

Boletim
da Sociedade Portuguesa de Matemática

Propriedade e Edição

Sociedade Portuguesa de Matemática, Av. da República, 45–3º E, 1050–187 Lisboa

☎ 217939785 ☎ 217952349

Internet: <http://www.spm.pt>

Directora

Ana Jacinta Soares, Universidade do Minho, ajsoares@math.uminho.pt

Editores

José Pedro Patrício, Universidade do Minho, pedro@math.uminho.pt; Júlio Severino das Neves, Universidade de Coimbra, jsn@mat.uc.pt; Carlos Florentino, Fac. Ciencias, Universidade de Lisboa, caflorentino@fc.ul.pt

Conselho Editorial

A. Bivar-Weinholtz, Universidade de Lisboa; A. Pereira Rosa, Esc. Sec. Maria Amália Vaz de Carvalho; A. Machado, Universidade de Lisboa; C. Braumann, Universidade de Évora; J. Almeida, Universidade do Porto; J. F. Rodrigues, Universidade de Lisboa; L. T. Magalhães, Instituto Superior Técnico; M. Figueira, Universidade de Lisboa; R. Vilela Mendes, Universidade de Lisboa; T. Alpuim, Universidade de Lisboa; A. Caetano, Universidade de Aveiro.

Antologia.

Editor: Augusto Franco Oliveira, Universidade de Évora, francoli@kqnet.pt

Entrevistas.

Editor: Simões Pereira, Universidade de Coimbra, siper@mat.uc.pt

Estatística.

Editor: Alfredo Egídio Reis, Universidade Técnica de Lisboa, alfredo@iseg.utl.pt

Forum sobre o Ensino da Matemática.

Editora: Suzana Nápoles, Universidade de Lisboa, msnapoles@fc.ul.pt

Forum sobre a Investigação Matemática.

Editora: Irene Fonseca, Carnegie Mellon University, fonseca@andrew.cmu.edu

História da Matemática.

Editor: Luís Saraiva, Universidade de Lisboa, lmsaraiva@fc.ul.pt

Matemática Recreativa.

Editores: Jorge Picado, Universidade de Coimbra, picado@mat.uc.pt; Paula Mendes Martins, Universidade do Minho, pmendes@math.uminho.pt

Problemas.

Editor: Jorge Nuno Silva, Universidade de Lisboa, jnsilva@cal.berkeley.edu

Recensões Críticas.

Editor: Jorge Almeida, Universidade do Porto, jalmeida@fc.up.pt

Impressão e acabamento: Dossier | Comunicação e Imagem • Alameda dos Oceanos, lote 3.10.06 B • Parque das Nações • 1990–186 Lisboa

Depósito Legal: nº 63134/93

ISSN: 0872–3672

ICS: 106437

Informações aos autores

O Boletim da SPM publica-se, em geral, duas vezes por ano.

O Boletim constitui um espaço diversificado de informação, promove a circulação de ideias e de opiniões, bem como troca de experiências entre os que ensinam, investigam ou aplicam a Matemática.

O Boletim não publica artigos de investigação especializada. Estes trabalhos poderão ser submetidos à *Portugaliae Mathematica*, revista de prestígio internacional, também propriedade da SPM e editada pela European Mathematical Society.

Os artigos dedicados a assuntos de natureza pré-universitária deverão, de preferência, ser submetidos à *Gazeta de Matemática*.

As actividades da SPM, nomeadamente das suas Delegações Regionais e Secções, são noticiadas com regularidade no Boletim.

As opiniões expressas pelos autores dos artigos publicados no Boletim não representam necessariamente posições da SPM.

Os Editores das Secções são os únicos responsáveis pela aceitação de artigos nas Secções que dirigem. A Secção Opinião — Cartas ao Director é da exclusiva responsabilidade da Directora do Boletim. Todos os outros trabalhos serão enviados pelos editores a *Referees* especializados para aconselharem sobre a respectiva publicação (com eventuais alterações).

Os manuscritos devem ser submetidos em <http://revistas.rcaap.pt/BoletimSPM> ou enviados por correio electrónico para um dos editores. Agradece-se o envio da versão PDF do texto. Os autores devem indicar as respectivas instituições, bem como os seus endereços de correio electrónico. Os trabalhos submetidos devem incluir um sumário em português e em inglês, e uma lista de palavras-chave nestas duas línguas. Recomenda-se vivamente que os trabalhos sejam preparados em $\text{\LaTeX}$. A bibliografia deve seguir o padrão habitual no $\text{\LaTeX}$.

Endereço para correspondência:

Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática

Av. da República, 45-3º E, 1050-187 Lisboa

ISSN 0872–3672

SUMÁRIO

Artigos

- Alexandre A. P. Rodrigues*
Acerca do Último Problema de Takens1
- Afonso Carvalho*
A note on the factorisation of non-singular matrices 23
- Mário M. Graça*
Regras companheiras de Simpson-Milne 31

Secção de Problemas

- Jorge Nuno Silva*
Notas sobre o Problema anterior e Plano *psicadélico* 55

Secção de História

- António Costa Canas, Magda Ramires Marabujo, Teresa Sousa*
O corretor de rumos de Gago Coutinho e Sacadura Cabral 61
- Francisco Wagner Soares Oliveira, Ana Carolina Costa Pereira*
Sobre a navegação portuguesa do século XVI à luz do instrumento jacente no plano 93

ACERCA DO ÚLTIMO PROBLEMA DE TAKENS

*Alexandre A. P. Rodrigues*¹

Centro de Matemática da Universidade do Porto
e Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
Rua do Campo Alegre 687, 4169-007 Porto, Portugal
e-mail: alexandre.rodrigues@fc.up.pt

Resumo: No contexto de equações diferenciais autónomas, uma solução limitada com comportamento histórico é aquela para a qual as médias de Birkhoff não convergem. O Último Problema de Takens descrito em (F. Takens (2008), *Nonlinearity* 21(3), T33–T36) questiona a existência de sistemas dinâmicos suaves onde o comportamento histórico ocorre persistentemente num conjunto de condições iniciais com medida de Lebesgue positiva. Tendo este desafio como mote, nesta nota pretende-se fazer uma pequena digressão sobre o problema, assim como referir alguns dos desenvolvimentos recentes do tema em fluxos com ciclos heteroclínicos associados a soluções periódicas com multiplicadores de Floquet reais.

Abstract: In the context of an autonomous differential equation, a limited solution with historic behaviour is one for which the Birkhoff averages do not converge as time goes to infinity. Takens' Last Problem described in (F. Takens (2008), *Nonlinearity*, 21(3), T33–T36) asks for smooth dynamical systems where historic behaviour occurs persistently for initial conditions in a set with positive Lebesgue measure. This note reports recent progresses on the field, stressing the role of heteroclinic networks involving periodic solutions with real Floquet multipliers.

palavras-chave: Comportamento histórico, Médias de Birkhoff, Ciclo heteroclínico, Tangências, Fenómenos de Newhouse.

keywords: Historic behaviour, Birkhoff averages, Heteroclinic cycle, Tangencies, Newhouse phenomena.

¹A investigação levada a cabo pelo autor, membro do Centro de Matemática da Universidade do Porto (UID/MAT/00144/2019), teve apoio financeiro da Fundação para a Ciência e a Tecnologia (FCT), através do programa FEDER, com fundos nacionais (Ministério da Ciência e Ensino Superior) e da União Europeia (FEDER). A.A.P. Rodrigues é apoiado financeiramente através do Programa Investigador FCT (IF/00107/2015).



Figura 1: Retrato de Floris Takens na Academia da Universidade de Groningen, da autoria de Jacqueline Kasemier. (**Fonte:** Foto de *University of Groningen's Academy*)

1 Introdução

A descrição geométrica de um atrator caótico é, em geral, difícil e é nesse contexto que a análise qualitativa e probabilística de equações diferenciais se torna relevante. Num registo longo de séries temporais de um sistema caótico, espera-se que, para condições iniciais genéricas, as médias temporais convirjam [19]. No entanto, há casos em que estas médias temporais não se aproximam de nenhum número, independentemente do tempo que se espere. Este comportamento, dito *histórico*, está associado a dinâmica intermitente, que ocorre tipicamente perto de ciclos heteroclínicos (ou em sistemas cujos fluxos podem ser aproximados por ciclos).

Tendo [12] como ponto de partida, o objetivo deste texto é o de explorar a persistência de comportamento histórico para uma classe de sistemas envolvendo ciclos heteroclínicos robustos, induzindo uma resposta parcial ao *Último Problema de Takens* [24]. Mais precisamente, discutir-se-á a dinâmica perto de atratores heteroclínicos caóticos não hiperbólicos que exibem, na sua vizinhança, um conjunto “visível” de soluções cujas médias temporais não convergem, e dentro do qual o fenómeno da existência de comportamento histórico é persistente (*i.e.* mantém-se para pequenas perturbações do sistema). Esta análise é efetuada, numa primeira fase, estudando-se uma família uni-paramétrica de campos de vetores cujo fluxo exhibe soluções periódicas conectadas ciclicamente e cujas variedades invariantes coincidem – veja-se §3. Seguidamente, em §4, mostrar-se-á que, sob perturbações genéricas que envolvem a quebra de coincidência das variedades, existem valores

do parâmetro para os quais as variedades invariantes de soluções periódicas consecutivas (do ciclo) exibem tangências homoclínicas. Isto implica a *propriedade de Newhouse* [16] da existência de densidade de tangências (no parâmetro de bifurcação) e de infinitos poços. Os resultados de [5, 13] podem então ser usados para fornecer uma resposta afirmativa ao problema proposto por Takens em [24].

1.1 Médias temporais e comportamento histórico

Sejam M uma variedade tridimensional compacta e sem bordo, e $f : M \rightarrow TM$ um campo de vetores suficientemente suave (pelo menos C^2) associado à equação diferencial autónoma:

$$\dot{x} = f(x), \quad \text{onde} \quad x(0) = x_0 \in M. \quad (1)$$

O grupo de difeomorfismos a um parâmetro $\varphi : I \times M \rightarrow M$, $I \subset \mathbb{R}$, que verifica

$$f(x) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, x)|_{t=0}$$

designa-se por *fluxo* associado ao Problema de Valor Inicial (1). Como M é uma variedade compacta e sem bordo, então pode-se assumir que $I = \mathbb{R}$. A terminologia que se segue foi introduzida por Ruelle [19].

Definição 1 Diz-se que a solução $\varphi(t, x_0)$, $x_0 \in M$, tem comportamento histórico se existir uma função contínua $H : M \rightarrow \mathbb{R}$, por vezes designada por observável, tal que a média temporal de Birkhoff

$$\frac{1}{T} \int_0^T H(\varphi(t, x_0)) dt \quad (2)$$

diverge.

Segundo [19, 24], a expressão *comportamento histórico* deve-se ao facto de uma solução $\varphi(t, x_0)$, $t \in \mathbb{R}$ e $x_0 \in M$, com comportamento histórico, reter informações sobre o seu passado. A não existência de limite em (2) pode ser assegurada através da existência de pelo menos duas sequências de tempos diferentes, digamos $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ e $(S_i)_{i \in \mathbb{N}}$, tais que:

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \frac{1}{T_i} \int_0^{T_i} H(\varphi(t, x_0)) dt \neq \lim_{i \rightarrow +\infty} \frac{1}{S_i} \int_0^{S_i} H(\varphi(t, x_0)) dt.$$

O comportamento limite das médias temporais em relação a uma dada medida é estudado desde Sinai [21], Ruelle [20] e Bowen [3]. A existência de um conjunto aberto (não vazio) de soluções exibindo comportamento histórico persistente é visto como um fenómeno raro.

Antes de se estudarem alguns exemplos com e sem comportamento histórico, convém relembrar ao leitor alguns conceitos sobre ciclos e redes heteroclínicos e que podem ser encontrados na referência [7].

1.2 Ciclos e redes heteroclínicos

Sejam $A \subset M$ um conjunto invariante pelo fluxo do sistema (1) e d a métrica riemanniana associada a M . Para cada conjunto invariante A definam-se os conjuntos

$$W^s(A) = \{x \in M : \lim_{t \rightarrow +\infty} d(\varphi(t, x), A) = 0\}$$

e

$$W^u(A) = \{x \in M : \lim_{t \rightarrow -\infty} d(\varphi(t, x), A) = 0\},$$

os quais possuem estrutura de variedade diferenciável e são designados de *variedades invariantes* de A , respectivamente *estável* e *instável*. Os casos mais interessantes dizem respeito a conjuntos invariantes A tais que $W^s(A) \neq A$ e $W^u(A) \neq A$, os quais irão ser designados, daqui em diante, por *selas invariantes* (veja-se Figura 2).

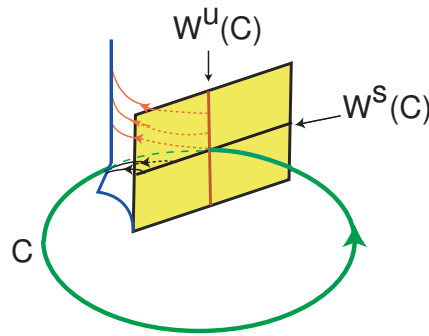


Figura 2: Exemplo de uma sela invariante com variedades estável e instável não triviais.

Dadas duas selas invariantes A e B , se $W^u(A) \cap W^s(B) \neq \emptyset$, dizemos que existe uma *ligação heteroclínica* de A para B . No caso de $\dim [W^u(A) \cap$

$W^s(B)] > 1$, essa ligação heteroclínica corresponde a uma união de curvas-solução do sistema (1) que se aproximam de A no passado e de B no futuro.

Ciclos heteroclínicos têm definições mais ou menos formais na literatura. Seguindo de perto Field [7], um *ciclo heteroclínico* é dado pela união de um conjunto finito ordenado de selas invariantes $\mathcal{A} = \{A_i, i = 1, \dots, k\}$ tais que existe um ciclo de ligações heteroclínicas entre elas, isto é, existe uma ligação heteroclínica de A_j para A_{j+1} , para todo $j = 1, \dots, k-1$ e de A_k para A_1 . Quando o ciclo só possui uma sela, o ciclo é designado de *homoclínico*. Uma *rede heteroclínica* é a união conexa de ciclos heteroclínicos, de modo que, para qualquer par de selas A_i e A_j na rede, existe uma sequência de ligações heteroclínicas que as une ($i, j \in \{1, \dots, k\}$).

1.3 Bacia de atração

Sejam $A \subset M$ um conjunto invariante pelo fluxo do sistema (1). A bacia de atração associada a A , denotada daqui em diante por $\mathcal{B}(A)$, é definida por:

$$\mathcal{B}(A) = \{x \in M : \omega(x) \subset A\} \setminus A,$$

onde $\omega(x)$ é o conjunto de todos os pontos de acumulação da trajectória $\varphi(t, x)$, com $t \in \mathbb{R}^+$.

1.4 Exemplos sem comportamento histórico visível

Exemplo 1.

Seja f um campo de vetores C^2 em $\mathbb{R}^n$ e $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Sejam $p \in \mathbb{R}^n$ um ponto de equilíbrio assintoticamente estável de (1) e $C \subset \mathbb{R}^n$ uma solução ξ -periódica atratora de (1) parametrizada por s , $C(s)$ – vejam-se Figuras 3(a) e 3(b). Se $X \in \mathcal{B}(\{p\})$ e $Y \in \mathcal{B}(C)$, então:

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T H(\varphi(t, X)) dt = H(p) \in \mathbb{R}$$

e

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T H(\varphi(t, Y)) dt = \int_0^\xi H(C(s)) ds \in \mathbb{R}.$$

Em particular, nenhuma solução da bacia de atração de p e C exhibe comportamento histórico.

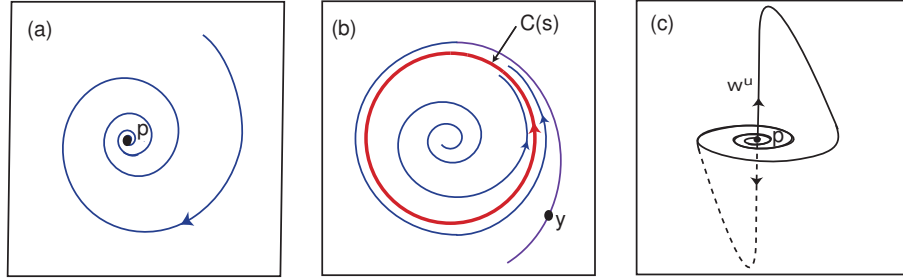


Figura 3: Esboço de: (a) um ponto de equilíbrio, (ii) uma solução periódica e (iii) uma rede homoclínica, todos atratores.

Exemplo 2.

Sejam f um campo de vetores C^2 em $\mathbb{R}^n$, $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, p um ponto de equilíbrio do tipo sela e Γ um ciclo homoclínico atrator associado a p (veja-se um exemplo desta configuração na Figura 3(c)). Se $X \in \mathcal{B}(\{p\})$, então:

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T H(\varphi(t, X)) dt = H(p) \in \mathbb{R}.$$

Noutros termos, tal como no Exemplo 1, nenhum ponto da bacia de atração de Γ exhibe comportamento histórico; estatisticamente as soluções passam *Lebesgue – quase todo o tempo* perto do ponto de equilíbrio p e não ao longo da conexão.

Exemplo 3.

Sejam $(M, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de probabilidade e $\Phi(t, \star)$ um fluxo μ -invariante definido em M onde a medida de probabilidade μ é absolutamente contínua com relação à medida de Lebesgue. Do Teorema Ergódico de Birkhoff, decorre imediatamente que, se $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função μ -integrável, então, para *Lebesgue – quase todos os pontos* em M , a média

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T H(\varphi(t, x)) dt$$

converge. Noutros termos, no mundo conservativo (no sentido em que uma medida equivalente à medida de Lebesgue é preservada), se houver comportamento histórico, este será “invisível” relativamente a esta medida.

1.5 Exemplos não genéricos com comportamento histórico

Nesta seção, explicitam-se alguns exemplos não genéricos com comportamento histórico que ocorrem em famílias de sistemas dinâmicos. O primeiro trata-se de um sistema discreto explorado por Hofbauer e Keller [9], onde se mostrou que a família logística contém elementos para os quais *Lebesgue quase todas* as órbitas têm comportamento histórico.

Olho de Bowen

O segundo exemplo, no caso contínuo, é devido a Bowen², que descreveu um sistema de equações diferenciais (com dois parâmetros) em $\mathbb{R}^2$ da forma $\dot{x} = f(x)$, onde f é C^2 , e cujo fluxo satisfaz as seguintes propriedades (veja-se Figura 4(a)):

- (B1) P^+ e P^- são pontos de equilíbrio;
- (B2) existem duas ligações heteroclínicas unidimensionais, uma de P^- para P^+ e a outra P^+ para P^- ;
- (B3) os valores próprios $Df(P^+)$ e $Df(P^-)$ são tais que o ciclo Γ definido pela união dos pontos de equilíbrio (tipo sela) e pelas as trajetórias que os conectam, contém um aberto não vazio de condições iniciais que se aproximam, em tempo positivo, de Γ .

A união dos pontos de equilíbrio e das trajetórias que os conectam originam o ciclo heteroclínico Γ , também conhecido por “*Olho de Bowen*”. O seguinte resultado evidencia que qualquer solução na bacia de atração de Γ tem comportamento histórico.

Teorema 1 (Takens [23]) *Seja $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $G(P^+) \neq G(P^-)$ e seja $x_0 \in \mathcal{B}(\Gamma)$. Então:*

$$\liminf \frac{1}{T} \int_0^T G(\varphi(t, x_0)) dt < \limsup \frac{1}{T} \int_0^T G(\varphi(t, x_0)) dt.$$

No entanto, perturbando de forma genérica o campo de vetores, o ciclo Γ quebra-se e o sistema perde a propriedade de existência de comportamento histórico (Figura 4(b)).

²Conforme referido por Takens [24], Bowen nunca terá publicado este resultado.

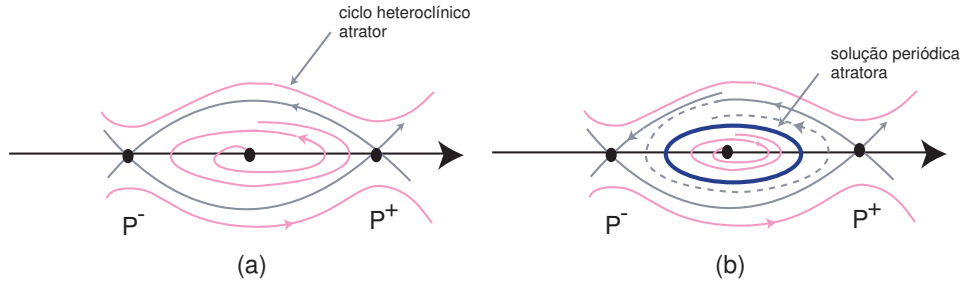


Figura 4: (a) “*Olho de Bowen*” descrito por Takens cuja bacia de atração contém um aberto não vazio de condições iniciais cujas trajectórias se aproximam do ciclo. (b) A quebra do “*Olho de Bowen*” origina genericamente uma solução periódica atratora (sem comportamento histórico).

O comportamento histórico pode-se tornar persistente para sistemas dinâmicos que *preservam o bordo de uma variedade* ou na *presença de simetria*. Outros exemplos de alta codimensão com atratores heteroclínicos, onde para *Lebesgue – quase todas as trajectórias*, as médias de Birkhoff não convergem, foram dados por Gaunersdorfer [8] e Sigmund [22]. No entanto, a resolução parcial ou total do problema que motiva a redação deste texto exige uma abordagem mais geral que não contempla este tipo de restrição.

Uma justificação para a crença de que a existência de comportamento histórico é um fenómeno raro prende-se com o conteúdo do “*Último Problema de Takens*” [12, 13, 24]: *existem classes de sistemas dinâmicos suaves onde o comportamento histórico ocorre persistentemente num conjunto de condições iniciais com medida de Lebesgue positiva?* Em termos ergódicos, esse problema é equivalente a encontrar uma classe persistente de sistemas que não admite medidas físicas³ [22]. A designação “*Último Problema de Takens*” deve-se ao facto de ter sido o último trabalho publicado por Floris Takens (cujo retrato se encontra na Figura 1) com problemas em aberto.

O exemplo paradigmático com comportamento histórico persistente foi sugerido no trabalho de Colli e Vargas em [5], no qual os autores apresentaram um modelo simples caracterizado pela existência de um difeomorfismo bidimensional com uma *Ferradura de Smale* cujas variedades invariantes exibem tangências persistentes sob perturbações arbitrariamente pequenas (na

³Uma medida física para um C^1 -difeomorfismo f definido numa variedade M é uma medida f -invariante μ definida em M na qual, para toda a função contínua φ , a igualdade $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x)) = \int \varphi d\mu$ ocorre num conjunto de condições iniciais x com medida de Lebesgue positiva.

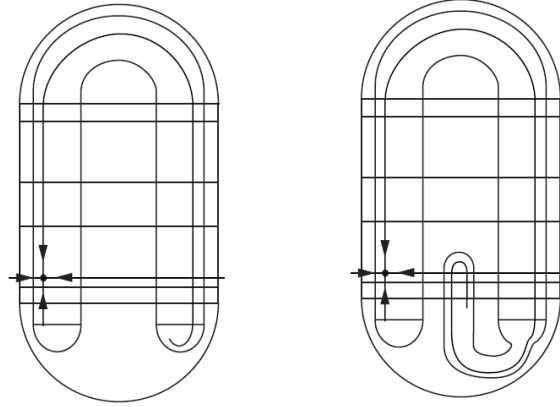


Figura 5: Exemplo de Colli e Vargas [5]: Ferradura de Smale clássica e variante em que se ilustra o desdobramento de uma tangência homoclínica de um ponto periódico hiperbólico.

topologia C^2). Os autores de [5] sugerem que essa configuração, ilustrada na Figura 5(b), implicaria a existência robusta de conjuntos abertos não vazios com comportamento histórico.

Recentemente, os autores de [13] provaram que qualquer *conjunto aberto de Newhouse* (munido da topologia C^r , $r \geq 2$)⁴ está contido no fecho do conjunto de difeomorfismos que possuem domínios errantes não triviais cujas órbitas têm comportamento histórico. Usufruindo desta configuração, uma resposta ao *Último Problema de Takens* é dada em [13] (caso discreto), onde os autores usaram as ideias sugeridas em [5] para encontrar um domínio errante não-trivial onde o difeomorfismo contrai área. De forma persistente, os autores de [13] obtêm um conjunto aberto não vazio de condições iniciais para o qual as médias temporais (das trajetórias associadas) não convergem. Até onde sabemos, o problema original, enunciado para fluxos, permanece aberto até agora.

Sem introduzir demasiado formalismo, no presente texto exhibe-se uma classe de sistemas dinâmicos suaves onde o comportamento histórico ocorre persistentemente num conjunto de condições iniciais com medida de Lebes-

⁴Dado um C^2 -difeomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, um ponto n_0 -periódico de f diz-se *dissipativo* se $|\det Df^{n_0}(p)| < 1$. Um *conjunto de Newhouse* é um conjunto de C^2 -difeomorfismos bidimensionais dissipativos que apresentam um ponto periódico hiperbólico com uma tangência homoclínica; mais detalhe em [13, 16].

gue positiva. As demonstrações dos resultados deste texto foram omitidas mas podem ser encontrados no artigo [12].

2 Hipóteses

O objeto de estudo do presente texto é a dinâmica em torno de um ciclo heteroclínico associado a k soluções periódicas, $1 < k \in \mathbb{N}$, para as quais se dá, em seguida, uma descrição rigorosa. Especificamente, estudar-se-á uma família uni-paramétrica de equações diferenciais da forma

$$\dot{x} = f_\lambda(x), \quad (3)$$

onde, para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, f_λ é um campo de vetores C^2 , definido em $\mathbb{R}^3$, cujo fluxo tem as seguintes propriedades (vejam-se as Figuras 6 e 7):

- (P1) Para $\lambda = 0$ e $a \in \mathbf{Z}_k = \mathbf{Z}/k\mathbf{Z}$, existem k soluções periódicas hiperbólicas P_a de (3) de período mínimo $\xi_a > 0$. Os multiplicadores da Floquet⁵ de P_a são dados por $\exp(e_a) > 1$ e $\exp(-c_a) < 1$ onde $c_a > e_a > 0$.
- (P2) Para $\lambda = 0$ e $a \in \mathbf{Z}_k$, as variedades invariantes locais $W^s(P_a)$ e $W^u(P_a)$ são superfícies suaves homeomorfas a um cilindro – veja-se a Figura 6.
- (P3) Para $\lambda = 0$ e $a \in \mathbf{Z}_k$, cada um dos ramos de $W^u(P_a)$ coincide com um dos ramos de $W^s(P_{a+1})$, formando uma rede heteroclínica, a que chamaremos Γ_0 .
- (P4) (Transversalidade) Para $\lambda \neq 0$ e para cada $a \in \mathbf{Z}_k$, cada ramo da variedade bidimensional $W^u(P_a)$ intersecta transversalmente um ramo de $W^s(P_{a+1})$ em (pelo menos) duas trajetórias, formando uma rede heteroclínica Γ_λ .

Para $\lambda \neq 0$, qualquer uma das duas trajetórias de (P4) em $W^u(P_a) \cap W^s(P_{a+1})$ será indicada por $[P_a \rightarrow P_{a+1}]$. Uma suposição mais técnica,

⁵Os *multiplicadores de Floquet* de uma órbita periódica $\mathcal{C}$ podem ser vistos como os valores próprios da linearização da aplicação de primeiro retorno induzida por $\mathcal{C}$.

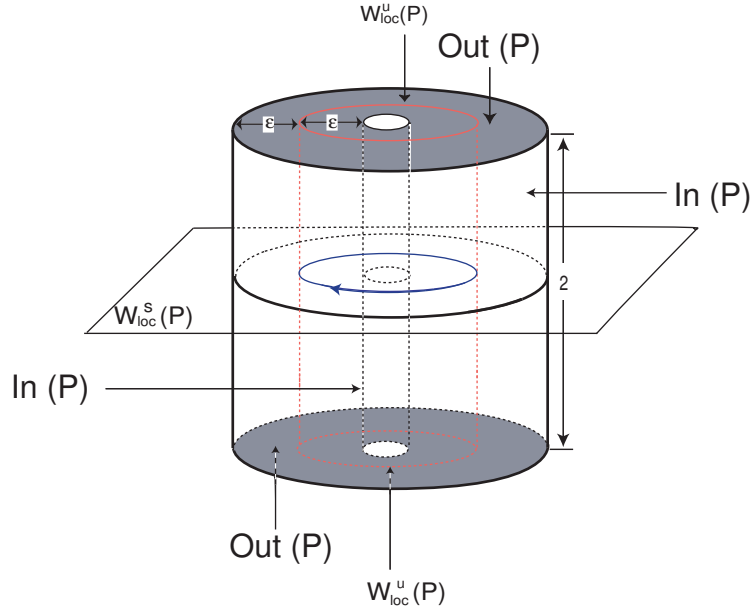


Figura 6: Dinâmica local numa vizinhança de uma solução periódica hiperbólica P . Uma solução que comece em $\text{In}(P)$ (parede lateral do cilindro), entra dentro da vizinhança V em tempo positivo e, se não estiver em $W^s(P)$, sai de V . Uma solução que comece em $\text{Out}(P)$ (“tampas” do cilindro), sai de V .

designada adiante por (P5), será assumida depois de se ter estabelecido alguma notação. Para cada $a \in \mathbf{Z}_k$, definam-se as seguintes constantes:

$$\delta_a = \frac{c_a}{e_a} > 1, \quad \mu_{a+1} = \frac{c_a}{e_{a+1}} > 0, \quad \delta = \prod_{a=1}^k \delta_a > 1$$

e ainda

$$\bar{x}_a = \frac{1}{\xi_a} \int_0^{\xi_a} P_a(s) ds \in \mathbb{R}^3.$$

Sem perda de generalidade, assumam-se que $\xi_a = 1$, para todos $a \in \mathbf{Z}_k$. Geometricamente, $\bar{x}_a \in \mathbb{R}^3$ pode ser visto como o *centro de gravidade* da solução periódica P_a . Usando técnicas de simetria e o método de levantamento por rotação desenvolvido em [1, 17], um exemplo de um campo de vetores satisfazendo as propriedades (P1)–(P5) é apresentado em [12 §7].

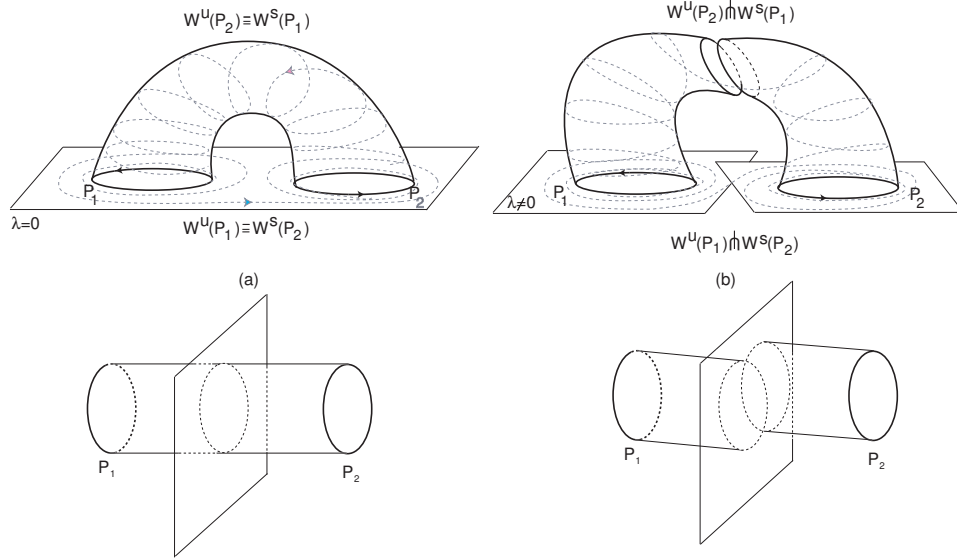


Figura 7: Configuração (P1)–(P4) para $k = 2$. (a) $\lambda = 0$. (b) $\lambda > 0$.

3 $\lambda = 0$: dinâmica regular

A dinâmica de estruturas heteroclínicas envolvendo soluções periódicas satisfazendo (P1)–(P4) foi estudada em [2, 10, 17] em diferentes contextos. Uma vez que o campo de vetores f_0 satisfaz (P1)–(P3) então, adaptando o critério de Krupa e Melbourne [14, 15], qualquer solução com condição inicial suficientemente próxima de Γ_0 irá aproximar-se do ciclo em tempo positivo; noutros termos, o ciclo Γ_0 é *Lyapunov assintoticamente estável*. Em particular, na topologia usual de $\mathbb{R}^3$, tem-se:

Corolário 2 ([12]) *A bacia de atração de Γ_0 contém um conjunto aberto não vazio.*

Tal como está sugerido no esquema da Figura 6, denotando por V_j , $j = 1, \dots, k$, uma vizinhança de P_j perto da qual o campo de vetores (3) se pode linearizar⁶, é possível dividir a sua fronteira em dois tipos de conjuntos, a saber:

⁶Esta vizinhança existe e está bem definida para um conjunto aberto e denso dos multiplicadores de Floquet – Lema A1 de [12].

- $\text{In}(P_j)$: uma solução que comece neste conjunto, entra dentro da vizinhança V_j em tempo positivo e, se não estiver na $W^s(P_j)$, sai de V_j ao fim de tempo $\tau_j \geq 0$.
- $\text{Out}(P_j)$: uma solução que comece neste conjunto sai da vizinhança V_j em tempo positivo.

Deste modo, assumindo que as transições entre P_j e P_{j+1} são instantâneas, se $X_1 \in \text{In}(P_1)$, podem-se definir as seguintes sequências de tempo (ver Figura 8):

- τ_j : sequência de períodos de tempo no qual a solução está na vizinhança de P_j e
- $T_1 = 0$ e $T_{j+1} = \sum_{i=1}^j \tau_i$.

Com base no Corolário 2, à medida que uma trajetória se aproxima de Γ_0 , ela visita as soluções periódicas do ciclo de forma recorrente e ordenada. Admitindo que $X_1 \in \text{In}(P_1)$, a trajetória associada dispense um tempo τ_1 na vizinhança P_1 , posteriormente passa um tempo τ_2 na vizinhança $P_2, \dots$ e, ao fim de T_{k+1} unidades de tempo, volta a visitar a solução periódica inicial P_1 , por um período de tempo τ_{k+1} o qual se pode relacionar com o tempo original τ_1 do seguinte modo: $\tau_{k+1} = \delta \tau_1$. Mais genericamente, tem-se:

Lema 3 (Corol. 3, 12) $\tau_{j+1} = \frac{c_j}{e_{j+1}} \tau_j$ e $\tau_{j+k} = \delta \tau_j$.

A sucessão dos regimes oscilatórios do tempo em que as soluções permanecem perto de selas consecutivas é uma progressão geométrica. A este tipo de regimes oscilatório chama-se vulgarmente de *intermitência*. Qualquer solução passa a maior parte do tempo perto das selas e não ao longo das conexões, razão pela qual se diz que o *atrator estatístico* de Γ_0 é a união das selas que a ele pertencem (Proposição 1 de 12). Esta propriedade torna legítima a assunção de que as transições entre as vizinhanças de P_j ocorrem instantaneamente.

Para caracterizar o conjunto de pontos de acumulação de $\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(t, X) dt$ com $X \in \mathcal{B}(\Gamma_0)$, definam-se os pontos:

$$A_a = \frac{\bar{x}_a + \mu_{a+1}\bar{x}_{a+1} + \mu_{a+1}\mu_{a+2}\bar{x}_{a+2} + \dots + \prod_{l=1}^{k-1} \mu_{a+l}\bar{x}_{a+k-1}}{1 + \mu_{a+1} + \mu_{a+1}\mu_{a+2} + \dots + \prod_{l=1}^{k-1} \mu_{a+l}} = \frac{\text{num}(A_a)}{\text{den}(A_a)}, \quad (4)$$

em que $a \in \mathbf{Z}_a$, $\text{num}(A_a) \in \mathbb{R}^3$ e $\text{den}(A_a) \in \mathbb{R}^+$.

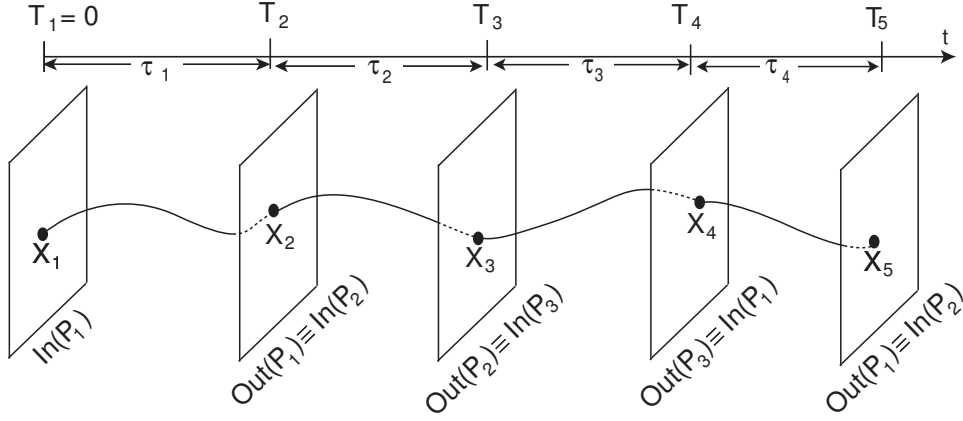


Figura 8: Terminologia dos tempos.

Teorema 4 (Teorema 8, [12]) *Seja f_0 um campo de vetores em $\mathbb{R}^3$ satisfazendo (P1)–(P3). Então para qualquer $X \in \mathcal{B}(\Gamma_0)$, o conjunto de pontos de acumulação da média temporal*

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(t, X) dt$$

é a fronteira do k -polígono definido por $A_1, A_2, \dots, A_k$. Quando $\delta \rightarrow 1$, o k -polígono colapsa num ponto.

As posições dos vértices do k -polígono e dos centros de gravidade das soluções periódicas P_a não são aleatórias, obedecendo a k condições algébricas (ver Proposição 7 de [12]). Em particular, os pontos A_{a+1} , A_a e $\bar{x}_a$ são colineares (veja-se Figura 9):

$$\begin{aligned} A_{a+1} &= \frac{\text{num}(A_{a+1})}{\text{den}(A_{a+1})} \\ &= \left(\frac{\text{den}(A_a)}{\mu_{a+1} \text{den}(A_{a+1})} \right) \frac{\text{num}(A_a)}{\text{den}(A_a)} + \left(\frac{\delta - 1}{\mu_{a+1} \text{den}(A_{a+1})} \right) \bar{x}_a \\ &= \alpha A_a + \beta \bar{x}_a. \end{aligned}$$

onde

$$\alpha = \frac{\text{den}(A_a)}{\mu_{a+1} \text{den}(A_{a+1})} = 1 - \frac{\delta - 1}{\mu_{a+1} \text{den}(A_{a+1})} = 1 - \beta.$$

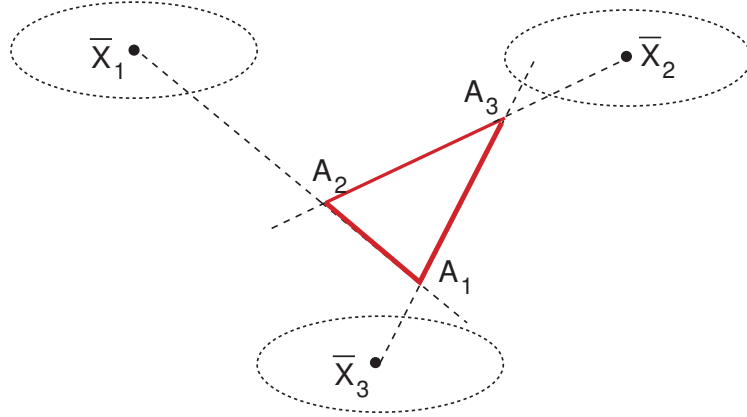


Figura 9: Ilustração do Teorema 4 para $k = 3$.

A última proposição do Teorema 4 é consistente com a teoria desenvolvida por [6] em que os autores descrevem resultados sobre a existência de médias temporais no caso conservativo. Neste contexto, não há atratores na dinâmica (consequência do Teorema de Liouville); em particular, $\delta = 1$. Daí que o Teorema 4 vai ao encontro dos resultados de [6] que referem a existência de um *ponto de equilíbrio interior* como média temporal.

O Teorema 4 tem como consequência o seguinte corolário (bastando que o observável exigido pela Definição 1 seja a projeção em cada uma das componentes canónicas).

Corolário 5 *Seja f_0 um campo de vetores em $\mathbb{R}^3$ satisfazendo (P1)–(P3). Então, para qualquer $X \in \mathcal{B}(\Gamma_0)$, a sua trajectória exhibe comportamento histórico.*

Relativamente ao Corolário 5, o facto marcante é que as médias de Birkhoff divergem de um modo uniforme: elas aproximam-se de um polígono. Esta propriedade contrasta com os atratores estranhos ergódicos e hiperbólicos os quais, genericamente, admitem uma medida física (Teorema de Sinai-Ruelle-Bowen), onde quase todas as condições iniciais induzem médias de Birkhoff convergentes, apesar da dinâmica complexa que se pode observar.

4 $\lambda > 0$: dinâmica caótica

Dado $a \in \mathbf{Z}_k$, da coincidência das ligações heteroclínicas cilíndricas de dimensão 2, $W^u(P_a)$ e $W^s(P_{a+1})$, desdobram genericamente duas configurações (veja-se [4]):

- $W^u(P_a)$ e $W^s(P_{a+1})$ não se intersectam;
- $W^u(P_a)$ e $W^s(P_{a+1})$ intersectam-se num número par de trajetórias.

Para $\lambda \neq 0$, por (P4), assume-se que as variedades invariantes das soluções periódicas do ciclo intersectam-se transversalmente. Vai-se ainda admitir a seguinte hipótese adicional ilustrada na Figura [10]:

- (P5) Para cada $a \in \mathbf{Z}_k$ e $\lambda \neq 0$ próximo de zero, as variedades $W^u(P_a)$ e $W^s(P_{a+1})$ intersectam-se numa curva fechada em $\text{In}(P_{a+1})$.

A partir de agora, discutir-se-á a equação diferencial [3] satisfazendo (P1)–(P5), com $\lambda \neq 0$. Convém, em primeiro lugar, notar que, para $\lambda \neq 0$, a rede não é estável devido à presença de ferraduras suspensas na sua vizinhança [17]; existe um número infinito de conexões homo e heteroclínicas entre quaisquer duas soluções periódicas e a dinâmica próxima da rede é bastante complexa (cf [11, 18]). Para facilitar a interpretação e análise do sistema, vai-se admitir $k = 2$.

Do estudo da dinâmica local junto de P_1 ([12, §4.2]), a linha que representa a interseção da variedade instável de P_2 com $\text{In}(P_1)$ vai ser enviada em $\text{Out}(P_1)$ numa dupla hélice com uma *dobra* ou *ponto de viragem* ([12, §6.3]). A posição relativa dessa dobra vai ser governada pelo parâmetro $\lambda > 0$, a qual vai rodando em torno de $\text{Out}(P_1)$. À medida que $\lambda > 0$ varia, esse ponto de viragem vai “tocando” na linha que representa a interseção da variedade estável de P_2 com $\text{Out}(P_1)$, sendo a ideia da prova da alínea (i) do seguinte resultado (ver Figura [12]):

Lema 6 (Teorema 11, [12]) *Se $(f_\lambda)_\lambda$ é uma família de campos de vetores satisfazendo (P1)–(P5), então:*

1. *existe uma sequência $(\lambda_i)_i$ de números reais positivos com $\lim_i \lambda_i \rightarrow +\infty = 0$ tal que para $\lambda = \lambda_i$ as variedades $W^u(P_2)$ e $W^s(P_2)$ intersectam-se tangencialmente de forma quadrática (genérica).*

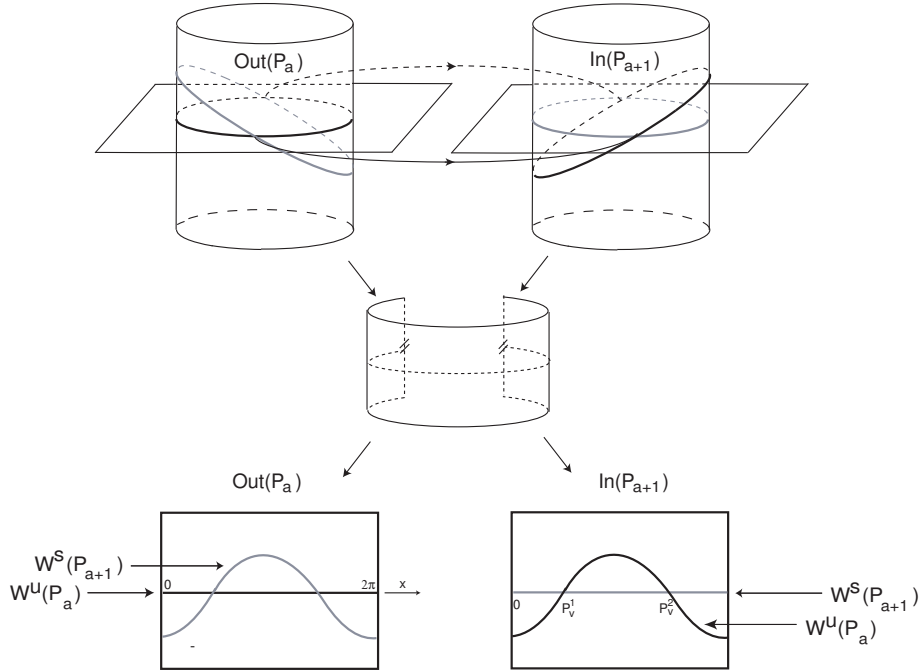


Figura 10: Ilustração da Propriedade (P5): transições entre as selas. Para $\lambda \neq 0$, as variedades $W^u(P_a)$ e $W^s(P_{a+1})$ interseitam-se numa curva fechada em $\text{In}(P_{a+1})$.

2. *arbitrariamente próximo da conexão homoclínica associada a P_2 (garantida na alínea anterior), existem pontos fixos hiperbólicos p_i e uma infinidade de valores $\lambda_{n,i}$ para os quais a aplicação de primeiro retorno a $\text{In}(P_1)$ exibe uma tangência homoclínica associada a p_i .*

A prova do item (2) decorre do facto das variedades invariantes das soluções periódicas, quando restritas a $\text{In}(P_1)$, terem a mesma forma das linhas resultantes das interseções das variedades invariantes com a secção transversal $\text{In}(P_1)$. Consequentemente, arbitrariamente perto do valor de $\lambda = \lambda_i > 0$ para o qual ocorre uma tangência homoclínica de P_2 , existe um outro valor de λ para o qual se observa uma tangência homoclínica associada ao ponto fixo p_i da ferradura cuja existência foi provada em [17], e esquematizada na Figura 11. Uma vez que este ponto fixo é dissipativo, podem-se aplicar os resultados de Newhouse [16].

O próximo teorema é a chave desta secção (e deste texto) uma vez que localiza regiões onde o comportamento histórico é detetado para a aplica-

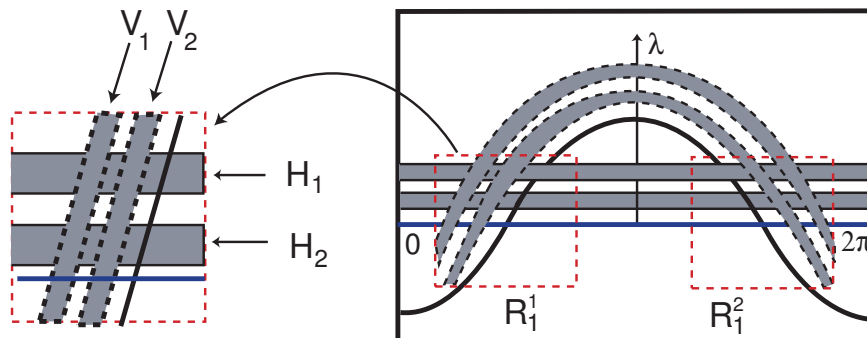


Figura 11: Representação da ferradura existente perto de Γ_λ (mais detalhe em [11, 17]). Os conjuntos H_1 e H_2 representam retângulos horizontais em $\text{In}(P_1)$ e V_1 e V_2 as suas imagens pela aplicação de primeiro retorno.

ção de primeiro retorno. Localiza trajetórias com comportamento histórico em campos C^2 -próximo de elementos da família (3), como consequência das tangências encontradas no Lema 6 combinadas com o Teorema A de [13]. Tendo em conta que as perturbações construídas em [13] são locais e arbitrariamente pequenas (na topologia C^2), pode-se “levantar” a perturbação da aplicação de primeiro retorno que exhibe comportamento histórico, e transferir esta propriedade para fluxos. O fluxo resultante está C^2 -perto do fluxo original.

Teorema 7 (Teorema 12, [12]) *Se $(f_\lambda)_\lambda$ é uma família de campos de vetores satisfazendo (P1)–(P5), então existe uma sucessão $(\lambda_j)_{j \in \mathbb{N}}$ com $\lim_{j \in \mathbb{N}} \lambda_j = 0$ tal que, para cada λ_j , existe um campo vetorial, C^2 -próximo de f_{λ_j} , cujo fluxo associado exhibe um conjunto aberto e não-vazio de condições iniciais cujas trajetórias associadas exibem comportamento histórico.*

5 Nota final

Tendo [12] como ponto de partida, o objetivo deste texto foi o de explorar a persistência de comportamento histórico para uma classe de sistemas envolvendo ciclos heteroclínicos associados a soluções periódicas, levando a uma resposta parcial do Último Problema de Takens [24]. Todas as provas podem ser encontradas em [12] ou nas referências nele citadas. Para além de

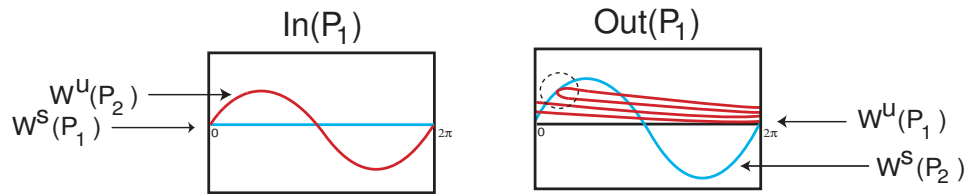


Figura 12: Tangências heteroclínicas: à medida que $\lambda > 0$ varia, o ponto de viragem vai “tocando” a linha que representa a interseção da variedade estável de P_2 com $\text{Out}(P_1)$.

uma prova geral mais precisa da questão da passagem do comportamento histórico da aplicação de primeiro retorno para um campo de vetores, há ainda *problemas em aberto* relacionados com a persistência do comportamento histórico. Por exemplo,

- (1) será que existe um campo de vetores polinomial em $\mathbb{R}^m$ com domínios errantes e, conseqüentemente, com comportamento histórico?
- (2) que tipo de bifurcações podem ocorrer no caso em que, para todo o $a \in \mathbf{Z}_a$, $W^u(P_a)$ e $W^s(P_{a+1})$ não se intersectam?

Referências

- [1] M. A. D. Aguiar, S. B. S. D. Castro, I. S. Labouriau. *Simple Vector Fields with Complex Behavior*, Int. Jour. of Bif. and Chaos, Vol. **16** No. **2**, 2006.
- [2] M.A.D. Aguiar, I.S. Labouriau, A.A.P. Rodrigues, *Switching near a heteroclinic network of rotating nodes*, Dyn. Syst., Vol. 25(1), 75–95, 2010.
- [3] R. Bowen, *Equilibrium states and Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms*, Lectures Notes in Mathematics, 470, Springer-Berlin, 1975.
- [4] D.R. Chilingworth. *Generic multiparameter bifurcation from a manifold*. Dyn. Syst. 15(2), 101–137, 2000.
- [5] E. Colli, E. Vargas, *Non-trivial wandering domains and homoclinic bifurcations*, Ergod. Th. & Dynam. Sys., 21, 1657–1681, 2001.

- [6] P. Duarte, R. Fernandes, W. Oliva, *Dynamics of the attractor in the Lotka-Volterra equations*, J. Diff. Equations, 149, 143–189, 1998.
- [7] M. Field, *Lectures on bifurcations, dynamics and symmetry*, Pitman Research Notes in Mathematics Series, Vol. **356**, Longman, 1996.
- [8] A. Gaunersdorfer, *Time averages for heteroclinic attractors*, SIAM J. Math. Anal. 52 1476–89, 1992.
- [9] F. Hofbauer, G. Keller, *Quadratic maps without asymptotic measure*, Commun. Math. Phys. 127 319–337, 1990.
- [10] I.S. Labouriau, A.A.P. Rodrigues, *Global generic dynamics close to symmetry*, J. Diff. Eqs., Vol. 253 (8), 2527–2557, 2012.
- [11] I.S. Labouriau, A.A.P. Rodrigues, *Global bifurcations close to symmetry*, J. Math. Analysis and Applications, 444 (1), 648–671, 2016.
- [12] I.S. Labouriau, A.A.P. Rodrigues, *On Takens’ Last Problem: tangencies and time averages near heteroclinic networks*, Nonlinearity 30, 1876–1910, 2017.
- [13] S. Kiriki, T. Soma, *Takens’ last problem and existence of non-trivial wandering domains*, Tokai University, Pre-print, 2015.
- [14] M. Krupa, I. Melbourne, *Asymptotic stability of heteroclinic cycles in systems with symmetry*, Ergod. Th. & Dynam. Sys., 15, 121–147, 1995.
- [15] M. Krupa, I. Melbourne, *Asymptotic Stability of Heteroclinic Cycles in Systems with Symmetry II*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, No. 134A, 219–232, 2004.
- [16] S.E. Newhouse, *The abundance of wild hyperbolic sets and non-smooth stable sets for diffeomorphisms*, Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci. 50, 101–151, 1979.
- [17] A. A. P. Rodrigues, I. S. Labouriau, M. A. D. Aguiar, *Chaotic Double Cycling*, Dynamical Systems: an International Journal, Vol. 26 (2), 199–233, 2011.
- [18] A.A.P. Rodrigues, I.S. Labouriau, *Spiralling dynamics near heteroclinic networks*, Physica D 268, 34–49, 2014.

-
- [19] D. Ruelle, *Historic behaviour in smooth dynamical systems*, Global Analysis of Dynamical Systems ed H W Broer *et al* (Bristol: Institute of Physics Publishing), 2001.
 - [20] D. Ruelle, *A measure associated with Axiom A attractors*, Amer. J. Math., 98, 619–654, 1976.
 - [21] Ya. Sinai, *Gibbs measures in ergodic theory*, Russ. Math. Surveys, 27, 21–60, 1972.
 - [22] K. Sigmund, *Time Averages for unpredictable orbits of determinist systems*, Annals of Operations Research, 37, 217–228, 1992.
 - [23] F. Takens, *Heteroclinic attractors: Time averages and moduli of topological conjugacy*, Bol. Soc. Brasil. Mat., 25, 107–120, 1994.
 - [24] F. Takens, *Orbits with historic behaviour, or non-existence of averages*, Nonlinearity, 21, no. 3, T33–T36, 2008.

A NOTE ON THE FACTORISATION OF NON-SINGULAR MATRICES

Afonso Carvalho

Instituto Superior Técnico

Universidade de Lisboa

e-mail: `afonso.s.c.carvalho@tecnico.ulisboa.pt`

Resumo: Mostra-se que toda a matriz invertível é um produto de matrizes elementares de apenas dois tipos, sendo que nenhuma delas é a matriz de permutação.

Abstract It is shown that any non-singular matrix is a product of only two types of elementary matrices none of which is a permutation matrix.

palavras-chave: Matriz elementar; matriz invertível; matriz de permutação.

keywords: Elementary matrix; non-singular matrix; permutation matrix.

1 The elementary matrices and the permutation matrix

Let $\mathbb{M}_{k \times n}(\mathbb{K})$ be the algebra of the $n \times n$ matrices over $\mathbb{K}$, where $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Given a matrix A in $\mathbb{M}_{k \times n}(\mathbb{K})$, there are classically three types of *elementary (row) operations* performed on the rows of A , namely:

- (i) replacing row L_i by αL_i , where α is a non-zero scalar (Type I);
- (ii) replacing row L_i by $L_i + \alpha L_j$, where α is a scalar and $i \neq j$ (Type II);
- (iii) exchanging two rows, i.e., exchanging row L_i with row L_j , with $i \neq j$ (Type III).

Here the scalars α lie in the same field as the entries in the matrix.

Alternatively, we can see these operations as matrix multiplications. In fact, these operations correspond to multiplying A on the left, respectively, by the following three types of $k \times k$ *elementary matrices*:

- Type I. $D_i(\alpha)$ (with $\alpha \neq 0$): the matrix that is obtained from the identity matrix multiplying row i by α ;

- Type II. $E_{ij}(\alpha)$ (with $i \neq j$): the matrix that is obtained from identity matrix by adding to row i row j multiplied by $\alpha \in \mathbb{K}$;
- Type III. P_{ij} (with $i < j$): the matrix that is obtained from the identity matrix by exchanging rows i and j .

It is well known that A is a non-singular matrix if, and only if, A is the product of elementary matrices of Type I, II, or III. Equivalently rephrasing it, the set of matrices of Type I, II, or III generates the group of invertible matrices (cf. [1], Proposition 2.18, [2], (3.9.3)).

It is the purpose of this note to show that the use of Type III matrices can be avoided. More precisely,

Proposition 1. *Let A be a $n \times n$ real or complex matrix. Then A is non-singular if, and only if, A is a product of elementary matrices of Type I or II.*

Proof. Since A is non-singular if, and only if, A is a product of elementary matrices of Type I, II or III, it suffices to show that any elementary matrix of Type III is a product of elementary matrices of the remaining types.

Let P_{ij} be a $n \times n$ matrix of Type III, that is,

$$P_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

where it is supposed that $i < j$, without loss of generality. Then

$$P_{ij} = D_j(-1)E_{ij}(1)E_{ji}(-1)E_{ij}(1).$$

In fact,

$$D_j(-1)E_{ij}(1)E_{ji}(-1)E_{ij}(1) = D_j(-1)E_{ij}(1)$$

$$\times \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$= D_j(-1) \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = P_{ij},
\end{aligned}$$

as required. $\square$

The next example shows how the method of this proof can be applied to exchange two rows i, j of a given matrix A . We shall suppose, without loss of generality, that $i < j$.

Example. Let A be a $k \times n$ matrix and let i and j be two given rows with $i < j$. Similarly to the proof above, these two rows can be exchanged using only Type I and II elementary operations yielding a new matrix A' . The permutation of rows i and j correspond to the following:

1. Adding to row i row j multiplied by 1;
2. Adding to row j row i multiplied by -1 ;
3. Adding to row i row j multiplied by 1;
4. Multiplying row j by $\alpha = -1$.

Starting with matrix

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{bmatrix},$$

the corresponding matrices at each step of the process are:

1. Adding to row i row j multiplied by 1,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} + a_{j1} & a_{i2} + a_{j2} & \cdots & a_{in} + a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{bmatrix};$$

2. Adding to row j row i multiplied by -1 ,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} + a_{j1} & a_{i2} + a_{j2} & \cdots & a_{in} + a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} - (a_{i1} + a_{j1}) & a_{j2} - (a_{i2} + a_{j2}) & \cdots & a_{jn} - (a_{in} + a_{jn}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} + a_{j1} & a_{i2} + a_{j2} & \cdots & a_{in} + a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{i1} & -a_{i2} & \cdots & -a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{bmatrix};$$

3. Adding to row i row j multiplied by 1,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} + a_{j1} - a_{i1} & a_{i2} + a_{j2} - a_{i2} & \cdots & a_{in} + a_{jn} - a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{i1} & -a_{i2} & \cdots & -a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{i1} & -a_{i2} & \cdots & -a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{bmatrix}.$$

4. Multiplying a row j by $\alpha = -1$.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{bmatrix} = A'.$$

Referências

- [1] M. Artin, *Algebra*, Prentice-Hall, New Jersey, 1991.
- [2] Carl D. Meyer, *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*, SIAM, Philadelphia, 2000.

REGRAS COMPANHEIRAS DE SIMPSON-MILNE

Mário M. Graça

Departamento de Matemática,
Instituto Superior Técnico, Universidade de Lisboa,
Av. Rovisco Pais, 1049-001 Lisboa, Portugal.
e-mail: mario.meireles.graca@tecnico.ulisboa.pt

Resumo: Introduzimos a noção de *senal* de uma regra de quadratura e observamos que as regras de Newton-Cotes, respectivamente fechadas e abertas e do mesmo grau de precisão, são de sinais contrários. Regras nessas condições dir-se-ão *companheiras*. A partir de um par de duas regras companheiras $(Q(f), C(f))$ construímos uma terceira regra $M(f)$, a que chamamos regra *associada*. Este procedimento habilita-nos não só a estimar facilmente o erro de $M(f)$, como a obter um encaixe de intervalos contendo o valor exacto de $I(f) = \int_a^b f(x) dx$. Como modelo usamos o par de regras companheiras (Simpson, Milne) e construímos a sua regra associada. Mostramos ainda que a regra de Simpson é a regra associada ao primeiro par de regras de Newton-Cotes companheiras, as bem conhecidas regras dos trapézios e do ponto médio. Damos alguns exemplos numéricos e fornecemos código *Mathematica* tendo em vista a construção de novas regras e exemplos de aplicação.

Abstract: The notion of *sign* of a quadrature formula is introduced which enables us to classify two Newton-Cotes rules of the same degree of precision, one open and the other closed, as having opposite signs. Quadrature rules satisfying these conditions will be called *companion* rules.

From a pair $(Q(f), C(f))$ of companion rules we construct another rule $M(f)$ which will be called *associated* rule. This procedure allows us not only to easily estimate the error of $M(f)$ but also to obtain a nest of intervals containing the exact value of the integral $I(f) = \int_a^b f(x) dx$. The pair (Simpson, Milne) is used as a model to get its associated rule. It is also shown that the Simpson rule is the associated rule to the first pair of Newton-Cotes companion rules, the well-known trapezoidal and midpoint rules.

Some numerical examples illustrate the main results and *Mathematica* code is given aiming to enable further develop of new rules and examples.

Palavras-chave: Regra positiva; regra negativa; regras companheiras; regra associada; regra de Simpson; regra de Milne.

Keywords: Positive rule; negative rule; companion rules; associated rule; Simpson rule; Milne rule.

1 Introdução

Em termos de *quadraturas numéricas* [17] há dogmas que são repetidos até à exaustão. Um deles diz respeito à preferência dada às regras de Newton-Cotes *fechadas* em detrimento das regras de Newton-Cotes *abertas*, sem ter em conta a valia inerente a certos pares dessas regras que, neste trabalho, designamos por regras *companheiras*. Na literatura, a preferência por regras de Newton-Cotes fechadas é fundamentada através de afirmações como em ([4], p. 171) “... the closed formulas generally produce results superior to the open formulas of the same order, since they use more complete information about the function. Consequently, the closed formulas are used more frequently in practice. The open formulas are primarily used for the numerical solution of ordinary differential equations.” Argumentos que remontam pelo menos a 1933 (ver, por exemplo, [16] p. 166).

Nesta nota mostramos que para uma ordem de precisão fixa e sob certas condições, a propriedade fundamental de um par de regras de Newton-Cotes (fechada, aberta) reside no facto de as suas expressões de erro serem de sinal contrário, segundo a definição de sinal de uma regra que introduzimos na Definição 2.3. De acordo com esta definição, a regra fechada é *negativa* e a regra aberta *positiva*. Tal constitui uma vantagem porquanto, nomeadamente, ao considerarmos um par dessas regras ficamos habilitados a construir um encaixe de intervalos contendo o valor exacto do integral $I(f) = \int_a^b f(x) dx$. Por isso chamamos *regras companheiras* a um par de regras do mesmo grau e de sinais contrários.

A partir de um par de regras companheiras $(Q(f), C(f))$ construímos uma regra $M(f)$ mais precisa e estimamos o erro de $M(f)$ levando em consideração as fórmulas de erro de cada membro do par. Designamos $M(f)$ por *regra associada* ao par de regras companheiras $(Q(f), S(f))$. Mostramos também que uma regra associada se obtém como uma *média pesada* de duas regras companheiras.

Em particular, tomamos como modelo as regras de Simpson (fechada)¹ e de Milne [15] (aberta), ambas de terceira ordem de precisão, mostrando que são regras companheiras e construímos a sua regra associada $M(f)$, estimando o respectivo erro através de certas *diferenças divididas* (ver Secção 3).

No parágrafo 3.4 vemos que as regras dos trapézios e do ponto médio são as

¹ Segundo informação em https://en.wikipedia.org/wiki/Thomas_Simpson, esta regra é atribuída ao matemático britânico Thomas Simpson (1710 – 1761), embora se saiba que a mesma regra foi usada por Johannes Kepler 100 anos antes.

primeiras regras de Newton-Cotes companheiras, sendo a célebre regra de Simpson a sua associada.

A passagem a regras companheiras *compostas*, ou seja, para um certo número $n \geq 2$ de subintervalos de $[a, b]$, é facilmente obtida. Verificamos que o erro da regra composta $M_n(f)$, associada das regras Simpson-Milne, pode ser estimado usando diferenças divididas num suporte de 5 números pseudo-aleatórios, gerados em cada subintervalo de $[a, b]$, mediante o comando `RandomReal` do sistema *Mathematica* [21].

Apresentamos alguns exemplos numéricos e fornecemos código contendo programas básicos, para que o leitor possa efectuar a sua própria experimentação (Secção 5).

2 Preliminares

“To study, and when the occasion arises to put what one has learned into practice – is that not deeply satisfying?”

Confucius, Analects 1.1.1 (citado em [11]).

Dada uma função real f integrável no intervalo $[a, b]$, sejam $\mathcal{P}_n$ o espaço vectorial dos polinómios de grau menor ou igual a $n \geq 0$, $\{1, \phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_n\}$ uma base de $\mathcal{P}_n$ e

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx. \quad (1)$$

Começemos por relembrar as definições de *fórmula* (ou *regra*) de *quadratura* e de *grau* (ou *ordem*) de precisão de uma fórmula de quadratura.

Definição 2.1. (*fórmula de quadratura*) ([7], p. 1)

Uma fórmula de quadratura $Q(f)$ é um processo de cálculo numérico de uma aproximação para o integral (1) em que se usam os valores de f apenas num conjunto discreto de pontos pertencentes a $[a, b]$.

Ao conjunto de pontos usados na fórmula de quadratura, aos quais se dá o nome de *nós de quadratura*, chamamos *suporte da fórmula* (ou *suporte da regra*).

Relembra-se que uma regra se diz *fechada* quando os extremos do intervalo são nós de quadratura e se diz *aberta* quando algum desses extremos não é nó de quadratura.

As regras de Newton-Cotes são regras de quadratura *interpolatória* no sentido em que a função integranda é substituída pelo polinómio interpolador

num suporte em que os nós são equidistantes. Por construção, uma regra de Newton-Cotes com $k + 1$ nós é exacta, pelo menos, para qualquer polinómio $p_k \in \mathcal{P}_k$, o que justifica a definição a seguir.

Definição 2.2. (*Grau de uma fórmula de quadratura*)([9], p. 157)

Uma fórmula de quadratura $Q(f)$ diz-se de grau (ou ordem) de precisão $k \geq 0$ se é exacta para qualquer polinómio $p_k \in \mathcal{P}_k$, mas não é exacta para algum polinómio de grau $k + 1$.

Mostra-se que uma regra de quadratura é de grau exactamente k se e só se é exacta para os elementos de uma base de $\mathcal{P}_k$, mas não é exacta para algum polinómio de grau $k + 1$. Por exemplo, dados os $k + 1$ nós distintos $x_0, x_1, \dots, x_k$, e a base de $\mathcal{P}_k$,

$$\begin{aligned}\phi_0(x) &= 1, \\ \phi_1(x) &= (x - x_0) \\ \phi_2(x) &= (x - x_0)(x - x_1) \\ &\vdots \\ \phi_k(x) &= (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1}),\end{aligned}\tag{2}$$

uma regra $Q(f)$ é de grau k se e só se

$$\left\{ \begin{array}{l} Q(1) = \int_a^b dx \\ Q(\phi_1) = \int_a^b \phi_1(x) dx \\ Q(\phi_2) = \int_a^b \phi_2(x) dx \\ \vdots \\ Q(\phi_k) = \int_a^b \phi_k(x) dx, \end{array} \right.\tag{3}$$

e para o polinómio $\phi_{k+1} = \phi_k(x)(x - x_k)$ (ou algum outro polinómio de grau $k + 1$), tem-se

$$Q(\phi_{k+1}) \neq \int_a^b \phi_{k+1}(x) dx.$$

Para uma determinada regra de quadratura da forma

$$Q(f) = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + \dots + A_k f(x_k),\tag{4}$$

os “pesos” A_i , $i = 1, \dots, k$, podem ser determinados usando o *método dos coeficientes indeterminados* ([9], p. 171). Este método conduz à resolução de um sistema de equações lineares como em ([3]), ou equivalente, se considerarmos outra base de $\mathcal{P}_k$, cujas incógnitas são os pesos A_i . Repare-se que a escolha da base $\{1, \phi_0, \dots, \phi_k\}$ em ([2]) conduz a um sistema triangular superior cuja solução é única.

Uma vez adotada a base polinomial ([2]), que designamos por base canónica associada aos nós x_i , para o monómio $\phi_{k+1}(x) = \phi_k(x)(x - x_k)$, numa regra $Q(f)$ como em ([4]), tem-se

$$Q(\phi_{k+1}) = 0,$$

dado que $\phi_{k+1}(x_i) = 0$, $i = 0, \dots, k$. Se a regra for de grau k , temos

$$Q(\phi_{k+1}) \neq I(\phi_{k+1})$$

ou, de outra forma, o erro em ϕ_{k+1} é não nulo, isto é,

$$E_Q(\phi_{k+1}) = I(\phi_{k+1}) - Q(\phi_{k+1}) = I(\phi_{k+1}) - 0 \neq 0.$$

Designamos

$$\mu_{k+1} = I(\phi_{k+1}) = \int_a^b \phi_{k+1}(x) dx \quad (5)$$

por *momento principal* da regra de quadratura ([4]).

Na abordagem usual de construção de fórmulas de quadratura, a fórmula ([4]) corresponde ao valor do integral do polinómio interpolador de f em $x_0, x_1, \dots, x_k$. Através da fórmula de interpolação de Lagrange obtemos

$$\begin{aligned} A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + \dots + A_k f(x_k) &= \int_a^b \sum_{i=0}^k f(x_i) L_i(x) dx \\ &= \sum_{i=0}^k f(x_i) \int_a^b L_i(x) dx, \end{aligned}$$

onde

$$L_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^k \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Assim, os pesos A_i podem também ser dados através dos integrais dos polinómios de Lagrange L_i . Esta é a estratégia normalmente usada para o desenvolvimento das regras de quadratura de Newton-Cotes em que os nós de interpolação são igualmente espaçados.

É bem conhecido que uma regra interpolatória $Q(f)$ tem pelo menos grau k e no máximo grau $2k + 1$. No caso da regra ter grau $k + 1$, teremos

$$Q(\phi_{k+1}) = I_{k+1} = 0, \quad Q(\phi_{k+2}) = 0 \neq I_{k+2},$$

para $\phi_{k+2}(x) = \phi_{k+1}(x)(x - x_0)$, e o seu momento principal é $\mu_{k+2} = I_{k+2}$. Ver [10] onde são usados os polinómios $\phi_j(x)$ e os momentos μ_j , para $j = 1, \dots, 2k + 2$.

Tomamos como conhecidas a fórmula e a expressão do erro de cada uma das regras de Newton-Cotes, fechadas ou abertas, que utilizaremos adiante. Transcrevemos abaixo de [4, Section 4.3] os resultados relativos aos erros nestas fórmula onde se assume que $f \in C^{k+2}([a, b])$, se k é par, e $C^{k+1}([a, b])$, se k é ímpar.

Proposição 2.1 ([4], p. 169) Suponhamos que $Q(f) = \sum_{i=0}^k A_i f(x_i)$ denota a regra de Newton-Cotes fechada com $k + 1$ pontos, sendo $x_0 = a$, $x_k = b$ e $x_i = a + ih$, $i = 1, \dots, k - 1$, com $h = (b - a)/k$. Existe $\xi \in (a, b)$ tal que

$$\int_a^b f(x) dx = Q(f) + c f^{(k+2)}(\xi), \quad \text{onde } c = \frac{h^{k+3}}{(k+2)!} \int_0^k t^2(t-1) \cdots (t-k) dt,$$

se k é par e $f \in C^{k+2}([a, b])$, e

$$\int_a^b f(x) dx = Q(f) + c f^{(k+1)}(\xi), \quad \text{onde } c = \frac{h^{k+2}}{(k+1)!} \int_0^k t(t-1) \cdots (t-k) dt,$$

se k é ímpar e $f \in C^{k+1}([a, b])$.

Proposição 2.2 ([4], p. 170) Suponhamos que $C(f) = \sum_{i=0}^k A_i f(x_i)$ denota a regra de Newton-Cotes aberta com $k + 1$ pontos, sendo $x_{-1} = a$, $x_{k+1} = b$ e $x_i = a + (i + 1)h$, $i = 0, \dots, k$, com $h = (b - a)/(k + 2)$. Existe $\xi \in (a, b)$ tal que

$$\int_a^b f(x) dx = C(f) + c f^{(k+2)}(\xi), \quad \text{onde } c = \frac{h^{k+3}}{(k+2)!} \int_{-1}^{k+1} t^2(t-1) \cdots (t-k) dt,$$

se k é par e $f \in C^{k+2}([a, b])$, e

$$\int_a^b f(x) dx = C(f) + c f^{(k+1)}(\xi), \quad \text{onde } c = \frac{h^{k+2}}{(k+1)!} \int_{-1}^{k+1} t(t-1) \cdots (t-k) dt,$$

se k é ímpar e $f \in C^{k+1}([a, b])$.

Pode mostrar-se que as constantes c associadas às regras de Newton-Cotes fechadas são sempre negativas e as associadas às regras abertas são sempre positivas, o que justifica que adoptemos as definições seguintes.

Definição 2.3. (*Regra positiva/negativa*)

Uma regra $Q(f)$, de grau $m \geq 0$, diz-se positiva se a respectiva constante de erro c é positiva, e diz-se negativa no caso contrário.

Definição 2.4. (*Regras companheiras*)

Um par de regras $(Q(f), C(f))$ diz-se um par de regras companheiras se as regras $Q(f)$ e $C(f)$ são do mesmo grau e de sinais contrários.

3 Regras companheiras de Simpson-Milne

Quando tomamos $k = 2$ obtemos as bem conhecidas regras de Simpson (fechada) e de Milne (aberta) e, no caso de $f \in C^4([a, b])$, temos, aplicando as Proposições 2.1 e 2.2, expressões para os erros (de sinais contrários):

(i) Simpson (fechada)

$$S(f) = \frac{h}{3} (f(a) + 4f(a+h) + f(b)), \text{ para } h = (b-a)/2, \quad (6)$$

com erro

$$E_S(f) = I(f) - S(f) = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in (a, b). \quad (7)$$

(ii) Milne (aberta)

$$N(f) = \frac{4h}{3} (2f(a+h) - f(a+2h) + f(a+3h)), \text{ para } h = (b-a)/4, \quad (8)$$

com erro

$$E_N(f) = I(f) - N(f) = \frac{7(b-a)^5}{23040} f^{(4)}(\bar{\xi}), \quad \bar{\xi} \in (a, b). \quad (9)$$

Note-se que estas regras são ambas de grau $k+1 = 3$, uma vez que as expressões para os erros envolvem $f^{(4)}$ e, portanto, são regras exactas para polinómios $p \in \mathcal{P}_3$. Ou seja, o par $(S(f), N(f))$ é um par de regras companheiras.

3.1 A regra de Simpson é negativa e a de Milne positiva

Neste parágrafo pretendemos decidir, sem recorrer ao resultado da Proposição 2.1, qual o grau e o sinal da regra de Simpson, usando o método

dos coeficientes indeterminados, com a base polinomial (2), e o conceito de momento principal. Um estudo análogo pode ser feito para a regra de Milne.

Começamos por considerar o intervalo $[-1, 1]$, e adiante veremos como a partir deste intervalo os resultados se deduzem para qualquer outro intervalo $[a, b]$.

A regra de Simpson é fechada, usando para suporte os 3 nós equidistantes $t_0 = -1$, $t_1 = 0$ e $t_2 = 1$.

Comprovemos tratar-se de uma regra de grau 3, mediante aplicação das condições (3). Neste caso, a base de $\mathcal{P}_3$ em (2) é dada por: $\phi_0(t) = 1$, $\phi_1(t) = t + 1$, $\phi_2(t) = (t + 1)t$, $\phi_3(t) = (t + 1)t(t - 1)$, e considere-se

$$\phi_4(t) = \phi_3(t)(t - t_0) = (t + 1)^2 t(t - 1) .$$

Suponhamos que $g \in C^4([-1, 1])$ e designemos por $S(g)$ a regra de Simpson aplicada a g . A regra é da forma

$$S(g) = A_0 g(-1) + A_1 g(0) + A_2 g(1) .$$

Os “pesos” A_0 a A_2 deverão satisfazer as condições (3), isto é,

$$\left\{ \begin{array}{l} A_0 + A_1 + A_2 = \int_{-1}^1 dt = 2 \\ A_1 + 2 A_2 = \int_{-1}^1 (t + 1) dt = 2 \\ 2 A_2 = \int_{-1}^1 (t + 1) t dt = 2/3 . \end{array} \right.$$

A solução do sistema triangular anterior é imediata, obtendo-se $A_2 = 1/3$, $A_1 = 4/3$ e $A_0 = 1/3$. Assim,

$$S(g) = \frac{1}{3} (g(-1) + 4 g(0) + g(1)) . \quad (10)$$

A regra é de grau $m = 2$, pelo menos, por ser exacta para qualquer polinómio de grau menor ou igual a 2. No entanto, também é exata para polinómios de grau 3 uma vez que

$$S(\phi_3) = \frac{1}{3} (\phi_3(-1) + 4 \phi_3(0) + \phi_3(1)) = 0 = I(\phi_3) = \int_{-1}^1 (t + 1) t(t - 1) dt .$$

Todavia, a regra não é exacta para polinómios de grau 4, porquanto

$$S(\phi_4) = \frac{1}{3} (\phi_4(-1) + 4\phi_4(0) + \phi_4(1)) = 0$$

$$I(\phi_4) = \int_{-1}^1 (t+1)^2 t(t-1) dt = -\frac{4}{15} \quad (\text{momento principal}) . \quad (11)$$

Por conseguinte, o momento principal, $\mu_4 = -4/15$, é negativo. Logo, atendendo à Proposição 2.1, existe uma constante $c \neq 0$, tal que

$$E_S(g) = I(g) - S(g) = c g^{(4)}(\theta), \quad \theta \in (-1, 1) . \quad (12)$$

Dado que para $g(t) = \phi_4(t)$ tem por derivada de quarta ordem $\phi_4^{(4)}(t) = 4!$, a constante c em (12) tem o sinal de μ_4 , porquanto

$$c = \frac{I(\phi_4) - S(\phi_4)}{4!} = \frac{\mu_4}{4!} = -\frac{1}{90} = -\frac{1}{2 \cdot 3^2 \cdot 5} .$$

Por conseguinte, segundo a Definição 2.3, a regra é negativa e

$$E_S(g) = \frac{\mu_4}{4!} g^{(4)}(\theta), \quad \theta \in (-1, 1), \quad (13)$$

onde o momento principal μ_4 é dado por (11).

Argumentos análogos podem ser usados para provar que, uma vez conhecido o grau de uma regra de Newton-Cotes qualquer, o seu sinal (segundo a Definição 2.3) é o mesmo que o sinal do respectivo momento principal, dado que a constante c na expressão do erro satisfaz

$$c = \frac{\mu_{m+1}}{(m+1)!},$$

sendo m o grau da regra.

Mudança de intervalo de integração

A reescrita das fórmulas (10) e (13) relativamente a um intervalo $[a, b]$ obtém-se facilmente. Com efeito, para $t \in [-1, 1]$ a função

$$x = \gamma(t) = a + \frac{b-a}{2} (t+1) = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} t,$$

aplica bijectivamente o intervalo $[-1, 1]$ no intervalo $[a, b]$. Donde,

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f(\gamma(t)) dt .$$

Fazendo $g(t) = f(\gamma(t))$, obtêm-se as derivadas

$$g^{(j)}(t) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^j f^{(j)}(\gamma(t)), \quad j = 1, 2, \dots$$

Assim, denotando por $h = (b-a)/2$, obtemos para a regra de Simpson as fórmulas (6) e (7). Isto é,

$$S(f) = \frac{b-a}{2} S(g) = \frac{h}{3} (f(a) + 4f(a+h) + f(b)), \quad (14)$$

e

$$\begin{aligned} E_S(f) &= I(f) - S(f) = \frac{b-a}{2} E_S(g) \\ &= \frac{b-a}{2} \left(\frac{b-a}{2}\right)^4 \frac{\mu_4}{4!} f^{(4)}(\xi) \\ &= -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in (a, b). \end{aligned} \quad (15)$$

3.2 Regra associada a um par de regras companheiras

Nas duas tabelas a seguir apresentamos as fórmulas para as bem conhecidas primeiras regras de Newton-Cotes, fechadas e abertas, respectivamente, assim como as expressões para os erros e o grau de precisão.

k	$Q_k(f) = \sum_{i=0}^k A_i f(x_i)$	$I(f) - Q_k(f)$	Nome	m
1	$h/2 (f(a) + f(b))$	$-\frac{(b-a)^3}{2^2 3^1} f^{(2)}(\xi)$	Trapézios	1
2	$h/3 (f(a) + 4f(x_1) + f(b))$	$-\frac{(b-a)^5}{2^6 3^2 5^1} f^{(4)}(\xi)$	Simpson	3
3	$3h/8 (f(a) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(b))$	$-\frac{(b-a)^5}{2^4 3^4 5^1} f^{(4)}(\xi)$	3/8	3
4	$2h/45 (7f(a) + 32f(x_1) + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 7f(b))$	$-\frac{(b-a)^7}{2^{11} 3^3 5^1 7^1} f^{(6)}(\xi)$	Boole	5

Tab. 1: Primeiras regras de Newton-Cotes fechadas com $h = (b-a)/k$, suporte $x_i = a + ih$, para $i = 0, \dots, k$, e expressões para os erros de truncatura, sendo m o grau (ou ordem) de precisão.

Tabelas mais ou menos completas contendo as expressões das regras de Newton-Cotes fechadas e abertas, para um intervalo $[a, b]$, e em alguns casos as suas expressões de erro (em formato eventualmente distinto mas equivalente ao da Tabela 1), são usuais em obras de introdução aos métodos numéricos

k	$C_k(f) = \sum_{i=0}^k A_i f(x_i)$	$I(f) - S_k(f)$	Nome	m
0	$2h f(x_0)$	$+\frac{(b-a)^3}{2^3 3^1} f^{(2)}(\xi)$	Ponto médio	1
1	$3h/2 (f(x_0) + f(x_1))$	$+\frac{(b-a)^3}{2^2 3^1} f^{(2)}(\xi)$	Trapezoidal	1
2	$4h/3 (2f(x_0) - f(x_1) + 2f(x_2))$	$+\frac{7(b-a)^5}{2^9 3^2 5^1} f^{(4)}(\xi)$	Milne	3
3	$5h/24 (11f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + 11f(x_3))$	$+\frac{(b-a)^5}{2^4 3^2 5^4 19^1} f^{(4)}(\xi)$		3

Tab. 2: Primeiras regras de Newton-Cotes abertas com $h = (b-a)/(k+2)$, suporte $x_i = a + (i+1)h$, para $i = 0, \dots, k$, e expressões para os erros de truncatura, sendo m o grau (ou ordem) de precisão.

[2], [20], [4], [5], [6], [9], [11], [12], [19], ou em obras especializadas como [1], [3], [7], [8], [13], [14], [18]. No entanto, aparentemente nenhuma das obras citadas põe em destaque a positividade ou negatividade de uma regra de Newton-Cotes e as vantagens computacionais que poderão advir da consideração de duas regras de Newton-Cotes, do mesmo grau m de precisão, mas com expressões de erro de sinais opostos. Refira-se de novo que, neste caso, admitindo que no intervalo de integração a derivada de ordem $m+1$ não muda de sinal no intervalo, o valor exacto do integral $I(f)$ fica automaticamente enquadrado pelos valores calculados para cada uma das regras consideradas. Por exemplo, para as regras de Simpson $S(f)$ (fechada) e de Milne $N(f)$ (aberta), temos os seguintes enquadramentos para o valor exacto do integral $I(f)$: no caso em que a derivada de quarta ordem $f^{(4)}$ é positiva em (a, b) ,

$$N(f) \leq I(f) \leq S(f),$$

e quando a derivada de quarta ordem $f^{(4)}$ é negativa em (a, b) ,

$$S(f) \leq I(f) \leq N(f).$$

Consequentemente, uma terceira regra se impõe naturalmente, que designamos por *regra associada*, ao levarmos em conta as expressões dos erros dessas duas regras, conforme se discute no parágrafo a seguir.

Vamos agora ver como construir uma regra associada a um par de regras do mesmo grau mas de sinais contrários, ou seja, um par de regras companheiras. Para tal, sejam $Q(f)$ e $C(f)$ duas regras de grau $m \geq 1$, respectivamente, negativa e positiva, de uma função $f \in C^{m+1}([a, b])$, tal

que f^{m+1} não muda de sinal em $[a, b]$. Das Proposições 2.1 e 2.2, sabemos que existem constantes positivas c_1, c_2, d_1, d_2 tais que

$$\begin{aligned} E_Q(f) &= I(f) - Q(f) = -\frac{c_1}{c_2} (b-a)^{m+2} f^{(m+1)}(\xi), \quad \xi \in (a, b), \\ E_C(f) &= I(f) - C(f) = \frac{d_1}{d_2} (b-a)^{m+2} f^{(m+1)}(\bar{\xi}), \quad \bar{\xi} \in (a, b). \end{aligned} \quad (16)$$

Por conseguinte,

$$I(f) = \frac{c_2 Q(f) + d_2 C(f)}{c_2 + d_2} + \frac{(b-a)^{m+2}}{c_2 + d_2} \left(d_1 f^{(m+1)}(\bar{\xi}) - c_1 f^{(m+1)}(\xi) \right). \quad (17)$$

A expressão anterior mostra que se definirmos a regra de quadratura

$$M(f) = \frac{c_2 Q(f) + d_2 C(f)}{c_2 + d_2}, \quad (18)$$

o respectivo erro é:

$$E_M(f) = \frac{(b-a)^{m+2}}{c_2 + d_2} \left(d_1 f^{(m+1)}(\bar{\xi}) - c_1 f^{(m+1)}(\xi) \right). \quad (19)$$

A regra (18) é uma *média pesada* das regras $Q(f)$ e $C(f)$, com pesos positivos, e consequentemente o valor de $M(f)$ encontra-se entre os valores de $Q(f)$ e $S(f)$.

3.3 Regra associada de Simpson-Milne e estimativas de erro

Tomando para o par de regras companheiras o par $(S(f), N(f))$, com as regras de Simpson (6) e de Milne (8), cujo grau é $m = 3$, das respectivas expressões para os erros em (7) e (9), deduzimos que podemos tomar

$$\begin{aligned} c_1 &= 1 \quad \text{e} \quad c_2 = 2880 = 2^6 3^2 5 \quad (\text{Simpson}), \\ d_1 &= 7 \quad \text{e} \quad d_2 = 23040 = 2^9 3^2 5 \quad (\text{Milne}). \end{aligned}$$

A regra associada $M(f)$ é da forma

$$M(f) = \frac{2^6 3^2 5 (S(f) + 8 N(f))}{2^6 3^2 5 (1 + 8)} = \frac{S(f) + 8 N(f)}{9}. \quad (20)$$

Como a regra de Simpson $S(f)$ é negativa enquanto a regra de Milne $N(f)$ é positiva, no pressuposto da quarta derivada da função f não mudar de sinal

no intervalo de integração, deverão verificar-se as seguintes desigualdades:

$$N(f) \leq M(f) \leq I(f) \leq S(f)$$

ou

$$S(f) \leq I(f) \leq M(f) \leq N(f),$$

dependendo de $f^{(4)}$ ser positiva ou negativa, respectivamente.

Substituindo na média pesada (20) as expressões das regras de Simpson e de Milne, após simplificações, obtém-se a seguinte expressão para a regra associada $M(f)$,

$$M(f) = \frac{(b-a)}{54} \left[f(a) + 4 \left(8f\left(\frac{3a+b}{4}\right) - 3f\left(\frac{a+b}{2}\right) + 8f\left(\frac{a+3b}{4}\right) \right) + f(b) \right]. \quad (21)$$

Recorrendo ao método dos coeficientes indeterminados (3)-(5), pode verificar-se que a regra associada M em (21) é de grau 3, tal como as regras companheiras de Simpson-Milne, de que a regra $M(f)$ é ‘descendente’.

Os resultados obtidos para as regras de Simpson-Milne e regra associada podem facilmente ser reproduzidos de modo a construirmos uma família de regras e suas associadas, a partir de um dado par inicial de regras companheiras.

Observe-se que as tabelas Tab.1 e Tab.2 evidenciam não só o grau das regras como em particular a factorização das constantes inteiras c_1, c_2, d_1, d_2 que entram na construção de uma regra associada a um par de regras de sinais opostos.

Atendendo a (19), como $m = 3$ e $c_2 + d_2 = 25\,920$, a expressão do erro de $M(f)$ é da forma

$$E_M(f) = \frac{(b-a)^5}{1080} \left(7f^{(4)}(\bar{\xi}) - f^{(4)}(\xi) \right), \quad \bar{\xi}, \xi \in (a, b). \quad (22)$$

A expressão (22) sugere que uma boa estimativa do erro da regra associada $M(f)$, supondo o intervalo $[a, b]$ suficientemente pequeno, poderá ser calculada mediante aplicação de diferenças divididas ([16] e [2], p. 144), para aproximar as derivadas de quarta ordem que constam dessa expressão.

Com efeito, uma vez que por hipótese $f \in C^4([a, b])$, sabe-se que fixados 5 nós $x_0 < x_1 < \dots < x_4$ no intervalo em causa, existe $\theta \in (x_0, x_4)$, tal que

$$f^{(4)}(\theta) = 4! f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4], \quad \theta \in (x_0, x_4),$$

onde $f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$ designa a diferença dividida de quarta ordem, para os nós considerados.

Substituindo cada quarta derivada em (22) por uma diferença dividida, obtém-se uma estimativa do erro da regra associada $M(f)$, dada por

$$\begin{aligned} E_M(f) &= I(f) - M(f) \\ &\simeq \frac{(b-a)^5 4!}{25 \cdot 920} (7 f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] - f[\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{x}_4]) . \end{aligned} \quad (23)$$

Observação

A escolha das constantes c_1, c_2, d_1, d_2 feita na dedução da regra associada de Simpson-Milne não é a única possível. De facto, com as escolhas feitas, temos

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{1}{2^6 3^2 5}, \quad \frac{d_1}{d_2} = \frac{7}{2^9 3^2 5},$$

mas também poderíamos ter escolhido, por exemplo,

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{1}{2^6 3^2 5}, \quad \frac{d_1}{d_2} = \frac{7/2}{2^8 3^2 5} \quad \text{ou} \quad \frac{c_1}{c_2} = \frac{1}{2^6 3^2 5}, \quad \frac{d_1}{d_2} = \frac{7/8}{2^6 3^2 5}.$$

Com estas escolhas obteríamos as regras associadas

$$\begin{aligned} M(f) &= \frac{S(f) + 4 N(f)}{5} \\ &= \frac{(b-a)}{30} \left[f(a) + 4 \left(4 f\left(\frac{3a+b}{4}\right) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) + 4 f\left(\frac{a+3b}{4}\right) \right) + f(b) \right] \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} M(f) &= \frac{S(f) + N(f)}{2} \\ &= \frac{(b-a)}{12} \left[f(a) + 2 \left(2 f\left(\frac{3a+b}{4}\right) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f\left(\frac{a+3b}{4}\right) \right) + f(b) \right], \end{aligned}$$

com propriedades análogas à regra deduzida em (21). Nestas novas escolhas, mantivemos os valores de c_1 e c_2 e apenas diminuímos os valores de d_1 e d_2 . Se analisarmos a expressão (19) para o erro da regra associada, admitindo que $f^{(4)}(\xi) \simeq f^{(4)}(\tilde{\xi})$, temos

$$E_M(f) \simeq (b-a)^5 \left(\frac{d_1 - c_1}{c_2 + d_2} \right) f^{(4)}(\xi).$$

O fator $(d_1 - c_1)/(c_2 + d_2)$ assume os valores 2.3×10^{-4} (para $d_1 = 7$), 1.7×10^{-4} (para $d_1 = 7/2$) e 2.2×10^{-5} (para $d_1 = 7/8$), no caso das três regras consideradas. Sendo assim, esta análise mostra que não será sempre verdade que a primeira escolha é a que levará um menor erro de truncatura (caso que seria a escolha ideal). Questões relacionadas com a optimização de regras companheiras em geral serão abordadas noutro trabalho.

3.4 Regra associada das regras companheiras trapézios e ponto médio

Mostramos a seguir que a regra associada ao primeiro par de regras de Newton-Cotes que são companheiras (trapézios, ponto médio) é a regra de Simpson, para a qual obtemos uma expressão de erro a partir das fórmulas de erro de cada regra do par.

As regras dos trapézios $T(f)$ e do ponto médio $P(f)$ (cf. Tabelas 1 e 2) são companheiras, ambas de grau $m = 1$. A partir das expressões dos respectivos erros, podemos definir

$$\begin{aligned} c_1 = 1 \quad \text{e} \quad c_2 = 12 = 2^2 \cdot 3 \quad (\text{trapézios}), \\ d_1 = 1 \quad \text{e} \quad d_2 = 24 = 2^3 \cdot 3 \quad (\text{ponto médio}). \end{aligned}$$

Usando (18) com $Q(f) = T(f)$ e $C(f) = P(f)$, concluímos que a regra associada $M(f)$ ao par $(T(f), P(f))$ é da forma

$$M(f) = \frac{2^2 \cdot 3 (T(f) + 2 P(f))}{2^2 \cdot 3 (1 + 2)} = \frac{T(f) + 2 P(f)}{3},$$

isto é, a regra associada é uma *média pesada* das regras do par considerado.

Note-se que à regra do ponto médio é atribuído o peso 2 enquanto à regra dos trapézios corresponde o peso 1, de acordo com o facto de que o erro da regra do ponto médio, em módulo, ser aproximadamente metade do erro da regra dos trapézios.

Substituindo as expressões de $T(f)$ e $P(f)$ e simplificando, resulta

$$M(f) = \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4 f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right),$$

que coincide com a expressão da célebre regra de Simpson (ver (6)).

4 Exemplos numéricos

Nos exemplos numéricos que propomos, onde testamos as regras companheiras Simpson-Milne e respectiva regra associada, usamos como estratégia aproximar cada uma das derivadas de quarta ordem em (22) recorrendo a uma diferença dividida num suporte com 5 pontos, mediante o comando `RandomReal[{a,b},{5}]`, aplicado duas vezes (cf. com funções `ErroM[f,a,b]`, e `ErroM[f,a,b,n]`, definidas na Secção 5).

Regras compostas

Nos exemplos apresentados adiante consideramos regras *compostas*. Para tal, subdividindo o intervalo $[a, b]$ em n ($n \geq 2$) partes, de comprimento uniforme $h = (b - a)/n$, as regras anteriormente consideradas são aplicadas sucessivamente a cada subintervalo $[a_i, b_i]$, que resulta de particionar dois a dois a lista de valores $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ (onde $x_0 = a$ e $x_n = b$, $x_i = a + i h$, para $i = 1, \dots, n - 1$), e somamos os resultados obtidos.

Para o efeito, nalgumas funções definidas no código *Mathematica*, na Secção 5, são usados os comandos `Range`, `Partition` e `Total`.

Exemplo 4.1.

Para aproximar

$$I(f) = \int_{1/20}^{3/2} \frac{\sin(x)}{x} dx = Si(3/2) - Si(1/20) = 1.2746904 \dots,$$

(Si designa a função seno integral), subdividamos o intervalo $[a, b] = [1/20, 3/2]$ em n partes iguais, para $n = 2^j$, com $j = 1, 2, \dots, 5$. Iremos aplicar as duas primeiras regras companheiras de Newton-Cotes, de grau 1, compostas.

Designa-se por $P_n(f)$ a regra do ponto médio composta, por $T_n(f)$ a regra dos trapézios composta e por $M_n(f)$ a regra associada (coincidente com a regra de Simpson composta). Na tabela Tab. 3, para cada n , apresenta-se o resultado da aplicação das referidas regras, sendo os erros $I(f) - T_n(f)$, $I(f) - P_n(f)$ e $I(f) - M_n(f)$, arredondados de modo a economizar o espaço ocupado pelas respectivas colunas.

Note-se que a sucessão dos valores de $T_n(f)$ (trapézios) é crescente, a sucessão dos valores de $P_n(f)$ (ponto médio) é decrescente e $T_n(f) < M_n(f) < P_n(f)$. Os resultados numéricos obtidos sugerem que o encaixe de intervalos $[T_2(f), P_2(f)] \supset [T_4(f), P_4(f)] \supset \dots \supset [T_{32}(f), P_{32}(f)] \supset \dots$ contém o valor exacto de $I(f)$. Com efeito, dado que

n	Trapézios	$I(f) - T_n(f)$	Ponto médio	$I(f) - P_n(f)$	$M_n(f)$	$I(f) - M_n(f)$
2	1.25798336839	0.01671	1.28307550595	-0.00839	1.2747114601	-0.000020985
4	1.27052943717	0.00416	1.27677294535	-0.00208	1.27469177596	-1.3009 $\times 10^{-6}$
8	1.27365119126	0.00104	1.27521023872	-0.00052	1.27469055623	-8.11 $\times 10^{-8}$
16	1.27443071499	0.00026	1.27482036275	-0.00013	1.27469048016	-5.1 $\times 10^{-9}$
32	1.27462553887	0.00006	1.27472294368	-0.00003	1.27469047541	-3. $\times 10^{-10}$

Tab. 3: Regras compostas (trapézios, ponto médio) e associada (Simpson).

$$f^{(2)}(x) = \frac{(2 - x^2) \sin(x) - 2x \cos(x)}{x^3} < 0, \quad \forall x \in [1/20, 3/2],$$

atendendo às respectivas fórmulas de erro, para a regra dos trapézios tem-se $I(f) - T_n(f) > 0$, e para a regra do ponto médio $I(f) - P_n(f) < 0$, donde

$$T_n(f) < I(f) < P_n(f), \quad n = 2, 4, 8, \dots$$

e

$$|I(f) - M_n(f)| \leq \min(|T_n(f) - M_n(f)|, |P_n(f) - M_n(f)|),$$

onde $M_n(f)$ designa a regra de Simpson composta para n subintervalos de $[1/20, 3/2]$.

Os dois exemplos numéricos a seguir referem-se ao par de regras companheiras (Simpson, Milne) e respectiva regra associada.

Exemplo 4.2.

Para aproximar o integral²

$$I(f) = \int_0^{\pi} \sin(x^2) dx,$$

apliquemos as regras companheiras Simpson-Milne e a respectiva regra associada $M(f)$ em (21), bem como as estimativas de erro (23), compondo para um número de subintervalos $n \in \{2, 4, 8, \dots, 1024\}$. O resultado é apresentado na tabela Tab. 4. O último valor produzido pela regra $M(f)$ tem um erro exacto $I(f) - M_{1024}(f) = 4.92461627033 \times 10^{-12}$ (para a precisão dupla nos cálculos, da ordem de 10^{-16} , usada por defeito no sistema *Mathematica* ao aplicar-se o comando *NIntegrate*).

Comparando com o erro estimado que consta na última coluna da tabela, em último lugar, conclui-se que neste caso a fórmula (23), adoptada para estimativa de erro, dá uma excelente aproximação do erro efectivamente cometido, embora se recorra a números pseudo-aleatórios.

n	Simpson	Milne	M	Erro estimado de M
2	0.120443827899	1.55309670815	1.39391305479	-0.385838966585
4	0.836770268026	0.713447478675	0.727150010825	0.0286290141207
8	0.775108873351	0.770455536125	0.770972573595	0.00281025143553
16	0.772782204738	0.77253691081	0.772564165691	0.0000994955173022
32	0.772659557774	0.772644838899	0.772646474329	$5.55562564783 \times 10^{-6}$
64	0.772652198336	0.772651287605	0.772651388797	$3.25709019048 \times 10^{-7}$
128	0.772651742971	0.772651686192	0.772651692501	$1.99779536495 \times 10^{-8}$
256	0.772651714581	0.772651711035	0.772651711429	$1.25423807114 \times 10^{-9}$
512	0.772651712808	0.772651712587	0.772651712611	$7.87398784067 \times 10^{-11}$
1024	0.772651712697	0.772651712684	0.772651712685	$5.03910599123 \times 10^{-12}$

Tab. 4: $f(x) = \sin(x^2)$, $a = 0$, $b = \pi$. Regras compostas Simpson-Milne e associada $M(f)$.

Observe-se que, a partir de $n = 4$, a sucessão de valores calculados para a regra de Simpson é decrescente, de acordo com o facto de se tratar de uma regra *negativa*, enquanto a sucessão de valores da regra de Milne é crescente, igualmente de acordo com o facto de esta regra ser *positiva*. O par de regras companheiras (usado na forma de regras compostas, para um número n crescente de subintervalos), produz um encaixe de intervalos contendo o valor exacto do integral $I(f)$.

² O comando *Integrate* do *Mathematica* dá como resposta $\sqrt{\pi/2} \operatorname{FresnelS}[\sqrt{2}\pi]$.

A discussão da teoria algorítmica para a construção de encaixes de intervalos a partir de regras companheiras, quer sejam do tipo das regras de Newton-Cotes ou outro, ultrapassa o âmbito desta nota.

n	Simpson	Milne	M	Erro estimado de M
2	892.345588224	880.400393147	881.727637045	1.81083464047
4	886.372990686	885.403727595	885.511423494	0.364551173785
8	885.88835914	885.82883781	885.835451291	0.0216819364967
16	885.858598475	885.854876956	885.855290458	0.00133815034131
32	885.856737716	885.856505057	885.856530908	0.0000830153104758
64	885.856621387	885.856606844	885.85660846	$5.17736182432 \times 10^{-6}$
128	885.856614115	885.856613206	885.856613307	$3.23240020195 \times 10^{-7}$
256	885.856613661	885.856613604	885.85661361	$2.04817967478 \times 10^{-8}$
512	885.856613633	885.856613629	885.856613629	$1.24214633675 \times 10^{-9}$
1024	885.856613631	885.856613631	885.856613631	$1.16921437361 \times 10^{-10}$

Tab. 5: $f(x) = 4 \cosh(x/4) - \sin(x)/x$, $a = 1$, $b = 6\pi$. Regras compostas de Simpson-Milne e associada $M(f)$.

Exemplo 4.3.

Usando o mesmo procedimento do exemplo anterior, para aproximar o integral³

$$I(f) = \int_1^{6\pi} \left(4 \cosh\left(\frac{x}{4}\right) - \frac{\sin(x)}{x} \right) dx,$$

obtemos os resultados que constam da tabela Tab. 5. Aqui verifica-se um comportamento monótono decrescente da regra de Simpson composta, para uma sucessão crescente de valores de $n \geq 2$, por oposição à monotonia crescente da regra de Milne, encaixando assim o valor exacto de $I(f)$. Note-se que o erro exacto do último valor calculado com a regra associada, $M_{1024}(f)$, vale aproximadamente $7.9 * 10^{-11}$, pelo que este erro está bem estimado através da fórmula (23), conforme se pode observar através do último valor na quinta coluna da tabela.

Agradecimento

São devidos agradecimentos ao referee anónimo cujas sugestões e observações muito contribuíram para a melhoria da apresentação e conteúdo do original deste trabalho.

³ O comando Integrate do *Mathematica* dá como resposta
 $-16 \sinh(1/4) + 16 \sinh(3\pi/2) + \text{SinIntegral}[1] - \text{SinIntegral}[6\pi]$.

5 Código *Mathematica*

```
(* regra dos trapézios *)
Trapezios[f_, a_, b_] := (b - a)/2 (f[a] + f[b]);

(* regra dos trapézios composta para n subintervalos *)
Trapezios[f_, a_, b_, n_] := (h = (b - a)/n;
  Total[Map[Trapezios[f, #[[1]], #[[2]]] &,
    Partition[Range[a, b, h], 2, 1]]]);

(* regra do ponto médio *)
PontoMedio[f_, a_, b_] := (b - a) f[(a + b)/2];

(* regra do ponto médio composta para n subintervalos *)
PontoMedio[f_, a_, b_, n_] := (h = (b - a)/n;
  Total[Map[PontoMedio[f, #[[1]], #[[2]]] &,
    Partition[Range[a, b, h], 2, 1]]]);

(* Notar que a regra associada ao par (trapézios, ponto médio) *)
(* é a regra de Simpson *)

(* regra de Simpson *)
Simpson[f_, a_, b_] := Block[{h},
  h = (b - a)/2;
  h/3 (f[a] + 4 f[a + h] + f[b])];

(* regra de Simpson composta para n subintervalos *)
Simpson[f_, a_, b_, n_ /; EvenQ[n]] := Block[{h},
  h = (b - a)/n;
  Total[Map[Simpson[f, #[[1]], #[[2]]] &,
    Partition[Range[a, b, h], 2, 1]]]);

(* regra de Milne *)
Milne[f_, a_, b_] := Block[{h},
  h = (b - a)/4;
  4 h/3 (2 f[a + h] - f[a + 2 h] + 2 f[a + 3 h])];

(* regra de Milne composta com n subintervalos *)
Milne[f_, a_, b_, n_ /; EvenQ[n]] := Block[{h},
  h = (b - a)/n;
```

```

Total[Map[Milne[f, #[[1]], #[[2]]] &,
  Partition[Range[a, b, h], 2, 1]]];

(* regra M(f) associada ao par de companheiras (Simpson,Milne) *)
M[f_, a_, b_] := Block[{q, s},
  q = Milne[f, a, b];
  s = Simpson[f, a, b];
  (8 q + s)/9];

(* regra M(f) composta com n subintervalos *)
M[f_, a_, b_, n_] := Block[{h},
  h = (b - a)/n;
  Total[Map[M[f, #[[1]], #[[2]]] &,
    Partition[Range[a, b, h], 2, 1]]];

(* calculo diferenca dividida de lista : *)
d[{xi_}] := f[xi];
d[x_List] := (d[Rest[x]] - d[Most[x]])/(Last[x] - First[x]);

(* estimativa de erro para a regra associada M(f) *)
(* de Simpson-Milne *)
ErroM[f_, a_, b_] := Block[{dif1, dif2},
  dif1 = d[RandomReal[{a, b}, 5]]];
  dif2 = d[RandomReal[{a, b}, 5]];
  (b - a)^5 1/1080 ( 7 dif1 - dif2 )];

(* estimativa de erro para M(f) composta com n subintervalos *)
(* de Simpson-Milne *)
ErroM[f_, a_, b_, n_] := Block[{h},
  h = (b - a)/n;
  Total[Map[ErroM[f, #[[1]], #[[2]]] &,
    Partition[Range[a, b, h], 2, 1]]];

```

Referências

- [1] M. Abramowitz, I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*, Dover, 1972.
 (disponível em <http://people.math.sfu.ca/~cbm/aands/intro.htm#006>).

- [2] K. E. Atkinson, *An Introduction to Numerical Analysis*, John Wiley and Sons, New York, 2nd ed., 1989.
- [3] H. Brass, K. Petras, *Quadrature Theory, the theory of numerical integration on a compact interval*, American Mathematical Society, Providence, 2011.
- [4] R. L. Burden, J. D. Faires, *Numerical Analysis*, Brooks/Cole, Boston, 2011.
- [5] S. D. Conte, C. de Boor, *Elementary Numerical Analysis, An Algorithmic Approach*, McGraw-Hill inc, New York, 1980.
- [6] G. Dahlquist, A. Bjorck, *Numerical methods in Scientific Computing*, Vol. I, SIAM, Philadelphia, 2008.
- [7] H. Engels, *Numerical quadrature and cubature*, Academic Press, London, 1980.
- [8] P. J. Davis, P. Rabinowitz *Methods of Numerical Integration*, Academic Press, Orlando, 1984.
- [9] W. Gautschi, *Numerical Analysis, An Introduction*, Birkhauser, Boston, 1997.
- [10] M. M. Graça, Quadrature as a least-squares and minimax problem, *Int. J. Numerical Methods and Applications*, 10, 1-28, 2013.
- [11] R. W. Hamming *Numerical Methods for Scientists and Engineers*, New York, 1973.
- [12] R. Kress, *Numerical Analysis*, Springer, Berlin, 1998.
- [13] V. I. Krylov, *Approximate Calculation of Integrals*, Dover Pub., New York, 2005.
- [14] A. R. Krommer, C. W. Ueberhuber, *Computacional Integration*, SIAM, Philadelphia, 1998.
- [15] W. E. Milne, *Numerical Calculus: Approximations, interpolation, finite differences, numerical integration and curve fitting*, Princeton University Press, 1954 (reeditado em 2016).
- [16] L. M. Milne-Thomson, *Calculus of Finite Differences*, MacMillan Co., London, 1933.

-
- [17] I. Newton, *Treatise of the Quadrature of Curves*, in *Sir Isaac Newton's Two Treatises of The Quadrature of Curves, and Analysis by Equations of an infinite Number of Terms*, by John Stewart, James Bettenham, London, 1745.
 - [18] S. Nikolski, *Fórmulas de Cuadratura*, Editorial MIR, Moscú, 1990 (versão em espanhol).
 - [19] J. Stoer, R. Bulirsch, *Introduction to Numerical Analysis*, Springer, New York, 1980.
 - [20] E. Suli, D. Mayers, *An Introduction to Numerical Analysis*, Cambridge University Press, New York, 2003.
 - [21] S. Wolfram, *The Mathematica Book*, Wolfram Media, fifth ed., 2003.

Problemas

Editor:
Jorge Nuno Silva

NOTAS SOBRE O PROBLEMA ANTERIOR E PLANO *PSICADÉLICO*

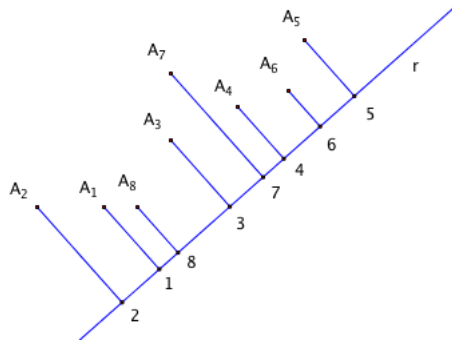
Jorge Nuno Silva

Os leitores são convidados a enviar, para eventual publicação, soluções, comentários, propostas de problemas, etc. Essa correspondência deve ser enviada para a SPM, ao cuidado do editor desta secção. Há livros para sortear entre as soluções recebidas em cada número.

Relembremos o problema do número anterior.

Problemas para meninas

1. Seja n um inteiro positivo e D_n o conjunto dos divisores positivos de n , incluindo 1 e n . Prove que no máximo metade dos elementos de D_n tem 3 como algarismo das unidades.
2. Sejam $A_1, \dots, A_8$ oito pontos quaisquer do plano. Seja $\vec{r}$ uma recta (orientada) qualquer. Consideremos os pés das perpendiculares tiradas pelos pontos $A_1, \dots, A_8$ sobre $\vec{r}$.



Atendendo à orientação da recta, estes novos pontos definem uma permutação dos índices $1, \dots, 8$. Por exemplo, na figura a permutação é

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 8 & 3 & 7 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Imaginemos que este processo se repete para todas as rectas do plano que não geram projecções ortogonais coincidentes para pontos diferentes. No máximo, quantas permutações diferentes de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ se podem obter?

1. O resultado é evidente se n for uma potência de 2.

Se $5|n$, sejam $d_1, \dots, d_m$ os divisores de n que terminam em 3. Então $5d_1, \dots, 5d_m$ estão em D_n e não terminam em 3.

Se $5 \nmid n$ e os divisores primos de n terminam em 1 ou em 9, então todos os elementos de D_n terminam em 1 ou 9.

Se $5 \nmid n$ e existe um divisor primo $p \in D_n$ a terminar em 3 ou 7, seja $n = p^r q$ com $(p, q) = 1$. Se $D_q = \{a_1, \dots, a_k\}$, então os divisores de n são

$$a_1, a_1 p, \dots, a_1 p^r, a_2, a_2 p, \dots, a_2 p^r, \dots, a_k, a_k p, \dots, a_k p^r$$

Para cada $d_i = a_s p^\ell \in D_n$, seja $e_i \in D_n$ o *parceiro* de d_i , definido por

$$e_i = \begin{cases} a_s p^{\ell+1} & \text{se } \ell < r \\ a_s p^{\ell-1} & \text{se } \ell = r \end{cases}$$

Se d_i termina em 3, então o último dígito de e_i não é 3 (p termina em 3 ou 7).

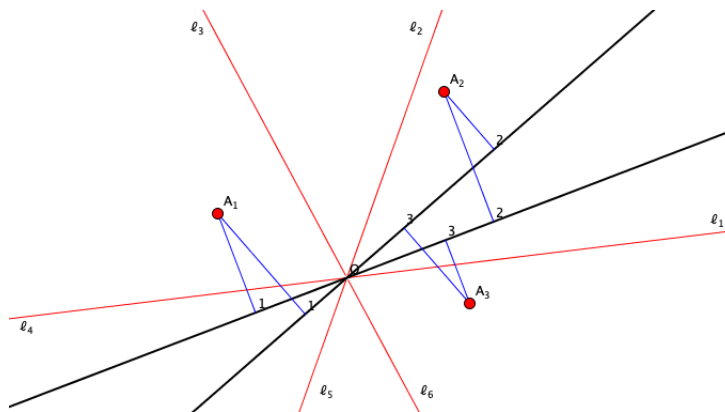
Se $d_i, d_j \in D_n$ ($i \neq j$) terminam ambos em 3, os seus parceiros são diferentes, já que se $e_i = e_j = a_s p^\ell$ temos, sem perda de generalidade, $d_i = a_s p^{\ell-1}$, $d_j = a_s p^{\ell+1}$, donde $d_j = d_i p^2$, o que inviabiliza a partilha do último dígito.

2. Se duas rectas orientadas são paralelas, as respectivas permutações coincidem, pelo que basta considerar rectas concorrentes num ponto O .

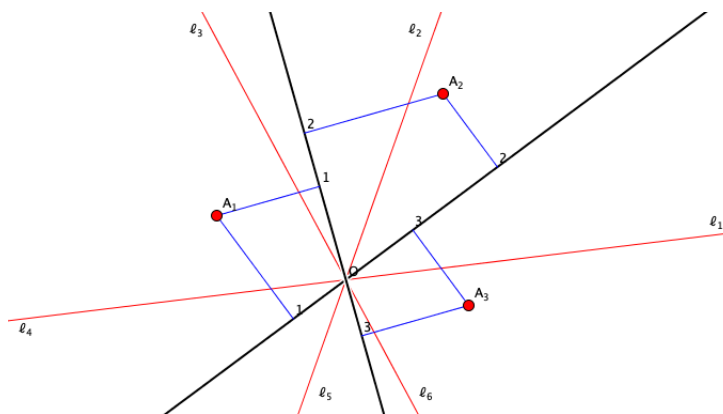
Se uma recta for perpendicular à recta definida por dois pontos dados, A_i e A_j , então as projecções de A_i e de A_j coincidem.

Consideremos todas as rectas por O perpendiculares a um par de pontos dados. Seja o seu número k . Claro que $k \leq \binom{8}{2} = 28$. Pelo que há, no máximo, $2k \leq 56$ rectas orientadas por O .

Consideremos estas rectas orientadas $\ell_1, \dots, \ell_{2k}$ numeradas em sentido anti-horário. Sejam ℓ e ℓ' rectas orientadas quaisquer tais que ℓ_j, ℓ, ℓ_{j+1} e $\ell_j, \ell', \ell_{j+1}$ estão em ordem anti-horária. Neste caso, as permutações definidas pelas duas rectas coincidem. Ilustremos com um caso de três pontos dados.



Se a situação anterior não se verifica, então existe j tal que ℓ', ℓ_j, ℓ estão em ordem anti-horária. Seja ℓ_j perpendicular à recta por A_{j_1} e A_{j_2} . As projecções de A_{j_1} e A_{j_2} em ℓ e ℓ' estão em ordens diferentes, pelo que as permutações são distintas. Vejamos de novo uma ilustração:



Concluimos então que o número de permutações é $2k$. Como $2k$ pode tomar o valor 56, no caso de os pontos dados estarem em posição genérica, a resposta é 56.

Plano psicadélico

Imaginemos que cada ponto do plano é pintado vermelho ou azul. Será que há dois pontos da mesma cor exactamente a um metro de distância um do outro? Esta é uma questão fácil: considere-se um triângulo equilátero de lado um. Que cores podem ter os seus vértices?...

Propomos uma questão mais interessante: Provar que há um rectângulo cujos vértices têm todos a mesma cor.

No mesmo contexto, será que pelo menos uma das cores (azul ou vermelho) realiza todas as distâncias possíveis?

Usemos agora três cores. Admitamos então que os pontos do plano são pintados de azul, vermelho ou verde. Prove que há dois pontos da mesma cor exactamente a um metro de distância um do outro.

Deixemos as cores de parte. Peço agora que o leitor me dê um exemplo de um conjunto de pontos no plano, S , de cardinalidade mínima, com a propriedade de não existir nenhum ponto do plano cuja distância a cada elemento de S ser racional.

História da Matemática

Editor:
Luís Saraiva

O CORRETOR DE RUMOS DE GAGO COUTINHO E SACADURA CABRAL

António Costa Canas

Escola Naval & CINAV & CH-ULisboa & CIUHCT
Base Naval de Lisboa – Alfeite, Almada
e-mail: costa.canas@marinha.pt

Magda Ramires Marabujo

Escola Naval
Base Naval de Lisboa – Alfeite, Almada
e-mail: magda.ines.marabujo@marinha.pt

Teresa Sousa

Escola Naval e CINAV-Centro de Investigação Naval
Escola Naval – Alfeite, Almada
Centro de Matemática e Aplicações (CMA), FCT – UNL, Caparica
e-mail: teresa.maria.sousa@marinha.pt

Resumo: Na travessia aérea do Atlântico Sul, em 1922, foram usados métodos astronómicos de navegação, adaptados da navegação marítima. Para a sua aplicação era importante conhecer a posição estimada da aeronave com algum rigor. Na maior parte dos casos, o conhecimento da direção seguida pela aeronave e da sua velocidade, em relação ao ar, não são suficientes para

determinar essa posição com rigor, pois o vento pode provocar desvios significativos no movimento da aeronave. A determinação do efeito do vento, conhecido como deriva, era fundamental para melhorar o rigor da posição estimada. Gago Coutinho e Sacadura Cabral conceberam um instrumento, o corretor de rumos, que permitia calcular, de uma forma expedita a deriva provocada pelo vento. Além disso, o corretor de rumos servia igualmente para determinar qual a direção para a qual deveria apontar a aeronave, de modo a seguir na direção desejada. Neste artigo será explicado em que consiste o problema da deriva assim como o processo de cálculo da mesma, usando o corretor de rumos. Serão apresentadas inúmeras ilustrações, para uma melhor compreensão dos procedimentos de cálculo, sendo igualmente apresentadas as principais fórmulas de cálculo que serviram de suporte teórico à construção do instrumento.

Palavras-chave: Navegação Aérea, Corretor de Rumos, Gago Coutinho, Sacadura Cabral, Travessia do Atlântico Sul.

Abstract: In the South Atlantic Aerial Crossing, in 1922, several methods of astronomical maritime navigation were used with adaptations to aerial navigation. In order to apply these methods, the navigator needed to know the position of the aircraft. In most cases, the knowledge of the direction and the velocity of the aircraft are not enough to determine its real position since the influence of wind may change its course significantly. Therefore, knowing the direction and velocity of the wind were crucial to best estimate the real position of the aircraft. Gago Coutinho and Sacadura Cabral invented an instrument, the path corrector, that enabled the navigator to determine the direction and velocity of the wind, furthermore, the path corrector could also be used to determine the new direction of the aircraft in order to compensate the wind drift. In this paper we will study the detailed construction of the path corrector. The paper contains various diagrams to better understand its construction as well as the way the instrument would be used during the flight.

Keywords: Air Navigation, Path Corrector, Gago Coutinho, Sacadura Cabral, South Atlantic Aerial Crossing

1 Introdução

A navegação recorre a um conjunto de técnicas, instrumentos e processos, através dos quais o marinheiro ou aviador não só determina a sua posição

à superfície da Terra, mas também a direção que deverá seguir por forma a dirigir a sua plataforma até ao destino desejado.

No entanto, até ao ano de 1922 esse processo técnico de cálculo para a navegação aérea ainda não havia sido descoberto, a sua necessidade era ainda reduzida, pois a maior parte das viagens que se realizavam eram de curta distância e com o solo visível para que se pudesse verificar o progresso da aeronave em direção ao ponto desejado somente através da observação e de instrumentos muito rudimentares. Embora esses equipamentos fossem capazes de fornecer dados básicos como direção (bússola), distância (odómetro) e altitude (altímetro), essas informações não eram as suficientes para que se conseguisse alcançar o objetivo de efetuar viagens de longas distâncias, especialmente sobre o mar. Por este motivo era então indispensável encontrar um processo de navegação aérea que providenciasse as condições necessárias à sua concretização, estávamos assim perante um apreciável problema.

Ciente dessa dificuldade, em 1919, o comandante Albert Read usou navios da Marinha Americana, distanciados de 50 em 50 milhas, com a função de orientar de dia e de noite, através de holofotes e material iluminante, as aeronaves até ao destino definido. Esses navios foram fundamentais na concretização da primeira Travessia Aérea do Atlântico Norte, especialmente nos longos trânsitos oceânicos entre o Canadá e os Açores e entre este arquipélago e Lisboa.

Tendo em conta o que foi dito anteriormente é possível verificar que não houve nenhum progresso ou inovação em relação aos métodos de navegação aérea, já que esta travessia foi toda ela realizada usando métodos de navegação à vista. Nesse mesmo ano, realizou-se uma segunda travessia, todavia esta foi do Canadá até à Irlanda e efetuada pelos ingleses Alcock e Brown com uma pequena particularidade de terem utilizado um sextante de marinha¹ com nível de bolha adaptado².

Na obra *Flying The Atlantic In Sixteen Hours*, o autor, Sir Arthur Whitten Brown afirma que durante a travessia realizou algumas observações a astros com o sextante de horizonte artificial, realçando o facto de ter conseguido calcular o número de milhas percorridas, a velocidade média praticada

¹Os métodos de navegação aplicados pelos marinheiros nos navios resultaram de séculos de pesquisa, invenção e experimentação, contudo ainda não tinham atingido a finalidade de poderem ser usados para voos de longa distância, especialmente sobre o oceano, em condições de invisibilidade do solo e, por vezes, do horizonte.

²É uma modificação introduzida no sextante para que possa ser usado na navegação aérea. Esse é constituído por um sistema de bolha que produz um horizonte simulado/artificial podendo, deste modo, o instrumento ser usado em qualquer circunstância de invisibilidade desse limite.

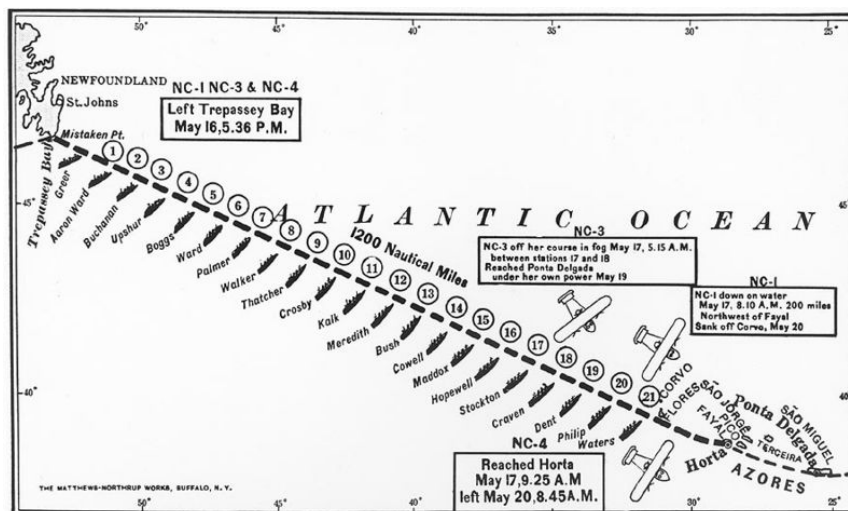


Figura 1: Parte da travessia aérea América-Europa realizada pelo comandante Albert Read a bordo do hidroavião NC-4, através da “balizagem” do percurso por navios. (Fonte: Curtiss NC-4 [s.d.] .)

e a posição da aeronave, que lhe permitiu comparar com o planeamento efetuado na carta de navegação “*We were slightly to the south of the correct course, which fact I made known to Alcock in a note, with penciled corrections for remedying the deviation*” [BROWN, 1920, 52].

Tendo por base o referido no parágrafo anterior é possível constatar que, apesar de ter ocorrido um avanço ao nível dos métodos de navegação aérea, a estima da posição da aeronave não exigia grande rigor, pois o objetivo da mencionada travessia consistia em “acertar” com a longa costa da Irlanda. Com efeito é de notar o facto de se ter descoberto o caminho da solução para o problema inicial, a qual passa claramente pela adaptação dos métodos de navegação marítima à navegação aérea. No entanto, não se pense que um oficial de marinha com vasta experiência em navegação astronómica em navios teria conhecimentos suficientes para dirigir aeronaves com segurança.

Em 1922 é realizada a primeira Travessia Aérea do Atlântico Sul e note-se que é apropriado e necessário efetuar uma considerável distinção entre esta viagem e as duas caracterizadas nos parágrafos anteriores. Na verdade, a pertinência não está no facto de se ter concretizado a primeira viagem aérea oceânica do Sul, mas sim, com toda a certeza, na circunstância de Gago Coutinho e Sacadura Cabral terem sido os pioneiros na conceção e ratifica-



Figura 2: Percurso efetuado na primeira Travessia Aérea do Atlântico Sul. (Fonte: Travessia [s.d.])

ção dos primeiros métodos científicos da navegação aérea, cuja eficácia foi comprovada com o sucesso obtido no alcance dos Penedos de S. Pedro, um ínfimo ponto na imensidão do Oceano Atlântico atingido com “*um grau de rigor que surpreendeu os especialistas na matéria*” [SOARES1, 1997, IV–20].

Em primeiro lugar, é natural que Gago Coutinho, o navegador, se tenha baseado na análise de todas as diferenças existentes entre a navegação marítima e a aérea para criar o seu sextante de horizonte artificial, mas não só, ainda concebeu juntamente com o piloto-aviador, um instrumento capaz de calcular o abatimento, com designação de corretor de rumos.

O objetivo principal deste artigo é, pois, o estudo detalhado do corretor

de rumos concebido por Gago Coutinho e Sacadura Cabral para o cálculo da direção, intensidade do vento e o abatimento da aeronave.

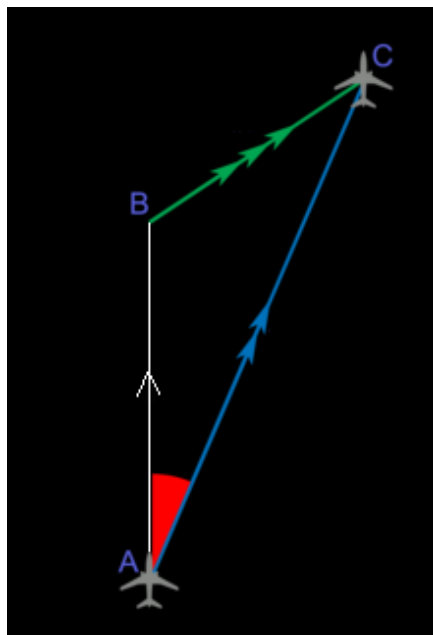


Figura 3: Ângulo de Abatimento. A é a última posição conhecida, $\overrightarrow{BC}$ é a intensidade e direção do vento e C é a posição verdadeira da aeronave.

Tendo em conta a época em que viveram os dois navegadores, sabemos que os métodos até à altura utilizados eram elementares e arcaicos, como é o caso da bússola, altímetro, velocímetro, sextante de navegação marítima adaptado com uma bolha de nível, sistemas de estima muito primitivos, Almanaque e Tábuas Náuticas.

Note-se que a velocidade de deslocamento de uma aeronave é efetivamente bastante mais elevada que a de uma qualquer outra plataforma, tendo como resultado um maior consumo de combustível. Como tal são necessárias observações mais frequentes, bem como métodos de cálculo simples, não só para colmatar a inexperiência dos navegadores em viagens de longo curso, mas também para realizar rapidamente essas operações, por forma a encontrar o caminho mais curto e economizar combustível, que era limitado.

Assim, era imprescindível conhecer o desvio que o vento causava na aeronave, uma vez que consoante a sua velocidade, direção e tempo de atuação poderia causar alterações significativas ao rumo sem que o navegador no-

tasse. Deste modo, era essencial calcular de forma rápida o abatimento que a ação do vento provocava, mais, era verdadeiramente crucial que este cálculo fosse efetuado de forma rápida e expedita.

Por outro lado, a precisão da navegação podia ser sacrificada em prol da rapidez dos cálculos, uma vez que um erro de 10 a 20 milhas não era significativo e, para além do mais, note-se que não havia necessidade de evitar perigos como, por exemplo, obstáculos naturais, permitindo assim efetuar aproximações e arredondamentos durante os cálculos, sem que estes fossem críticos para a navegação aérea.

A primeira dificuldade estava no cálculo da estima, isto é, no conhecimento e determinação da direção e intensidade do vento, o qual exerce perturbações no movimento do aeroplano, arrastando-o no ar tal como acontece com os navios no mar devido ao efeito da corrente.

A navegação estimada é um método simples e na altura já utilizado pelos navegadores, consistindo na determinação do fator meteorológico predominante através da marcação da posição observada e estimada. Por exemplo, é possível prever a próxima posição do navio tendo por base uma posição geográfica, o conhecimento da velocidade, proa do navio e o tempo decorrido. De seguida, é calculada no mesmo momento a posição geográfica verdadeira e comparada com aquela que foi estimada, se essa for diferente. Caso seja diferente, significa que o movimento do navio está a ser influenciado por um fator dominante, neste caso, a corrente. A determinação desta faz-se através da diferença vetorial das duas posições, a estimada e a observada.

Porém, na navegação aérea o método usado na navegação marítima não era viável, pois eram necessários processos “rápidos, automáticos e compatíveis com a velocidade do avião” [PINTO, 2014, 83]. No entanto, à data já tinham sido desenvolvidos alguns processos que auxiliavam as aeronaves a chegar ao seu destino, nomeadamente a TSF³.

Este método tinha como objetivo, a partir de estações de transmissão em terra, enviar emissões eletromagnéticas, em intervalos de tempo definidos, para recetores⁴ instalados nas aeronaves. O equipamento de receção dos aeroplanos estava concebido para ler o sinal recebido e indicar com precisão a direção a partir da qual ele tinha sido enviado. Deste modo, a aeronave tinha a capacidade de chegar ao destino pretendido sempre pelo caminho mais curto e com este método qualquer situação meteorológica que compromettesse a visibilidade não afetaria a navegação. Para além disso, uma outra

³Telegrafia sem fios.

⁴Radiogoniómetro, equipamento elétrico capaz de determinar a direção da origem de um sinal de rádio.

vantagem é que não implicava que o piloto ou navegador detivessem conhecimentos avançados de navegação nem necessitassem de realizar qualquer cálculo durante a sua viagem.

Todavia, o método da telegrafia sem fios já apresentava, à data, algumas desvantagens, uma das quais residia no facto de ter uma estrutura pesada, rija e que necessitava de muito espaço na aeronave para acomodar os receptores necessários. De facto, a maioria das aeronaves não dispunha do espaço necessário, nomeadamente nas viagens aéreas transoceânicas já que para estas haveria outras prioridades para ocupação do pouco espaço disponível. Consequentemente, o sistema da TSF tornou-se rapidamente desaconselhado pelo facto de limitar bastante a autonomia da aeronave e, ainda, tornar a viagem totalmente dependente da informação recebida pelo radiogoniómetro, como declarou o Engenheiro Joaquim Salgado, do Instituto Superior Técnico:

“O navegador na dependência, a mais cega e mais absoluta, de postos desconhecidos que as condições atmosféricas podem impedir de ouvir, além de todos os outros inconvenientes, devidos a pannes sempre possíveis em instalações de sua própria natureza complicadas e melindrosas”. [SCHUTZMARKE, 1928, 7].

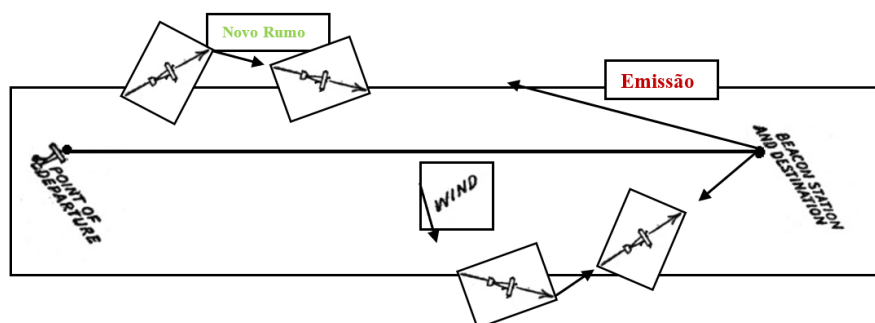


Figura 4: Exemplificação de um percurso percorrido pelas aeronaves dirigidas por TSF para a estação emissora.

Posto isto, mantinha-se assim a necessidade de encontrar métodos de navegação fiáveis, precisos e expeditos de modo a que a autonomia das aeronaves não ficasse comprometida.

Gago Coutinho e Sacadura Cabral usaram métodos astronómicos de navegação, adaptados da navegação marítima. No entanto, para uma correta aplicação destes métodos era importante conhecer a posição estimada da

aeronave com algum rigor. Na maior parte dos casos, o conhecimento da direção seguida pela aeronave e da sua velocidade, em relação ao ar, não são suficientes para determinar a posição com rigor, pois o vento pode provocar desvios significativos no movimento da aeronave. A determinação do efeito do vento, conhecido como deriva, era fundamental para melhorar o rigor da posição estimada. Numa primeira fase, concluíram que a partir da observação cuidada do estado do mar, da direção das ondas, do fumo dos navios e da orientação das velas nos veleiros, poderiam ter uma ideia grosseira da intensidade e direção do vento, no entanto, rapidamente concluíram que esta informação era insuficiente. Por este motivo, era estritamente necessário conhecer o ângulo⁵ entre a proa e o rumo⁶, de modo a permitir a correção imediata do movimento da aeronave na direção pretendida para alcançar o local de destino.

Gago Coutinho e Sacadura Cabral construíram, então, um instrumento que tornasse “*tão automática quanto possível, tanto a determinação da direção e força do vento, com a correção do rumo*” [CABRAL, 1921, 288], que designaram por “plaquê do abatimento” e mais tarde por “Corrector de Rumos Coutinho-Sacadura” ou simplesmente “Corrector de Rumos”. Além disso, o corretor de rumos servia igualmente para determinar qual a direção para a qual deveria apontar a aeronave, de modo a seguir na direção desejada. Na secção que se segue iremos explicar, de forma detalhada, em que consiste o problema da deriva assim como o processo de cálculo da mesma, usando o corretor de rumos. Serão apresentadas inúmeras ilustrações, para uma melhor compreensão dos procedimentos de cálculo, serão igualmente apresentadas as principais fórmulas de cálculo que serviram de suporte teórico à construção do instrumento.

2 Corretor de Rumos

Nesta secção iremos estudar, de forma detalhada, o corretor de rumos, um instrumento inovador desenvolvido por Gago Coutinho e Sacadura Cabral, que foi crucial para o sucesso alcançado por ambos na primeira Travessia Aérea do Atlântico Sul. No final da viagem preparatória Lisboa-Madeira já se podia verificar que o instrumento acima mencionado era eficaz, no entanto o derradeiro teste sucedeu durante a viagem aérea Lisboa-Rio de Janeiro,

⁵ Ângulo de abatimento.

⁶ Verdadeira trajetória que a aeronave pratica em relação ao solo, resultante da ação do fator predominante.

obtendo-se resultados tão precisos como se pode desejar [COUTINHO, 1922, 301].

Tendo por base o estudo e análise do texto “A Navegação Aérea” [COUTINHO 1922], daremos início à explicação da construção e funcionamento do aparelho primeiramente designado de “*plaquê do abatimento*” e mais tarde designado de “Corrector de Rumos”.

Em primeiro lugar o leitor deverá ter algum conhecimento dos problemas que a navegação aérea envolve. A primeira dificuldade com que Gago Coutinho se deparou foi o facto de não se conhecer a intensidade e direcção do vento, o qual levava a aeronave a desviar-se da sua rota. Assim, numa primeira fase era necessário determinar o vetor vento, para que, numa fase posterior, fosse possível solucionar o segundo problema, ou seja, o cálculo da correção de abatimento que a aeronave terá que efetuar para voltar ao rumo pretendido.

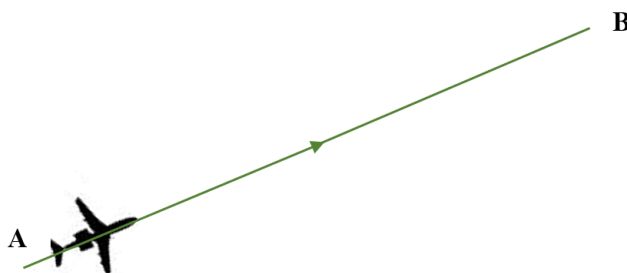


Figura 5: Proa da aeronave.

Consideremos o segmento de reta AB representado na figura 5, que representa o caminho que a aeronave, pelo seu próprio esforço, percorreu durante o intervalo de tempo de uma hora. Note-se que não está a ser considerada a força que o vento exerce sob o movimento da aeronave. Portanto, teoricamente A é a posição na qual a aeronave dá início ao seu movimento praticando uma direção⁷ e velocidade correspondentes ao vetor $\overrightarrow{AB}$, que se encontra destacado a cor verde, sendo B o ponto de chegada previsto no final de uma hora de voo.

A seguir, na figura 6, encontra-se traçado o vetor cor de laranja, que representa a ação do vento para o mesmo intervalo de tempo referido no

⁷Em linguagem náutica designa-se de proa, isto é, a direção na qual a frente da aeronave aponta e que é praticada ao longo do percurso, tendo como base o instrumento de orientação, geralmente uma bússola.

parágrafo anterior, tendo uma intensidade $\overrightarrow{BC}$ tal como se apresenta. Este é um fator independente e incontrolável em relação às restantes variáveis.

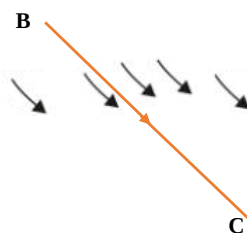


Figura 6: Força do vento.

O movimento das aeronaves é influenciado pela existência de enormes massas de ar e as alterações que nestas ocorrem influenciam diretamente a sua deslocação no meio aéreo. Portanto, dependendo da direção e intensidade do vento, pode ocorrer desvio na direção seguida pela aeronave, assim como um aumento ou redução da velocidade real, desvios esses que se refletem no consumo de combustível. Veja-se, através da figura 7, o seu efeito.

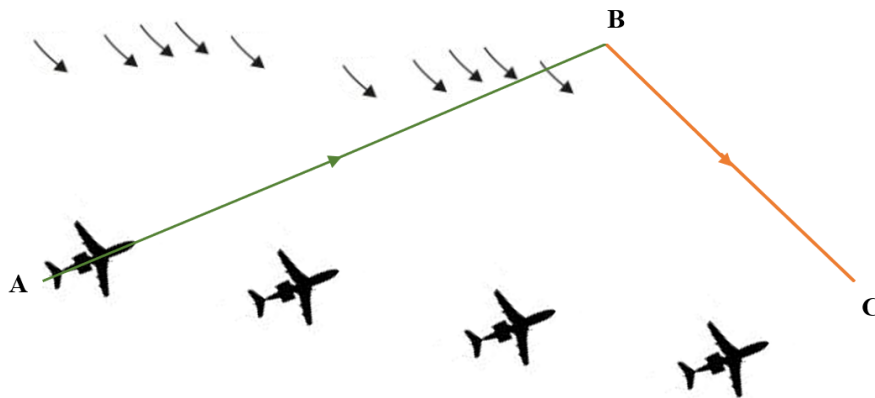


Figura 7: Efeito da ação do vento na direção do movimento da aeronave.

Como podemos verificar graficamente, a aeronave irá sofrer um ligeiro desvio ao longo do seu percurso. Esse desvio designa-se por deriva ou abatimento. Ao resultado da soma vetorial da deriva com o vetor que representa o movimento da aeronave se não existisse vento, dá-se o nome de rumo, que é o movimento real que se está a efetuar.

Naturalmente, a posição final da aeronave decorrida uma hora já não será o ponto estimado B , passaremos a ter uma outra posição diferente, a qual será a verdadeira, pois neste momento já se teve em conta a ação do vento.

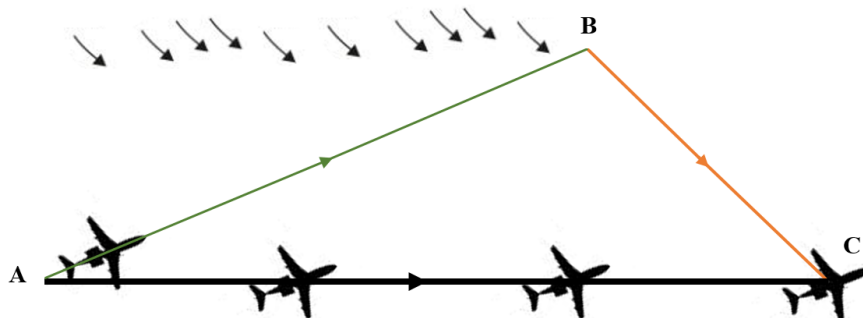


Figura 8: Representação gráfica do rumo.

Por conseguinte, encontraremos então um novo ponto, ao qual será dado o nome de C e construiremos um outro vetor $\overrightarrow{AC}$, através da união dos pontos de partida e do real ponto de chegada, obtendo-se assim o rumo e velocidade real praticados ao longo da rota, tal como se apresenta na figura 8.

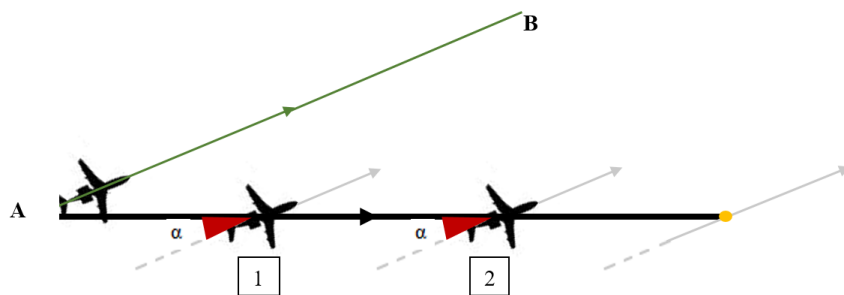


Figura 9: Ângulo de abatimento α .

No passo seguinte pretende-se então encontrar o ângulo de abatimento. Tendo em conta que a aeronave, apesar de estar a ser arrastado pela força do vento, continua a praticar sempre a mesma proa, ou seja, apontará sempre numa direção paralela a AB , como mostra a figura 9, e em qualquer ponto

do seu percurso como, por exemplo, 1 e 2 veremos que a direção longitudinal da aeronave cruzará com o rumo seguido obtendo-se o ângulo α , a que se dá o nome de abatimento.

Para determinar o abatimento era necessário observar marcas de referências que não tivessem movimento próprio, o que é algo vulgar quando se sobrevoa terra. Contudo, no mar, é difícil obter essas referências terrestres, a não ser, por exemplo, a existência de navios a pairar⁸, pequenas ilhas ou, então, rochedos que estejam suficientemente à superfície para poderem ser vistos, portanto torna-se absolutamente essencial criar tais marcas. Para esse efeito recorreu-se à utilização do método de lançamento de boias de fumo, ou seja pequenos flutuadores constituídos por:

“(...) um depósito com fosforeto de cálcio, que se abre antes de a lançar ao mar, afim de que a água, decompondo o fosforeto, produza o gás fosforoso, que se inflama espontaneamente ao contacto com a atmosfera, produzindo um fumo branco, que se vê a alguma distância, e que fica marcando no mar um lugar por cima do qual se passou” [COUTINHO, 1922, 307].

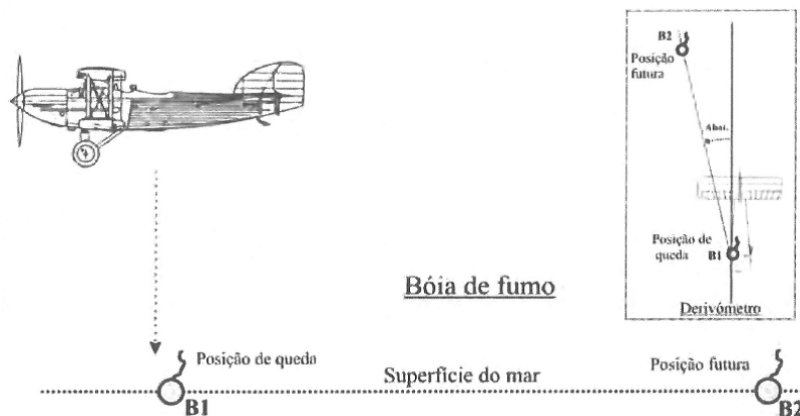


Figura 10: Lançamento de boias com o intuito de determinar o abatimento. (Fonte: [PEREIRA, 2015, 272]).

Para além do fumo branco que provocava aquando da combustão, produzia-se também uma chama que permitia a observação noturna.

⁸ Em linguagem náutica significa navegar muito lentamente ou parar sem fundear.

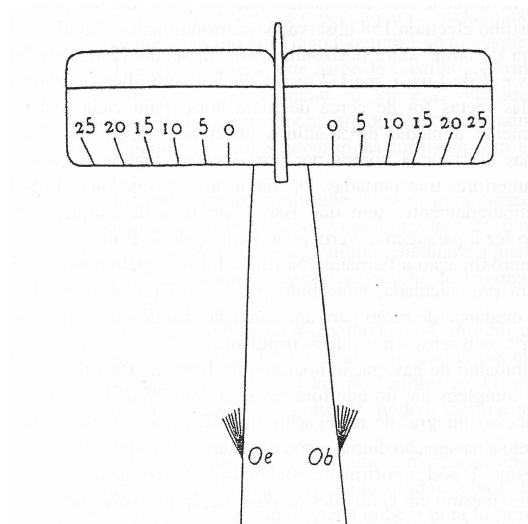


Figura 11: Esquema da escala utilizada na cauda da aeronave para medição do abatimento. (Fonte: [SOARES, 1992, 37])

Tendo agora em conta a utilização das boias de fumo como marcas de referência, passemos então à explicação do processo de cálculo da deriva. Lançando uma boia e admitindo que a mesma caía, em relação ao aparelho, o mais na vertical possível, a medição do ângulo de abatimento era efetuada através da observação da posição da boia, sendo usada uma graduação especial, composta por “riscos bem visíveis, de 5 em 5 graus, referidos a pontos de mira de um e outro lado do observador, junto da *fuselagem*” [COUTINHO, 1922, 307], conforme representado na figura 11.

Em relação à eficácia e emprego do método da determinação do abatimento, refere Gago Coutinho:

“O processo é prático e preciso, sendo, como é natural, necessário que o piloto previna o observador sempre que o avião vai exatamente ao rumo, para êle então observar a marcação das boias” [COUTINHO, 1922, 307].

Tendo agora em conta o domínio teórico do processo usado na medição do ângulo de abatimento α , faltava então encontrar o vetor vento. Somente o conhecimento do ângulo α não era informação suficiente para que se concluísse qual era o quadrante de vento predominante na altitude em que a aeronave se encontra, porque, explica o Almirante Gago Coutinho:

“qualquer vento que em uma hora tenha a velocidade representada por uma linha partindo do ponto B , e terminando em qualquer ponto da linha AC , ou do seu prolongamento, produz o mesmo abatimento” [COUTINHO, 1922, 303]⁹

Quer isto dizer que mantendo constante a proa e velocidade da aeronave, bem como o ângulo de abatimento, não é possível determinar a direção e intensidade do vento, uma vez que o conhecimento destes dois factos dão origem a um conjunto infinito de soluções para a direção e intensidade do vento. Atente-se na explicação dada através da imagem meramente exemplificativa da figura 12.

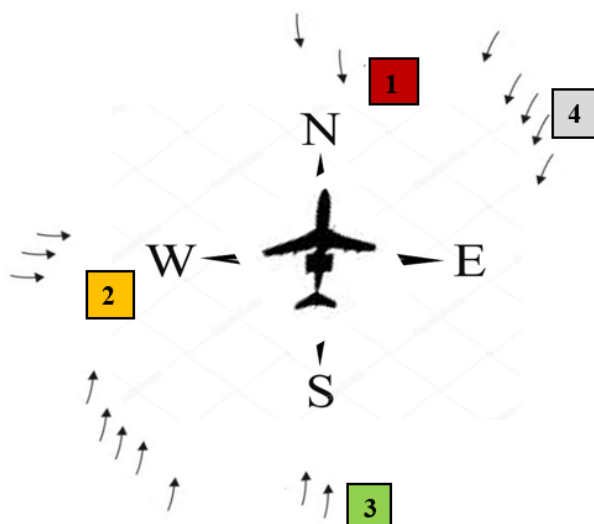


Figura 12: Representação de diversas situações possíveis de efeito de vento.

O primeiro caso representado na figura 12 simula uma situação em que a aeronave circula com ventos de proa. Nesta situação percebe-se facilmente que o único efeito que o vento vai provocar é apenas ao nível da velocidade, ou seja, nesta situação a velocidade vai diminuir como consequência da força do vento, que é contrária ao movimento da aeronave. Na situação descrita no n.º 3 o mesmo ocorre, mas neste caso em vez de termos o vento a contrariar a velocidade da aeronave, temo-lo pela popa¹⁰, isto é, a auxiliar a deslocação da aeronave aumentando a sua velocidade. É óbvio que neste caso, não há

⁹Esquemáticamente, esta situação encontra-se representada na figura 13.

¹⁰ Parte posterior do navio, oposta à proa, em aviação designada de cauda.

nenhum desvio da rota da aeronave e, para além disso, existe uma economia de combustível e de tempo de voo, já que para a mesma velocidade de motor, são percorridas mais milhas por hora.

Vejamos agora a situação descrita no caso n.º 2. Neste caso verificamos que o efeito do vento sobre o través¹¹ da aeronave é completamente diferente, não afetando em nada a velocidade, provocando apenas a alteração de rumo, neste caso, para o lado de estibordo¹².

A partir da equação $d = v \times t$, sabemos que, sem a intervenção de fatores externos como a influência do vento, a distância percorrida (d) é igual à velocidade (v) vezes o tempo (t).

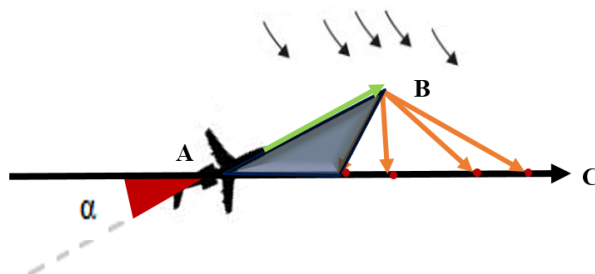


Figura 13: Exemplificação dos vários valores de velocidade do vento para um mesmo ângulo α .

Contudo, na prática quando estamos sob ação de uma força relacionada com o vento a distância calculada já não irá ser a mesma. Sendo assim, dependendo do vento, o número de milhas percorridas pela aeronave poderá ser menor ou maior do que o estimado, como é possível verificar pelos pontos marcados na figura 13 sob o rumo AC .

Pelo exposto anteriormente conclui-se que o conhecimento de apenas um ângulo de abatimento não é suficiente para determinar a velocidade e direção real do vento. Como tal, a solução passa por se determinar o ângulo de abatimento em duas situações distintas, isto é, em dois rumos cruzados com um desfasamento de 45° , por forma a obtermos “duas linhas análogas à linha AC , e que se podem traçar apenas pelo conhecimento da velocidade própria do avião, AB , e pelo conhecimento dos abatimentos” [COUTINHO, 1922, 384]. Observemos o esquema da figura 14.

¹¹É um dos lados da aeronave, ou seja, a direção perpendicular à linha longitudinal da aeronave.

¹²Lado direito.

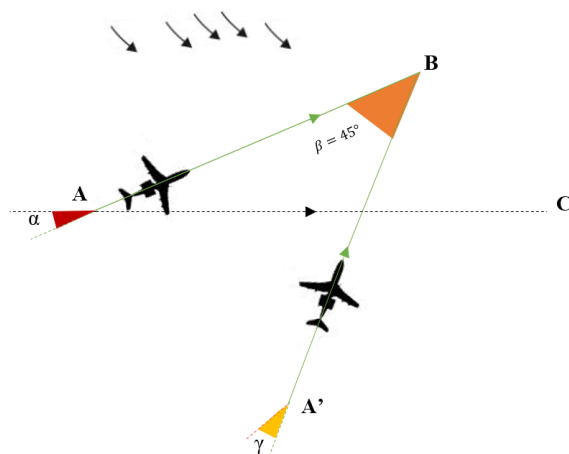


Figura 14: Medição dos ângulos de abatimento através de duas proas diferentes.

Numa primeira fase, voando a aeronave a uma determinada proa, traça-se a reta através do cálculo da distância sabendo-se a velocidade da aeronave praticada durante um intervalo de tempo conhecido. De seguida, o piloto lançaria uma boia de fumo para poder realizar a medição do ângulo de abatimento, denotado por α . Após a obtenção do ângulo α marca-se a reta AC , que corresponde ao rumo verdadeiro da aeronave, neste caso já com a influência do vento. Como foi dito anteriormente os dados obtidos não são suficientes para a determinação do vento, é, pois, necessário efetuar uma segunda medição. Para realizar a segunda medição o piloto realiza uma mudança de trajetória para o mesmo lado do primeiro abatimento, executando uma proa que tenha um desfasamento de 45° com a primeira proa. De seguida, e assumindo que a velocidade própria da aeronave se mantém constante traça-se a reta $A'B$. Após o lançamento de uma nova boia de fumo mede-se o segundo ângulo de abatimento, que denotamos por γ . Neste momento, e tendo em consideração todos os dados recolhidos é possível determinar a direção e intensidade do vento. Tendo como base a reta $A'B$, marcamos o ângulo γ no mesmo lado do abatimento, deste modo obtemos o rumo $A'C$. Repare-se na figura 15. O ponto de intersecção destes dois rumos, que denotaremos por C , irá permitir determinar o vetor $\overrightarrow{BC}$, que representará em grandeza e direção a velocidade real do vento.

Observemos que o método apresentado não será certamente prático de realizar, numa folha de papel, a bordo de uma aeronave, já que a composição

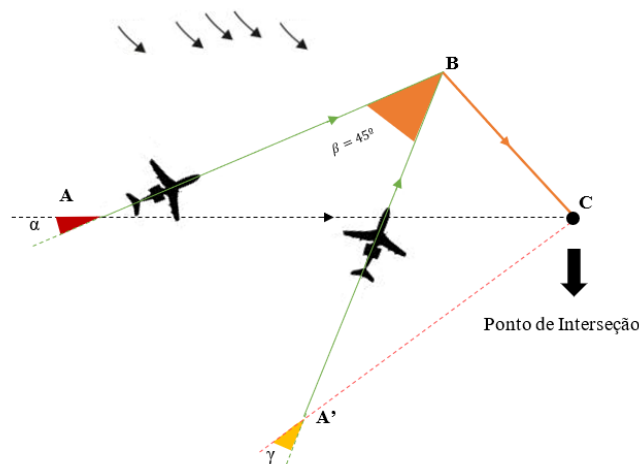


Figura 15: Determinação do vento verdadeiro.

das figuras geométricas apresentadas requer algum rigor e as condições a bordo não seriam as melhores para este tipo de tarefa. Pois como explica Gago Coutinho:

“Para resolver êste problema geométrico, sem necessidade de desenhar, o que não seria muito prático no ar, construiu-se um pequeno aparelho, corretor de rumos, o qual prevê observações de abatimentos em dois rumos, um dos quais é aquele a que se pretende navegar, e o outro, um rumo orçado 45° para o vento reinante no alto.” [COUTINHO, 1922, 387–388]

Assim sendo, Gago Coutinho e Sacadura Cabral construíram um instrumento inovador que incorpora todos os cálculos apresentados de uma forma extremamente simples, sendo também muito fácil de manusear durante o voo da aeronave. De seguida explicaremos a detalhadamente a sua construção. Este instrumento, denominado de “Corrector de Rumos” permitia de forma rápida e eficaz o cálculo da intensidade e direção do vento, bem como da correção a efetuar ao rumo. Começando pelos elementos mais simples, o corretor de rumos, como se apresenta na figura 16, é constituído por dois ponteiros móveis em torno de dois pontos fixos que correspondem aos pontos A e A' da figura 15. Estes ponteiros permitem marcar nas respectivas

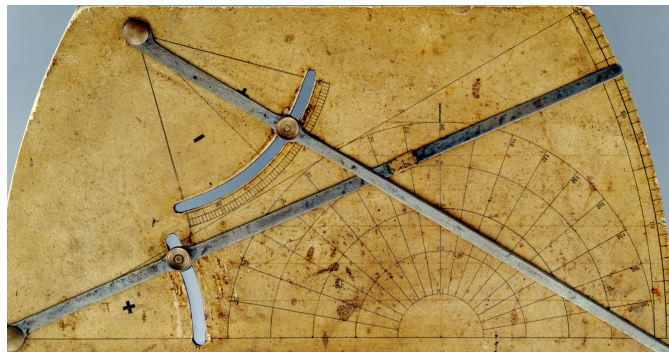


Figura 16: Corretor de rumos. Fonte: Museu de Marinha

graduações os abatimentos medidos e com os devidos sinais de mais (+) ou menos (–) que significam, respetivamente, estibordo e bombordo¹³.

Quer isto dizer que a soma ou subtração do abatimento à proa da aeronave para obter a correção à trajetória irá depender do lado pelo qual foi efetuada a medição do abatimento. Assim, tendo em conta os sinais identificados no instrumento vemos que, para uma simplificação de cálculos, o valor do primeiro ângulo de abatimento vai ser positivo podendo o valor do segundo ângulo variar entre negativo ou positivo. Logo, caso o abatimento inicial tenha o sinal menos, isto é, quando uma dada referência aparecer a descair pelo lado de bombordo da aeronave, terão que ser utilizados os sinais que vêm marcados no verso do instrumento, ou seja o sinal positivo passa a negativo e o sinal negativo passará a positivo.

Assim sendo, de um modo geral poderemos usar o sinal positivo do segundo ponteiro quando ambos os abatimentos forem medidos do mesmo bordo da aeronave e o negativo para observações efetuadas por bordos diferentes. No final, conhecendo a direção do vento, pode-se desprezar o sinal do resultado final, já que é sabido que a correção da proa da aeronave terá que ser sempre realizada para o lado de barlavento¹⁴.

Para se poder conhecer a direção do vento é usada uma escala angular, com valores que variam de 0° a 180° . O valor lido nessa escala seria posteriormente somado, ou subtraído, ao valor da proa inicial da aeronave, obtendo-se como resultado final a direção do vento. Os diferentes valores angulares estão realçados na figura 17.

¹³Termos náuticos para designar o lado direito e esquerdo, respetivamente.

¹⁴Em linguagem náutica é o bordo da embarcação voltado para o lado de onde o vento sopra.

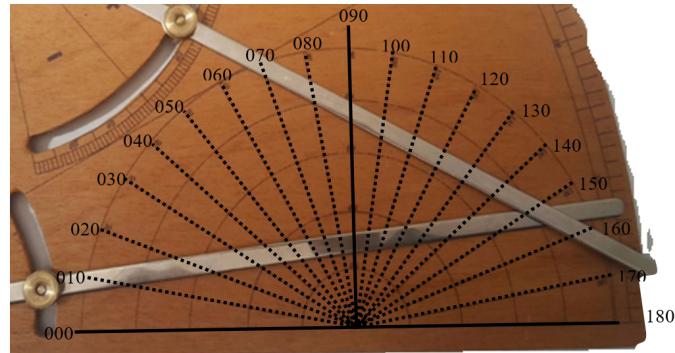


Figura 17: Escala das direções do vento no corretor de rumos.

Na figura 18 pode ver-se, em detalhe, a escala utilizada para o cálculo da velocidade do vento, materializada nos semicírculos que se cruzam com a escala angular anteriormente mencionada. Para determinar a velocidade do vento o navegador iria consultar os semicírculos marcados no corretor de rumos com valores que variam de 0 a 0,5. Nesta escala uma leitura de por exemplo 0,3 significaria que a velocidade do vento seria de 0,3 vezes a velocidade da aeronave. Observe-se que a origem dos semicírculos coincide com o ponto de intersecção dos dois ponteiros, quando ambos marcam ângulos de abatimento iguais a zero. Portanto, não existindo abatimento quando a aeronave voa a duas proas distintas, tal significa que a velocidade do vento é zero.



Figura 18: Escala de velocidade do vento – semicírculos.

Para melhor clareza na explicação anterior representa-se, na figura 19, um exercício meramente exemplificativo.

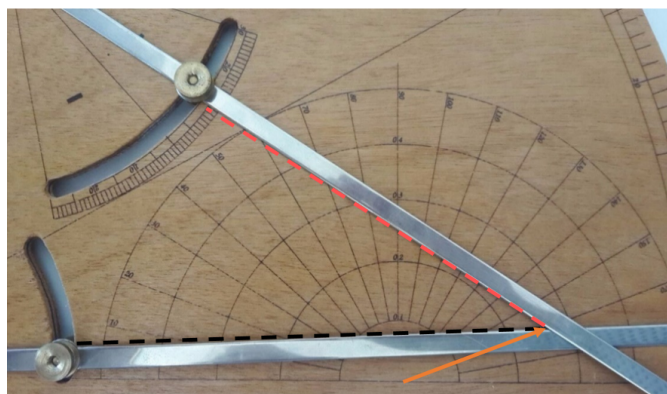


Figura 19: Resolução de um exemplo prático.

Neste caso, retira-se um ângulo de 160° o qual, consoante o caso, será somado ou subtraído à proa da aeronave, obtendo-se a direção do vento, sendo a intensidade deste igual a 0,25 da velocidade praticada pela aeronave.

Estando encontrada a solução para a determinação da direção e intensidade do vento e sendo este valor agora conhecido torna-se então necessário calcular a correção a aplicar à proa, para que a aeronave siga segundo o rumo previsto. Na fase seguinte iremos efetuar um estudo mais pormenorizado da determinação da correção da trajetória. O processo de cálculo pode ser seguido na construção representada em esquema da figura 20.

Recordemos que a linha AB , o vetor $\overrightarrow{BC}$ e o ponto C são conhecidos. Começamos por traçar uma linha paralela à linha AB e que passa pelo ponto C , denotemos esta linha por CF . De seguida traçamos a reta r , paralela à reta AB , e distando dela o mesmo que o ponto C dista da reta AB . Utilizando o ponto A como centro de uma circunferência de raio AB , traçamos o arco de circunferência com início no ponto B até intersectarmos a reta r , o ponto de interseção do arco de circunferência com a reta r será denotado por C' . De seguida, marcamos o vetor vento com origem em C' , obtendo assim um vetor $\overrightarrow{C'B'}$ paralelo a $\overrightarrow{BC}$, note-se que ambos os vetores representam a velocidade horária do vento.

Na verdade, o que se pretende mostrar é que se o módulo da velocidade $\overrightarrow{AB}$ da aeronave não for alterado e numa hora for percorrido o caminho AC' , o vento nesse mesmo intervalo de tempo correrá de C' para B' e a aeronave

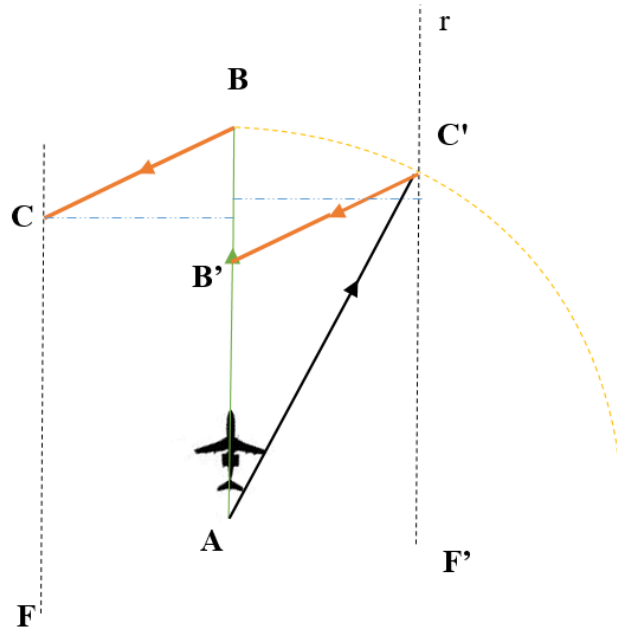


Figura 20: Determinação da velocidade do vento.

efetivamente seguirá à velocidade útil igual ao módulo de $\overrightarrow{AB'}$, ou seja, a velocidade da aeronave será afetada pela direção e velocidade do vento. Observe-se que o ângulo $C'AB'$ será o abatimento sofrido pela aeronave por influência do vento. Denotemos esse ângulo por θ .

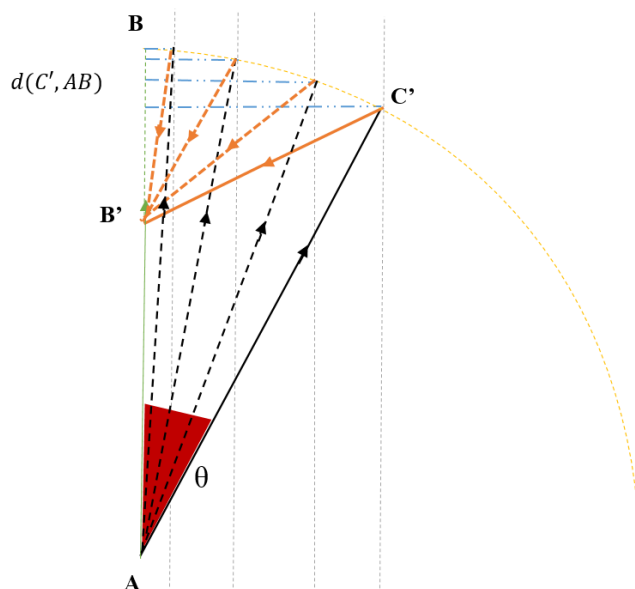
Note-se, então, que a medida do ângulo θ será determinada, como podemos analisar pela figura 21, com base na velocidade da aeronave e na distância do ponto C' à reta AB .

Tendo em conta que estamos na presença de um triângulo retângulo, temos que:

$$\sin \theta = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{d(C', AB)}{|\overrightarrow{AC'}|}$$

Em que $d(C', AB)$ denota a distância do ponto C' à reta AB e $|\overrightarrow{AC'}|$ denota o valor do comprimento de $\overrightarrow{AC'}$, que neste caso representa a distância percorrida pela aeronave numa hora.

A imagem representada na figura 22 mostra de um modo mais detalhado a necessidade do cálculo da distância do ponto C à reta AB . Como podemos ver, qualquer que seja o vento que em velocidade e direção seja representado



por um segmento de reta, partindo do ponto B para a reta CF , exigirá a mesma velocidade da aeronave AC' e igual ângulo de abatimento θ , no entanto a velocidade útil da aeronave variará conforme a intensidade e direção do vento $\overrightarrow{BC}$. Logo, como a aeronave não terá durante todo o trajeto semelhante abatimento, é assim estritamente imprescindível determinar o valor da distância da reta CF à reta AB .

Consideremos agora o esquema da figura 23. Tracemos um prolongamento sobre a reta BB' com comprimento $B'N$ igual à velocidade da aeronave AB . Obviamente iremos ter que $|\overrightarrow{NB}| = |\overrightarrow{AB'}|$ e como BC é paralela e igual a $B'C'$, o ângulo NBC será igual ao ângulo $AB'C'$, que denotamos por μ_1 e μ_2 , respetivamente, e o lado AC' será igual ao lado NC . Formalmente temos que os ângulos externos θ_1 e θ_2 são iguais se e só se as retas BC e $B'C'$ são paralelas, o que acontece nesta situação. Então temos que:

$$\theta_1 + \mu_1 = 180 \text{ e } \theta_2 + \mu_2 = 180$$

ou seja, $\mu_1 = \mu_2$, tal como queríamos demonstrar.

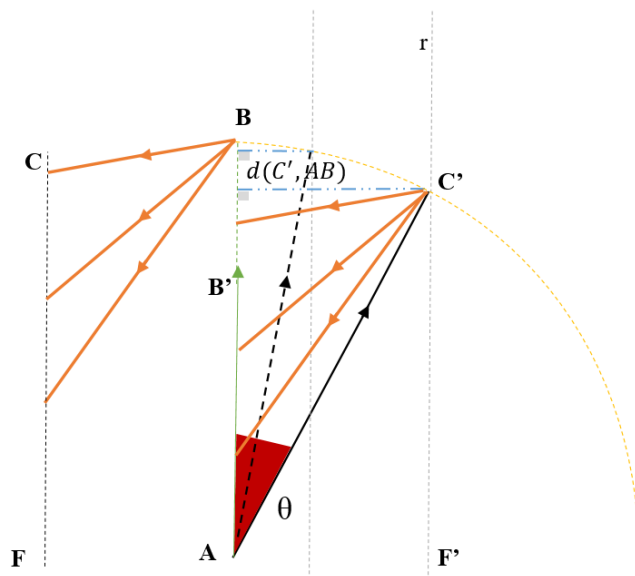


Figura 22: Ventos que provocam o mesmo abatimento.

De seguida iremos demonstrar que o triângulo NBC é igual ao triângulo $AB'C'$ e que os lados AC' e NC são iguais. Recordemos que dois triângulos são geometricamente iguais se tiverem dois lados iguais e o ângulo por eles formado for igual. Assim, temos que

$$NB = AB'$$

$$BC = B'C'$$

$$\mu_1 = \mu_2$$

ou seja, os triângulos NBC e $AB'C'$ são iguais.

Logo $NB' = NC$, pois sendo AC' a distância percorrida numa hora e igual a AB , será também igual a NB' e como NC é a hipotenusa do triângulo NBC' , que é igual ao triângulo $AB'C'$, ambos têm o mesmo valor da hipotenusa, representada por AC' . Logo, $NB' = NC = AB$, o arco de círculo de raio igual a AB , com centro em A , poderá ter o seu centro em N e assim passará pelos pontos B' e C .

De igual modo, serão obtidas as mesmas conclusões caso o vento seja representado, por exemplo, pelo vetor $\overrightarrow{BK}$ ou outro com origem no ponto B e fim em qualquer ponto do arco de círculo $B'KC$.

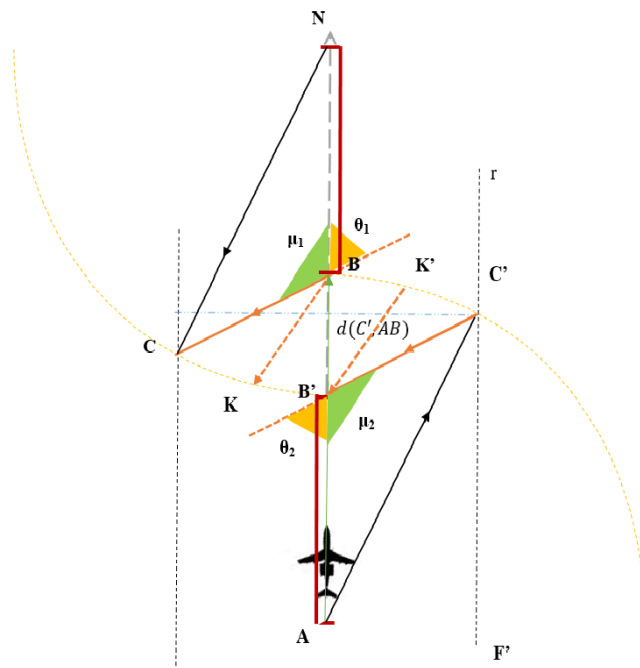


Figura 23: Demonstração da igualdade de triângulos.

Como $d(C', AB)$ se mantém inalterada em todo o arco de círculo concluímos que a velocidade útil determinada para o novo vetor vento, $\overrightarrow{BK}$, será precisamente a mesma como no primeiro caso onde o vento era representado pelo vetor $\overrightarrow{BC}$, isto significa, que existe invariância da velocidade útil, desde que o vetor vento mantenha a sua origem no ponto B e a sua chegada em qualquer ponto do arco de círculo $B'KC$.

Explica o Almirante Gago Coutinho:

“Este arco é, portanto, o lugar geométrico dos extremos das retas que representam todos os ventos que, partindo do ponto B , e combinados com a velocidade própria do avião AB (ou unidade), permitem o aproveitamento da mesma velocidade final AB' , na direção a que se pretende navegar, AB .” [COUTINHO, 1922, 305].

O corretor de rumos permite ainda calcular qual a direção para onde se deve dirigir a proa da aeronave, para que esta siga no rumo desejado, assim como qual vai ser a sua velocidade real, em função do vento existente. Esses valores retiram-se de outros dois conjuntos de linhas, cuja explicação se

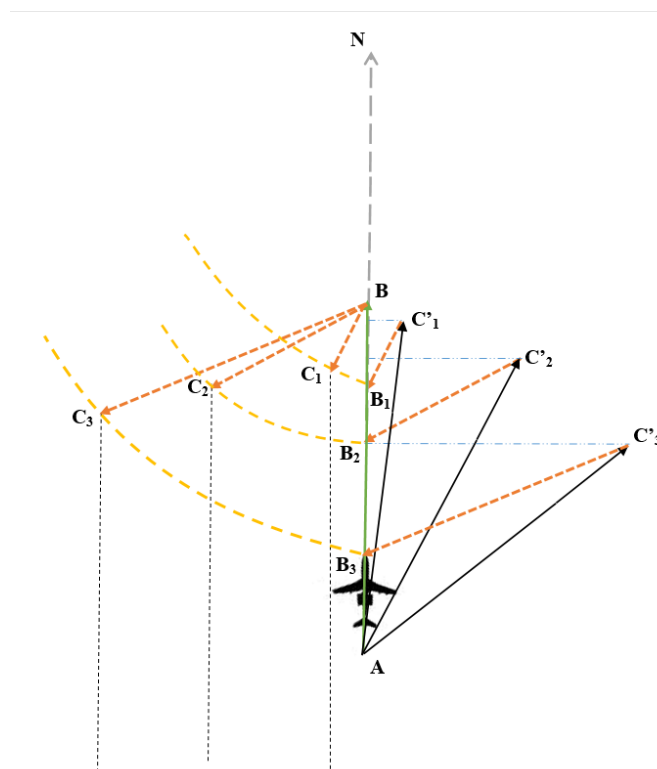


Figura 24: Processo geométrico de calcular a compensação do abatimento e o valor da velocidade real.

apresenta em seguida. Na figura 24 temos representadas várias distâncias, entre a reta AB e os pontos C_1 , C_2 e C_3 , e que nos levam a obter diferentes correções de trajetória que dependem do abatimento. Temos também traçadas as retas de velocidade que nos permitem identificar os extremos de invariância de velocidade útil, ou seja, os limites dos arcos de círculo nos quais poderemos ter diversas direções e velocidades de vento, cuja alteração na velocidade útil da aeronave se mantém constante.

De seguida iremos aplicar as construções geométricas acima descritas para explicar ao leitor todas as linhas marcadas no corretor de rumos. Observe-se a imagem representada na figura 25.

O vetor traçado a verde representa a velocidade da aeronave em unidade de tempo, uma hora, o qual em comprimento atinge o centro do semicírculo. Isto significa que temos três casos distintos de resultados.

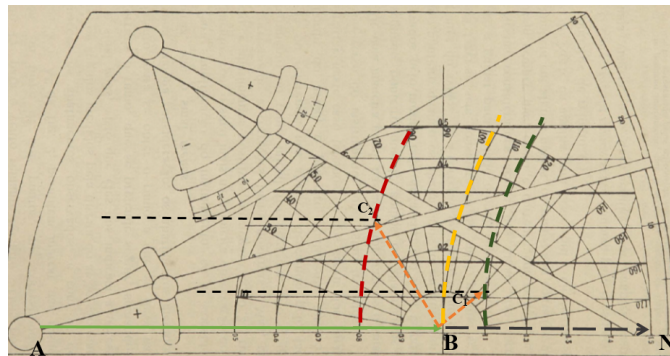


Figura 25: Linhas de cálculo do rumo corrigido.

No primeiro caso, onde a linha de velocidade parte de B , traçada a amarelo, e que tem valor igual a 1, quer dizer que a velocidade real da aeronave não foi alterada, ou seja, a ação do vento não afetou a velocidade da aeronave.

A segunda situação trata-se de uma diminuição da velocidade útil da aeronave, pois o facto de a linha de velocidade, representada a vermelho, se encontrar abaixo da unidade de tempo padrão significa que no mesmo intervalo de tempo foram percorridas menos milhas do que as que deveriam ser percorridas se não existisse vento. Logo, o vento está a atrasar o movimento da aeronave.

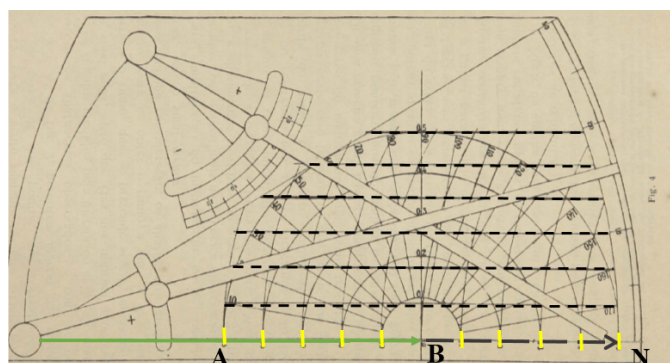


Figura 26: Escala das velocidades, após correção.

Relativamente ao caso mais favorável, em que a aeronave está a ser

“empurrada” pelo vento, podemos ver que esse está representado pela linha de velocidade útil de cor verde. O facto de essa estar além do vetor $\overrightarrow{AB}$ significa que no mesmo intervalo de tempo, a aeronave está a percorrer um número de milhas superior ao que seria esperado, o que se traduz num efeito de vento favorável ao movimento da aeronave.

Logo, para que se conseguisse calcular a velocidade útil praticada pela aeronave sob efeito do vento, dividiu-se o segmento AN em dez partes iguais. A partir de cada um destes pontos desenharam-se arcos de círculo, com raio igual à velocidade que a aeronave faria na ausência de vento. Sendo assim a escala da velocidade varia entre 0,5 e 1,5 vezes a velocidade que a aeronave teria na situação de ausência de vento. Analogamente, o mesmo acontece com as retas paralelas a AN , já deduzidas anteriormente, as mesmas estão distanciadas de 5° em 5° , indicando assim a distância à reta AB através dos senos dos ângulos previstos, ainda nos mostra qual o abatimento a corrigir, “orçando¹⁵ do rumo desejado, para se conseguir que o avião navegue realmente a esse rumo, contando com a ação lateral do vento” [COUTINHO, 1922, 305].

Adicionalmente, por cada um dos pontos de divisão, representados a amarelo na figura 26, fez-se passar os arcos de círculo com raio AB . Porém, esses apresentam a particularidade de terem os seus centros fora da escala do corretor de rumos, sendo marcados tendo por base o prolongamento BN de AB . Através destas linhas concluiremos, por simples observação, “qual será a velocidade útil, em décimos e frações da velocidade própria do avião, para cada um dos ventos, que, em direção e velocidade, poderemos imaginar” [COUTINHO, 1922, 305].

O corretor de rumos seria usado como um processo gráfico para a resolução do triângulo de velocidades, fornecendo assim a direção e velocidade do vento, a velocidade útil da aeronave e a correção de rumo para prosseguir na trajetória desejada.

De seguida é apresentado um exercício prático para que se possa entender melhor a sua utilização e comprovar a sua eficácia.

- Velocidade da aeronave (dada pelo velocímetro) - 100 nós;
- primeira proa - 030;
- primeira medição de abatimento = $+13^\circ$;
- segunda proa - $030 + 45^\circ = 075$;
- segunda medição de abatimento = $+17^\circ$.

Fixando os ponteiros A e A' nas graduações positivas 13 e 17, respe-

¹⁵Em linguagem náutica, orçar é a manobra que leva a embarcação a aproximar a proa da linha do vento.

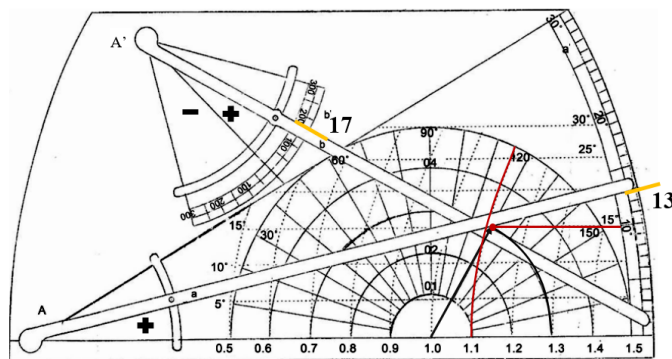


Figura 27: Resolução do exercício usando o corretor de rumos.

tivamente, encontramos o ponto de cruzamento desses, permitindo-nos ler imediatamente o seguinte:

- Direção do vento – $030 + 118 = 148$;
- Velocidade do vento – $100 \times 0,3 = 30$ nós;
- Correção a fazer relativa à primeira proa = $+ 15$;
- Rumo corrigido – $030 + 15 = 045$;
- Velocidade verdadeira da aeronave – $100 \times 1,1 = 110$ nós.

Como já foi explicado anteriormente, caso o primeiro sinal de abatimento fosse negativo, teríamos que ver o verso do corretor de rumos e usar os sinais marcados nesse lado, pois são contrários e as correções para determinar a direção do vento e rumo a seguir teriam que ser subtraídas. Assim sendo, eis a regra a ter em conta: “les corrections pour déterminer la direction du vent et la route à suivre sont appliquées avec le signal de la première derive” [CABRAL, 1921, 520].

A resolução do problema encontra-se representada na figura 28. Então, supondo o caso anterior em que teríamos a primeira medição do abatimento negativa, temos que:

- primeira proa – 030 ;
 - primeira medição de abatimento = -13° ;
 - segunda proa – $030 - 45^\circ = 345$;
 - segunda medição de abatimento = -17°
- Resultados obtidos, conforme figura 29:
- Direção do vento – $030 + 118 = 272$;
 - Velocidade do vento – $100 \times 0,3 = 30$ nós;
 - Correção a fazer relativa à primeira proa = -15 ;

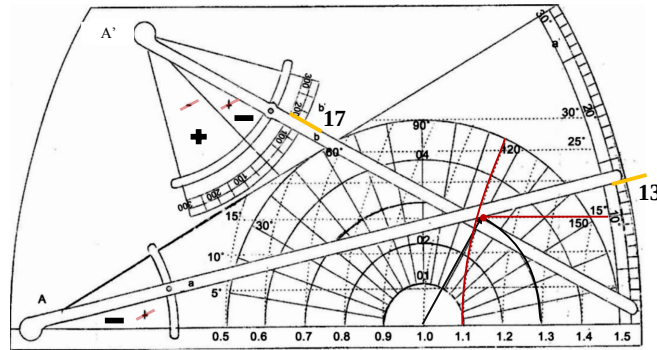


Figura 28: Resolução do exercício com os sinais inversos.

→ Rumo corrigido – 030 – 15 = 015;

→ Velocidade verdadeira da aeronave – $100 \times 1,1 = 110$ nós

O corretor de rumos também pode ser usado para o estudo prévio de uma viagem, já que permite por simples leitura ter uma ideia da influência de um certo vento previsto. Isto era praticável, pois no início do século XX já havia alguns conhecimentos no âmbito da climatologia e meteorologia. Desta forma já era sabida a direção e intensidade de alguns ventos predominantes em determinadas áreas, permitindo assim a antecipação da correção do rumo.

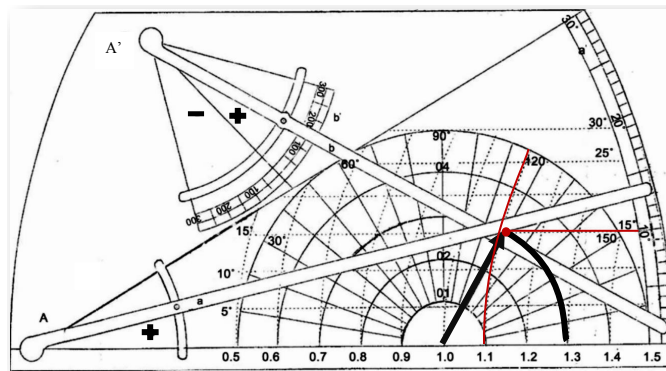


Figura 29: Exemplificação da resolução do exercício anterior usando o corretor de rumos.

Portanto, com a ajuda dos raios e semicírculos pintados de cor preta,

procuramos o vento considerado e através das linhas retas e curvas traçadas a cor vermelha é possível determinar imediatamente a quantidade de graus que será necessário a aeronave alterar o seu rumo (aproximando-se do vento) para seguir a direção pretendida e também a velocidade real da aeronave.

Fazendo, agora um exemplo rápido e sem cálculos, assumindo que queremos saber a influência de um vento com velocidade 0,3 da própria velocidade da aeronave, vemos que o caminho a seguir deverá ser aproximadamente 18° mais próximo do vento e a velocidade real que a aeronave irá praticar seguindo essa trajetória será 0,95 da sua própria velocidade.

Conclusão

Gago Coutinho e Sacadura Cabral realizaram a primeira travessia aérea do Atlântico Sul, em 1922, usando métodos astronômicos de navegação adaptados da navegação marítima. A determinação do efeito do vento, conhecido como deriva, era fundamental para melhorar o rigor da posição estimada. Para a resolução deste problema Gago Coutinho e Sacadura Cabral conceberam um instrumento, o corretor de rumos, que permitia calcular, de uma forma expedita a deriva provocada pelo vento. Além disso, o corretor de rumos servia igualmente para determinar qual a direção para a qual deveria apontar a aeronave, de modo a seguir na direção desejada.

Neste artigo foi realizado um estudo detalhado da construção do corretor de rumos de Gago Coutinho e Sacadura Cabral. O estudo foi complementado com a apresentação de inúmeros esquemas, ilustrações e exemplos por forma a simplificar a compreensão da sua construção. Através dos estudos realizados, dos esquemas apresentados e dos cálculos efetuados tanto em rosas de manobra como numa réplica, foi-nos possível comprovar a sua eficácia e praticabilidade, tanto ao nível do cálculo do vento verdadeiro como da correção do abatimento da aeronave, dados imprescindíveis à navegação estimada.

Agradecimentos: Teresa Sousa foi parcialmente financiada pela Fundação para a Ciência e a Tecnologia através do projecto UID/MAT/00297/2019 (Centro de Matemática e Aplicações).

Nota: Quando na legenda das figuras não é indicada a respetiva fonte, tal significa que as mesmas foram elaboradas pelos autores.

Referências

- BROWN, Arthur, 1920. *Flying The Atlantic in Sixteen Hours*, New York, Frederick A. Stokes Company.
- CABRAL, Sacadura, 1921. “Raid Lisboa-Madeira – Plaquê do abatimento”, *Anais do Clube Militar Naval*, vol. 10 a 12, pp. 288–294.
- COUTINHO, Gago, 1922. “A Navegação Aérea”, *Anais do Clube Militar Naval*, vol. 10 a 12, pp. 301–422.
- Curtiss NC-4, http://www.wikiwand.com/en/Curtiss_NC-4 [s.d.], acedido em 23 de agosto de 2018.
- PEREIRA, J. Malhão, 2015. “Os Céus de Gago Coutinho e Sacadura Cabral” *Memórias*, vol. XLII, Lisboa, Academia de Marinha, pp. 263–321.
- PINTO, Rui Miguel, 2014. *Gago Coutinho - O último grande Aventureiro Português*, Lisboa, Eranos.
- SCHUTZMARKE, Eingetragene, 1928. *Métodos Rápidos de Navegação Aérea: O Sextante – Gago Coutinho*, separata de *Ciência e Indústria*, vol. 32 e 333, Lisboa.
- SOARES, António Jorge da Silva, 1992. “Gago Coutinho e o Sistema Português de Navegação Aérea” *Memórias*, vol. XXII, Lisboa, Academia de Marinha, pp. 29–41.
- SOARES, António Jorge da Silva, 1997. “Génese da Navegação Aérea” *Memórias*, vol. XXVII, Lisboa, Academia de Marinha, pp. IV–1 a IV–22.
- Travessia, <https://tinyurl.com/yacbzwlp> [s.d.], acedido em 23 de agosto de 2018.

SOBRE A NAVEGAÇÃO PORTUGUESA DO SÉCULO XVI À LUZ DO INSTRUMENTO JACENTE NO PLANO

Francisco Wagner Soares Oliveira

Grupo de Pesquisa em Educação e História da Matemática (GPEHM)
Universidade Estadual do Ceará (UECE)
Ceará, Brasil
e-mail: franciscowagner2007@gmail.com

Ana Carolina Costa Pereira

Universidade Estadual do Ceará (UECE)
Ceará, Brasil
e-mail: carolina.pereira@uece.br

Resumo: O presente trabalho se dedica a apontar elementos sobre a navegação portuguesa do século XVI, tomando como base o uso do instrumento jacente no plano. Esse aparato é uma das inovações de Pedro Nunes (1502-1578) proposta enquanto cosmógrafo-mor do reino de Portugal, ele está exposto no sexto capítulo do segundo livro de navegação, o qual pode ser consultado em *De arte atque ratione navigandi* (2008), publicação moderna. Como forma de tecer a malha histórica, parte-se da descrição do instrumento jacente no plano presente no referido tratado.

Palavras-chave: navegação portuguesa do século XVI; instrumento jacente no plano; lâmina de sombras; Pedro Nunes.

Abstract: The present work is dedicated to pointing out elements about 16th century Portuguese navigation based on the use of the a new instrument to find the altitude of sun. This apparatus is one of the innovations of Pedro Nunes (1502-1578) proposed by the chief cosmographer of the kingdom of Portugal, he is exposed in the sixth chapter of his second navigation book, which can be consulted in the *De arte atque ratione navigandi* (2008), modern publication. As a way of weaving the historical fabric, it is based on the description of a new instrument to find the altitude of sun present in that treaty.

Keywords: 16th century Portuguese navigation; a new instrument to find the altitude of sun; instrument of shadows; Pedro Nunes.

1 Introdução

Na literatura portuguesa, é possível observar estudos em história da ciência que se dedicam a falar sobre navegação¹, dentre os elementos discutidos, notam-se antigos tratados publicados nos séculos XVI e XVII, instrumentos náuticos e disseminação de regras e lições direcionadas a homens do mar. Seguindo nessa direção, este texto tem como objetivo apontar elementos sobre a navegação portuguesa do século XVI, tomando como base o uso do instrumento jacente no plano de Pedro Nunes (1502-1578). Com as informações coletadas, tem-se como intenção pensar e/ ou propor estratégias para incorporação do aparato em ações voltadas ao ensino de matemática².

No caso particular de estudos sobre instrumentos náuticos³, sabe-se que existem várias frentes de pesquisas valorizadas por historiadores da ciência e da matemática⁴, em uma delas, tais aparatos são colocados como elementos que veiculam conhecimentos do “saber-fazer” matemáticos de uma época⁵. É consenso que o uso dos instrumentos esteve, de certa forma, relacionado à

¹São exemplos dessas pesquisas os seguintes trabalhos: A. Fontoura da Costa. **A Marinharia dos Descobrimentos**. 3ª. Lisboa: Edições Culturais da Marinha, 1960; Luís de Albuquerque. **Instrumentos de Navegação**. Lisboa: Comissão Nacional para a Comemoração dos Descobrimentos Portugueses, 1988.

²Para observar uma interface entre história e ensino de matemática com esse instrumento, vide Francisco Wagner Soares Oliveira. **Sobre os conhecimentos geométricos incorporados na construção e no uso do instrumento jacente no plano de Pedro Nunes (1502-1578) na formação do professor de matemática**. Dissertação (Mestrado) – Curso de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática, Instituto Federação de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, Fortaleza, 2019.

³Instrumentos utilizados na navegação, também, podem ser denominados de “matemáticos” desde que eles forneçam o que Aristóteles caracterizava por “quantidades”, ou seja, distâncias e ângulos. Fumikazu Saito. **História da matemática e suas (re)construções contextuais**. São Paulo: Livraria da Física, 2015.

⁴Algumas das frentes de pesquisa podem ser consultadas em: Deborah Jean Warner. “Terrestrial Magnetism: For the Glory of God and the Benefit of Mankind”. Osiris, Philadelphia, v. 9, p. 67–84, 1994; Alan Gabbey. “Between ars and philosophia naturalis: reflections on the historiography of early moderns mechanics”. In: J. V. Field; Frank AJL James. (Orgs.). *Renaissance & Revolution: Humanists, Scholars & Natural Philosophers in Early Modern Europe*. Cambridge: Cambridge University Press, 1997. p. 133–145; Sachiko Kusakawa; Ian Maclean (Eds.). *Transmitting Knowledge: Words, Images, and Instruments in Early Modern Europe*. Oxford/New York: Oxford University Press, 2006; e Fumikazu Saito. “Instrumentos e o “saber-fazer” matemático no século XVI”. *Revista Tecnologia e Sociedade*, Curitiba, v. 18, n. especial, p. 101-112, 2013; Fumikazu Saito. “Instrumentos matemáticos dos séculos XVI e XVII na articulação entre história, ensino e aprendizagem de matemática”. *Revista de Matemática, Ensino e Cultura - Rematec*, v. 9, n. 16, p. 25-47, 2014.

⁵Sobre essa proposta que veicula conhecimentos do “saber-fazer” matemáticos de uma

resolução de problemas matemáticos, observacionais e experimentais⁶. Assim, entende-se que fazem parte do processo de construção do conhecimento e que estão, intimamente, relacionados ao contexto do período.

Nessa perspectiva, como forma de atingir o objetivo deste texto, busca-se congrega informações sobre navegação observadas a partir do contexto de utilização do instrumento jacente no plano. Para tanto, são considerados dados relacionados à finalidade do referido aparato dentro da navegação quinhentista e aos procedimentos necessários para o uso dele. Como se verá, mesmo não se tendo registro de seu uso no século XVI, ainda assim ele aponta alguns elementos da náutica no período.

2 A finalidade do instrumento jacente no plano no contexto da navegação

Ao propor o instrumento jacente no plano, Pedro Nunes dedica suas primeiras palavras para apontar que “a altura do Sol pode tomar-se não só com instrumentos erectis sobre o plano do horizonte como também usando instrumentos que estão jacentes paralelos a esse plano”⁷. Nesse excerto, é possível observar que a finalidade do aparato é, provavelmente, a de fornecer a altura do Sol acima do horizonte e que há a existência de dois grupos de instrumentos, em um deles, estariam os que devem estar eréteis (*erectis*) sobre o plano do horizonte e, no outro, os que necessitavam estar jacentes.

A simples leitura do restante da descrição de Pedro Nunes deixa claro que, de fato, a finalidade do instrumento é fornecer a altura do Sol acima do horizonte, conforme ele indica: “quando se quiser achar a altura do Sol acima do horizonte, rodar-se-á o instrumento até que a sombra do estilete se projecte sobre a recta **bd**. Então, a sombra do lado **fh**, ou **fe**, no quadrante **ab**, indicará a altura procurada”⁸.

época, verificar: Saito, “Instrumentos matemáticos dos séculos XVI e XVII na articulação entre história, ensino e aprendizagem de matemática”.

⁶Confira: W. D. Hackmann. “Scientific Instruments: Models of Brass and Aids to Discovery”. In: David Gooding; Trevor Pinch; Simon Schaffer. (Orgs.). *The Uses of Experiment: Studies in the Natural Sciences*. Cambridge/New York: Cambridge University Press, 1989. p. 39–43.

⁷Pedro Nunes. Obras: *De Arte Atque Ratione Navigandi*. vol. IV, Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2008, p. 358

⁸Nunes, Obras. *De Arte Atque Ratione Navigandi*, p. 358.

À luz do excerto de Pedro Nunes e do esquema geométrico (Figura 1), nota-se que, para medir a altura do Sol com esse instrumento, deve-se, inicialmente, posicionar a sua tábua de modo que fique jacente ao plano do horizonte.

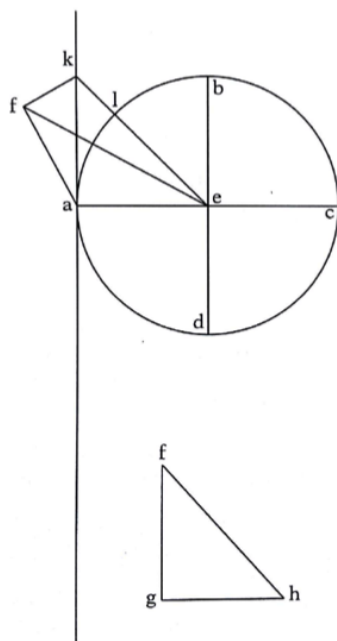


Figura 1: Esboço do instrumento jacente no plano, por Pedro Nunes⁹

Posteriormente, deve-se fazer com que a sombra do estilete (aparato que se encontra posto perpendicularmente em algum ponto da reta **bd**) coincida com a reta **bd**. Obedecidas essas orientações, já se pode observar a altura procurada, basta ler os graus a partir do ponto **b** até a sombra do lado **fh** ou **fe**, projetada sobre a circunferência graduada.

No tocante ao público que deveria encontrar essa medida, entende-se que, para compreenderem o que seria a “altura do Sol acima do horizonte”, necessitavam saber o conceito elementar de horizonte. Conforme destaca Pedro Nunes, na epítome da introdução astronômica da esfera, sabe-se que “horizonte é o círculo maior que separa a parte visível do mundo da que se não ver, pois um hemisfério está acima da terra, o outro debaixo

⁹Nunes, Obras. *De Arte Atque Ratione Navigandi*, p. 358.

da terra, sendo o mesmo um hemisfério e metade da esfera”^[10]. No século XVI, o conhecimento sobre tópicos de matérias cosmográficas, dessa natureza, eram cobrados de candidatos a pilotos. Guias náuticos e livros de marinha de Portugal apontam que uma das referências utilizada sobre esse assunto era o *Tratado da Esfera* de Sacrobosco, texto esse que Pedro Nunes veio a fazer uma tradução e incorporou no *Tratado da Sphera* (1537)^[11].

No contexto da navegação, a determinação da altura do Sol acima do horizonte estava direcionada ao cálculo da latitude^[12]. Para o conhecimento dessa coordenada, o Sol entra em cena a partir do momento em que a Estrela Polar já não era mais vista pelos navegantes, fato que aconteceu quando os descobrimentos ultrapassavam o Equador^[13]. Ainda, no século XV, um desses avanços, para além do Equador, foi impulsionado pelo “contrato estabelecido entre a coroa e o navegador Fernão Gomes, para a exploração comercial da Mina, obrigava o beneficiário do arrendamento a descobrir 100 léguas de costa em cada ano”^[14]. Também esteve relacionada à expansão dos descobrimentos portugueses a necessidade de se estabelecer uma nova rota para as especiarias que vinham do Oriente.

Quanto a uma possível aproximação do instrumento jacente no plano com os processos de determinação da latitude, não se tem qualquer registro de sua utilização, sabe-se apenas que a medida fornecida pelo aparato pode ser incorporada no cálculo dessa coordenada^[15]. Em *De arte atque ratione navigandi*, especificamente, no capítulo quatorze do segundo livro, vê-se que Pedro Nunes, ao tratar sobre um processo para achar a altura do polo acima

¹⁰Pedro Nunes, Obras. *Tratado da Sphera Astronomici introductorii de spaera epitome. Pedro Nunes Obras, vol. I*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2014, p. 213.

¹¹Luís de Albuquerque. *Ciência e Experiência nos Descobrimentos Portugueses*. Lisboa: Biblioteca Breve, 1983.

¹²Para o cálculo da latitude, eram tomadas a altura do Sol ao meio-dia local e a sua declinação no dia, ainda, dever-se-ia considerar a posição do observador como, por exemplo, se estava no Hemisfério Norte ou no Hemisfério Sul, se estava a Norte do Sol ou a Sul. Um resumo das regras para o cálculo da latitude a partir do Sol pode ser observado em: Luís de Albuquerque. *Curso de história da náutica*. Coimbra: Livraria Almeida, 1972.

¹³Moacir Soares Pereira. *Capitães, naus e caravelas da armada de Cabral*. Coimbra: Imprensa de Coimbra, 1979.

¹⁴Albuquerque. *Curso de história da náutica*, p. 93.

¹⁵Maiores informações sobre uma possível aproximação do instrumento jacente no plano com o cálculo da latitude, vide Francisco Wagner Soares Oliveira; Ana Carolina Costa Pereira. “Elementos iniciais da relação entre o instrumento de Pedro Nunes, jacente no plano, e o cálculo da latitude no século XVI”. *História da Ciência e Ensino: Construindo interfaces*. São Paulo, v. 19, p. 39–53, 2019.

do horizonte por meio dos raios do Sol, instrui que se deve achar a altura do Sol acima do horizonte¹⁶. No excerto, mesmo já tendo proposto o instrumento jacente no plano no sexto capítulo, o lusitano indica que se use o astrolábio para a determinação da referida quantidade.

Não se sabe porque Pedro Nunes instrui que se use o astrolábio em vez de suas propostas, como o instrumento jacente no plano ou mesmo o anel náutico. Possivelmente, essa postura de Pedro Nunes vai de encontro ao contexto da navegação no período, em que:

O astrolábio era considerado o melhor dos instrumentos. A altura do sol toma-se «mejor com estrolabio que non com quadrante nin com outro ningud estrumento», diz Mestre João na carta escrita de Vera Cruz a D. Manuel, em I de Maio de 1500. O astrolábio é «o melhor instrumento de todos», diz D. João de Castro numa nota do *Roteiro de Lisboa a Goa*¹⁷.

Diante dessas falas, nota-se que homens envolvidos com a prática da arte de navegar davam preferência ao uso do astrolábio para a determinação da altura do Sol. A versão desse aparato, utilizada pelos navegantes, era uma simplificação do astrolábio astronômico plano, a versão náutica do instrumento tinha como função apenas fornecer a altura dos astros¹⁸. Contudo, além desse aparato, existiam outros que, também, poderiam ser utilizados para a obtenção da referida altura como, por exemplo, o quadrante, a balestilha, o Kamal e o anel náutico.

Na literatura náutica, é possível observar que esses instrumentos podem ser agrupados em dois tipos, “os que forneciam directamente a altura angular do astro observado (como o astrolábio, o quadrante, etc.), e os que davam a altura mediante a relação de dois elementos lineares (como a balestilha e as tavoletas ou tábuas da Índia)”¹⁹.

Como destacado anteriormente, no início da descrição do instrumento jacente no plano, Pedro Nunes sinaliza um outro agrupamento para os ins-

¹⁶Nunes, Obras. *De Arte Atque Ratione Navigandi*, p. 414.

¹⁷Luciano Pereira da Silva. “A arte de navegar dos Portugueses, desde o Infante a D. João de Castro.” Em: Obras completas. Vol. II. Lisboa: Agência Geral das Colónias, 1945, pp. 223–432.

¹⁸Para outras informações sobre o astrolábio náutico, pode-se consultar: Luciano Pereira da Silva. “O astrolábio náutico dos portugueses.” Em: Obras completas. Vol. II. Lisboa: Agência Geral das Colónias, 1945, pp. 49–62; Silva. “A arte de navegar dos Portugueses, desde o Infante a D. João de Castro”, pp. 223–432; Costa. *A Marinharia dos Descobrimentos*. 1960; Albuquerque. *Instrumentos de Navegação*. 1988.

¹⁹Costa. *A Marinharia dos Descobrimentos*, p. 18.

trumentos que determinam a altura do Sol acima do horizonte: de um lado, estariam os eréteis e, do outro, os jacentes.

Pela exposição do lusitano, entende-se que se enquadrariam, no grupo dos eréteis, os aparatos que, durante o processo de obtenção da altura do astro, deveriam ser posicionados verticalmente ao plano do horizonte e, nos jacentes, os que deveriam estar paralelos ao plano do horizonte. Assim, nota-se que a classificação apontada por Pedro Nunes toma como base o procedimento para posicionamento do instrumento.

Nesse sentido, dentre os instrumentos utilizados na navegação quinhentista, fazem parte dos eréteis a balestilha, o quadrante, o anel náutico, o astrolábio, dentre outros. Já em relação ao grupo dos jacentes, tem-se como exemplo o próprio instrumento jacente no plano, considerando outros aparatos que não estavam voltados à determinação da altura do Sol, ao grupo, ainda, pode-se incorporar a bussola, a lâmina de sombras etc.

No passo seguinte, com base no instrumento jacente no plano, busca-se expor algumas informações sobre os procedimentos praticados no ambiente da navegação para uso de instrumentos que deveriam estar jacentes ao plano do horizonte.

3 O instrumento jacente no plano e os procedimentos para seu uso

Em Pedro Nunes – Obras vol. IV *De arte atque ratione navigandi*, em particular, nas páginas 358 a 360, tem-se a descrição do instrumento jacente no plano exposta por Pedro Nunes no século XVI. No decorrer dos excertos, o quinhentista não apresenta informações que apontem como se deve proceder para posicionar o instrumento de forma que fique jacente ao plano do horizonte. No século XVI, essa omissão de procedimentos pode estar associada ao fato de “que para o produtor do texto, o artesão, essa informação não era necessária, pois seria um conhecimento tácito dos artesãos da época, bem como de outros interlocutores”²⁰. Além disso, sabe-se, ainda, que o público vislumbrado por Pedro Nunes, para sua obra, foi certamente:

matemáticos, astrónomos e homens de ciência de formação muito elevada, das universidades e círculos eruditos da Europa. A simples cir-

²⁰Marisa da Silva Dias; Fumikazu Saito. “História e Ensino de Matemática: o báculo e a geometria”. In: XXII SIEM Seminário de Investigação em Educação Matemática, 2011, Lisboa. ProfMat2011 e XXII SIEM. Lisboa: Associação de Professores de Matemática, 2011, p. 8.

cunstância de o idioma escolhido para esta redação ser o latim, e, sobretudo, o facto de o conteúdo ser sofisticado e tecnicamente avançado, elimina qualquer possibilidade de o livro se dirigir a pilotos, marinheiros ou outros <<homens do mar>>²¹

Diante disso, entende-se que uma justificativa para Pedro Nunes não expor os procedimentos, para posicionamento da tábua, deve-se ao público pensado para ler seu texto, visto que essas pessoas, possivelmente, já detinham os conhecimentos necessários para realizar o uso de instrumentos que deveriam estar jacentes ao plano do horizonte²².

Como apontado anteriormente, além do instrumento jacente no plano, a lâmina de sombras, também, deveria ser posicionada de forma jacente para que pudesse ser utilizada. A proposta dessa lâmina é exposta em Pedro Nunes – Obras vol. I *Tratado da Sphera Astronomici introductorii de spaera epitome*. Nessa obra, já é possível observar-se, na descrição do instrumento, indícios de como se deve proceder para posicioná-lo de maneira que fique jacente, em um dos excertos, o lusitano indica que:

Poderião os pilotos leuar hum circulo de pao ou metal: com hum estilo perpendicular no centro: e a roda do circulo graduado como astrolabio: e sobre hum ponto do diâmetro fora do centro: em que esta ho estilo se fara hum circulo pouco mayor que ha rosa da agulha: o qual se cauara pera nelle se meter e andar liure como conuem: e pendurarsea este estromento: per cordeys ou per outra arte: que se pode dar: pera ficar ao liue²³

Ao final desse texto, percebe-se, em umas das instruções de Pedro Nunes, que se pode fazer uso de cordeys²⁴ para se posicionar o instrumento de forma

²¹Henrique Leitão. Anotações ao *De arte atque ratione nauigandi*. In **Pedro Nunes. Obras, vol. IV**, Lisboa: Academia das Ciências de Lisboa, Fundação Calouste Gulbenkian, 2008, p. 554.

²²Um outro elemento relacionado ao instrumento jacente no plano, que também se pode observar, é a omissão dos procedimentos necessários referente à instrução de Pedro Nunes que solicita a divisão de uma tábua circular em 360 graus. Para detalhes sobre essa instrução, consulte: Francisco Wagner Soares Oliveira; Ana Carolina Costa Pereira. “Indícios do Costume Relacionado a Divisão da Circunferência em Seus 360 Graus presente na Fabricação do Instrumento Jacente no Plano de Pedro Nunes”. *Revista Brasileira de História da Matemática*, v. 20, n. 39, p. 35–49, 7 out. 2020.

²³Nunes, *Obras. Tratado da Sphera Astronomici introductorii de spaera epitome*, p. 143.

²⁴A palavra cordeys se refere a um cordão, barbante ou mesmo corda, confira: Candido de Figueiredo. **Novo Dicionário da Língua Portuguesa**. Lisboa: Portugal Brasil, 1913.

nivelada. No início do século XVII, ao tratar sobre a fabricação desse mesmo instrumento, Simão de Oliveira, em sua *Arte de Navegar*, também, indica o uso de cordões nos seguintes termos:

Esta descripção & diuisão se passara a hua lamina de latão da grossura de hum dedo, & quadrada por todas as partes, a qual terá no lugar que responde â rosa que no papel se descreueo, hum vão redondo em que se porá hua Agulha pequena feita com muita exacção, & no centro hum ponteiro perpendicularmente levantado a Angulos rectos, & fazendo em cada Angulo da lamina hum buraco se meteraõ nelles cordéis pelos quaes pendurado o instrumento fique equidistante ao Plano do Horizonte, com o que será a fabrica acabada²⁵.

Essas referências ao uso de cordões, para posicionamento do instrumento, indicam que essa tenha sido a ou uma das estratégias de posicionamento de instrumentos que devessem estar jacentes ao plano do horizonte para serem utilizados. Diante dessa possibilidade e conforme as instruções de Pedro Nunes para fabricação e uso da lâmina de sombras, ela foi utilizada²⁶ a bordo da *Sagres*²⁷. Na ilustração a seguir, assinala-se a réplica moderna:



Figura 2: Instrumento de sombras usado a bordo da *Sagres*²⁸

Nessa imagem, verifica-se como fica a disposição dos cordões no instrumento, nota-se que eles partem dos vértices do quadrado em direção ao

²⁵ Simão de Oliveira. *Arte de Navegar*. Lisboa: Pedro Crasbeeck, 1606, p. 83.

²⁶ Sobre o uso da lâmina de sombras a bordo da *Sagres*, confira José Manuel Malhão Pereira. **Experiências com Instrumentos e Métodos Antigos de Navegação**, Lisboa, Academia de Marinha, 2000.

²⁷ A *Sagres* é um navio-escola da Marinha portuguesa.

²⁸ Pereira. **Experiências com Instrumentos e Métodos Antigos de Navegação**, p. 5.

centro da circunferência. Essa réplica foi utilizada em terra firme, apresentando resultados, até certo ponto, satisfatórios; já a bordo da Sagres, o instrumento não foi utilizado, mas cabe destacar que, quando suspenso, comportou-se de forma estável²⁹.

Retornando ao *Tratado da Sphera Astronomici introductorii de spaera epitome* e prosseguindo em sua leitura, é possível observar que Pedro Nunes volta a falar sobre como se proceder para posicionar o instrumento de forma que fique jacente ao plano do horizonte. Nessa segunda menção, descrita entre as páginas 165 e 166, o quinhentista já instrui uma outra possibilidade, dessa vez, propõe que:

Nas costas desta lamina defrôte do centro encastoaremos hum pião grande e pesado laurado a torno: pera que metendo a dita lamina nas balanças e caixa da agulha acostumada: fique sojugada por causa do peso e nã saya do ouliuel: e as balanças seram torneadas e de eyxos dobrados e muy liures: e se sem embargo de ho assi fazermos: acharmos que a lamina não fica a ouliuel acrecentarlheemos pella parte de dentro algum peso onde comprir pera que finalmente nos fique perfeitamete ouliuelada: porque nam sendo assi não nos serue³⁰.

Desse excerto, cabe destacar que:

A frase *balanças e caixa da agulha acostumada*, mostra implicitamente que em Portugal já era usada nas *agulhas a suspensão*, depois denominada *balança* (entre nós) ou *Cardan* (n.º 108). Conclusão similar deriva da insistência em que a lâmina deve ter as *balanças torneadas, os eixos torneados e mui livres*, como a de *marfim* de um *palm* de *diâmetro* (cêrca de 22 centímetros)³¹.

Essa suspensão indicada por Pedro Nunes se trata de uma “combinação de alguns anéis, já anteriormente usada nas lâmpadas para evitar o derramamento do azeite”³². Assim, nota-se que a navegação se apropriou dessa estratégia de suspensão para atender uma de suas necessidades, em particular, o nivelamento de um instrumento com o plano do horizonte. Como um dos fatos que atesta o conhecimento dessa suspensão por anéis, em um

²⁹Pereira. **Experiências com Instrumentos e Métodos Antigos de Navegação**, 2000.

³⁰Nunes, *Obras*. *Tratado da Sphera Astronomici introductorii de spaera epitome*, pp. 165–166.

³¹Costa. **A Marinharia dos Descobrimentos**, p. 186.

³²Costa. **A Marinharia dos Descobrimentos**, p. 170.

período anterior à menção de Pedro Nunes, tem-se o Codex Madrid I.1, f. 13v³³.

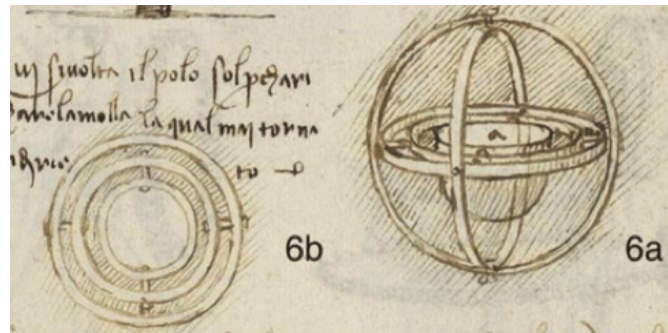


Figura 3: Suspensão por anéis descrita por Leonardo da Vinci³⁴

Conforme descrito por Leonardo da Vinci, no esboço 6b, tem-se a vista superior do objeto e, em 6a, a vista em perspectiva. A ideia é que um objeto posto no anel ao centro se mantenha na horizontal mesmo que a suspensão sofra a influência de algum movimento externo.

Dentre os instrumentos construídos à luz desse método de suspensão, vê-se o instrumento de sombras usado a bordo da *Sagres*:

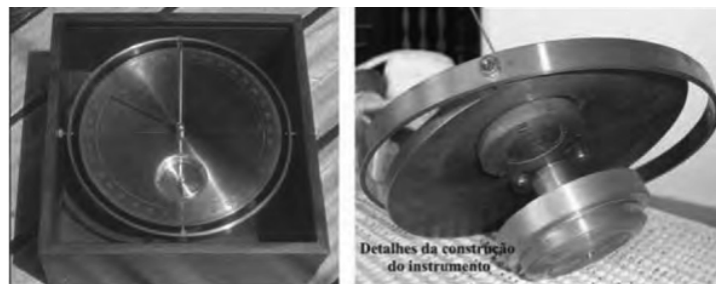


Figura 4: Réplica do instrumento de sombras de Pedro Nunes³⁵

³³O Codex Madrid I.1, f. 13 pode ser acessado em: <http://www.codex-madrid.rwth-aachen.de/madrid1/f013vd/index.html>

³⁴Codex Madrid I.1, f. 13.

³⁵José Manuel Malhão Pereira. “Métodos e Instrumentos de Navegação”. In: DOMINGUES, Francisco Contente. *Navios, Marinheiros e Arte de Navegar, 1500–1668*. Academia de Marinha: Lisboa, 2012. p. 368.

Nessa ilustração, é possível observar a lâmina de sombras³⁶ ao centro do sistema de suspensão de balança e, ainda, todo o conjunto posto em uma caixa. A bordo da *Sagres*, esse modelo de suspensão se mostrou mais eficiente do que o suspenso por cordões³⁷.

Diante dessas notas, pode-se observar dois métodos utilizados, no século XVI, para posicionar instrumentos de tal modo que ficassem jacentes ao plano do horizonte. Pensando em uma possível incorporação dessas estratégias para o instrumento jacente no plano, compreende-se que o aparato teria como configuração:

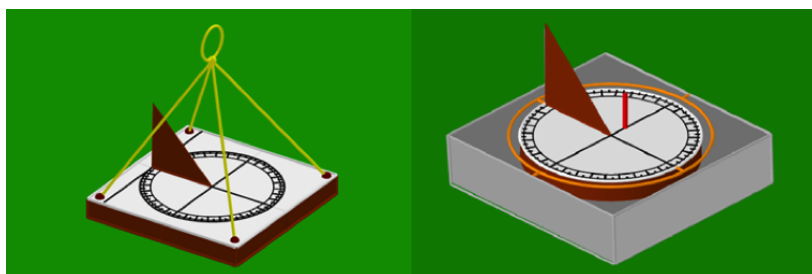


Figura 5: Da esquerda para a direita: instrumento com cordões e na caixa da agulha.³⁸

O instrumento preso por cordões se refere a uma das configurações do aparato para a tábua quadrada, já o outro, dentro da caixa, é a versão na tábua circular³⁹. Com essas imagens do instrumento, busca-se apenas ilustrar a incorporação dos possíveis métodos praticados no século XVI, não

³⁶Para mais informações sobre a construção dessa réplica, consulte Pereira. **Experiências com Instrumentos e Métodos Antigos de Navegação**, pp. 28–32.

³⁷Pereira. **Experiências com Instrumentos e Métodos Antigos de Navegação**, p. 30.

³⁸Elaborado pelos autores.

³⁹Ao propor o instrumento jacente no plano, Pedro Nunes indica duas possíveis configurações, uma para uma tábua circular e outra em uma tábua quadrada. A versão na tábua quadrada, ainda, teria duas variantes, a depender da medida dos lados congruentes do triângulo retângulo isósceles posto sobre a circunferência. Em uma delas, dois dos lados do triângulo seriam congruentes ao semidiâmetro da circunferência, já na outra, o triângulo teria dois de seus lados congruentes ao diâmetro da circunferência. Para detalhes sobre as configurações do instrumento, confira Oliveira. **Sobre os conhecimentos geométricos incorporados na construção e no uso**, 2019.

foram feitas réplicas físicas para se testar, na prática, a validade desses métodos no instrumento jacente no plano⁴⁰.

Mesmo diante desses dois possíveis métodos para suspender o instrumento jacente no plano, sabe-se apenas que ele foi explicado em aulas teóricas⁴¹, não se tem qualquer registro que indique que esse aparato foi utilizado na prática da navegação:

A limitação que torna este instrumento muito pouco adequado ao uso no mar é óbvia: exige um plano horizontal estável, o que nunca se dá a bordo. Esta inadequação ao uso no mar tornou-o apenas numa concepção teórica e explica porque está praticamente ausente da literatura de náutica da época, e porque não se conhecem quaisquer exemplares⁴².

De fato, a necessidade de posicioná-lo de forma paralela ao plano do horizonte deve ter favorecido para não terem utilizado esse instrumento no século XVI. Contudo, a lâmina de sombras tem revelado a existência de dois métodos para posicionar o aparato de forma jacente. Alinhando essas informações com as vistas no contexto do aparato, pode-se acrescentar, ainda, que esteja associado a essa ausência do instrumento jacente no plano, na navegação, o fato de existirem outros instrumentos para determinar a altura do Sol acima do horizonte. O astrolábio é um deles, o qual era considerado o melhor instrumento para esse fim.

A lâmina de sombras é um exemplo que reforça esse fato, mesmo tendo que estar jacente ao plano do horizonte para ser usada (“problema” equivalente ao do instrumento jacente no plano), sabe-se que foi utilizada no século XVI por D. João de Castro em uma viagem que fez para a Índia. A justificativa para seu uso é que não existiam outros instrumentos que substituíssem a lâmina de sombras.

4 Considerações finais

Diante do apresentado, ficam registrados alguns elementos da Navegação portuguesa do século XVI, coletados a partir do uso instrumento jacente

⁴⁰Em Oliveira. **Sobre os conhecimentos geométricos incorporados na construção e no uso**, p. 126, é possível observar uma atividade realizada em terra firme com o instrumento jacente no plano, em uma das práticas se nota que os sujeitos da atividade suspenderam o aparato por meio de cordões.

⁴¹Os textos que ilustram essa abordagem teórica do instrumento jacente no plano são apontados em Leitão. Anotações ao *De arte atque ratione nauigandi*, p. 689.

⁴²Leitão. Anotações ao *De arte atque ratione nauigandi*, p. 688.

no plano. No contexto no qual esse aparato esteve inserido, pode-se observar, por exemplo: uma categorização que aponta para dois grupos de instrumentos, em um deles, estariam os jacentes e, no outro, os eretos; que a determinação da altura do Sol acima do horizonte se apresenta como uma outra estratégia para o cálculo da latitude, isso quando não era possível encontrar essa coordenada pela estrela polar; que o astrolábio era considerado o melhor instrumento para se determinar a altura do Sol acima do horizonte e que tinham duas estratégias para posicionar os instrumentos que necessitassem estar jacente ao plano do horizonte.

Este estudo sobre o uso do instrumento jacente no plano, reforça a tese de que os instrumentos estiveram, intimamente, associados tanto à resolução de problemas do período no qual foram propostos como também ao conhecimento disponível. Por essa razão, entende-se que seja válido investir esforços na direção de conhecer o contexto em que fizeram parte.

Referências

ALBUQUERQUE, Luís de. **Ciência e Experiência nos Descobrimentos Portugueses**. Lisboa: Biblioteca Breve, 1983.

ALBUQUERQUE, Luís de. **Curso de história da náutica**. Coimbra: Livraria Almeida, 1972.

ALBUQUERQUE, Luís de. **Instrumentos de Navegação**. Lisboa: Comissão Nacional para a Comemoração dos Descobrimentos Portugueses, 1988.

COSTA, A. Fontoura da. **A Marinharia dos Descobrimentos**. 3^a. Lisboa: Edições Culturais da Marinha, 1960.

DIAS, Marisa da Silva; SAITO, Fumikazu. História e Ensino de Matemática: o báculo e a geometria. In: **XXII SIEM Seminário de Investigação em Educação Matemática**, 2011, Lisboa. ProfMat2011 e XXII SIEM. Lisboa: Associação de Professores de Matemática, pp. 1–11, 2011.

FIGUEIREDO, Candido de. **Novo Dicionário da Língua Portuguesa**. Lisboa: Portugal Brasil, 1913.

GABBEY, Alan. Between ars and philosophia naturalis: reflections on the historiography of early moderns mechanics. In: FIELD, J. V.; JAMES,

Frank A. J. L. (Orgs.). **Renaissance & Revolution: Humanists, Scholars & Natural Philosophers in Early Modern Europe**. Cambridge: Cambridge University Press, 1997. p. 133–145.

HACKMANN, W. D. Scientific Instruments: Models of Brass and Aids to Discovery. In: GOODING, Davig; PINCH, Trevor; SCHAFFER, S. (Orgs.). **The Uses of Experiment: Studies in the Natural Sciences**. Cambridge/New York: Cambridge University Press, 1989. p. 39–43.

KUSUKAWA, Sachiko; MACLEAN, Ian. (Eds.). **Transmitting Knowledge: Words, Images, and Instruments in Early Modern Europe**. Oxford/New York: Oxford University Press, 2006.

LEITÃO, Henrique. Anotações ao *De arte atque ratione navigandi*. In **Pedro Nunes. Obras, vol. IV**, Lisboa: Academia das Ciências de Lisboa, Fundação Calouste Gulbenkian, 2008, p. 515–794.

NUNES, Pedro, *Tratado da Sphera Astronomici introductorii de spæra epitome*. Pedro Nunes Obras, vol. I. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2014.

NUNES, Pedro. Obras: *De Arte Atque Ratione Navigandi*. vol. IV, Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2008.

OLIVEIRA, Francisco Wagner Soares; PEREIRA, Ana Carolina Costa. Elementos iniciais da relação entre o instrumento de Pedro Nunes, jacente no plano, e o cálculo da latitude no século XVI. **História da Ciência e Ensino: Construindo interfaces**, São Paulo, v. 19, p. 39–53, 2019.

OLIVEIRA, Francisco Wagner Soares; PEREIRA, Ana Carolina Costa. Índícios do Costume Relacionado a Divisão da Circunferência em Seus 360 Graus presente na Fabricação do Instrumento Jacente no Plano de Pedro Nunes. **Revista Brasileira de História da Matemática**, v. 20, n. 39, p. 35–49, 7 out. 2020.

OLIVEIRA, Francisco Wagner Soares. **Sobre os conhecimentos geométricos Incorporados na construção e no uso do instrumento jacente no plano de Pedro Nunes (1502-1578) na formação do professor de matemática**. Dissertação (Mestrado) – Curso de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática, Instituto Federação de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, Fortaleza, 2019.

OLIVEIRA, Simão de. *Arte de Navegar*. Lisboa: Pedro Crasbeeck, 1606.

PEREIRA, José Manuel Malhão. **Experiências com Instrumentos e Métodos Antigos de Navegação**, Lisboa, Academia de Marinha, 2000.

PEREIRA, José Manuel Malhão. Métodos e Instrumentos de Navegação. In: DOMINGUES, Francisco Contente. **Navios, Marinheiros e Arte de Navegar, 1500- 1668**. Academia de Marinha: Lisboa, 2012. p. 297-439.

PEREIRA, Moacir Soares. **Capitães, naus e caravelas da armada de Cabral**. Coimbra: Imprensa de Coimbra, 1979.

SAITO, Fumikazu. **História da matemática e suas (re)construções contextuais**. São Paulo: Livraria da Física, 2015.

SAITO, Fumikazu. Instrumentos e o “saber-fazer” matemático no século XVI. **Revista Tecnologia e Sociedade**, Curitiba, v. 18, n. especial, p. 101–112, 2013.

SAITO, Fumikazu. Instrumentos matemáticos dos séculos XVI e XVII na articulação entre história, ensino e aprendizagem de matemática. **Revista de Matemática, Ensino e Cultura – Rematec**, v. 9, n. 16, p. 25–47, 2014.

SILVA, Luciano Pereira da. **A arte de navegar dos Portugueses, desde o Infante a D. João de Castro**. Em: Obras completas. Vol. II. Lisboa: Agência Geral das Colónias, 1945, pp. 223–432.

SILVA, Luciano Pereira da. **O astrolábio náutico dos portugueses**. Em: Obras completas. Vol. II. Lisboa: Agência Geral das Colónias, 1945, pp. 49–62.

WARNER, Deborah Jean. Terrestrial Magnetism: For the Glory of God and the Benefit of Mankind. **Osiris**, Philadelphia, v. 9, p. 67–84, 1994.