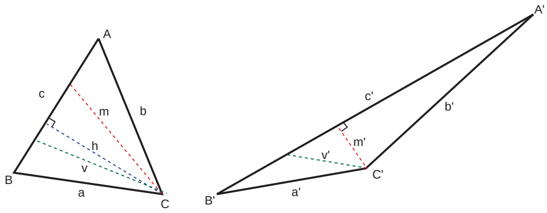



Figura 10: Caso 3.

as quatro pernas serem de igual tamanho, o piso não é perfeitamente plano, e só três delas assentam nele. Para eliminar rapidamente este desconforto, é usual colocar um calço na perna que parece precisar de ser nivelada. Na verdade, para a maioria das mesas e tipos de chão, é possível adoptar outra solução: basta rodar a mesa em torno do seu centro de um ângulo que não ultrapassa 180 graus, e para mesas quadradas nem excede 90. Esta é uma consequência não elementar do teorema do valor intermédio, que vem sendo analisada desde os anos sessenta do século passado em inúmeros artigos. Veja-se, a propósito, a bibliografia do texto [2] que, em 2005, resolveu parte deste problema.

## Referências

[1] Aristotle, *Physics*, Rutgers University Press, 1995 (tradução de J. Sachs)

[2] B. Baritompa, R. Löwen, B. Polster, M. Ross, *Mathematical table turning revisited*, Mathematical Intelligencer, 29 (2007) 49–58

[3] L.S. Block, W.A. Coppel, *Dynamics in one dimension*, LNM, Springer, 1992

[4] V. Boltianskii, *Hilbert's third problem*, Winston&Sons, 1978

[5] B. Bolzano, *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes daß zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetzetes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege*, Gottlieb Haase, 1817

[6] C.E. Burgess, *Continuous functions and connected graphs*, Amer. Math. Monthly, Vol. 97, Nº 4, (1990) 337–339

[7] A.-L. Cauchy, *Cours d'Analyse*, Chez Debure, 1821

[8] W.G. Chinn, N.E. Steenrod, *First concepts of topology*, Random House, 1966

[9] G. Darboux, *Mémoire sur les fonctions discontinues*, Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, 2e. série, 4 (1875) 57–112

[10] R. Devaney, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, 2nd ed., ABP- Westview, 2003

[11] H. Eves, *Two surprising theorems on Cavalieri congruence*, The College Mathematical Journal, Vol. 22, Nº 2 (1991) 118–124

[12] G. Galilei, *Dialogues concerning two new sciences*, Dover, 1954 (tradução de H. Crew e A. Salvio)

[13] I. Halperin, *Discontinuous functions with the Darboux property*, Canadian Math. Bulletin, Vol. 2, Nº 2 (1959) 111–118

[14] I. Halperin, *On the Darboux property*, Pacific J. Math., Vol. 5, Suppl. 1 (1955), 703–705

[15] F.B. Jones, *Connected and disconnected plane sets and the functional equation* $f(x + y) = f(x) + f(y)$, Bull. Amer. Math. Soc., 48 (1942) 115–120

[16] H. Lebesgue, *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, 2ème ed., Gouthier-Villars, 1928

[17] E. Moise, *Elementary Geometry from an Advanced Standpoint*, Addison-Wesley, 3rd ed., 1990

[18] D.A. Neuser, G. Wayment, *A note on the intermediate value property*, The American Mathematical Monthly, Vol. 81, No. 9 (1974) 995–997

[19] I. Niven, *Irrational Numbers*, The Carus Mathematical Monographs No. 11, 1956

[20] L. Olsen, *A new proof of Darboux's theorem*, The American Mathematical Monthly, Vol. 111, No. 8 (2004) 713–715

[21] J. Oxtoby, *Measure and Category*, Springer-Verlag, 1970

[22] F. Riesz, B. Sz.-Nagy *Leçons d'analyse fonctionelle*, Éditions Jacques Gabay, 3ème ed., 1990

[23] H.L. Royden *Real analysis*, Macmillan, 2nd ed., 1968

[24] A.N. Sarkovsky, *Coexistence of cycles of a continuous map of a line into itself*, Ukr. Mar. Z. 16 (1964) 61–71

[25] M. Spivak, *Calculus*, Publish or Perish, 3rd ed., 1994

[26] M. Spivak, *Answer Book for Calculus*, Publish or Perish, 3rd ed., 1994

[27] J. Stillwell, *Mathematics and its History*, Springer, 2nd pr., 1991

[28] V. Volterra, Giornale di Matematiche di Battaglini, 1881

[29] S. Willard, *General Topology*, Addison-Wesley, 1968