

## APRESENTAÇÃO

Este é um número especial do Boletim, dedicado às Actas do **Encontro Nacional da Sociedade Portuguesa de Matemática** de 2014, que decorreu na Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa, no Campus da Caparica, entre os dias 14 e 16 Julho de 2014 (<http://www.enspm14.spm.pt/>). O Encontro reuniu professores e alunos de diversos graus de ensino, bem como investigadores e outros participantes com interesse pela matemática. Durante o evento, todos os participantes tiveram oportunidade de partilhar experiências e ideias e de discutir temas de interesse comum no âmbito da matemática, do seu ensino e da sua divulgação.

A Comissão Organizadora do Encontro era constituída por Cecília Perdigão, Paula Amaral, António Malheiro, Fátima Rodrigues, João Nuno Martins, Magda Rebelo, Maria do Céu Soares, e Paula Rodrigues. A Comissão Científica era formada por Domingos Cardoso (UA), Fernando Costa (UAb), Filipe Oliveira (UNL), João Queiró (UC), Jorge Buescu (UL), e Peter Gothen (UP).

O programa do Encontro incluiu Sessões Plenárias e e um conjunto de Sessões Temáticas nas áreas de *Álgebra e Combinatória* (organizada por João Araújo da UAb), *Análise e Equações com Derivadas Parciais* (organizada por Luís Trabucho da FCT-UNL), *Ensino da Matemática* (organizada por Paula Reis da Escola Secundária Padre António Vieira), *Geometria e Topologia* (organizada por João Faria Martins da FCT-UNL), *História da Matemática* (organizada por Bernardo Mota da FLUL), *Lógica e Computação* (organizada por Fernando Ferreira da FCUL), *Matemática nas Ciências e Tecnologia* (organizada por Isabel Figueiredo da FCT-UC), *Optimização/Investigação Operacional* (organizada por Jorge Orestes da FCT-UNL), *Probabilidades e Estatística* (organizada por Maria Antónia Turkman da FCUL), *Sistemas Dinâmicos* (organizada por Mário Bessa da UBI), e ainda uma sessão temática dedicada alunos de doutoramento (organizada por Hugo Tavares do IST).

O programa do Encontro incluiu ainda um Curso Acreditado para professores de Matemática, bem como duas discussões em Mesa de Redonda, das quais uma foi dedicada ao ensino e outra à divulgação.

Este número do Boletim contém os resumos alargados de muitas das comunicações apresentadas nas Sessões Temáticas. Com a colaboração preciosa dos colegas que organizaram estas sessões, e que são Editores Convidados neste número do Boletim, os resumos foram distribuídos em secções, cada uma delas dedicada a uma Sessão Temática. Quer aos Autores das comunicações e dos resumos aqui apresentados, quer aos Colegas que organizaram as Sessões Temáticas, a Direcção do Boletim deixa um agradecimento muito especial.

A compilação deste volume contou também com a colaboração de três estimados colegas que tiveram um papel fundamental na coordenação e na preparação dos textos. São eles o o António Malheiro, o Fernando Pestana da Costa e o Filipe Oliveira, também eles Editores Convidados neste número do Boletim, e aos quais eu deixo aqui um agradecimento caloroso.

Ana Jacinta Soares  
Maio de 2016

# Álgebra e Combinatória

*Editores Convidados:*

António Malheiro & João Jorge Araújo (*editor consultivo*)

*P. D. Beites & A. P. Nicolás*

Álgebras de composição standard de tipo II ..... 1

*Rosário Fernandes*

Sets of Parter vertices which are Parter sets ..... 5



# ÁLGEBRAS DE COMPOSIÇÃO STANDARD DE TIPO II

*P. D. Beites*

CMA-UBI e Departamento de Matemática  
Universidade da Beira Interior  
e-mail: pbeites@ubi.pt

*A. P. Nicolás*

IMUVa e Departamento de Matemática Aplicada  
Universidad de Valladolid  
e-mail: anicolas@maf.uva.es

**Resumo:** Uma caracterização das álgebras de composição *standard* de tipo II, sobre um corpo de característica diferente de dois, é apresentada.

**Abstract:** A characterization of the standard composition algebras of type II, over a field of characteristic different from two, is presented.

**palavras-chave:** Álgebra de Hurwitz; identidade; composição *standard* de tipo II.

**keywords:** Hurwitz algebra; identity; standard composition of type II.

## 1 Estado da arte das álgebras de composição

Os elementos mais conhecidos da classe das álgebras de composição são as álgebras de Hurwitz. Estas, contrariamente às restantes álgebras de composição, possuem identidade e, conseqüentemente, são de dimensão finita, [3]. Sobre um corpo de característica diferente de dois, pelo Teorema de Hurwitz generalizado em [5], qualquer álgebra de Hurwitz é isomorfa a uma das seguintes álgebras: o corpo base; uma extensão quadrática separável do corpo base; uma álgebra de quaterniões generalizada; uma álgebra de octoniões generalizada.

Até ao momento, as álgebras de composição sem identidade mas satisfazendo uma condição adicional (ou a associatividade da norma, ou a identidade flexível, ou uma identidade de Moufang, ou a associatividade das terceira e/ou da quarta potências, ou grau dois) foram estudadas por Cuenca-Mira, Elduque, Myung, Okubo, Osborn, Pérez-Izquierdo e Sánchez-Campos. Mais detalhes podem ser consultados em [4] e referências aí citadas.

## 2 Conceitos e resultados em torno do tipo II

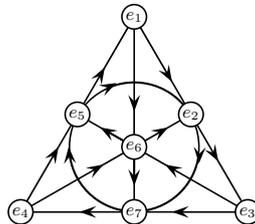
Sejam  $F$  um corpo tal que  $\text{car}(F) \neq 2$  e  $V$  uma álgebra sobre  $F$ , com multiplicação denotada por justaposição.

A álgebra  $V$  é uma *álgebra de composição* se está munida de uma forma quadrática não degenerada (a *norma*)  $n : V \rightarrow F$  que é *multiplicativa*, isto é, para quaisquer  $x, y \in V$ ,  $n(xy) = n(x)n(y)$ . Dizer que a forma  $n$  é *não degenerada* significa que a forma bilinear simétrica associada  $n(x, y) = \frac{1}{2}(n(x+y) - n(x) - n(y))$  é não degenerada.

As álgebras de Hurwitz são o ingrediente principal para construir álgebras de composição de dimensão finita sem identidade, [3]. Desta referência, recorrendo ao chamado truque de Kaplansky, tem-se também que a dimensão de qualquer álgebra de composição de dimensão finita é igual a 1, 2, 4 ou 8.

A modificação como se segue da multiplicação  $*$  de uma álgebra de Hurwitz  $(U, *)$ , com identidade  $e$ , conduz a novas álgebras de composição relativamente à mesma forma quadrática  $n$ : (I)  $x * y$ , (II)  $\bar{x} * y$ , (III)  $x * \bar{y}$ , (IV)  $\bar{x} * \bar{y}$ , onde  $x \mapsto \bar{x} = n(x, e)e - x$  define a involução *usual* de  $(U, *)$  e, para qualquer  $x \in U$ ,  $n(x)e = \bar{x} * x = x * \bar{x}$ . As álgebras assim construídas são chamadas *álgebras de composição standard* de tipo I, II, III, IV, respetivamente, *associadas a*  $(U, *)$ . Se  $\dim U = 1$ , então todas as álgebras de composição *standard* são o corpo base  $F$ . Em dimensões superiores, as de diferentes tipos não são isomorfas.

Daqui em diante, pode assumir-se, estendendo escalares se necessário, que  $F$  é algebricamente fechado. Seja  $(\mathbb{H}, *)$  a álgebra quaterniônica sobre  $F$  com base  $\{e_i : i \in \{0, 1, 2, 3\}\}$  e tabela de multiplicação dada por  $e_1 * e_1 = e_2 * e_2 = e_3 * e_3 = e_1 * e_2 * e_3 = -e_0$ , onde  $e_0$  é a identidade. Seja  $(\mathbb{O}, *)$  a álgebra octoniônica sobre  $F$  com base  $\{e_i : i \in \{0, \dots, 7\}\}$ , com tabela de multiplicação dada por  $e_i * e_i = -e_0$ , para  $i \in \{1, \dots, 7\}$  e onde  $e_0$  é a identidade, e com o plano de Fano subsequente, onde a ordenação cíclica de cada três elementos sobre a mesma linha é mostrada pelas setas.



Considerem-se, sobre  $F$ , as álgebras  $\mathcal{H}$  e  $\mathcal{O}$  de composição *standard* de tipo II associadas às álgebras de Hurwitz  $\mathbb{H}$  e  $\mathbb{O}$ . A multiplicação, denotada por

justaposição, é dada por  $xy := \bar{x} * y$ . Em [6] estudaram-se certas identidades satisfeitas por  $\mathcal{H}$  e  $\mathcal{O}$ . Algumas foram obtidas pelo método dos vetores aleatórios que envolve Álgebra Linear Computacional sobre matrizes. Ainda na referência [6], provou-se que  $\mathcal{H}$  e  $\mathcal{O}$  satisfazem a identidade  $x^2y = n(x)y$ .

### 3 Caracterização do tipo II

Seja  $F$  um corpo tal que  $\text{car}(F) \neq 2$ . Recorde-se que a única álgebra de composição de dimensão 1 sobre  $F$  é o corpo base. Em dimensão 2, tem-se a classificação seguinte dada por Petersson.

**Teorema 1** [2] *Seja  $A$  uma álgebra de composição de dimensão 2 sobre  $F$  com multiplicação denotada por justaposição. Então pode definir-se uma multiplicação  $*$  em  $A$  tal que  $(A, *)$  é uma álgebra de Hurwitz e a justaposição é dada por uma das seguintes fórmulas:*

1.  $xy = x * y$ , 2.  $xy = \bar{x} * y$ , 3.  $xy = x * \bar{y}$ , 4.  $xy = u * \bar{x} * \bar{y}$ , onde  $u$  é um elemento fixo com  $n(u) = 1$  e  $x \mapsto \bar{x}$  define a involução usual de  $(A, *)$ .

**Teorema 2** *Seja  $A$  uma álgebra de composição de dimensão 2 sobre  $F$ , com multiplicação denotada por justaposição, que satisfaz a identidade  $x^2y = n(x)y$ . Então  $A$  é uma álgebra de composição standard de tipo II.*

**Demonstração:** Invocando o Teorema [1], seja  $e_0$  a identidade de  $(A, *)$ . Supondo 1. do mesmo, de  $x^2y = n(x)y$  obtém-se  $x * x * y = \bar{x} * x * y$ . Com  $y = e_0$  e assumindo que  $n(x) \neq 0$ , chega-se a  $x = \bar{x}$ . Sendo  $\{e_0, l\}$  uma base da álgebra quadrática  $(A, *)$ ,  $l * l = \mu e_0$  com  $\mu \in F \setminus \{0\}$  (ver [5]). Note-se que  $n(l) \neq 0$  e que  $\bar{l} = -l$ , contradição. Assumindo 3. do já mencionado teorema, verifica-se que  $x^2y = x * \bar{x} * \bar{y} = n(x)\bar{y}$  e tem-se  $x^2y = n(x)y$ . Mas, tomando  $x = e_0$ , obtém-se  $\bar{y} = y$ , contradição. Supondo 4. do Teorema [1], deduz-se que  $x^2y = u * \bar{u} * \bar{x} * \bar{x} * \bar{y} = u * \bar{u} * x * x * \bar{y} = n(u)x * x * \bar{y} = x * x * \bar{y}$  e tem-se  $x^2y = n(x)y$ . Com  $x = e_0$  vem  $\bar{y} = y$ , contradição.  $\square$

Quanto às álgebras de composição de dimensão 4 sobre  $F$ , a classificação dada no teorema subsequente deve-se a Stampfli-Rollier.

**Teorema 3** [1] *A multiplicação, denotada por justaposição, de uma álgebra de composição de dimensão 4 sobre  $F$  é dada por uma das seguintes fórmulas:*

1.  $xy = a * x * (a * b)^{-1} * y * b$ , 2.  $xy = (b * a)^{-1} * \bar{x} * a * y * b$ ,
3.  $xy = a * x * b * \bar{y} * (b * a)^{-1}$ , 4.  $xy = \bar{a} * \bar{x} * (b * a)^{-1} * \bar{y} * \bar{b}$ ,

onde  $*$  denota a multiplicação de uma álgebra de quaterniões generalizada,  $x \mapsto \bar{x}$  define a sua involução usual e  $a, b$  são elementos fixos com  $n(a) \neq 0 \neq n(b)$ .

Para as álgebras de composição *standard* de tipo II com dimensão 4 sobre  $F$ , recorrendo ao resultado precedente, pode pensar-se de forma similar ao que foi feito no Teorema [2] em dimensão 2. Mas esta estratégia não pode ser continuada, pois não se conhece uma descrição, como as dos Teoremas [1] e [3], para as álgebras de composição de dimensão 8 sobre  $F$ . Contudo, via topologia de Zariski, a caracterização das álgebras de composição *standard* de tipo II com a identidade  $x^2y = n(x)y$  pode ser obtida.

**Teorema 4** [6] *Seja  $A$  uma álgebra de composição de dimensão arbitrária sobre  $F$ , com multiplicação denotada por justaposição, que satisfaz a identidade  $x^2y = n(x)y$ . Então  $A$  é uma álgebra de composição *standard* de tipo II.*

**Agradecimentos.** P. D. Beites e A. P. Nicolás foram financiados, respetivamente, pela Fundação para a Ciência e a Tecnologia, projeto PEST-OE/MAT/UI0212/2011, e pelo Ministerio de Educación y Ciencia, projeto MTM2010-18370-C04-01. Os autores agradecem as sugestões do professor Alberto Elduque para [6].

## Referências

- [1] C. Stampfli-Rollier, “4-dimensionale Quasikompositionsalgebren”, *Arch. Math.*, Vol. 40, No. 1 (1983), pp. 516–525.
- [2] H. P. Petersson, “Quasi composition algebras”, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, Vol. 35, No. 3-4 (1971), pp. 215–222.
- [3] I. Kaplansky, “Infinite-dimensional quadratic forms admitting composition”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, Vol. 4, No. 6 (1953), pp. 956–960.
- [4] J. Cuenca-Mira e E. Sánchez-Campos, “Composition algebras satisfying certain identities”, *J. Algebra*, Vol. 306, No. 2 (2006), pp. 634–644.
- [5] N. Jacobson, “Composition algebras and their automorphisms”, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, Vol. 7, No. 1 (1958), pp. 55–80.
- [6] P. D. Beites e A. P. Nicolás, “Standard composition algebras of types II and III”, (2014), submetido.

# SETS OF PARTER VERTICES WHICH ARE PARTER SETS

*Rosário Fernandes*

Faculdade de Ciências e Tecnologia - UNL

2829-516 Caparica, Portugal

e-mail: [mrff@fct.unl.pt](mailto:mrff@fct.unl.pt)

**Resumo:** Dada uma árvore  $G$ , veremos quais os vértices de  $G$  que são vértices de Parter e quais é que formam um conjunto de Parter.

**Abstract** Let  $G$  be a tree. We will see which vertices of  $G$  are Parter vertices and which form a Parter set.

**palavras-chave:** Conjunto de Parter; vértice de Parter; valores próprios.

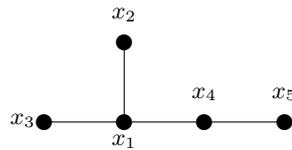
**keywords:** Parter set; Parter vertex; eigenvalue.

## 1 Introdução

Let  $G = (X, U)$  be a tree (connected undirected graph without cycles), with  $n$  vertices  $\{x_1, \dots, x_n\}$ . Let  $A = [a_{i,j}]$  be an  $n$ -by- $n$  real symmetric matrix. We say that  $A$  is a matrix associated with  $G$  if  $a_{i,j} \neq 0$ , for  $i \neq j$ , if and only if there is an edge between  $x_i$  and  $x_j$ .

So, if  $G$  is a tree with  $n \geq 2$  vertices, there are many matrices associated with  $G$ .

**Example 1.1** Let  $G = (X, U)$  be the following tree



$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \text{ and } A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ are two distinct}$$

matrices associated with  $G$ .

Let  $A$  be an  $n$ -by- $n$  matrix associated with  $G$  and  $i$  be an integer such that  $1 \leq i \leq n$ . We denote by  $A(i)$  the principal matrix of  $A$  resulting from deletion of row and column  $i$ . When  $T$  is a subgraph of  $G$ , we denote by  $A[T]$  the principal submatrix of  $A$  associated with  $T$ . We denote the

multiplicity of  $\lambda \in \mathbb{R}$  as an eigenvalue of  $A$  (this is,  $\det(A - \lambda I_n) = 0$ ) by  $m_A(\lambda)$ .

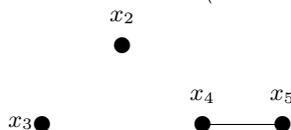
Let  $\lambda$  be an eigenvalue of  $A$ , we say that a vertex  $x_i$  of  $G$  is a weak Parter vertex, for  $\lambda$  relative to  $A$ , when  $\lambda$  is an eigenvalue of  $A(i)$  with multiplicity  $m_{A(i)}(\lambda) = m_A(\lambda) + 1$ .

**Example 1.2** *The real number 1 is an eigenvalue of multiplicity 1 of the*

*matrix*  $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ , *associated with the tree*  $G$  *(last example).*

*Since 1 is an eigenvalue of the matrix*  $A_2(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$  *with*

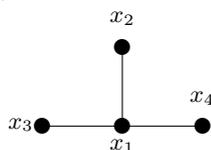
*multiplicity 2, we say that the vertex*  $x_1$  *is a weak Parter vertex. Note that the matrix*  $A_2(1)$  *is a matrix associated with the (disconnected) graph with 3 components:*



*Moreover, 1 is an eigenvalue of the principal submatrix of*  $A_2$  *associated with the graph*  $G_2 = (\{x_2\}, \emptyset)$  *and with the graph*  $G_3 = (\{x_3\}, \emptyset)$  *(two components of the above graph).*

*But 1 also is an eigenvalue of the matrix*  $A_2(5) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  *with*

*multiplicity 2. Consequently, we say that the vertex*  $x_5$  *is a weak Parter vertex. Note that the matrix*  $A_2(5)$  *is a matrix associated with the tree*



After this example, we see that different kinds of weak Parter vertices origin different graphs. The generalization of Parter-Wiener Theorem (generalized by C.R.Johnson, A. Leal Duarte, C.M. Saiago, [2]) answered this problem. Remark that originally this theorem was stated for Hermitian matrices, but since a real symmetric matrix is an hermitian matrix, we can write:

**Theorem 1.3** ([2], Theorem 2) *If  $G$  is a tree,  $A$  is a matrix associated with  $G$ ,  $x_l$  is a vertex of  $G$  and  $\lambda$  is an eigenvalue of  $A$  and of  $A(l)$ , then,*

- (a) *there is a vertex  $x_j$  of  $G$  such that  $m_{A(j)}(\lambda) = m_A(\lambda) + 1$ .*
- (b) *if  $m_A(\lambda) \geq 2$ , then  $x_j$  may be chosen so that there are, at least, 3 components  $T_1, T_2, T_3$  of  $G - x_j$  with  $m_{A[T_i]}(\lambda) \geq 1$ , for  $1 \leq i \leq 3$ .*
- (c) *if  $m_A(\lambda) = 1$ , then  $x_j$  may be chosen so that there are 2 components  $T_1, T_2$  of  $G - x_j$  with  $m_{A[T_i]}(\lambda) = 1$ , for  $1 \leq i \leq 2$ .*

Where  $G - x_j$  is the subgraph of  $G$  resulting from deletion of vertex  $x_j$ .

Therefore, we have the definition of Parter vertex.

**Definition 1.4** *Let  $G$  be a tree,  $A$  be a matrix associated with  $G$ ,  $x_j$  be a vertex of  $G$  and  $\lambda$  be an eigenvalue of  $A$ . We say that  $x_j$  is a Parter vertex if  $x_j$  satisfies (a), (b) and (c) of Theorem 1.3*

Consequently, in Example 1.2,  $x_1$  is a Parter vertex of  $G$  but  $x_5$  is not a Parter vertex of  $G$ .

**Definition 1.5** *Let  $G$  be a tree,  $A$  be a matrix associated with  $G$ ,  $\lambda$  be an eigenvalue of  $A$  and  $y_1, y_2, \dots, y_k$  be Parter vertices. We say that  $\{y_1, y_2, \dots, y_k\}$  is a Parter set, for  $\lambda$  relative to  $A$ , if  $m_{A[G - \{y_1, y_2, \dots, y_k\}]}(\lambda) = m_A(\lambda) + k$ , where  $G - \{y_1, y_2, \dots, y_k\}$  is the subgraph of  $G$  resulting from deleting the vertices  $y_1, y_2, \dots, y_k$ .*

Several authors observed that there are sets of Parter vertices which are not Parter sets. Indeed, in [1], Example 2.4, the authors constructed a tree  $G$ , a matrix  $A$  associated with  $G$  having an eigenvalue  $\lambda$  with multiplicity 4, and such that  $G$  has two Parter vertices which did not form a Parter set.

So, we can ask: Are there a tree and a matrix associated with it having an eigenvalue with multiplicity less than 4, such that there is a set of Parter vertices which is not a Parter set? The answer is “no” as we will see in the next section.

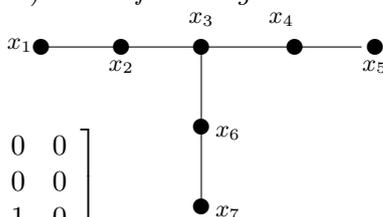
## 2 Results

**Theorem 2.1** ([3], Theorems 3.4, 4.2 and 5.6) *If  $G$  is a tree,  $A$  is a matrix associated with  $G$ ,  $\lambda$  is an eigenvalue of  $A$  with multiplicity  $\alpha \leq 3$  and  $y_1, y_2, \dots, y_k$  are Parter vertices, for  $\lambda$  relative to  $A$ , then,  $\{y_1, y_2, \dots, y_k\}$  is a Parter set, for  $\lambda$  relative to  $A$ .*

When the multiplicity of the eigenvalue  $\lambda$  of  $A$  is 2 (only in this condition, as we will see in the next example), there is an interesting relation between the Parter vertices:

**Theorem 2.2** ([3], Theorem 4.2) *If  $G$  is a tree,  $A$  is a matrix associated with  $G$ ,  $\lambda$  is an eigenvalue of  $A$  with multiplicity  $\alpha = 2$  and  $y_1, y_2, \dots, y_k$  are Parter vertices, for  $\lambda$  relative to  $A$ , then,  $\{y_1, y_2, \dots, y_k\}$  is a Parter set, for  $\lambda$  relative to  $A$ , and there is a walk of  $G$  passing through these vertices.*

**Example 2.3** *Let  $G = (X, U)$  be the following tree*



$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

*is a matrix associated with  $G$  and 1 is*

*an eigenvalue of  $A_3$  with multiplicity 1. However,  $x_2, x_4, x_6$  are Parter vertices but there is no walk of  $G$  passing through these vertices.*

## Referências

- [1] C.R. Johnson, A.Leal Duarte, C.M. Saiago, B.D. Sutton, A.J. Witt, “On the relative position of multiple eigenvalues in the spectrum of an Hermitian matrix with a given graph”, *Linear Algebra and its Applications*, Vol.363 (2003) pp.147-159.
- [2] C.R. Johnson, A. Leal Duarte, C.M. Saiago, “The Parter-Wiener theorem: refinement and generalization”, *Siam J. Matrix Anal. Appl.*, Vol.25 (2003) pp.352-361.
- [3] R. Fernandes, H.F. da Cruz, “Sets of Parter vertices which are Parter sets”, *Linear Algebra and its Applications*, vol.363 (2014) pp.147-159.

# Análise e Equações com Derivadas Parciais

*Editor Convidado:* Luís Trabucho

*Telma Guerra & Jorge Tiago*

Aplicação de problemas de controlo a uma estenose idealizada ..... 9

*Hermenegildo Borges de Oliveira*

Escoamentos de mantos de gelo em climas polares ..... 13



# APLICAÇÃO DE PROBLEMAS DE CONTROLO A UMA ESTENOSE IDEALIZADA

*Telma Guerra*

Escola Superior de Tecnologia do Barreiro (IPS)  
e-mail: [telma.guerra@estbarreiro.ips.pt](mailto:telma.guerra@estbarreiro.ips.pt)

*Jorge Tiago*

Instituto Superior Técnico, Universidade de Lisboa  
e-mail: [jftiago@math.ist.utl.pt](mailto:jftiago@math.ist.utl.pt)

**Resumo:** Neste trabalho apresentamos, de forma sucinta, simulações numéricas de fluidos, de problemas do tipo Assimilação de Dados numa abordagem variacional. Apresentamos resultados aplicados à Hemodinâmica considerando uma geometria tridimensional na forma de uma estenose idealizada e recuperamos o perfil da velocidade do sangue nesta geometria.

**Abstract:** In this work, numerical simulations of fluids of Data Assimilation problems in a variational approach are briefly presented. We obtain some results applied to Hemodynamics in a 3D idealized stenosis and we recover the blood velocity profile in this geometry.

**palavras-chave:** Controlo óptimo; Hemodinâmica; Equações de Navier-Stokes generalizadas.

**keywords:** Optimal control; Hemodynamics; Generalized Navier-Stokes equations.

## 1 Introdução

As simulações numéricas de fluidos, e em particular aplicadas à circulação do sangue, aliadas ao avanço nas técnicas de imagiologia, constituem uma poderosa ferramenta na prevenção de doenças e eventualmente no seu tratamento. A introdução de dados médicos reais nas simulações vem torná-las mais realistas e mais precisas do ponto de vista das aplicações. Este procedimento em que se inclui dados conhecidos nas simulações tem o nome de Assimilação de Dados (DA) e, ainda que recentes, existem agora alguns trabalhos que aplicam estas técnicas à modelação de fluidos [1, 2, 3]. Neste trabalho consideramos dados gerados artificialmente através da resolução das equações que modelam o fluido, as equações de Navier-Stokes, que são equações diferenciais às derivadas parciais.

Apresentamos um funcional de custo diferente do habitual que contém um termo relacionado com a componente tangencial da tensão na parede do vaso (WSS) com a forma de uma estenose idealizada tridimensional.

## 2 Descrição do Problema

O objectivo é obter soluções numéricas que nalgumas partes do domínio ( $\Omega_{part}$ ) são iguais, a menos de um determinado erro pré-definido, aos dados observados. Para isso definimos um critério a otimizar, o que corresponde a resolver um problema de controlo. Neste trabalho consideramos como critério a velocidade do sangue. Definimos o seguinte funcional de custo que inclui um termo para a velocidade, representada por  $\mathbf{y}$ , outro para o WSS, representado por  $\mathbf{w}$  e um termo regularizador para o controlo:

$$\min \mathbf{J}(\mathbf{y}, \mathbf{u}) = w_1 \int_{\Omega_{part}} |\mathbf{y} - \mathbf{y}_d|^2 dx + w_2 \int_{\Gamma_{\Omega_{part}}} |\mathbf{w} - \mathbf{w}_d|^2 ds + w_3 \int_{\Gamma_{in}} |\nabla \mathbf{u}|^2 ds, \quad (1)$$

sujeito às restrições

$$\begin{cases} -div \tau + \rho(\mathbf{y} \cdot \nabla) \mathbf{y} + \nabla p = 0 & \text{em } \Omega \\ div \mathbf{y} = 0 & \text{em } \Omega \\ \mathbf{y} = 0 & \text{em } \Gamma_{wall} \\ \mathbf{y} = \mathbf{u} & \text{em } \Gamma_{in} \\ (-p\mathbf{I} + \tau) \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{em } \Gamma_{out} \end{cases} \quad (2)$$

A variável  $p$  representa a pressão, e os parâmetros  $w_1$ ,  $w_2$  e  $w_3$  dos termos do funcional de custo, são escolhidos de acordo com critérios empíricos. As variáveis  $\mathbf{y}_d$  e  $\mathbf{w}_d$  representam os dados para a velocidade e para o WSS, respectivamente. O conjunto  $\Gamma_{\Omega_{part}}$  é a fronteira de  $\Omega_{part}$ . O tensor das tensões viscosas  $\tau$  é dado por  $\tau = 2\mu(D\mathbf{y})D\mathbf{y}$  onde  $\mu$  representa a viscosidade que é aqui definida usando o modelo generalizado de Cross  $\mu(\eta) = \mu_\infty + \frac{\mu_0 - \mu_\infty}{(1 + (\lambda\eta)^b)^a}$ . Neste modelo  $\mu_0$ ,  $\mu_\infty$ ,  $\lambda$ ,  $a$  e  $b$  são constantes e  $D\mathbf{y} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{y} + (\nabla\mathbf{y})^T)$ . A variável  $\mathbf{u}$  representa o controlo como função definida na fronteira de entrada.

Para resolver o problema de controlo numericamente, primeiro discretizamos e depois optimizamos. Começamos assim por usar o Método dos elementos finitos com elementos do tipo  $P1 - P1$  estabilizados, com os espaços funcionais adequados para as funções teste e de forma, obtendo o problema discreto

$$\min J(Y, U) = w_1 \|Y - Y_d\|_{N_y}^2 + w_2 \mathbf{W}(Y) + w_3 \|U\|_{N_u}^2 \quad (3)$$

sujeito a

$$\begin{cases} \mathbf{Q}(Y) + \mathbf{G}(Y)Y + B^T P = F \\ BY = 0 \end{cases} \quad (4)$$

onde  $\|\cdot\|_{N_y}$  e  $\|\cdot\|_{N_u}$  são normas especiais que resultam da discretização. Para este efeito utilizámos o programa COMSOL Multiphysics.

De seguida é utilizado o método SQP (sequencial quadratic programming) implementado na biblioteca SNOPT para resolver o problema (3)-(4). Este é um problema de optimização não linear, em dimensão finita, cuja solução é obtida através da resolução de sub-problemas de programação quadrática e cujas restrições são linearizações das restrições originais.

### 3 Resultados Numéricos para a Estenose

Consideramos uma estenose idealizada de comprimento  $L = 10R$  com  $R = 3.162 \text{ mm}$ , como podemos observar na Figura 1 à esquerda.



Figura 1: Esquerda: representação do domínio computacional da estenose. Direita: representação das secções,  $\Omega_{part}$ .

As simulações numéricas foram efectuadas em 1/4 da geometria, por se tornarem menos exigentes do ponto de vista computacional, e os resultados foram estendidos ao restante domínio por simetria. Os dados conhecidos considerados correspondem à região representada pelas secções que se observam na Figura 1 à direita. Para gerar a solução da qual se extraem os dados, resolvemos as equações que modelam o movimento do fluido com condição de fronteira na entrada, no sentido longitudinal da geometria (correspondente ao eixo dos  $z$ ) dada por  $\mathbf{y} = U_m \left( 1 - \left( \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{R} \right)^2 \right)$  (condição parabólica de Poiseuille). Aqui  $U_m = 0.0993 \text{ (m/s)}$  corresponde à velocidade máxima na entrada. A malha foi construída com 336500 graus de liberdade

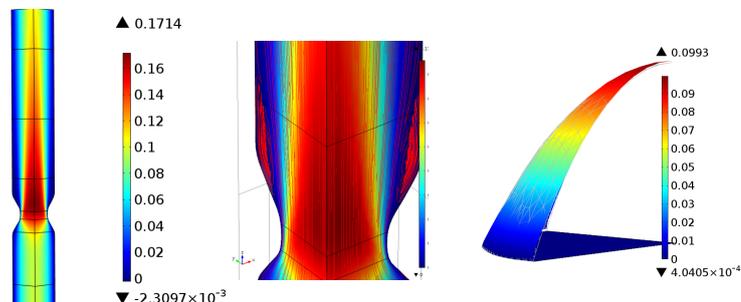


Figura 2: Esquerda e centro: componente longitudinal da velocidade pretendida. Direita: comparação do controlo obtido com o perfil original.

para a velocidade, sendo esta também utilizada para o problema de controlo. Na Figura 2, à direita, podemos ver como o controlo obtido aproximou bem o perfil utilizado para gerar os dados (à esquerda). Na Tabela 1 podemos ver a precisão da solução obtida.

Norma da solução desejada $y_d$	Erro Absoluto $E_a$	Erro Relativo $E_r$	Custo Final $J$
$3.2 \times 10^{-5}$	$9.73 \times 10^{-8}$	0.003	$1.61 \times 10^{-5}$

Tabela 1: Precisão da solução obtida relativamente à solução desejada, para o problema da Estenose. Parâmetros  $(w_1, w_2, w_3) = (10^4, 10^4, 10^{-3})$ .  $E_a = \|\mathbf{y} - \mathbf{y}_d\|_2$  e  $E_r = E_a / \|\mathbf{y}_d\|$ .

## Referências

- [1] M. D'Élia, M. Perego, A. Veneziani, “A Variational Data Assimilation Procedure for the Incompressible Navier-Stokes Equations in Hemodynamics”, *J. of Sci. Comp.*, Vol. 52(2), (2012), pp. 340-359.
- [2] T. Guerra, J. Tiago, A. Sequeira, “Optimal Control in Blood Flow Simulations”, *Int. J. Non-Linear Mechanics*, Vol. 64, (2014), pp. 57-69.
- [3] T. Guerra, “Controle Ótimo de Fluidos Não Newtonianos”, Tese de Doutoramento, Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa, Portugal, 2014.

## ESCOAMENTOS DE MANTOS DE GELO EM CLIMAS POLARES

*Hermenegildo Borges de Oliveira*

FCT – Universidade do Algarve

CMAF – Universidade de Lisboa

e-mail: holivei@ualg.pt

**Resumo:** Neste trabalho derivamos um modelo tridimensional que descreve o escoamento de mantos de gelo em climas polares. A grande novidade, reside na consideração de um expoente de Glen que varia com a temperatura. No caso do problema isotrópico, apresentamos resultados de existência e unicidade de soluções. Provamos, também, algumas propriedades qualitativas das soluções com potencial aplicação em modelos de previsão climática.

**Abstract** A three-dimensional model that describes the flow of ice sheets in polar climates is derived in this work. The major novelty lies in considering a temperature-depending Glen's exponent. In the case of the isotropic problem, we present results of existence and uniqueness of solutions. Some qualitative properties of the solutions with potential applications in climate prediction models are established as well.

**palavras-chave:** expoente de Glen variável; equação da espessura do gelo; equação da temperatura.

**keywords:** Variable Glen's exponent, ice-thickness equation, temperature equation.

## 1 Introdução

Manto de gelo é a tradução da expressão inglesa *ice sheet* para designar extensões de gelo que cobrem superfícies da litosfera com mais de 50 000 Km<sup>2</sup>. Os mantos de gelo têm extensões laterais na ordem dos 10 000 Km e, hoje em dia, concentram-se principalmente na Antártica e em menor escala na Gronelândia. O deslocamento dos mantos de gelo deve-se ao seu próprio peso e faz-se por processos de arrastamento característicos do estado sólido, tais como o deslocamento na estrutura da rede cristalina do gelo. Neste tipo de rios de gelo, a espessura máxima varia entre 1 e 3 Km e o escoamento faz-se a velocidades na ordem dos 100 m por ano. Apesar do seu movimento lento e imutabilidade aparente, os mantos de gelo exibem vários fenómenos dinâmicos interessantes. A neve acumula-se nas terras altas, é comprimida em gelo e escoar sob a ação da força de gravidade. O gelo escoar a partir das zonas centrais, onde a espessura do manto de gelo é maior, para as margens que poderão estar em terra ou dentro de água. Neste último caso, poderão formar-se enormes placas de gelo que ao quebrarem dão origem aos icebergs. A base do manto de gelo está em contacto com a crosta terrestre e, devido ao calor por esta transmitido, o gelo pode fundir. Quando isto acontece, a água resultante lubrifica a interface entre

o gelo e a crosta terrestre, o que provoca o deslize do manto de gelo. A dinâmica dos mantos de gelo é mantida através de um equilíbrio entre a acumulação no centro e a ablação nas margens. A acumulação ocorre principalmente por precipitação de neve e a ablação pode ocorrer tanto por meio de evaporação ou derretimento de gelo no clima mais quente da margem, ou por meio de quebra de icebergs. Muito importante para a manutenção dos mantos de gelo, são as temperaturas atmosféricas das regiões onde se encontram, que, no caso do interior da Antártica, é na ordem dos  $-60^{\circ}\text{C}$  de temperatura média anual, enquanto que as zonas costeiras têm uma temperatura média anual de cerca de  $-15^{\circ}\text{C}$ . No entanto, a temperatura típica de um manto de gelo, no seu interior profundo, poderá rondar os  $50^{\circ}\text{K} \simeq -223^{\circ}\text{C}$  (ver *e.g.* [5]).

## 2 As equações que governam o escoamento

Em Mecânica dos Fluidos, o gelo frio é modelado como um fluido não-newtoniano altamente viscoso, exotérmico, homogêneo e incompressível. As equações que governam o escoamento dos mantos de gelo resultam dos princípios básicos da Mecânica aplicados a um fluido geofísico (ver *e.g.* [2, 4]):

$$\text{Conservação da massa : } \operatorname{div} \mathbf{u} = 0; \quad (1)$$

$$\text{Conservação do momento linear : } \operatorname{div} \mathbf{T} = -\rho \mathbf{g}, \quad \mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \mathbf{S}(\mathbf{D}), \quad (2)$$

$$\text{Conservação da energia: } \rho c \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta \right) = \operatorname{div} (k(\theta) \nabla \theta) + \operatorname{tr}(\mathbf{SD}). \quad (3)$$

A notação usada nas equações (1)-(3) é bem conhecida: as incógnitas são o campo de velocidades  $\mathbf{u} = (u, v, w)$ , a pressão  $p$  e a temperatura absoluta  $\theta$ ; a densidade  $\rho$  e o calor específicos  $c$  são constantes; e  $k$  é a função de condutividade térmica. O campo de forças externas  $\mathbf{g}$  deve-se à aceleração gravítica,  $\mathbf{I}$  é o tensor unitário,  $\mathbf{S}$  é a parte viscosa do tensor das tensões  $\mathbf{T}$  e  $\mathbf{D}$ , a parte simétrica de  $\nabla \mathbf{u}$ , é o tensor das velocidades de deformação. Os tensores  $\mathbf{S}$  e  $\mathbf{D}$  estão relacionados através da lei de Glen

$$\mathbf{D} = A(\theta) |\tau|^{n-1} \mathbf{S}, \quad \tau = \sqrt{II_{\mathbf{S}}}, \quad II_{\mathbf{S}} = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(\mathbf{S}^2), \quad (4)$$

onde  $A(\theta)$  é dada pela lei de Arrhenius

$$A(\theta) = A_0 e^{-\frac{Q}{k\theta}}, \quad (5)$$

sendo  $Q$  a energia de activação,  $k$  a constante de Boltzman e  $A_0$  um parâmetro de normalização. A letra  $n$  designa-se por expoente de Glen e todos os trabalhos que consultamos consideram  $n$  constante, sendo  $n = 3$  o valor mais usado. No entanto, deve-se referir que resultados experimentais (ver *e.g.* [5]) têm mostrado alguma evidência de que  $n$  varia em função da temperatura. A novidade deste trabalho, consiste em considerarmos um expoente de Glen dependendo da temperatura

$$n = n(\theta). \quad (6)$$

### 3 Equações de campo

Consideremos um sistema cartesiano de coordenadas  $(x, y, z)$  habitual, onde o plano  $z = 0$  indica o nível médio do mar. Denotemos por  $z = h(x, y, t)$  a superfície livre que separa o manto de gelo da atmosfera e por  $z = b(x, y, t)$  a interface que separa a sua base da litosfera. As designadas equações de campo são derivadas fazendo uma análise comparativa das escalas das diferentes quantidades intervenientes nas equações (2)-(3). Esta análise permite-nos usar as aproximações hidrostática e do gelo raso (do inglês *shallow ice*), bem como inferir que as normais exteriores à superfície livre e à interface da base são aproximadamente verticais. Procedendo como em [1], obtemos, a partir de (2) e (4)-(6), a seguinte equação para a função  $H(x, y, t) = h(x, y, t) - b(x, y, t)$  que caracteriza a evolução da espessura do gelo

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \mathbf{u}_b \cdot \nabla H = \operatorname{div} \left( \int_b^h \mathcal{A}(\theta)(h-z)^{n(\theta)+1} dz |\nabla h|^{n(\theta)-1} \nabla h \right) + a, \quad (7)$$

onde  $\mathbf{u}_b = (u_b, v_b)$  é a velocidade de deslize da base,  $\mathcal{A}(\theta) = 2(\rho g)^{n(\theta)} A(\theta)$  e  $a = a_h - a_b$  é a taxa de acumulação/ablação. Um procedimento análogo, usando também (4)-(6), permite-nos reduzir a equação (3) a

$$\rho c \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left( k(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) + \rho g \mathcal{A}(\theta)(h-z)^{n(\theta)+1} |\nabla h|^{n(\theta)+1}. \quad (8)$$

Devido à natureza do problema, a equação (7) é somente válida em pontos  $(x, y)$  do seu domínio onde  $H > 0$ . De modo análogo, a equação (8) será somente válida em pontos  $(x, y, z)$  do seu domínio tais que  $\theta \leq \theta_m$ , onde  $\theta_m$  é a média anual da temperatura atmosférica da região, pelo que muito inferior à temperatura de fusão do gelo. Por outro lado, ao formularem-se modelos matemáticos para o estudo do escoamento de mantos de gelo, geralmente é necessário ter em conta que o domínio ocupado pelo gelo não é conhecido e é ele próprio, também, parte da solução do problema. Por isso não é possível prescrever uma condição de fronteira para a função  $H$ . No entanto para a temperatura, assumem-se habitualmente as condições de fronteira seguintes

$$\theta = \theta_m \quad \text{sobre } z = h, \quad (9)$$

$$-k(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} = q_{\text{geo}} \quad \text{sobre } z = b \quad (\mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ e } \theta < \theta_m), \quad (10)$$

onde  $q_{\text{geo}}$  denota o fluxo de calor geotérmico devido ao atrito provocado pelo deslize da base. Relativamente às condições iniciais  $H_0$  e  $\theta_0$  que complementam as equações (7) e (8), deverão ser consistentes com o problema real e têm de satisfazer às mesmas restrições de  $H_0 > 0$  e  $\theta < \theta_m$ .

### 4 Problema isotérmico

O problema posto pelas equações (7)-(9) é muito complicado de analisar, do ponto de vista da Análise Matemática. Isto deve-se à presença de uma equação integro-diferencial, mas principalmente por causa da lei de Arrhenius que caracteriza a

viscosidade e, também, devido ao expoente de Glen variável. Mesmo modelos exotérmicos que considerem expoentes de Glen constantes, são, ainda, difíceis de analisar. Os modelos mais simples consideram o caso isotérmico que faz com que a viscosidade não dependa mais da temperatura, levando ao desacoplamento das equações (7) e (8). Alguns autores justificam esta substancial simplificação do problema, argumentando que o modelo isotérmico pode resultar de taxas de variação da temperatura aproximadamente nulas (ver *e.g.* [4, 5]). Outra simplificação do modelo, decorre de assumir que o domínio do escoamento é conhecido, digamos

$$Q_T := (0, T) \times \Omega \subset \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2,$$

sendo  $\Omega$  um domínio (conexo) limitado, e que a base do manto de gelo é plana, *i.e.*

$$b = \text{constante}.$$

Usando estas simplificações, o problema (7)-(9) reduz-se a uma única equação

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \mathbf{u}_b \cdot \nabla H = \operatorname{div} \left( \frac{H^{n+2}}{n+2} |\nabla H|^{n-1} \nabla H \right) + a \quad \text{em } Q_T. \quad (11)$$

O problema formulado pela equação (11) complementada por condições iniciais e de fronteira apropriadas, *e.g.*  $H = 0$  sobre  $\Gamma_T := (0, T) \times \partial\Omega$  e  $H = H_0$  em  $\Omega$ , quando  $t = 0$ , foi analisado em [3]. Aí foi demonstrada, sob determinadas condições sobre  $a$  e  $H_0$ , a existência e unicidade de soluções fracas para este problema. Demonstramos, também, que espessuras iniciais, nulas em qualquer parte, propagam-se com velocidade finita. Provamos, ainda, que, se a espessura do manto de gelo se anular localmente, existe um tempo de espera até ao qual a espessura irá permanecer nula. Isto significa que, após uma retracção local, o declive da superfície livre deve reconstruir-se antes de um novo avanço ser possível.

## Referências

- [1] S.N. Antontsev, H.B. de Oliveira. On a mathematical model in ice sheet dynamics. Actas da conferência *Fluid Mechanics and Aerodynamics, Athens (2007)*, pp. 1–8.
- [2] S.N. Antontsev, J.I. Díaz, H.B. de Oliveira. Mathematical models in dynamics of non-Newtonian fluids and in glaciology. Actas do *Congresso de Métodos Numéricos e Computacionais em Engenharia, Porto (2007)*, pp. 1–20.
- [3] S.N. Antontsev, H.B. de Oliveira. Qualitative properties of the ice-thickness in a 3D model. *WSEAS Trans. Math.*, **7** (2008) no. 3, pp. 78–86.
- [4] R. Greve, H. Blatter. *Dynamics of Ice Sheets and Glaciers*. Springer-Verlag, Heidelberg-Berlin, 2009.
- [5] H. Paterson. *The Physics of Glaciers*. Third Edition. Pergamon, Oxford, 1994.

# Ensino da Matemática

*Editor Convidado:* Paula Reis

*Margarida Matias Pinto*

Sangaku, a geometria nos santuários do Japão ..... 17

*Pedro J. Freitas & Simão Palmeirim Costa*

Os Problemas de Matemática de Almada Negreiros ..... 21

*Luís Bernardino*

Teoremas elementares clássicos na sala de aula ..... 25

*Ana Rute Domingos*

Resolver problemas – uma atividade mágica! ..... 29

*Ana Cristina Oliveira*

Módulo interactivo sobre mecanismos ..... 33

*Helena Monteiro, Maria João Afonso & Marília Pires*

Transição da Matemática do Secundário para a do Superior: o ponto de vista dos estudantes ..... 37

*Jaime Gaspar*

Mathematical candies ..... 41



# SANGAKU, A GEOMETRIA NOS SANTUÁRIOS DO JAPÃO

*Margarida Matias Pinto*

e-mail: [mmatiaspinto@gmail.com](mailto:mmatiaspinto@gmail.com)

**Resumo:** Sob os telhados de alguns templos xintoístas do Japão podem ver-se velhas tábuas de madeira decoradas com problemas de geometria euclidiana, repletas de desenhos onde circunferências, elipses e quadrados se intersectam. Quem as colocou lá? Com que propósito?

**Abstract** Under the roofs of some Shinto shrines in Japan we can find old wooden boards decorated with problems of Euclidean geometry, full of drawings where circles, ellipses and squares intersect. Who put them there? Why ?

**palavras-chave:** Sangaku; geometria; Japão; xintoísmo.

**keywords:** Sangaku; geometry; Japan; Shinto.

## 1 Introdução

Quem visita pela primeira vez o Japão surpreende-se ao encontrar tábuas de madeira decoradas com coloridas figuras geométricas. Chamam-se *sangaku* e foram comuns na época Edo, nos séculos XVII a XIX. O Japão atravessava um longo período de isolamento em relação ao ocidente e a própria comunicação interna era difícil. Os templos e santuários, locais de reunião por excelência, foram utilizados para a divulgação de ideias e os *sangaku* eram aí colocados tanto por cidadãos comuns que manifestavam aos deuses a sua gratidão pela ajuda concedida na resolução de um problema particularmente difícil da vida real, como por matemáticos consagrados que pretendiam lançar um desafio aos seus pares. Também os jovens aspirantes a matemáticos os afixavam, exprimindo o seu talento, desejosos de chamar a atenção dos mestres e de, assim, conseguirem ser convidados a ingressar numa escola para prosseguirem os seus estudos. Serviam ainda como difusor de conhecimentos e veículo de publicidade das escolas que enviavam representantes às zonas remotas do país e que assim anunciavam aos habitantes a chegada de um mestre.

Alguns *sangaku* são extremamente simples e resolvem-se por aplicação do teorema de Pitágoras ou semelhanças de triângulos, outros exigem conhecimentos de séries ou integrais e muitos envolvem cálculos que, não

sendo difíceis, são trabalhosos.

Comum a todos eles é a escassez de informação, a falta de rigor nos enunciados. Em geral apenas têm o desenho, o desafio e o nome do autor; raramente é acrescentado um esboço da resolução. Assume-se que as figuras obedecem ao que os olhos vêem: os círculos que se tocam são tangentes, o que aparenta ser um quadrado ou um triângulo isósceles é-o realmente.

## 2 Alguns *sangaku*

Vejamos quatro exemplos simples em que tomamos como certas as relações que as figuras nos mostram. São atividades que podem ser desenvolvidas com alunos dos ensinos básico e secundário desde que, neste caso, lhe sejam fornecidos os dados aqui omissos. Em todos eles temos à esquerda a figura original e à direita uma construção auxiliar.

### 2.1 Dois círculos

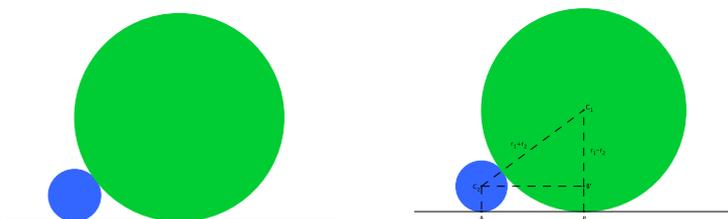


Figura 1: Dois círculos.

*Relacionar a distância dos pontos de tangência da recta com os círculos e os seus raios.*

A construção auxiliar sugerida pela figura da direita e a aplicação do teorema de Pitágoras levam-nos à conclusão:

$$\overline{AB}^2 = 4r_1r_2$$

### 2.2 Triângulo inscrito

*Calcular o raio do círculo a partir de  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$  e  $\overline{CM}$ .*

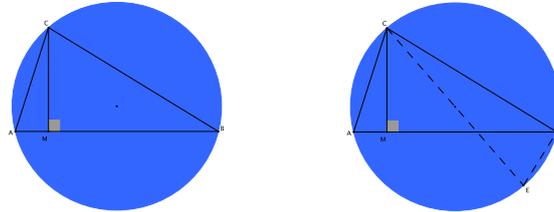


Figura 2: Triângulo inscrito.

Da semelhança dos triângulos  $[ACM]$  e  $[BCE]$  podemos concluir que

$$r = \frac{\overline{BC} \times \overline{AC}}{\overline{CM}}$$

### 2.3 Anjo com hóstia

*Escrever os raios dos círculos como função do lado do quadrado.*

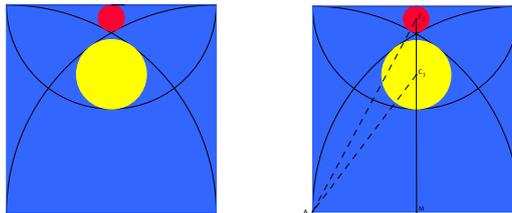


Figura 3: Anjo com hóstia.

A resolução deste problema passa pela aplicação do teorema de Pitágoras a cada um dos dois triângulos retângulos da figura auxiliar.

### 2.4 Círculos e semicírculo

*Relacionar os raios dos dois círculos com o do semicírculo.*

Começamos por escrever os lados dos triângulos  $[ACM]$  e  $[CDG]$  em função do raio do semicírculo e de  $\overline{CM}$  e os lados dos triângulos  $[ACM]$  e  $[ACF]$  em função do raio do semicírculo e de  $\overline{EF}$ . A semelhança dos três triângulos e alguns cálculos levam-nos a concluir que os raios dos círculos de centros  $D$  e  $E$  expressos em função do raio do semicírculo são, respectivamente  $\frac{r}{2}$  e  $\frac{1}{8}r$ .

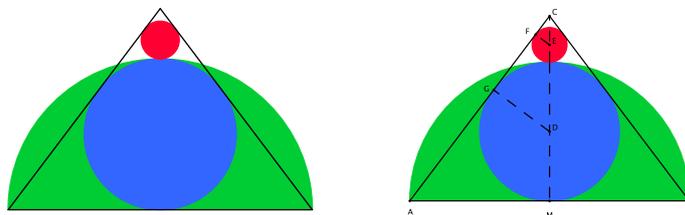


Figura 4: Círculos e semicírculo.

### 3 Considerações finais

Os exemplos aqui apresentados podem, como foi dito inicialmente, ser trabalhados por alunos dos ensinos básico e secundário com a inclusão no enunciado dos dados que as figuras deixam adivinhar. Os exemplos permitem mesmo diferentes graus de dificuldade bastando, para tal, concretizar alguns dos valores de raios ou lados.

Para mais exemplos de *sangaku* e respectivas demonstrações sugere-se a leitura do número 165 da *Gazeta de Matemática*.

### Referências

- [1] H. Fukagawa e T. Rothman *Sacred Mathematics: Japanese Temple Geometry*, Princeton, New Jersey, 2008..
- [2] G. Huvent, *Sangaku, Le mystère des énigmes géométriques japonaises*, Dunod, New York, 2008.
- [3] F. J. Capitán, *Problemas San Gaku*, Córdoba, 2003.
- [4] M.M. Pinto *Gazeta de Matemática 165*, Lisboa 2011.

# OS PROBLEMAS DE MATEMÁTICA DE ALMADA NEGREIROS

*Pedro J. Freitas*

CELC e Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa  
Av Prof Gama Pinto 2  
1649-003 Lisboa Portugal  
e-mail: [pjfreitas@fc.ul.pt](mailto:pjfreitas@fc.ul.pt)

*Simão Palmeirim Costa*

CIEBA, Centro de Investigação e de Estudos em Belas-Artes e FBAUL  
Largo da Academia Nacional de Belas-Artes  
1249-058 Lisboa, Portugal  
e-mail: [simaopalmeirim@gmail.com](mailto:simaopalmeirim@gmail.com)

**Resumo:** Está em curso uma análise do espólio de Almada Negreiros, que inclui várias obras com uma forte componente geométrica. Apesar de o autor ter como intenção primeira produzir obras de arte, muito do seu trabalho pode ser apreciado matematicamente. Neste artigo apresentaremos alguns desenhos que podem ser lidos como problemas de geometria e apresentamos, como exemplo, a solução de um deles.

**Abstract** The estate of Almada Negreiros is currently undergoing inventory, and it includes many works with a strong geometrical flavour. Even though the author's first intention was to produce artworks, a lot of his production can be appreciated from a mathematical viewpoint. In this paper we present some drawings that can be interpreted as problems in geometry and we present the solution to one of them.

**palavras-chave:** resolução de problemas, geometria, arte, Almada Negreiros

**keywords:** problem-solving, geometry, art, Almada Negreiros

## 1 Motivação

Almada Negreiros (1893-1970) foi um dos artistas mais marcantes do século vinte em Portugal. Debruçou-se sobre áreas tão diversas como a literatura, o teatro, a poesia ou as artes plásticas, e foi nestas últimas que, partir de certa altura, vem a dedicar-se à produção de desenhos e pinturas com teor fortemente geométrico. Este interesse pela geometria surge do fascínio pela

pintura portuguesa antiga, nomeadamente pelos Painéis de São Vicente, que Almada analisou ao longo de cerca de cinquenta anos. Inicialmente o seu estudo é apenas sobre a composição dos próprios painéis, mas rapidamente vem a incluir também estudos sobre a sua posição numa parede da Capela do Fundador no Mosteiro da Batalha, estudo esse que veio também a incluir o *Ecce Homo* e mais algumas tábuas pintadas que, segundo os estudos geométricos de Almada, seriam um conjunto feito explicitamente para esta parede.

A visão da geometria enquanto chave para descrever a composição de uma pintura veio a despertar um fascínio mais profundo: a partir de certa altura, Almada postula a existência de um Cânone geométrico subjacente a toda a arte, que ilustra com a análise de objetos e estudos vindos de várias proveniências: um vaso da Babilónia, um friso do palácio de Cnossos, ou um desenho de Leonardo da Vinci chamado *Figura Supérflua Ex Errore* (que vem a incluir no painel *Começar*). Segundo o próprio Almada, os elementos deste Cânone seriam os seguintes.

A divisão simultânea do quadrado e do círculo em partes iguais e partes proporcionais é a origem simultânea das constantes da relação nove/dez, grau, medida e extrema razão e prova dos nove.<sup>1</sup>

Assim, as obras geométricas que Almada produz (especialmente a partir dos anos 50) são exercícios de explicitação das relações entre os elementos deste Cânone, que deveria ser imediatamente captável, segundo o autor. Ora, sendo estas primeiramente obras de arte, elas podem ser interpretadas matematicamente. Perante as construções geométricas almadianas, podemos perguntar-nos por exemplo se são ou não exatas, e se forem, podemos tentar encontrar uma demonstração para essa exatidão, tornando assim estas figuras em problemas de matemática (subvertendo, é certo, a sua intenção inicial). É isso que faremos na próxima secção, analisando uma construção geométrica de Almada Negreiros.

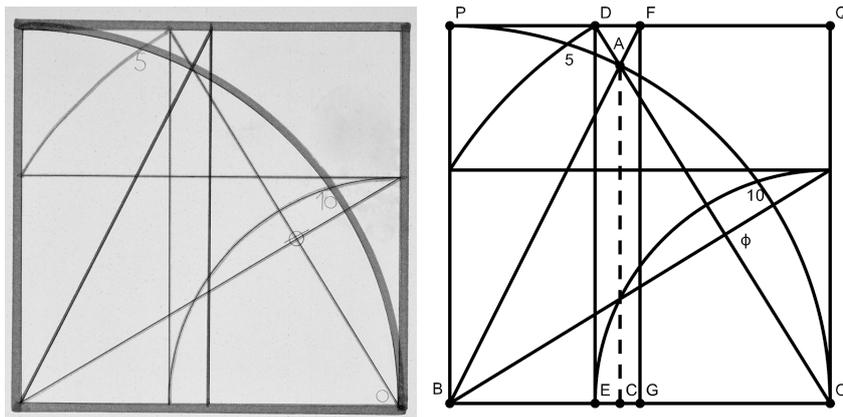
## 2 Linguagem do Quadrado

Encontra-se no espólio de Almada uma coleção interessantíssima de desenhos com conteúdo exclusivamente geométrico, apresentando construções baseadas num quadrado com um quarto de circunferência inscrito, ou um retângulo formado por dois quadrados com meia circunferência. Esta co-

---

<sup>1</sup> *Assim Fala Geometria*, 1960 (Diário de Notícias, 16 de junho).

leção tem o nome genérico *Linguagem do Quadrado*. Analisamos aqui um desses desenhos.



Os números 5 e 10 referem-se à quinta e décima partes do círculo, respectivamente, medidas a partir de  $O$ , e a letra  $\phi$  afirma que o retângulo  $[DEOQ]$  é um retângulo de ouro. Neste caso, todas as afirmações são exatas, e passamos a fazer as verificações. Para ver que o retângulo é de ouro, basta verificar que  $DE/EO = \phi$ . É mais simples neste caso verificar que

$$\frac{EO}{DE} = \frac{1}{\phi} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Uma vez que os triângulos  $[DEO]$  e  $[ACO]$  são semelhantes, temos

$$\frac{EO}{DE} = \frac{OC}{AC} = \frac{OB - BC}{AC} = \frac{OB}{AC} - \frac{BC}{AC} = \frac{AB}{AC} - \frac{BC}{AC}.$$

Usamos agora a semelhança dos triângulos  $[ACB]$  e  $[FGB]$ , notando que em ambos os casos o cateto maior mede o dobro do menor, uma vez que o retângulo  $[BPFQ]$  é meio quadrado. Portanto  $BC = (1/2)AC$  e

$$AC^2 + \left(\frac{1}{2}AC\right)^2 = AB^2 \Leftrightarrow \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{5}{4}.$$

Assim

$$\frac{EO}{DE} = \frac{AB}{AC} - \frac{BC}{AC} = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{\phi}$$

como desejávamos.

Quanto à quinta e décima partes da circunferência, Almada afirma que as cordas determinadas por estes arcos são respetivamente  $[EO]$  e  $[DO]$ . Se  $r$  for o raio da circunferência (e o lado do quadrado), estes segmentos têm as seguintes medidas, de acordo com os cálculos já feitos:

$$\overline{EO} = \frac{r}{\phi} \quad \text{e} \quad \overline{DO} = \frac{\sqrt{2(5 - \sqrt{5})}}{2}r.$$

Ora, sabendo que a corda de um arco de medida  $\alpha$  é dada por  $2r \sin(\alpha/2)$ , fazendo as contas para os arcos de  $36^\circ$  e  $72^\circ$  e consultando uma tabela de senos, verificamos que estes valores são exatos.

### 3 Conclusão

No exemplo estudado, as medidas apresentadas eram exatas, mas isto nem sempre acontece. Almada muitas vezes apresenta construções para a sétima e a nona partes do círculo (até mesmo no monumental mural *Começar*), quando se sabe que estas partes não se conseguem determinar exatamente com régua não graduada e compasso, pelo Teorema de Gauss-Wantzel.

**Teorema de Gauss-Wantzel.** *É possível dividir a circunferência em  $n$  partes iguais com régua não graduada e compasso se e só se*

$$n = 2^k p_1 \dots p_t$$

*em que  $p_1, \dots, p_t$  são primos de Fermat distintos.*

No entanto, e em geral, as aproximações são bastante boas, sendo algumas mesmo indetetáveis no contexto da observação simples de uma obra de arte.

Estes desenhos, e outros constantes de vários cadernos da autoria de Almada Negreiros, serão em breve compilados num livro de problemas em que o leitor é convidado a fazer a análise matemática das figuras. Esperamos que a análise simples aqui feita possa abrir o apetite.

Este trabalho foi realizado no âmbito do projeto Modernismo Online ([www.modernismo.pt](http://www.modernismo.pt)), da Faculdade de Ciências Sociais e Humanas da Universidade Nova de Lisboa, financiado pela Fundação para a Ciência e Tecnologia, que procura reunir e arquivar, em formato digital, a herança material do modernismo português.

Agradecemos à família de Almada Negreiros a possibilidade de reproduzir aqui estas obras e o respetivo estudo.

## TEOREMAS ELEMENTARES CLÁSSICOS NA SALA DE AULA

*Luís Miguel de Freitas Bernardino*

Agrupamento de Escolas de Nun' Álvares

Arrentela, Seixal

e-mail: bernluis@gmail.com

**Resumo:** Nesta apresentação procuramos mostrar o interesse do estudo de alguns teoremas elementares clássicos, tanto para a criação de propostas de trabalho como para a satisfação pessoal de cada docente e também para a revisão de alguns teoremas que voltaram a fazer parte do currículo da disciplina de matemática.

**palavras-chave:** Teoremas; problemas; ensino.

Francisco Gomes Teixeira afirmou, numa conferência que proferiu em 1923 em Salamanca e em 1925 no Porto, que *“os que se ocupam da matemática começam a estudá-la pelo que tem de útil, principiam a amá-la quando compreendem o que tem de belo e apaixonam-se por ela quando subiram assaz alto para abranger o que tem de sublime.”*

Nesta linha, cremos que a resolução de problemas é o que a matemática tem de mais belo. Mas como aumentar as competências dos nossos alunos para este tema?

Pensamos que tal se consegue com a proposta de resolução de problemas, escolhidos com algum cuidado, procurando que sejam diversificados, interessantes e não em número excessivamente elevado.

O estudo de teoremas elementares clássicos poderá ser um meio privilegiado para atingir tais objetivos uma vez que, aos estudarmos as demonstrações destes, deparamo-nos com as ideias essenciais para a resolução da maioria dos problemas que possam ser propostos o que nos leva a compreender René Descartes (1596-1650) quando afirma: *“Cada problema que eu resolvi transformou-se numa regra, que servisse mais tarde para resolver outros problemas.”*

Deste modo, abordaremos alguns resultados clássicos associados a triângulos, a circunferências e a ternos pitagóricos (TP).

Os problemas geométricos apresentados tiveram por base o trabalho desenvolvido para a obtenção do grau de mestre, o qual teve um tema central

relacionado com coordenadas baricêntricas, para o que foi necessário o estudo de alguns resultados que chamamos teoremas fundamentais: Teorema de Steiner; Fórmula de Herão; Teorema de Menelau e Teorema de Ceva. Para a demonstração destes teoremas fundamentais precisamos de resultados preliminares, aos quais, nesta apresentação, chamamos de resultados clássicos: Teorema do cateto; Teorema dos cossenos; Teorema das áreas; Teorema dos senos; Teorema da corda; Teorema da bissetriz e relação entre ângulo ao centro e ângulo inscrito.

Realce-se que há uma grande semelhança entre esta lista de resultados e a que é indicada como Teoremas fundamentais sobre Circunferências e Triângulos, pelo projeto Delfos, responsável pela preparação e seleção das equipas que representam Portugal em Olimpíadas de Matemática a nível internacional, na sua brochura *Experiencia IV: Geometria*.

Estes teoremas são importantes, o que se pode inferir do facto de não só alguns já terem feito parte do currículo da disciplina de matemática, bem como, para o caso específico do Teorema dos senos e do Teorema dos cossenos, passarem a integrar o Programa e Metas de Secundário, aquando da lecionação do domínio *Trigonometria e Funções Trigonómicas*, ao nível do 11º ano.

Já as atividades com os ternos pitagóricos assentaram num trabalho de pesquisa que foi feito no âmbito do RMM11 (Este trabalho tem por base a palestra *A Very Useful Pythagorean Tree*, da autoria de Alda Carvalho e Carlos Santos), que possibilitou o conhecimento de diversas formas de gerar TP e Ternos Pitagóricos Primitivos (TPP). Assim, são apresentados alguns exemplos de resoluções feitas por alunos, salientando-se as dificuldades, por eles manifestadas.

O estudo dos TP permitiu preparar atividades que foram apresentadas a alunos de 8º ano e a alunos de cursos de educação e formação. Nestas atividades trabalhou-se a soma de racionais, a determinação de termos de sucessões não elementares bem como a determinação do quadrado de binómios não elementares ou pouco usuais no trabalho em sala de aula, conforme exemplos apresentados nas figuras 1 a 3.

Foi possível propor atividades com graus de dificuldade diversos, permitindo adequá-las ao distinto perfil dos alunos. Verificou-se que estes se revelaram mais persistentes na realização das tarefas, ultrapassando algumas com grau de dificuldade superior ao que habitualmente fazem. Pareceu-nos que tal se deveu ao facto de eles obterem prazer na verificação de que os termos das sucessões que iam obtendo constavam da tabela de TPP abaixo apresentada e que esteve projetada durante a realização da tarefa.

$(2n+1, 2n(n+1), 2n(n+1)+1)$

$n$	$2n+1$	$2n(n+1)$	$2n(n+1)+1$	$T_{pp}$
6	$2 \times 6 + 1 = 13$	$2 \times 6(6+1) = 12 \times 7 = 84$	85	13, 84, 85
7	$2 \times 7 + 1 = 15$	$2 \times 7(7+1) = 14 \times 8 = 112$	113	15, 112, 113
2	$2 \times 2 + 1 = 5$	$2 \times 2(2+1) = 4 \times 3 = 12$	13	5, 12, 13
5	$2 \times 5 + 1 = 11$	$2 \times 5(5+1) = 10 \times 6 = 60$	61	11, 60, 61

Figura 1

$$\begin{aligned} \hookrightarrow (2n+1)^2 &= 4n^2 + 4n + 1 \\ \hookrightarrow [2n(n+1)]^2 &= (2n)^2 (n+1)^2 = 4n^2 (n^2 + 2n + 1) \\ &= 4n^4 + 8n^3 + 4n^2 \\ \hookrightarrow [2n(n+1)+1]^2 &= [2n(n+1)]^2 + 2 \times 2n(n+1) \times 1 + 1^2 = \\ &= (A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \\ &= 4n^4 + 8n^3 + 4n^2 + 4n(n+1) + 1 = 4n^4 + 8n^3 + 4n^2 + 4n^2 + 4n + 1 = \\ &= 4n^4 + 8n^3 + 8n^2 + 4n + 1 \end{aligned}$$

Figura 2

$$\begin{aligned} &\cancel{4n^2} + 4n + 1 + 4n^4 + 8n^3 + 4n^2 = \\ &= 8n^2 + 4n + 1 + 4n^4 + 8n^3 = \\ &(2n+1)^2 + [2n(n+1)]^2 = [2n(n+1)+1]^2 \\ &\text{Teorema de Pitágoras} \end{aligned}$$

Figura 3

As propostas apresentadas, a serem trabalhadas sobretudo ao longo de

3, 4, 5	12, 35, 37	33, 56, 65
5, 12, 13	13, 84, 85	36, 77, 85
7, 24, 25	16, 63, 65	39, 80, 89
8, 15, 17	20, 21, 29	48, 55, 73
9, 40, 41	20, 99, 101	60, 91, 109
11, 60, 61	28, 45, 53	65, 72, 97

todo o 3º ciclo aquando da lecionação do domínio *Geometria e Medida*, basearam-se não só em passagens da demonstração dos resultados enunciados, acompanhados dos temas que se pretendem trabalhar, bem como do nível de ensino, a que eles serão adequados, e da tipologia de alunos a que se deverão apresentar – grupos de alunos com diferentes níveis de desempenho, clube de matemática e problemas para competições do tipo olimpíadas de matemática.

Em conclusão, refira-se que uma sequência de problemas adequada pode contribuir para que o aluno obtenha satisfação pelo alcance de resultados mais abrangentes (teoremas) do que aqueles que se alcançam nas propostas que habitualmente se trabalham na sala de aula. Por outro lado, a imensidão de resultados ditos clássicos é tão grande que, por muito que se estudem, há sempre uma grande quantidade que é do desconhecimento de qualquer matemático, pelo que sempre que os estudamos obtemos satisfação pela beleza das suas propriedades. Deste modo, torna-se mais agradável a elaboração de materiais necessários à prática docente.

## Referências

- [1] Bernardino, Luís, “Temas Escolhidos de Geometria do Triângulo”, dissertação para a obtenção do grau de mestre em Matemática – Especialização em Matemática para o Ensino, Universidade do Algarve, Faro, 2008.
- [2] Silva, Jaime C., *et alli*, *Aleph 10*, ASA, 2010.
- [3] “Programa e Metas Curriculares Matemática – Ensino Básico”, 2013.
- [4] “Programa e Metas Curriculares Matemática A – Ensino Secundário” Cursos Científico-Humanísticos de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socioeconómicas 2014.

# RESOLVER PROBLEMAS – UMA ATIVIDADE MÁGICA!

*Ana Rute Domingos*

CMAF e Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa  
Campo Grande, Edifício C6, piso 2  
P-1749-016 Lisboa  
e-mail: ardomingos@fc.ul.pt

**Resumo:** Neste artigo apresentamos formas de explorar a matemática através da resolução de problemas, trabalhando conteúdos e ferramentas.

**Abstract** In this article we explore contents and mathematical tools *via* problem-solving.

**palavras-chave:** Resolução de problemas; estratégias de cálculo mental; potências; magia matemática; base 2; base 10.

**keywords:** Techniques of problem solving; mental computation strategies; powers; mathematical magic; base 2; base 10.

## 1 Introdução

A matemática que *vive* em determinados problemas pode ser trabalhada de forma a surpreender e deslumbrar os alunos, tornando a resolução dos problemas uma atividade *mágica*. Neste artigo apresentamos atividades que integram o programa de sessões matemáticas que desenvolvemos para alunos não universitários (“Magia matemática”, “Aventuras matemáticas”, etc.) e que incluem a resolução de problemas criteriosamente selecionados.

Descrevemos a abordagem construída que, para além de trabalhar os conceitos matemáticos envolvidos, permite a exploração de ferramentas fundamentais no raciocínio matemático, tais como: a identificação de padrões, a capacidade de argumentar e conjecturar, a destreza de cálculo, o desenvolvimento do espírito crítico, etc. Ao longo do processo, os alunos são encorajados a participar ativamente na discussão, através de perguntas e comentários que os guiam na resolução dos problemas propostos.

## 2 Multiplicar por 11

A primeira atividade é iniciada com a pergunta que se segue.

**Como multiplicar um número de dois algarismos por 11 fazendo apenas uma adição?**

Para calcular  $35 \times 11$ , afastar o 3 do 5 e no meio dos dois algarismos colocar a sua soma. Obtém-se 385. A realização da operação confirma que o procedimento efetuado produz o resultado correto.

Repetindo o procedimento (com números adequados), por exemplo,

$$\begin{aligned} 25 \times 11 = ?, \quad 2 \leftrightarrow 5, \quad 2 + 5 = 7, \quad 25 \times 11 = 275 \\ 42 \times 11 = ?, \quad 4 \leftrightarrow 2, \quad 4 + 2 = 6, \quad 42 \times 11 = 462 \end{aligned}$$

e fazendo a verificação, observa-se que os resultados estão corretos. Testando a *regra* anterior para o cálculo  $39 \times 11$  obtemos 3129, que *parece ser* um valor muito grande, já que  $39 \times 10 = 390$ . Efetivamente  $39 \times 11 = 429$ , donde se conclui que o procedimento inicial não é generalizável. O que falhou? Há uma *regra* para este caso? Neste caso a soma dos algarismos do número é maior do que 9, no entanto, uma análise do resultado leva a concluir que no *meio* fica o algarismo das dezenas (2) da soma ( $9 + 3 = 12$ ) dos algarismos e que o algarismo das centenas (4) é o sucessor do algarismo das dezenas do número original (3). Surge, naturalmente, a necessidade de perceber o mecanismo.

Um número natural  $n$  de dois algarismos pode escrever-se na forma  $10a + b$ , com  $a \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  e  $b \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ . Seja  $P := n \times 11$ . Assim,

$$P = (10a + b) \times 11 = (10a + b) \times (10 + 1) = 100a + 10(a + b) + b.$$

O algarismo das unidades de  $P$  é  $b$ . Se  $a + b \leq 9$ , então o algarismo das dezenas de  $P$  é  $(a + b)$  e o algarismo das centenas é  $a$ . Pode então formular-se a regra: se a soma dos algarismos de  $n$  é inferior a 10, então para determinar o produto do número  $n$  por 11 basta *afastar* os algarismos do número e no *meio* colocar a sua soma.

Exemplo:  $52 \times 11 = 572$ .

Se  $a + b > 9$ , então  $a + b = 10 + d$ , com  $d \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$  (observe-se que  $10 \leq a + b \leq 18$ ). Pode reescrever-se  $P$  na forma

$$P = 100a + 10(10 + d) + b = 100(a + 1) + 10d + b$$

donde se conclui que o algarismo das dezenas de  $P$  é  $d$  e que  $P$  pode ser um número com 3 ou 4 algarismos. Se  $a = 9$ , então  $P = 1000 + 10d + b$  ou seja, o algarismo das centenas é zero e o dos milhares 1.

Exemplo:  $95 \times 11 = 1045$ .

Se  $a < 9$ , então  $P$  tem três algarismos e o algarismo das centenas de  $P$  é  $a + 1$ .

Exemplo:  $47 \times 11 = 527$ .

Esta atividade permite trabalhar várias ferramentas matemáticas: conjecturar, explorar, demonstrar. A partir dela outras perguntas surgem naturalmente que podem ser transformadas em atividades exploratórias para os alunos. É possível generalizar as regras anteriores ao produto de um número de três algarismos por 11? E se tiver quatro algarismos? A atividade tem três passos: experimentar; analisar os resultados e formular regras; demonstrar a(s) regra(s).

### 3 Magia Matemática - Em que dia nasceu?

Pede-se a uma pessoa que diga em quais das tabelas que se seguem está o dia do seu aniversário.

1	3	5	7	2	3	6	7	4	5	6	7
9	11	13	15	10	11	14	15	12	13	14	15
17	19	21	23	18	19	22	23	20	21	22	23
25	27	29	31	26	27	30	31	28	29	30	31

8	9	10	11	16	17	18	19
12	13	14	15	20	21	22	23
24	25	26	27	24	25	26	27
28	29	30	31	28	29	30	31

Apenas com essa informação, é possível *adivinhar* o dia do aniversário da pessoa. Como funciona o truque?

#### Do outro lado do *pano* - como e porquê.

De cada cartão apenas é preciso de saber o número que se encontra no canto superior esquerdo. Suponhamos que a pessoa faz anos no dia 11. Então a pessoa indica as tabelas que têm no canto superior esquerdo os números 1, 2 e 8 ( $1 + 2 + 8 = 11$ ).

Que *magia* têm os números 1, 2, 4, 8 e 16?

Estes números são potências de base 2 e as tabelas são construídas atendendo à forma única de escrever os números de 1 a 31 como soma destas potências, em que cada uma delas só pode ser usada uma única vez em cada soma. Por exemplo,  $14 = 2 + 2^2 + 2^3$ , pelo que o 14 figura nas tabelas do 2, do 4 e do 8. Assim, em cada cartão colocam-se os números que usam, na sua escrita, a potência de 2 a que o cartão diz respeito.

Se uma pessoa indica uma das tabelas significa que a potência *mágica* dessa tabela é usada na soma, pelo que somando os números *mágicos* das tabelas assinaladas obtém-se o dia do aniversário.

### Explorando o terreno!

A atividade anterior usa a escrita de um número na base 2 e permite trabalhar vários aspetos importantes em matemática. Destacamos alguns deles, e apresentamos algumas abordagens aos mesmos.

**Identificação das potências.** Apresentar a lista dos números 1, 2, 4, 8, 16 e perguntar o que é que estes números têm em comum; é uma forma de se começar a trabalhar este exercício e que vai permitir enfatizar o facto de  $1 = 2^0$ , o que nem sempre é uma situação que os alunos reconheçam de imediato.

**Manipulação algébrica.** O preenchimento as tabelas é um bom exercício de manipulação algébrica.

**Padrões.** Cada tabela apresenta um padrão. Por exemplo, a tabela do 1 apresenta todos os números ímpares, e a tabela do 2 apresenta dois números consecutivos, salta os dois seguintes e assim sucessivamente.

**Generalizações.** E usando mais potências de 2, até onde se pode ir? Ao considerar-se as primeiras cinco potências do 2, consegue-se contruir todos os números até ao 31 ( $31 = 2^5 - 1$ ). Ao usar-se também a potência seguinte, ou seja o 32, pode construir-se, com a mesma regra, todos os números naturais até ao  $63 = 2^6 - 1$ . Neste caso, quantos números terá cada tabela?

**Outras bases.** Atividades semelhantes podem ser feitas usando outras bases. No caso de se escolher as potências de base 3, cada uma delas pode ser usada até duas vezes, para escrever todos os números naturais. Por exemplo,  $62 = 2 \times 3^0 + 2 \times 3^1 + 2 \times 3^3$ . É necessário mais algum dado em cada tabela que nos permita dizer quantas vezes é que cada potência foi usada, o que pode ser feito usando uma cor diferente para todos os números que usam duas vezes a potência.

**Sistema binário.** Esta atividade pode ser usada para introduzir o algoritmo da escrita de um número na base 2 (ou outra base) e passar do sistema binário para o decimal.

### Referências

- [1] S. Krantz, *Techniques of Problem Solving*, AMS, 1991.
- [2] A. Paenza, *Matemática...estás aí?*, Dom Quixote, 2008.
- [3] Y. Perelman, *Experiências e problemas recreativos I*, Biblioteca Desafios Matemáticos, RBA, 2008.

# MÓDULO INTERACTIVO SOBRE MECANISMOS

*Ana Cristina Oliveira*

Associação Atractor (www.atractor.pt)  
Rua de Ceuta n.º 118, 5.º, 4050-190 Porto  
e-mail: amolivei@fc.up.pt

**Resumo:** Um sistema articulado é uma cadeia finita de hastes rígidas, com algumas junções fixas e outras móveis, que funciona movendo os nós sob algum constrangimento. O espaço de configuração de um tal sistema é a união de todas as suas posições permitidas. Descreveremos o funcionamento de um módulo interativo, com mais de cem animações realizadas com o programa *Mathematica*, que explica de um modo elementar como é possível transferir informação topológica de um conjunto de pontos e hastes em movimento no plano para um espaço abstracto de pontos, cuja representação conduz a modelos tão regulares como uma esfera ou um toro.

**Abstract:** A mechanical linkage consists of a finite number of rods joined together by hinges, some of which are pinned down with respect to a fixed frame, so that the system is free to move in a plane. The configuration space of a linkage is the set of all its admissible positions. We will describe the gear of an interactive module, containing more than a hundred animations performed with the program *Mathematica*, which explains in an elementary way how can we convey topological information from a set of moving points and rods to an abstract space, whose modeling may be as smooth as a sphere or a torus.

**palavras-chave:** Mecanismo; espaço de configuração.

**keywords:** Linkage; configuration space.

## 1 Introdução

As estruturas que aqui consideramos são versões planas de dispositivos simples que podem ser reformulados matematicamente como uniões de pontos e hastes, formando um quadrilátero ou um pentágono articulado. Pretende-se analisar o conjunto de todas as suas posições possíveis. Este estudo responde à necessidade de compreender o funcionamento de um mecanismo, de clarificar a génese do respectivo conjunto de posições admissíveis e de construir um vocabulário matemático que traduza de modo inequívoco o movimento

e as posições dos sistemas articulados na forma e na topologia de espaços de configuração. Contudo, na maioria dos casos interessantes, estes mecanismos não admitem modelos físicos que possam ser manipuláveis porque as hastes apropriadas têm comprimentos demasiado grandes. Por isso se optou por explorar um contexto virtual, que não apresenta estes constrangimentos, embora surgissem outras dificuldades técnicas. O módulo interactivo é construído por páginas *html* e animações interactivas realizadas com o programa *Mathematica*. A escolha deste *software* deve-se ao facto de ele permitir associar os mecanismos a figuras com *design* apelativo que correspondem precisamente, e em tempo real, aos objectos matemáticos descritos. Contudo, contrariamente ao que se passa com programas de geometria dinâmica, o *Mathematica* não inclui rotinas próprias adequadas à descrição do movimento de sistemas articulados no plano. Essa característica obrigou-nos a redesenhar o movimento destes sistemas de pontos e hastes em termos de Geometria Analítica, e a criar programas novos a partir de outras rotinas que o *Mathematica* disponibiliza.

O módulo [\[1\]](#) permite uma aprendizagem interactiva do funcionamento de um mecanismo e do modo como as relações de ordem entre comprimentos de hastes determinam os traços topológicos dos espaços de configuração. Baseia-se numa lista sucinta de instruções e utiliza inúmeras animações que sincronizam as escolhas do utilizador com o movimento do sistema de hastes articuladas e a criação dos respectivos espaços de configuração. O processo indutivo de construção, que é visualizado no módulo, assegura que a lista desses espaços contém a família completa das superfícies orientáveis. Este é um tema matematicamente avançado mas que é aqui apresentado num registo elementar através de dois percursos de dificuldade distinta dirigidos a públicos com formação matemática diferente. O texto [\[1\]](#)<sup>2</sup> complementa o módulo, contendo detalhes técnicos, demonstrações dos resultados que são mencionados e informação matemática ou bibliográfica adicional.

## 2 Utilização do módulo

Inicialmente, sugere-se ao utilizador que se familiarize com a noção de mecanismo, e, em particular, de polígono articulado. Colocam-se-lhe então algumas questões naturais, como por exemplo: Em que circunstâncias um

---

<sup>1</sup>Disponível em <http://www.atractor.pt/mat/MovimentoForma/modulo>, em formato CDF e Html.

<sup>2</sup>[\[1\]](#) A.C. Oliveira, *Matemática Experimental*, Tese de Doutoramento, Universidade do Porto, 2013.

polígono articulado é realizável? Quando é que corresponde a uma realização única? Para auxiliar o utilizador na descoberta das respostas, há animações interactivas que o guiam e um glossário a que pode recorrer sempre que isso seja conveniente. O conceito matemático que se segue nesta exploração interactiva é o de espaço de configuração. Para o determinarmos, precisamos de identificar o contributo de cada componente móvel, enquanto controlamos a posição relativa de todas as outras partes, fixas e móveis, do mecanismo. Se uma haste com base num ponto fixo  $Q$  fosse, de resto, inteiramente livre, traçaria no plano uma circunferência centrada em  $Q$  e de raio igual ao comprimento da haste. É a ligação a outras hastes que condiciona esse movimento e, portanto, restringe o que afinal o espaço de configuração contém. Este espaço é o resultado de um procedimento que transfere informação matemática de um conjunto de pontos e hastes, que se movem num plano onde as distâncias se medem com a métrica euclidiana, para um mundo abstracto de posições admissíveis do sistema articulado que tem de receber noções de vizinhança e proximidade compatíveis com os movimentos e posições do mecanismo.

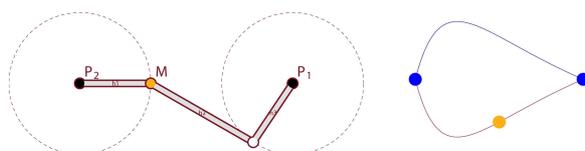


Figura 1: Mecanismo e uma representação das posições admissíveis.

No módulo, este processo é aplicado inicialmente a quadriláteros e a alguns exemplos simples. Estes devem encorajar o utilizador para que sistematize essa informação, generalizando-a a todas as curvas que são espaços de configuração de quadriláteros articulados.

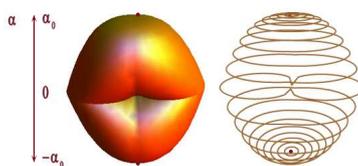


Figura 2: União de curvas em camadas.

A junção de uma haste a um quadrilátero articulado acrescenta um grau de liberdade ao mecanismo, e conseqüentemente à dimensão dos espaços a considerar; e coloca novos desafios ao utilizador. Trata-se agora de visualizar a

construção dos espaços de configuração como união de curvas *por estratos* com uma topologia adequada. A lista de exemplos que o utilizador pode construir não é demasiado extensa, e dela o módulo destaca a esfera e o toro.



Figura 3: Mecanismos com espaços de configuração homeomorfos a uma esfera e a um toro, respectivamente.

Num percurso opcional, o utilizador notará o efeito de se juntar uma ou várias hastes a um pentágono articulado. Uma vez entendido esse método iterativo, poderá convencer-se de que ele corresponde à junção de ansas a uma esfera. E que, desse modo, se constroem todas as superfícies orientáveis como representações de espaços de configuração de pentágonos articulados aumentados adequadamente escolhidos.

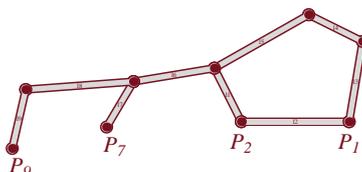


Figura 4: Pentágono articulado aumentado.

### 3 Comentário

Por ser interativo, o módulo não obriga o utilizador a seguir um trajecto pré-fixado. Há inúmeras questões e actividades suscitadas pelas várias secções do módulo, podendo cada utilizador ter um roteiro autónomo, gizado pela sua curiosidade e conduzido pela sua formação matemática. Numa primeira abordagem, o utilizador poderá identificar rapidamente as formas dos espaços que se geram no movimento de um quadrilátero articulado. Se prosseguir com uma exploração mais minuciosa das transições entre as possíveis posições de um mecanismo e dos diferentes tipos de espaços de configuração, poderá descobrir aspectos mais complexos de natureza topológica, como as noções de componente conexa, genus e simetria.

# TRANSIÇÃO DA MATEMÁTICA DO SECUNDÁRIO PARA A DO SUPERIOR: O PONTO DE VISTA DOS ESTUDANTES

*Helena Monteiro*

Esc. Sup. Tecnologia de Abrantes  
IPTomar, Abrantes, Portugal  
e-mail: [helena.monteiro@ipt.pt](mailto:helena.monteiro@ipt.pt)

*Maria João Afonso*

Faculdade de Psicologia  
Universidade de Lisboa  
e-mail: [mjafonso@psicologia.ulisboa.pt](mailto:mjafonso@psicologia.ulisboa.pt)

*Marília Pires*

Fac. Ciências e Tecnologia  
Universidade do Algarve  
e-mail: [mpires@ualg.pt](mailto:mpires@ualg.pt)

**Resumo:** Neste artigo, analisam-se algumas opiniões, atitudes e dificuldades manifestadas por estudantes do 1.º ano de cursos de Engenharia, em relação ao ensino e à aprendizagem da Matemática no ensino secundário e no início do ensino superior. Elas foram recolhidas através de entrevistas realizadas em duas subamostras destes estudantes, contrastados quanto ao nível de conhecimentos de Matemática que demonstraram nas avaliações do final do 1.º semestre.

**Abstract** In this article, we explore some opinions, attitudes and difficulties experienced by students in the 1st year of Engineering courses about the teaching and learning of Mathematics in high school and early in college. The data were gathered by means of interviewing some of these students, contrasting in the level of achievement in Mathematics displayed at the end of the 1st semester.

**palavras-chave:** adaptação ao ensino superior; dificuldades em Matemática; PMAT.

**keywords:** adaptation to higher education; difficulties in Mathematics; PMAT.

## 1 Introdução

De um modo geral, os estudantes têm dificuldades em Matemática quando transitam do ensino secundário para cursos superiores de ciências e tecnologias. No sentido de facilitar o sucesso escolar dos alunos do 1.º ano destes cursos, para além do diagnóstico dos seus conhecimentos em Matemática,

também é importante, no processo pedagógico, considerar o seu ponto de vista relativo a esta fase problemática do percurso académico.

Para conhecer emoções que experimentaram e atitudes que desenvolveram, perante o novo processo de ensino e aprendizagem da Matemática, entrevistaram-se 25 estudantes do 1.º ano/1.ª vez de cursos de Engenharia, no decorrer do 2.º semestre, em 2011. Os entrevistados foram agrupados em Melhores Alunos (MA) e Piores Alunos (PA), consoante o nível de sucesso em Matemática que obtiveram no 1.º semestre. As entrevistas, individuais e semiestruturadas, foram orientadas por um protocolo construído com base nas diretrizes de Foddy (2002). Entre outros tópicos, procurou-se conhecer a opinião dos estudantes sobre o próprio percurso na aprendizagem da Matemática e o modo como ela lhes foi ensinada, assim como as dificuldades que tiveram para estudar as matérias das unidades curriculares (UC) de Matemática do 1.º semestre e as suas sugestões para promover o sucesso nessas UC.

## 2 Caracterização dos Entrevistados

As UC de Matemática do 1.º ano/1.º semestre dos cursos frequentados pelos 71 estudantes de onde foram selecionados os entrevistados são Álgebra Linear (AL) e Cálculo Diferencial e Integral I (CDI). Estes estudantes realizaram o Exame Nacional de Matemática A e, no início de cada semestre, o mesmo teste de conhecimentos de Matemática da SPM, o PMAT (identificase por PMAT-T na 1.ª aplicação e por PMAT-R no reteste após treino de competências nas UC do 1.º semestre).

Os entrevistados MA foram aprovados a AL e a CDI e obtiveram as 14 melhores médias da classificação final destas UC, bem como da pontuação nos PMAT-T e PMAT-R. Os 11 PA foram avaliados em AL e em CDI, reprovaram a ambas ou a uma destas UC, tiveram menos de 13 valores naquela em que foram aprovados e melhoraram a pontuação do PMAT-T para o PMAT-R. Na data da entrevista, todos os estudantes tinham 18 anos de idade. Entre os MA contam-se nove rapazes e cinco raparigas; no grupo dos PA há dez rapazes e uma rapariga.

## 3 Resultados das Entrevistas

No protocolo das entrevistas, as perguntas estão agrupadas por temas. Apresentam-se as que suscitaram respostas mais relevantes.

### História pessoal da relação com a Matemática

A maioria dos entrevistados gostava de Matemática antes de entrar no en-

sino superior e continua a gostar, embora alguns prefiram a Matemática do secundário.

No ensino secundário, o relacionamento de 4 PA com a Matemática não era muito bom, mas para os outros entrevistados era bom; enquanto 4 MA e 1PA pioraram esse relacionamento no superior, 2 PA melhoraram. Um destes PA comentou “agora percebo melhor a Matemática do que antes”.

Relativamente à preparação para estudar Matemática no ensino superior, antes de a conhecerem, 2 MA e 4 PA consideravam que era razoável e os outros que era boa; depois de a conhecerem, 8 MA e 7 PA admitiram que a sua preparação não era tão boa como julgavam.

### **A Matemática no ensino superior**

A maioria dos entrevistados concorda com o número de horas de aulas, com a quantidade de matéria e com o método de ensino. No entanto, alguns preferiam que as aulas fossem dadas mais devagar, que tivessem mais tempo para resolver exercícios e que não fosse dada tanta teoria. Um dos MA referiu “O método de ensino é melhor que o do secundário porque não se está sempre a dar a mesma coisa, os exercícios são todos diferentes”.

A proibição de utilizar calculadora, a que estão sujeitos todos os entrevistados, é bem aceite pela maioria. Um dos MA ficou “chocado” quando soube desta restrição, um dos PA reconhece que, deste modo, se pensa melhor e vários defendem o uso da calculadora para confirmar resultados, fazer gráficos e poupar tempo com cálculos intermédios.

Alguns entrevistados gostam mais de estudar Matemática no ensino superior porque “a matéria é mais específica”, “é mais consistente”, “não é tão repetida” e “aprende-se mais”. No entanto, a maioria tem opinião contrária porque acha que a matéria de AL e de CDI é muito teórica, mais difícil que a do secundário e o método de ensino não é tão bom.

Perante a questão “Ter entre 10 e 13 na Matemática do secundário, é suficiente para ter sucesso a AL e a CDI?”, 7 MA (com notas entre 16 e 20 no 11.º e entre 15 e 19 no 12.º) responderam que não, mesmo que os alunos trabalhem muito; 3 MA e 2 PA (com notas entre 15 e 19) disseram que sim, mas “com muitas dificuldades e a menos que não façam outras disciplinas”; responderam que sim, desde que com muito esforço, dedicação e empenho, os entrevistados com notas mais baixas a Matemática A (menos de 15).

Menos de metade dos entrevistados (4 MA e 5 PA) considera que o ensino secundário não prepara bem os alunos para o superior porque há facilitismo nas avaliações, a matéria é repetitiva, não se ensina nem exige bons métodos de trabalho e não se demonstram resultados. São poucos os que acham o ensino superior demasiado exigente.

### **Dificuldades em Matemática**

Segundo os MA, as dificuldades enfrentadas pela maioria dos alunos consistem em saber estudar, perceber a matéria e organizar o tempo. Também apontaram, tal como alguns PA, a dificuldade em acompanhar o ritmo das aulas e em não desistir perante um exercício difícil. Apenas entrevistados PA mencionaram dificuldades na adaptação ao novo método de ensino e de estudo, às aulas teóricas e à quantidade de trabalho necessário para ter aproveitamento nas UC.

Para promover o sucesso a AL e a CDI, os MA deram, entre outras, as seguintes sugestões: maior interação nas aulas; mais aulas de apoio; mais fichas de trabalho obrigatórias; aulas teóricas e práticas dadas pelo mesmo professor, que deve “desenvolver o espírito de perspicácia do aluno para ele saber qual é o melhor método ou fórmula a aplicar”; haver mais aulas práticas. Esta sugestão também foi dada pelos PA, que acrescentaram: decorar as fórmulas das derivadas no secundário; mais exigência no secundário e menos no superior, onde se podia dar menos teoria; reduzir o tempo dedicado à parte inicial da matéria de CDI, para haver mais aulas sobre a parte em que é quase tudo novo; diminuir o ritmo das aulas no início do ano para que alguns alunos não desistam.

Analisadas as respostas dos entrevistados, percebe-se que, do seu ponto de vista, o ensino secundário prepara bem os alunos para a Matemática do superior, embora os devesse treinar na demonstração de resultados, na prática de métodos de estudo mais eficientes e na resolução de exercícios sem calculadora nem formulários. Eles admitem que o seu (muito) estudo seria facilitado se os professores dessem a matéria mais devagar, a qual deveria ser mais prática e menos teórica, ensinassem os alunos a estudar (a pedido dos MA) e resolvessem testes de anos anteriores (solicitado pelos PA).

Do ponto de vista das autoras, o programa de Matemática do 12.º ano deveria ser diferenciado para os alunos que pretendem frequentar cursos de Engenharia, ou outros com igual nível de exigência em Matemática, sendo ajustado a esses cursos; os professores de Matemática do ensino superior deveriam adotar estratégias pedagógicas que permitam aos alunos superar as lacunas nos seus conhecimentos, perceber a importância da aprendizagem da teoria e desenvolver a capacidade de estudar individualmente.

### **Referências**

- [1] W. Foddy, *Como perguntar, teoria e prática da construção de perguntas em entrevistas e questionários*, Celta Editora, Oeiras, 2002.

# MATHEMATICAL CANDIES

*Jaime Gaspar*

School of Computing, University of Kent, UK  
Centro de Matemática e Aplicações, FCT, UNL  
e-mail: mail@jaimegaspar.com  
jg478@kent.ac.uk

**Resumo:** Quando os alunos expressam os seus sentimentos pela matemática, os adjetivos usuais não são “interessante”, “bela” e “agradável”, mas “aborrecida”, “feia” e “dolorosa”. Esta predisposição contra a matemática é uma barreira que os professores de matemática têm de deitar abaixo para libertar o caminho para a aprendizagem da matemática. Como é que podemos fazê-lo? Deleitando os alunos com “doce matemáticos”: pequenos pedaços de matemática que são “interessantes”, “belos” e “agradáveis”.

**Abstract:** When students express their feelings about mathematics, the usual adjectives are not “interesting”, “beautiful” and “pleasant”, but “boring”, “ugly” and “painful”. This predisposition against mathematics is a wall that teachers of mathematics need to tear down to free the way for the learning of mathematics. How do we do this? By delighting students with “mathematical candies”: little pieces of mathematics that are “interesting”, “beautiful” and “pleasant”.

**Palavras-chave:** Doce matemáticos; número triangular; número irracional; demonstração (não) construtiva; classificação de triângulos.

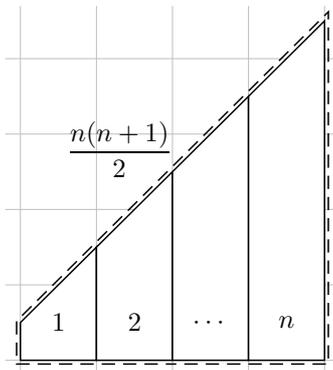
**Keywords:** Mathematical candy; triangular/triangle number; irrational number; (non)constructive proof; classification of triangles.

## 1 Geometric proof of $1 + 2 + \dots + n = n(n + 1)/2$

When Gauss’s teacher asked him to add  $1 + 2 + \dots + 100$ , he answered  $50 \times 101 = 5050$  realising that  $1 + 2 + \dots + 100$  is the sum of the 50 terms  $1 + 100, 2 + 99, \dots, 50 + 51$  equal to 101. This generalises to  $1 + 2 + \dots + n = n(n + 1)/2$ . We give a geometric proof of this formula [1].

Let us put together a first inner right trapezoid with bases of length 0.5 and 1.5, and area 1, a second inner right trapezoid with bases of length 1.5 and 2.5 and area 2,  $\dots$ , a  $n$ th inner right trapezoid with bases of length  $n - 0.5$  and  $n + 0.5$  and area  $n$ , to form an outer right trapezoid with bases

of length 0.5 and  $n + 0.5$ . The sum of the areas of the inner trapezoids is  $1 + 2 + \dots + n$ . The area of the outer trapezoid is  $n(n + 1)/2$ .



## 2 At least half of the real numbers are irrational

If we ask students to mention some irrational numbers, we are already lucky if we hear  $\sqrt{2}$ ,  $\pi$  and  $e$ . This is natural because almost all everyday numbers are rational, but deceiving because almost all real numbers are irrational. Can we show this to students? We give an elementary proof [2] that at least half (in an intuitive sense) of the real numbers are irrational.

Let us consider the function

$$f: [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

$$x \mapsto \begin{cases} \sqrt{2} + x & \text{if } \sqrt{2} + x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ \sqrt{2} - x & \text{if } \sqrt{2} + x \notin \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

(which is well defined: if  $\sqrt{2} + x \notin \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , then  $\sqrt{2} - x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , otherwise  $\sqrt{2} = \frac{(\sqrt{2}+x)+(\sqrt{2}-x)}{2} \in \mathbb{Q}$ , which is false). The function  $f$  is injective: if  $f(x) = f(y)$ , then  $x = |f(x) - \sqrt{2}| = |f(y) - \sqrt{2}| = y$ . So for each different  $x$  in  $[0, +\infty[$  we have a different irrational number  $f(x)$ , therefore there are as many irrational numbers as  $x$ s in  $[0, +\infty[$ , which is half of  $\mathbb{R}$ .

## 3 Constructive and nonconstructive proofs

Mathematicians can prove that an equation has a solution (1) constructively by giving a solution or (2) nonconstructively without giving a solution. Most

mathematicians accept both proofs, but a minority only accepts constructive proofs. We give an illustrative example [3] of a simple equation with constructive and nonconstructive proofs.

Let us consider the equation

$$c^2 x^2 - (c^2 + c)x + c = 0.$$

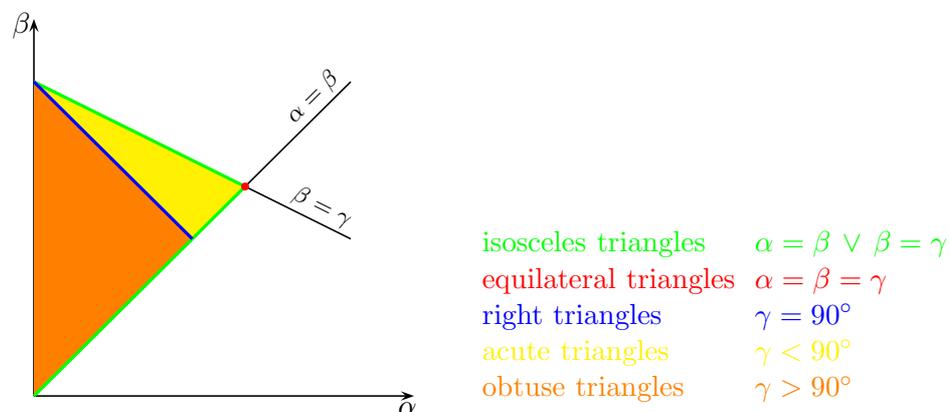
where  $c$  is a constant.

- First, we show that the equation has a solution nonconstructively: aiming at a contradiction, if there is no solution, then  $x = 0$  is not a solution, so  $c \neq 0$ , therefore  $x = 1/c$  exists and we can check that is a solution, contradicting the assumption that there is no solution.
- Second, we show that the equation has a solution constructively:  $x = 1$  is a solution.

## 4 Visualising classes of triangles

Students are familiar with the classification of triangles as acute, right, obtuse, scalene, isosceles, equilateral, etc. But this “zoology” can easily become tedious. Can we fix this by doing something funny with it? We give a funny way of visualising the classes of triangles [4].

Each triangle is characterised (modulo similarity) by its internal angles  $\alpha$ ,  $\beta$  and  $\gamma$ . We can assume that we ordered them so that  $0 \leq \alpha \leq \beta \leq \gamma$ , and we can drop  $\gamma$  because we know  $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$  (since the sum of the internal angles of a triangle is  $180^\circ$ ). In conclusion, each triangle is characterised by its internal angles  $\alpha$  and  $\beta$  such that  $0 \leq \alpha \leq \beta \leq \gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$ . The set  $\Delta = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \alpha \leq \beta \leq \gamma = 180^\circ - \alpha - \beta\}$  of all “triangles” is itself a triangle. We can identify in  $\Delta$  the “regions” corresponding to different classes of “triangles”, for example, the “region”  $\{(\alpha, \beta) \in \Delta : \alpha = \beta \vee \beta = \gamma\}$  corresponding to isosceles “triangles”. We paint below these “regions”.



**Acknowledges.** Financially supported by a Research Postgraduate Scholarship from the Engineering and Physical Sciences Research Council / School of Computing, University of Kent.

## References

- [1] J. Gaspar, “A proof without words of  $1 + 2 + 3 + \dots + n = n(n + 1)/2$ ”, submitted.
- [2] J. Gaspar, “Direct proof of the uncountability of the transcendental numbers”, *The American Mathematical Monthly*, Vol. 121, No. 1 (2014), p. 80.
- [3] J. Gaspar, “A theorem with constructive and nonconstructive proofs”, *The American Mathematical Monthly*, Vol. 120, No. 6 (2013), p. 536.
- [4] J. Gaspar and O. Neto, “Seeing all triangles at the same time”, in preparation.

# Geometria e Topologia

*Editor Convidado:* João Faria Martins

*Ana Cristina Ferreira*

Classificação de espaços homogêneos naturalmente redutíveis em dimensões  
 $n \leq 6$  ..... 45

*Rui Albuquerque*

Da geometria dos fibrados vectoriais com métricas esfericamente simétricas  
..... 49

*Ana Casimiro*

On the homotopy type of free group character varieties ..... 53

*Roger Picken*

Moduli Spaces in Higher Gauge Theory ..... 59



# CLASSIFICAÇÃO DE ESPAÇOS HOMOGÊNEOS NATURALMENTE REDUTÍVEIS EM DIMENSÕES $n \leq 6$

*Ana Cristina Ferreira*

Centro de Matemática da Universidade do Minho  
Campus de Gualtar  
4710-057 Braga, Portugal  
e-mail: [anaferreira@math.uminho.pt](mailto:anaferreira@math.uminho.pt)

**Resumo:** Esta é uma versão escrita bastante informal da comunicação com o mesmo título apresentada na sessão de Geometria e Topologia do Encontro Nacional da Sociedade Portuguesa de Matemática em 2014. No seminário foi introduzido um novo método para a classificação de espaços homogêneos naturalmente redutíveis, método este que é baseado em técnicas de geometria Riemanniana com torção. Estas técnicas permitem reproduzir, de forma mais simples, as já conhecidas classificações em dimensões 3, 4 e 5. Em dimensão 5, torção paralela genérica define uma estrutura quase-Sasaki. Foi anunciada a classificação em dimensão 6 e estabelecida a relação com a geometria de estruturas quase complexas. Este é trabalho conjunto com Ilka Agricola (Universidade Philipps em Marburg, Alemanha) e Thomas Friedrich (Universidade Humboldt em Berlim, Alemanha).

**palavras-chave:** espaços homogêneos naturalmente redutíveis; conexões com torção anti-simétrica; estruturas geométricas.

## 1 Introdução

A classificação de espaços simétricos por Élie Cartan em 1926 foi uma das suas grandes contribuições para a matemática, relacionando de forma única a teoria algébrica de grupos de Lie e as noções geométricas de curvatura, isometria e holonomia. No entanto, a classificação de espaços homogêneos na sua completa generalidade parece ser verdadeiramente impossível. Existe bastante literatura dedicada a certas classes de espaços homogêneos, como por exemplo, espaços isotropicamente irredutíveis, espaços com curvatura positiva ou espaços compactos de dimensão muito baixa. Esta nota é sobre uma dessas classes de espaços homogêneos – os espaços naturalmente redutíveis. A investigação aqui exposta sucintamente é parte integrante do artigo [\[AFF14\]](#).

## 2 Espaços naturalmente redutíveis

Do ponto de vista algébrico, estes espaços são definidos como sendo variedades Riemannianas  $M = G/K$  munidas de uma ação transitiva do grupo de Lie  $G$ , um subgrupo do grupo das isometrias de  $M$ , e de um complemento redutivo  $\mathfrak{m}$  da subálgebra de Lie  $\mathfrak{k}$  relativamente à álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  tal que

$$\langle [X, Y]_{\mathfrak{m}}, Z \rangle + \langle [X, Z]_{\mathfrak{m}}, Y \rangle = 0, \quad (1)$$

para todos os  $X, Y, Z \in \mathfrak{m}$  e o produto interno é o induzido pela métrica Riemanniana  $g$  de  $M$ . Exemplos clássicos destes espaços incluem espaços simétricos irreductíveis, espaços homogêneos isotropicamente irreductíveis, grupos de Lie com métrica bi-invariante e espaços 3-simétricos. Nem sempre é possível decidir facilmente se um determinado espaço homogêneo é ou não naturalmente redutível, uma vez que é necessário considerar *todos* os grupos de isometrias transitivos e encontrar um complemento da subálgebra do estabilizador de um ponto que satisfaça a condição dada em (1). O nosso estudo de espaços naturalmente redutíveis usa uma descrição alternativa e permite-nos obter resultados sobre  $G$ -estruturas não só para tais espaços mas também para um classe maior de variedades – variedades com torção anti-simétrica paralela. É um facto bem conhecido que um espaço homogêneo que satisfaz a equação (1) é tal que a conexão canónica  $\nabla^c$  de  $M = G/K$  tem torção anti-simétrica  $T^c \in \Lambda^3 M$ . Por outro lado, um resultado clássico de Ambrose e Singer afirma que a torção  $T^c$  e a curvatura  $\mathcal{R}^c$  de  $\nabla^c$  são  $\nabla^c$ -paralelas, [AS58]. Por estas razões, dizemos que uma variedade Riemanniana  $(M, g)$  é naturalmente redutível se for um espaço homogêneo  $M = G/K$  munido de uma conexão métrica com torção anti-simétrica  $T$  tal que a torção e a curvatura  $\mathcal{R}$  são paralelas, isto é,  $\nabla T = 0 = \nabla \mathcal{R}$ . No caso de  $M$  ser completa, conexa e simplesmente conexa, as duas noções de espaço naturalmente redutível são coincidentes, [LV83]. À partida, encontrar uma conexão com torção nas condições referidas será também ele um problema não muito simples. No entanto, este problema pode ser abordado do ponto de vista das  $G$ -estruturas. Recordamos que para uma variedade Riemanniana munida de uma  $G$ -estrutura, uma conexão característica é uma  $G$ -conexão com torção anti-simétrica. Existem classes bastante amplas de variedades para as quais sabemos existir uma conexão característica com torção paralela, por exemplo: variedades *Sasaki*, variedades *nearly Kähler* e variedades  $G_2$  *nearly parallel*.

### 3 Classificação e estrutura geométrica

A classificação de espaços naturalmente redutíveis foi obtida anteriormente, em dimensão 3, por Tricerri e Vanhecke, [TV83], e em dimensões 4 e 5 por Kowalksi e Vanhecke, [KV83] e [KV85], respetivamente. A abordagem consistiu em derivar formas normais para o tensor de curvatura, seguindo-se a torção como consequência. Com esta abordagem bastante computacional, obter classificações em dimensões mais altas parece ser genuinamente impossível, além de não fazer transparecer a estrutura geométrica dos espaços em questão. Em contraste, a nossa estratégia está focada na torção como objeto fundamental, sendo que a filosofia é a seguinte: para uma 3-forma de torção suficientemente não degenerada, a conexão procurada é a conexão característica de uma  $G$ -estrutura adequada. Além disso, a holonomia de tal conexão está longe de ser genérica, o que permite fazer uso sistemático da chamada construção de Nomizu.

Outro objeto fundamental no nosso estudo é a 4-forma  $\sigma_T(X, Y, Z, W) = g(T(X, Y), T(Z, W)) + g(T(Z, X), T(Y, W)) + g(T(Y, Z), T(X, W))$  e o caso degenerado corresponde a  $\sigma_T = 0$ . Para  $\dim M \geq 5$ , apresentamos um resultado que classifica esta situação em todas as dimensões: essencialmente  $M$  é um grupo de Lie com métrica bi-invariante ou o seu dual simétrico. Usando os métodos descritos, facilmente se reobtem a classificação em dimensão 3 – espaços de curvatura constante:  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathbb{S}^3$  e  $\mathbb{H}^3$ ; ou grupos de Lie com uma métrica invariante por translações à esquerda:  $SU(2)$ , a cobertura universal de  $SL(2, \mathbb{R})$  ou o grupo de Heisenberg  $H^3$ . A nossa construção é particularmente eficiente em dimensão 4; neste caso, qualquer torção paralela  $T \neq 0$  define um campo vetorial que induz uma decomposição local num produto. Em dimensão 5, no caso não degenerado, o dual métrico de  $*\sigma_T$  define uma direção particular no fibrado tangente e apresenta-se como candidato a vetor de Reeb de uma estrutura de contacto. Temos duas possibilidades para o grupo de isotropia de  $T$ :  $ISO(T) = SO(2) \times SO(2)$  ou  $ISO(T) = U(2)$ . Provamos que uma variedade de dimensão 5 com torção paralela é quase Sasaki no primeiro caso e  $\alpha$ -Sasaki no segundo. No primeiro caso, uma tal variedade é automaticamente naturalmente redutível, enquanto que no segundo caso, existem vários contra-exemplos de variedades Sasaki não homogéneas. Terminamos este caso com a rederivação da lista de todos os espaços homogéneos 5-dimensionais:  $SU(3)/SU(2)$ ,  $SU(2, 1)/SU(2)$ , o grupo de Heisenberg  $H^5$ , ou um espaço do tipo  $(G_1 \times G_2)/SO(2)$  onde  $G_1$  e  $G_2$  são os grupos de Lie da classificação em 3 dimensões.

O nosso resultado principal é a classificação completa dos espaços redutíveis 6-dimensionais. A observação crucial é a de que a torção induz uma

2-forma,  $*\sigma_T$ , que pode ser vista como um endomorfismo anti-simétrico do fibrado tangente e como tal é candidato a estrutura quase complexa. A característica de tal endomorfismo pode ser 0, 2, 4 ou 6. O caso em que  $\text{car} = 0$ , é o caso degenerado. No caso em que  $\text{car} = 2$ , temos que  $M$  é o produto de dois espaços naturalmente redutíveis de dimensão 3, os grupos de Lie da classificação tridimensional. O caso em que a  $\text{car} = 4$  não é possível. Finalmente, o caso em que a  $\text{car} = 6$  é efetivamente o caso em que obtemos uma estrutura quase complexa de tipo  $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_3$ . Uma variedade com torção paralela ou é do tipo  $\mathcal{W}_1$  (*nearly Kähler*) ou, caso contrário, é automaticamente naturalmente redutível. No primeiro caso, as variedades que são também homogêneas são naturalmente redutíveis e são elas  $\mathbb{S}^6$ ,  $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ ,  $\mathbb{C}\mathbb{P}^3$  e a variedade *flag*  $F(1, 2) = U(3)/U(1)^3$ . No segundo caso, em que a componente em  $\mathcal{W}_3$  não se anula, obtemos a seguinte lista que cobre todas as possibilidades:  $\text{SL}(2, \mathbb{C})$  vista como uma variedade real,  $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ ,  $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}^3$ ,  $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}^3$  e um certo grupo de Lie nilpotente (para o qual a álgebra de Lie é dada por  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$  e o colchete de Lie por  $[(v_1, w_1), (v_2, w_2)] = (0, v_1 \times v_2)$ ).

**Agradecimentos** – Este trabalho foi financiado pelos projetos 1388 “Representation Theory” da DFG e pelos projetos PESt-C/MAT/UI0013/2011 e PTDC/MAT/118682/2010 da FCT.

## Referências

- [AFF14] I. Agricola, A. C. Ferreira, Th. Friedrich, *The classification of naturally reductive homogeneous spaces in dimensions  $n \leq 6$* , to appear.
- [AS58] W. Ambrose, I. M. Singer, *On homogeneous Riemannian manifolds*, Duke Math. J. 25, 647-669 (1958).
- [KV83] O. Kowalski, L. Vanhecke, *Four-dimensional naturally reductive homogeneous spaces*, Differential geometry on homogeneous spaces, Conf. Torino/Italy 1983, Rend. Semin. Mat., Torino, Fasc. Spec., 223-232 (1983).
- [KV85] O. Kowalski, L. Vanhecke, *Classification of five dimensional naturally reductive spaces*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 97, 445-463 (1985).
- [TV83] F. Tricerri and L. Vanhecke, *Homogeneous structures on Riemannian manifolds*, London Math. Soc. Lecture Notes Series, vol. 83, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1983.

# DA GEOMETRIA DOS FIBRADOS VECTORIAIS COM MÉTRICAS ESFERICAMENTE SIMÉTRICAS

*Rui Albuquerque*

Universidade de Évora e Università di Torino  
e-mail: rpa@uevora.pt

**Resumo:** Apontamento sobre a construção de métricas com simetria esférica em fibrados vectoriais riemannianos sobre variedades riemannianas.

**Abstract:** A note on the construction of metrics with spherical symmetry on Riemannian vector bundles over Riemannian manifolds.

**palavras-chave:** fibrado vectorial; conexão métrica.

**keywords:** fibre bundle; metric connection.

## 1 Geometria dos fibrados vectoriais

É bem conhecido que os fibrados vectoriais  $\pi : E \rightarrow M$  são também variedades diferenciáveis. Com efeito, as aplicações de trivialização induzem as necessárias cartas, do mesmo grau de diferenciabilidade sobre as intersecções. Em cada fibra  $\pi^{-1}(x) = E_x$ ,  $x \in M$ , tais cartas são ainda aplicações lineares, pelo que se pode identificar naturalmente  $T_e E_x$  com  $E_x$ . Ou seja,  $T(E_x) = E_x \times E_x$  e, mais ainda, pode-se verificar que  $\mathcal{V} := \ker d\pi \subset TE$  coincide com o subfibrado tangente às fibras, pelo que em suma  $\mathcal{V} \simeq \pi^* E$ . Por outro lado, tem-se a sucessão exacta de fibrados vectoriais sobre  $E$

$$0 \rightarrow \mathcal{V} \rightarrow TE \xrightarrow{d\pi} \pi^* TM \rightarrow 0. \quad (1)$$

Dada uma conexão  $D^E : \Gamma(M; E) \rightarrow \Gamma(M; T^*M \otimes E)$ , esta permite-nos construir um subespaço dito horizontal  $\mathcal{H}^{D^E} \subset TE$  complementar do vertical  $\mathcal{V}$ , que se identifica por sua vez com  $\pi^* TM$  por via de  $d\pi$ . Assim obtemos

$$TE = \mathcal{H}^{D^E} \oplus \mathcal{V} \simeq \pi^* TM \oplus \pi^* E. \quad (2)$$

Desde logo  $E$  admite um campo vectorial tautológico  $\xi$ , vertical por natureza e definido como  $\xi_e = e \in \mathcal{V}$ ,  $\forall e \in E$ . Tal campo *parece* variar apenas ao longo das fibras de  $E$ ; com efeito, em  $m := \dim M$  direcções horizontais não varia de todo. Não desvirtuando quaisquer definições canónicas, temos o subespaço horizontal e projecção

$$\mathcal{H}^{D^E} = \ker \pi^* D^E \xi \quad \pi^* D_Y^E \xi = Y, \quad \forall Y \in \mathcal{V}. \quad (3)$$

Fazemos agora nova suposição, a de a variedade  $M$  estar munida de uma conexão linear  $\nabla^M$ , ou seja, uma conexão definida no fibrado tangente de  $M$ . Respeitando as projecções e isomorfismos indicados em (2), obtém-se de imediato, bem definida, uma conexão linear sobre a variedade  $E$ . Admitimos assim que  $D^* = \pi^*\nabla^M \oplus \pi^*D^E$  está definida em  $TE$ .

A seguinte proposição pode-se provar em duas linhas, apenas com o que já se introduziu. Mas por ser tão fundamental em tudo o que segue optamos por um retorno às cartas. Sendo  $R^{D^E}$  o tensor de curvatura de  $D^E$ ,

$$R^{D^E}(X, Y)e = D_X^E D_Y^E e - D_Y^E D_X^E e - D_{[X, Y]}^E e, \quad \forall X, Y \in TM, \quad (4)$$

notamos  $\mathcal{R}^\xi$  o *tensor* definido por  $\mathcal{R}^\xi(X, Y) = \pi^*R^{D^E}(X, Y)\xi$ ,  $\forall X, Y \in TE$ , o qual como se espera provém da curvatura de  $\pi^*D^E$ .

**Proposição 1.1.** *A torsão de  $D^*$  verifica*

$$T^{D^*} = \pi^*T^{\nabla^M} \oplus \mathcal{R}^\xi. \quad (5)$$

*Demonstração.* Tomemos um carta  $x = (x^1, \dots, x^m)$  num aberto  $U$  de  $M$  e um referencial  $\{e_\alpha\}_{\alpha=1, \dots, k}$  de  $E$  no mesmo domínio, onde  $k$  é o ranque de  $E$ . Escrevamos os símbolos de Christoffel  $\nabla_{\partial_i}^M \partial_j = \Gamma_{ij}^{M, h} \partial_h$  e  $D_{\partial_i}^E e_\alpha = \Gamma_{i\alpha}^{E, \beta} e_\beta$ , com as convenções usuais. Temos em particular uma carta  $(x, y)$  em  $\pi^{-1}(U) \simeq U \times \mathbb{R}^k$  que permite escrever  $\xi = y^\alpha \pi^* e_\alpha \simeq y^\alpha \partial_\alpha$ . Derivando  $\xi$  na direcção de um qualquer vector  $X = X^i \partial_i + Y^\alpha \partial_\alpha$  tangente a  $E$ , encontramos a decomposição (2) de  $X$ :

$$X = (X^i \partial_i - X^i y^\alpha \Gamma_{i\alpha}^{E, \beta} \partial_\beta) + (X^i y^\alpha \Gamma_{i\alpha}^{E, \beta} + Y^\beta) \partial_\beta$$

Ou seja os vectores  $\pi^* \partial_i := \partial_i - y^\alpha \Gamma_{i\alpha}^{E, \beta} \partial_\beta$  formam em cada ponto uma base de  $\mathcal{H}^{D^E}$  e os vectores  $\partial_\beta = \pi^* e_\beta$  uma base de  $\mathcal{V}$ . Obviamente  $d\pi(\partial_j) = \partial_j$ .

Queremos provar que  $D_X^* Y - D_Y^* X - [X, Y] = \mathcal{R}^\xi(X, Y)$  — aceitemos desde logo que  $\nabla^M$  tem torsão nula, pois o caso geral é pouco mais complicado. Primeiro,

$$\begin{aligned} D_{\partial_j}^* \partial_i &= \pi^* \nabla_{\partial_j}^M \pi^* \partial_i + \pi^* D_{\partial_j}^E (y^\alpha \Gamma_{i\alpha}^{E, \beta} \partial_\beta) \\ &= \Gamma_{ji}^{M, h} \pi^* \partial_h + y^\alpha \left( \frac{\partial \Gamma_{i\alpha}^{E, \gamma}}{\partial x^j} + \Gamma_{i\alpha}^{E, \beta} \Gamma_{j\beta}^{E, \gamma} \right) \partial_\gamma. \end{aligned}$$

Como  $\nabla^M$  é simétrica,  $\Gamma_{ji}^{M, h} = \Gamma_{ij}^{M, h}$ , resulta em mais uma linha que  $T^{D^*}(\partial_i, \partial_j) = \mathcal{R}^\xi(\partial_i, \partial_j)$ . De facto, o tensor  $\mathcal{R}^\xi$  é nulo se alguma das entradas

for vertical. Deixa-se ao cuidado do leitor a demonstração das igualdades

$$D_{\partial_i}^* \partial_\alpha = D_{\partial_\alpha}^* \partial_i = \Gamma_{i\alpha}^{E,\beta} \partial_\beta \quad \text{e} \quad D_{\partial_\alpha}^* \partial_\beta = 0$$

que permitem finalmente concluir o resultado em geral.  $\square$

Vemos assim uma interpretação da torsão como expressão da curvatura, ou vice-versa, fenómeno comum da geometria diferencial como teoria simultâneamente una e plena de ubiquidades. A introdução de tensores e derivadas covariantes permite fazer o estudo da geometria de  $E$  de forma avançada, independente de coordenadas, focada em novas estruturas globais.

## 2 Métricas esfericamente simétricas

Continuando a tomar  $(E, D^E)$  da secção anterior, suponhamos que o fibrado vectorial  $E$  vem ainda munido de uma métrica  $g_E \in \Gamma(M; S^2 E^*)$ , definida positiva, com a qual a conexão dada é compatível, isto é,  $D^E g_E = 0$ , e suponhamos que a variedade base  $M$  é uma variedade riemanniana com métrica  $g_M$ . Podemos então introduzir uma estrutura pseudo-riemanniana  $g_{M,E}$  sobre  $E$  respeitando a decomposição (2) e escrevendo

$$g_{M,E} = e^{2\varphi_1} \pi^* g_M \oplus \pm e^{2\varphi_2} \pi^* g_E \quad (6)$$

onde  $\varphi_1, \varphi_2 \in C_E^\infty(\mathbb{R})$  são duas quaisquer funções escalares em  $E$ . Chamamos *métrica esfericamente simétrica* aquela em que  $\varphi_1, \varphi_2$  dependem apenas de um parâmetro, a saber, o raio-quadrado  $r = r(e) = \|e\|_E^2, \forall e \in E$ .

No caso das definidas positivas, tais métricas foram introduzidas em formulação geral em [3] (não encontramos outra referência), no seguimento de outros estudos de exemplos concretos por vários géometras ([1, 2, 4, 5]) e conhecidos físicos como [6].

Como  $r = \|\xi\|_E^2$ , resulta que  $dr(X) = 2\langle \xi, \pi^* D_X^E \xi \rangle_E = 2\langle \xi, X \rangle_E$  (notamos e.g.  $\langle X, Y \rangle_M = \pi^* g_M(X^h, Y^h)$ ). Usando a conexão de Levi-Civita provinda da métrica  $g_M$ , pode-se construir  $D^*$ . Obtemos uma conexão métrica  $\tilde{D} = D^* + C$ , com a mesma torsão, somando certo tensor simétrico

$$C_X Y = a(\xi^b(X) Y^h + \xi^b(Y) X^h) + c_1 \langle X, Y \rangle_M \xi + c_2 \langle X, Y \rangle_E \xi + b(\xi^b(X) Y^v + \xi^b(Y) X^v). \quad (7)$$

O seguinte teorema generaliza [3, Theorem 1.1] ao caso pseudo-riemanniano.

**Teorema 2.1.**  $\tilde{D}$  é uma conexão métrica ( $\tilde{D} g_{M,E} = 0$ ) se e só se

$$a = 2\varphi'_1 \quad c_1 = \mp 2\varphi'_1 e^{2(\varphi_1 - \varphi_2)} \quad b = 2\varphi'_2 = -c_2 . \quad (8)$$

Finalmente a conexão de Levi-Civita de  $g_{M,E}$  coincide com

$$\nabla_X^{M,E} Y = D_X^* Y + C_X Y \pm A_X Y - \frac{1}{2} \mathcal{R}^\xi(X, Y) \quad (9)$$

onde  $A$  é o tensor definido para o caso riemanniano em [3].

Como exemplo das métricas esféricamente simétricas recordamos a construção de Bryant-Salamon sobre  $E = \Lambda^2 T^* M \rightarrow M^4$ , de holonomia não só contida mas igual ao grupo de Lie excepcional  $G_2$  quando  $M = S^4$  ou  $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ . A métrica é definida por

$$g_{M,E} = \sqrt{2\tilde{c}_0^2 s r + \tilde{c}_1} \pi^* g_M \oplus \frac{\tilde{c}_0^2}{\sqrt{2\tilde{c}_0^2 s r + \tilde{c}_1}} \pi^* g_E \quad (10)$$

onde  $\tilde{c}_0, \tilde{c}_1 > 0$  e  $s = \text{Scal}^{g_M}/12$ . Em [2] mostram-se outras métricas  $G_2$  semelhantes. Aqui deixamos em perspectiva o estudo do caso de holonomia  $\tilde{G}_2$  dos split-octoniões, associada a métrica de assinatura (3, 4).

(Investigação financiada parcialmente pelos fundos FEDER, programa COMPETE, através da FCT Projecto PTDC/MAT/118682/2010.)

## Referências

- [1] M. T. K. Abbassi and M. Sarih, “On natural metrics on tangent bundles of Riemannian manifolds”, *Arch. Math. (Brno)*, Tom. 41 (2005), 71–92.
- [2] R. Albuquerque, “Self-duality and associated parallel or cocalibrated  $G_2$  structures”, arXiv:math.DG/1401.7314v2, 17 pp.
- [3] R. Albuquerque, “On vector bundle manifolds with spherically symmetric metrics”, arXiv:math.DG/1411.5952v1, 31 pp.
- [4] L. Bérard Bergery, “Quelques exemples de variétés riemanniennes complètes non compactes à courbure de Ricci positive”, *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math.* Vol. 302 (1986), 4, pp. 159–161.
- [5] R. L. Bryant e S. Salamon, “On the construction of some complete metrics with exceptional holonomy”, *Duke Math. Journ.*, Vol. 58(3), (1989), pp. 829–850.
- [6] G. W. Gibbons, D. N. Page e C. N. Pope, “Einstein metrics on  $S^3$ ,  $\mathbb{R}^3$  and  $\mathbb{R}^4$  bundles”, *Comm. Math. Physics* Vol. 127 (1990), no. 3, 529–553.

# ON THE HOMOTOPY TYPE OF FREE GROUP CHARACTER VARIETIES<sup>1</sup>

*Ana Casimiro*

Departamento de Matemática, FCT, UNL  
e-mail: amc@fct.unl.pt

*Carlos Florentino*

Departamento de Matemática, IST, UL  
e-mail: cfloren@math.tecnico.ulisboa.pt

*Sean Lawton*

Dep. Mathematical Sciences, George Mason University, USA  
e-mail: slawton3@gmu.edu

*André Oliveira*

Departamento de Matemática, UTAD  
e-mail: agoliv@utad.pt

**Abstract** Let  $G$  be a real reductive algebraic group with maximal compact subgroup  $K$ , and let  $F_r$  be a rank  $r$  free group. Here, we summarize the construction of a natural strong deformation retraction from the space of closed orbits in  $\mathrm{Hom}(F_r, G)/G$  to the orbit space  $\mathrm{Hom}(F_r, K)/K$ . In particular, these spaces have the same homotopy type.

**keywords:** Character varieties; Real reductive groups; Free group representations.

## 1 Introduction

In this article, we present one of the main results in [CFLO], about the homotopy equivalence between two related moduli spaces of representations of a free group  $F_r$  on  $r$  generators. These are the  $G$ -character variety  $\mathfrak{X}_r(G)$ , consisting of the closed orbits in the conjugation quotient space  $\mathrm{Hom}(F_r, G)/G$ , where  $G$  is a real reductive group, and the related quotient space  $\mathfrak{X}_r(K) = \mathrm{Hom}(F_r, K)/K$ , where  $K$  is a maximal compact subgroup of

---

<sup>1</sup>A.C., C.F. and A.O. were partially supported by FCT projects PTDC/MAT/120411/2010, MAT-GEO/0675/2012 and the Research Unit PEst-OE/MAT/UI4080/2011, Portugal; S.L. was partially supported by U.S. NSF grants DMS 1107452, 1107263, 1107367 - Gear Network, and 1309376, and the Simons Foundation grant 245642.

$G$ . One application of this result was the computation of the Poincaré polynomials of some of these character varieties, for non-compact  $G$ . We also studied the relation between the topology and *geometry* of the character varieties  $\mathfrak{X}_r(G)$  and (the real points of)  $\mathfrak{X}_r(\mathbf{G})$ , where  $\mathbf{G}$  is the complexification of  $G$ , making explicit use of *trace coordinates*. We provided a detailed analysis of some examples (real forms  $G$  of  $\mathbf{G} = \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ ), showing how the geometry of these spaces compare, and how to understand the deformation retraction in these coordinates. We also briefly described the Kempf-Ness sets for some of these examples. We thank the referee for the comments leading to improvements of this paper.

## 2 Complex and real character varieties

Let  $F_r$  be a rank  $r$  free group ( $r \in \mathbb{N}$ ) and  $\mathbf{G}$  be a complex reductive algebraic group defined over  $\mathbb{R}$ . We also assume  $\mathbf{G}$  irreducible. The  $\mathbf{G}$ -representation variety of  $F_r$  is defined as  $\mathfrak{R}_r(\mathbf{G}) := \mathrm{Hom}(F_r, \mathbf{G})$ . There is a homeomorphism between  $\mathfrak{R}_r(\mathbf{G})$  and  $\mathbf{G}^r$ , given by the evaluation map which is defined over  $\mathbb{R}$ , if  $\mathfrak{R}_r(\mathbf{G})$  is endowed with the compact-open topology (as defined on a space of maps, with  $F_r$  given the discrete topology, and  $\mathbf{G}$  the Euclidean topology from some affine embedding  $\mathbf{G} \subset \mathbb{C}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ), and  $\mathbf{G}^r$  with the product topology. As  $\mathbf{G}$  is a smooth affine variety defined over  $\mathbb{R}$ ,  $\mathfrak{R}_r(\mathbf{G})$  is also a smooth affine variety and it is defined over  $\mathbb{R}$ . Consider now the action of  $\mathbf{G}$  on  $\mathfrak{R}_r(\mathbf{G})$  by conjugation. This defines an action of  $\mathbf{G}$  on the algebra  $\mathbb{C}[\mathfrak{R}_r(\mathbf{G})]$  of regular functions on  $\mathfrak{R}_r(\mathbf{G})$ . Let  $\mathbb{C}[\mathfrak{R}_r(\mathbf{G})]^\mathbf{G}$  denote the subalgebra of  $\mathbf{G}$ -invariant functions. Since  $\mathbf{G}$  is reductive the affine categorical quotient may be defined as  $\mathfrak{X}_r(\mathbf{G}) := \mathfrak{R}_r(\mathbf{G})//\mathbf{G} = \mathrm{Spec}_{\max}(\mathbb{C}[\mathfrak{R}_r(\mathbf{G})]^\mathbf{G})$ . This is a singular affine variety (irreducible and normal, since  $\mathbf{G}^r$  is smooth and irreducible<sup>2</sup>), whose points correspond to the Zariski closures of the orbits. Since  $\mathfrak{X}_r(\mathbf{G})$  is an affine variety, it is a subset of an affine space, and inherits the Euclidean topology. With respect to this topology, in [FL], it is shown that  $\mathfrak{X}_r(\mathbf{G})$  is homeomorphic to the conjugation orbit space of closed orbits (called the *polystable quotient*).  $\mathfrak{X}_r(\mathbf{G})$ , together with that topology, is called the  $\mathbf{G}$ -character variety. Let us define the conditions on a real Lie group  $G$ , for which our results will apply.

**Definition 2.1.** Let  $K$  be a compact Lie group. We say that  $G$  is a *real  $K$ -reductive Lie group* if the following conditions hold: (1)  $K$  is a maximal compact subgroup of  $G$ ; (2) there exists a complex reductive algebraic group

<sup>2</sup> In Subsection 2.2 of [CFLO] it was accidentally stated that  $\mathfrak{X}_r(\mathbf{G})$  is not necessarily irreducible; this is generally the case when  $F_r$  is replaced by a finitely generated group  $\Gamma$ .

$\mathbf{G}$ , defined over  $\mathbb{R}$ , such that  $\mathbf{G}(\mathbb{R})_0 \subseteq G \subseteq \mathbf{G}(\mathbb{R})$ , where  $\mathbf{G}(\mathbb{R})$  denotes the real algebraic group of  $\mathbb{R}$ -points of  $\mathbf{G}$ , and  $\mathbf{G}(\mathbb{R})_0$  its identity component (in the Euclidean topology); (3)  $G$  is Zariski dense in  $\mathbf{G}$ .

We note that, if  $G \neq \mathbf{G}(\mathbb{R})$ , then  $G$  is not necessarily an algebraic group (consider for example  $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})_0$ ). When  $K$  is understood, we often simply call  $G$  a real reductive Lie group. All classical real matrix groups, as well as all complex reductive Lie groups, are in this setting. As an example which is not under the conditions of Definition 2.1, we can consider  $\widetilde{\mathrm{SL}}(n, \mathbb{R})$ , the universal covering group of  $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ . For  $n \geq 2$  it is not a matrix group, and so does not satisfy our definition, since all real reductive  $K$ -groups are linear.

As above, let  $K$  be a compact Lie group, and  $G$  be a real  $K$ -reductive Lie group. In like fashion, we define the  $G$ -representation variety of  $F_r$ :  $\mathfrak{R}_r(G) := \mathrm{Hom}(F_r, G)$ . Again,  $\mathfrak{R}_r(G)$  is homeomorphic to  $G^r$ . Similarly, as a set, we define  $\mathfrak{X}_r(G) := \mathfrak{R}_r(G) // G$  to be the set of closed orbits under the conjugation action of  $G$  on  $\mathfrak{R}_r(G)$ . We give  $\mathfrak{X}_r(G)$  the quotient topology on the subspace of points with closed orbits in  $\mathfrak{R}_r(G)$ . This quotient coincides with the one considered by Richardson-Slodowy in [RS, Section 7], and it is a non-trivial result in [RS] that this quotient is always Hausdorff. It is likewise called the  $G$ -character variety of  $F_r$  even though it may not even be a semi-algebraic set. However, it is an affine real semi-algebraic set when  $G$  is real algebraic. For  $K$  a compact Lie group, with its usual topology, we also define the space  $\mathfrak{X}_r(K) := \mathrm{Hom}(F_r, K) / K \cong K^r / K$ , called the  $K$ -character variety of  $F_r$ . Since the  $K$ -orbits are always closed and  $K$  is real algebraic, this construction is a special case of the construction above. So it is Hausdorff and can be identified with a semi-algebraic subset of  $\mathbb{R}^d$ , for some  $d$ . Moreover, it is compact, being the compact quotient of a compact space.

### 3 Cartan decomposition and deformation to the maximal compact

Let  $\mathfrak{g}$  denote the Lie algebra of  $G$ , and  $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$  the Lie algebra of  $\mathbf{G}$ . We will fix a Cartan involution of  $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$  which restricts to a Cartan involution,  $\theta$ , of  $\mathfrak{g}$ . This choice allows for a Cartan decomposition of those Lie algebras. In particular,  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$  with  $\theta|_{\mathfrak{k}} = 1$  and  $\theta|_{\mathfrak{p}} = -1$ . Furthermore,  $\mathfrak{k}$  is the Lie algebra of a maximal compact subgroup,  $K$ , of  $G$ . The Cartan involution of  $\mathfrak{g}$  lifts to a Lie group involution  $\Theta : G \rightarrow G$  whose differential is  $\theta$  and such that  $K = \mathrm{Fix}(\Theta) = \{g \in G : \Theta(g) = g\}$ . The multiplication map provides a diffeomorphism  $G \simeq K \times \exp(\mathfrak{p})$ . In particular, the exponential

is injective on  $\mathfrak{p}$ . If we write  $g = k \exp(X)$ , for some  $k \in K$  and  $X \in \mathfrak{p}$ , then  $\Theta(g)^{-1}g = \exp(2X)$ . So define  $(\Theta(g)^{-1}g)^t := \exp(2tX)$ , for any real parameter  $t$ .

**Proposition 3.1.** *The map  $H : [0, 1] \times G \rightarrow G$ ,  $H(t, g) = f_t(g) := g(\Theta(g)^{-1}g)^{-t/2}$  is a strong deformation retraction from  $G$  to  $K$ , and for each  $t$ ,  $f_t$  is  $K$ -equivariant with respect to the action of conjugation of  $K$  in  $G$ .*

By Proposition 3.1, there is a  $K$ -equivariant strong deformation retraction from  $G$  to  $K$ , so there is a  $K$ -equivariant strong deformation retraction from  $G^r$  onto  $K^r$  with respect to the diagonal action of  $K$ . This immediately implies:

**Corollary 3.2.** *Let  $K$  be a compact Lie group and  $G$  be a real  $K$ -reductive Lie group. Then  $\mathfrak{X}_r(K)$  is a strong deformation retract of  $\mathfrak{R}_r(G)/K$ .*

## 4 Kempf-Ness set and deformation retraction for character varieties

As before, fix a compact Lie group  $K$ , and a real  $K$ -reductive Lie group  $G$ . Suppose that  $G$  acts linearly on a complex vector space  $\mathbb{V}$ , equipped with a Hermitian inner product  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Without loss of generality we can assume that  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  is  $K$ -invariant, by averaging.

**Definition 4.1.** A vector  $X \in \mathbb{V}$  is a *minimal vector* for the action of  $G$  on  $\mathbb{V}$  if  $\|X\| \leq \|g \cdot X\|$ , for every  $g \in G$ , where  $\|\cdot\|$  is the norm corresponding to  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

Let  $\mathcal{KN}_G = \mathcal{KN}(G, \mathbb{V})$  denote the set of minimal vectors.  $\mathcal{KN}_G$  is known as the *Kempf-Ness set* in  $\mathbb{V}$  with respect to the action of  $G$ . It is a closed algebraic set in  $\mathbb{V}$ . The Kempf-Ness theory also works for closed  $G$ -subspaces. Indeed, let  $Y$  be an arbitrary closed  $G$ -invariant subspace of  $\mathbb{V}$ , and define  $\mathcal{KN}_G^Y := \mathcal{KN}_G \cap Y$ . The next theorem is proved in [RS, Proposition 7.4, Theorems 7.6, 7.7 and 9.1].

**Theorem 4.2.** *The quotient  $Y//G$  is a closed Hausdorff space and if, in addition,  $Y$  is a real algebraic subset of  $\mathbb{V}$ , it is also homeomorphic to a closed semi-algebraic set in some  $\mathbb{R}^d$ . Moreover, there is a  $K$ -equivariant deformation retraction of  $Y$  onto  $\mathcal{KN}_G^Y$ .*

To apply the Kempf-Ness theorem to our situation, we need to embed the  $G$ -invariant closed set  $Y = \mathfrak{R}_r(G) = \text{Hom}(F_r, G) \cong G^r$  in a complex vector space  $\mathbb{V}$ , as follows. As  $\mathbf{G}$  is a complex reductive algebraic group,  $\mathbf{G}$  and  $G$  can be embedded in some  $\text{GL}(n, \mathbb{C})$  and  $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ , respectively. In this case, the Cartan involution is given by  $\theta(A) = -A^t$ , so that

$\Theta(g) = (g^{-1})^t$ . From now on, we will assume this situation. We can obtain the embedding of  $K^r$  ( $r \in \mathbb{N}$ ) into the vector space given by the product of the spaces of all  $n$ -square complex matrices, which we denote by  $\mathbb{V}$ . Precisely,  $\mathbb{V} := \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})^r \cong \mathbb{C}^{rn^2}$ . The adjoint representation of  $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$  in  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$  restricts to a representation  $G \rightarrow \mathrm{Aut}(\mathbb{V})$  given by  $g \cdot (X_1, \dots, X_r) = (gX_1g^{-1}, \dots, gX_rg^{-1})$ ,  $g \in G$ ,  $X_i \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ . Moreover, this yields a representation  $\mathfrak{g} \rightarrow \mathrm{End}(\mathbb{V})$  of the Lie algebra  $\mathfrak{g}$  of  $G$  in  $\mathbb{V}$  given by the Lie brackets:  $A \cdot (X_1, \dots, X_r) = (AX_1 - X_1A, \dots, AX_r - X_rA) = ([A, X_1], \dots, [A, X_r])$  for every  $A \in \mathfrak{g}$  and  $X_i \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ . In what follows, the context will be clear enough to distinguish the notations of the above representations. We choose an inner product  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  in  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$  which is  $K$ -invariant, under the restriction of the representation  $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \rightarrow \mathrm{Aut}(\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}))$  to  $K$ . From this we obtain an inner product on  $\mathbb{V}$ ,  $K$ -invariant by the corresponding diagonal action of  $K$ :  $\langle (X_1, \dots, X_r), (Y_1, \dots, Y_r) \rangle = \sum_{i=1}^r \langle X_i, Y_i \rangle$  for  $X_i, Y_i \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ . In  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ ,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  can be given explicitly by  $\langle A, B \rangle = \mathrm{tr}(A^*B)$ . So by Theorem 4.2, Proposition 3.1 and Corollary 3.2 we have the following theorem:

**Theorem 4.3.** *The spaces  $\mathfrak{X}_r(G)$  and  $\mathfrak{X}_r(K)$  have the same homotopy type. In particular, the homotopy type of  $\mathfrak{X}_r(G)$  depends only on the maximal compact subgroup  $K$  of  $G$ .*

In our setting, the Kempf-Ness can be explicitly described as the closed set given by:

**Proposition 4.4.**  $\mathcal{KN}_G^Y = \{(g_1, \dots, g_r) \in G^r : \sum_{i=1}^r g_i^* g_i = \sum_{i=1}^r g_i g_i^*\}$ . In particular, we have the inclusion  $K^r \cong \mathrm{Hom}(F_r, K) \subset \mathcal{KN}_G^Y$ .

For  $G$  algebraic, there is a natural inclusion of finite CW-complexes  $\mathfrak{X}_r(K) \subset \mathfrak{X}_r(G)$  (see Lemma 4.9 of [CFLO]). Using this result, Proposition 4.4, Theorem 4.2 and Whitehead's Theorem we achieve the main result: (see Section 6. of [CFLO] for an example)

**Theorem 4.5.** *There is a strong deformation retraction from  $\mathfrak{X}_r(G)$  to  $\mathfrak{X}_r(K)$ .*

## References

- [CFLO] A. Casimiro, C. Florentino, S. Lawton, A. Oliveira, "Topology of moduli spaces of free group representations in real reductive groups", *Forum Math*, DOI: 10.1515/forum-2014-0049.
- [FL] C. Florentino and S. Lawton, "Topology of character varieties of Abelian groups", *Topology and its Applications*, Vol. 173 (2014), pp. 32-58.
- [RS] R. W. Richardson, P. J. Slodowy, "Minimum vectors for real reductive algebraic groups", *J. London Math. Soc.*, (2) Vol. 42, No. 3 (1990), pp. 409-429.

# MODULI SPACES IN HIGHER GAUGE THEORY

*Roger Picken*

Center for Mathematical Analysis, Geometry and Dynamical Systems  
Mathematics Department, IST, Universidade de Lisboa,  
e-mail: roger.picken@tecnico.ulisboa.pt

**Resumo:** Por analogia com a teoria de *gauge* usual, descrevemos espaços de *moduli* de conexões *flat* em teoria de *gauge* superior.

**Abstract:** By analogy with ordinary gauge theory, we describe moduli spaces of flat connections in higher gauge theory.

**palavras-chave:** teoria de *gauge* superior; espaço de *moduli*; 2-grupo.

**keywords:** higher gauge theory; moduli space; 2-group.

## 1 Moduli spaces in higher gauge theory

This article describes work done in separate collaborations with João Faria Martins, Jeffrey Morton and Diogo Bragança [3, 5, 11].

Let  $\{U_i\}_{i \in I}$  be a good open cover of a manifold  $M$ . Recall that a 1-bundle, i.e. a principal  $G$ -bundle with connection, may be given in terms of transition functions  $g_{ij} : U_{ij} \rightarrow G$ , ( $U_{ij}$  denotes  $U_i \cap U_j$ ) and local connection 1-forms  $A_i \in \Lambda^1(U_i, \mathfrak{g})$ , where  $\mathfrak{g}$  is the Lie algebra of  $G$ . Likewise a 2-bundle with structure 2-group  $\mathcal{G} = (G, E, \partial, \triangleright)$  (where  $G$  and  $E$  are two Lie groups - see below for the definition) is described by transition functions  $g_{ijk} : U_{ijk} \rightarrow E$  and  $h_{ij} : U_{ij} \rightarrow G$ , and transition 1-forms  $\eta_{ij} \in \Lambda^1(U_{ij}, \mathfrak{e})$ , as well as local connection 1- and 2-forms  $A_{ij} \in \Lambda^1(U_{ij}, \mathfrak{g})$  and  $B_i \in \Lambda^2(U_i, \mathfrak{e})$ . Various relations hold, such as the well-known cocycle condition for  $g_{ij}$ . For the continuation of this hierarchy to 3-bundles, see [4].

We will approach (Lie) 2-groups as crossed modules of groups.

**Definition 1.1** A Lie crossed module  $(G, E, \partial, \triangleright)$  is given by a pair of Lie groups  $E, G$ , together with a group homomorphism  $\partial : E \rightarrow G$  and a left action  $\triangleright$  of  $G$  on  $E$  by automorphisms, such that  $\partial(X \triangleright e) = X\partial(e)X^{-1}$  for each  $X \in G, e \in E$ , and  $\partial(e) \triangleright f = efe^{-1}$  for each  $e, f \in E$ .

A class of examples comes from central extensions of groups:  $1 \rightarrow A \rightarrow H \xrightarrow{\partial} K \rightarrow 1$  gives rise to a crossed module:  $E = H \xrightarrow{\partial} K = G$  with lifted action  $k \triangleright h = h'hh'^{-1}$  for any  $h'$  such that  $\partial(h') = k$  (well-defined since  $A = \ker \partial$  is central in  $H$ ). There is a corresponding definition of a differential crossed

module of Lie algebras:  $\partial: \mathfrak{e} \rightarrow \mathfrak{g}$  and  $\triangleright: \mathfrak{g} \times \mathfrak{e} \rightarrow \mathfrak{e}$  where  $\partial$  is a Lie algebra morphism and  $\mathfrak{g}$  acts on  $\mathfrak{e}$  by derivations.

The algebra associated to crossed modules is naturally 2-dimensional. Consider squares, or 2-cubes, of the form

$$\begin{array}{ccc} & W & \\ Z & \square & Y \\ & X & \end{array} \quad (1)$$

where  $X, Y, Z, W \in G$  and  $e \in E$ , such that  $\partial(e) = XYW^{-1}Z^{-1}$ . We can define operations of horizontal and vertical multiplication of 2-cubes, in such a way that they satisfy the interchange law: when evaluating a two-by-two array of 2-cubes, we may multiply horizontally then vertically, or vice-versa, and get the same result. Thus we can evaluate consistently the product of any rectangular array of 2-cubes. This construction with 2-cubes is called the *double groupoid* of the crossed module, with a single object, horizontal and vertical morphisms in  $G$ , and squares in  $E$ .

For 1-bundles the parallel transport along a path is a product of factors in  $G$ , like  $g_{12}(x)$ , the transition function evaluated at  $x \in U_{12}$ , and  $\mathcal{P} \exp \int_{p_1} A_1$ , the “path-ordered” exponential of the connection 1-form  $A_1$  along a path  $p_1$  contained in  $U_1$  (which is defined as the solution of an ODE). Likewise the evaluation of surface transports for 2-bundles is carried out by evaluating an array of 2-cubes coming from constituent points, paths and 2-paths, using transition functions and path/surface-ordered integration of 1- and 2-forms [3].

Setting  $e = 1$  in (1), we have a commuting 2-cube, equivalent to the equation  $XY = ZW$ . In the same way, we may define commuting 3-cubes of six 2-cubes and use them to express equations for crossed modules [2, 3]. Similarly there are notions of commuting 4-cubes and beyond.

Gauge transformations for 1-bundles are given by  $h_i: U_i \rightarrow G$ , and their action on transition functions, connections and transports may be expressed in terms of commuting 2-cube equations, e.g.  $g_{ij}(x) \mapsto g'_{ij}(x) = h_i(x)g_{ij}(x)h_j(x)^{-1}$ . Gauge transformations for 2-bundles are given by  $h_{ij}: U_{ij} \rightarrow G$  and  $\eta_i \in \Lambda^1(U_i, \mathfrak{e})$ . Their effect on transition functions, connections and transports is given in terms of commuting higher cubes. We will be analysing them shortly from a slightly different perspective.

For 1-bundles we recall that the moduli space of flat connections modulo gauge transformations is given by  $Conn/Gauge = \text{Hom}(\pi_1(M), G)/G$ , using the correspondence between connections and holonomies.  $G$  acts via

the adjoint action on the values of a homomorphism. Pursuing such finite-dimensional models for quotients of infinite-dimensional function spaces, it is convenient to consider manifolds endowed with a cell structure, e.g. a 2-sphere with one 0-cell, one 1-cell and two 2-cells. Then we define the set of connections  $Conn$  to be the set of assignments  $g : \{1\text{-cells}\} \rightarrow G$ , such that for each 2-cell a flatness condition holds (the product of the 1-cell assignments around the boundary is 1).  $Conn$  is acted on by the group of gauge transformations,  $Gauge$ , whose elements are assignments  $\gamma : \{0\text{-cells}\} \rightarrow G$ , with pointwise group multiplication. The action is expressed, as before, via commuting 2-cube equations, e.g. for a 1-cell  $c$  from  $x$  to  $y$ , we have  $g_c \mapsto g'_c = \gamma_x g_c \gamma_y^{-1}$ .

We now sketch work with Jeffrey Morton [5] generalizing this picture to 2-bundles. The category (in fact a groupoid) of connections  $Conn$  has as objects assignments  $\{1\text{-cells}\} \rightarrow G$ , and as morphisms assignments  $\{2\text{-cells}\} \rightarrow E$ , such that for each 3-cell in the manifold a commuting 3-cube equation holds. The category  $Conn$  is acted on by the 2-group of gauge transformations,  $Gauge$ , given by assignments  $\{0\text{-cells}\} \rightarrow G$  and  $\{0\text{-cells}\} \rightarrow E$ . The action on connections is given by a commuting 3-cube equation for each 1-cell and a commuting 4-cube equation for each 2-cell.

To express this precisely we need a general notion of the action of a 2-group on a category. Recall that the action of a group  $G$  on a set  $X$ , i.e. a homomorphism  $\phi : G \rightarrow \text{Aut } X$ , may be given by a function  $\hat{\phi} : G \times X \rightarrow X$  such that we have the commuting diagram in the category **Set** on the left below ( $m$  is the multiplication map). From this we construct the transformation groupoid  $X//G$ . By analogy, the action of a 2-group  $\mathcal{G}$  on a category or groupoid  $\mathbf{C}$  is described by a functor  $\hat{\Phi} : \mathcal{G} \times \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$  such that we have the (strictly) commuting diagram in the category **Cat** on the right below. From this we construct the transformation double category, or double groupoid,  $\mathbf{C}//\mathcal{G}$ . We expect that this does not depend on the cell structure up to a suitable notion of (higher) Morita equivalence.

$$\begin{array}{ccc}
 G \times G \times X \xrightarrow{m \times Id_X} & G \times X & \\
 Id_G \times \hat{\phi} \downarrow & \downarrow \hat{\phi} & \\
 G \times X \xrightarrow{\hat{\phi}} & X & 
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 \mathcal{G} \times \mathcal{G} \times \mathbf{C} \xrightarrow{\otimes \times Id_{\mathbf{C}}} & \mathcal{G} \times \mathbf{C} & \\
 Id_{\mathcal{G}} \times \hat{\Phi} \downarrow & \downarrow \hat{\Phi} & \\
 \mathcal{G} \times \mathbf{C} \xrightarrow{\hat{\Phi}} & \mathbf{C} & 
 \end{array}$$

As a simple example, we compare the 1- and 2-gauge theory of  $M = S^1$ , with one 0-cell and one 1-cell:  $Conn/Gauge = G//G$  for 1-gauge theory (where  $G$  acts on itself by the adjoint action), and  $Conn/Gauge = \mathcal{G}//\mathcal{G}$  for 2-gauge theory (using the 2-group adjoint action of  $\mathcal{G}$  on  $\mathcal{G}$  - see [5]).

When the groups  $G$  and  $E$  are finite, the possible flat connections and gauge transformations are also finite in number (assuming  $M$  has a finite number of cells). In [1] we looked at counting invariants for surfaces with boundary and a given cell structure. These invariants, with nice properties, were obtained by counting the number of compatible colourings of the 1-cells with elements of  $G$  and the 2-cells with elements of  $E$ , satisfying a compatibility analogous to (1) for each 2-cell. They are of the form:

$$\frac{|E|^v}{|G|^v|E|^e} \sum_{\text{colourings}} 1$$

where  $v$  is the number of 0-cells,  $e$  is the number of 1-cells, and  $|G|$  and  $|E|$  denote the respective number of elements. In the light of higher gauge theory, one is tempted to interpret this invariant as the volume of the moduli space of flat connections modulo gauge transformations modulo higher gauge transformations.

**Acknowledgements** This work was co-funded by FCT/Portugal through projects PEst-OE/EEI/LA0009/2013 and EXCL/MAT-GEO/0222/2012.

## Referências

- [1] D. Bragança and R. Picken, “A new class of 2D TQFT from finite 2-groups”, *in preparation, based on the first author’s “Novos Talentos em Matemática” project.*
- [2] R. Brown, P. J. Higgins and R. Sivera, *Nonabelian algebraic topology. Filtered spaces, crossed complexes, cubical homotopy groupoids*, European Mathematical Society, Zürich, 2011.
- [3] J. Faria Martins and R. Picken, “Surface holonomy for non-Abelian 2-bundles via double groupoids”, *Adv. Math.*, 226, No. 4 (2011), pp. 3309-3366.
- [4] J. Faria Martins and R. Picken, “The fundamental Gray 3-groupoid of a smooth manifold and local 3-dimensional holonomy based on a 2-crossed module”, *Differ. Geom. Appl.*, 29, No. 2 (2011), pp. 179-206.
- [5] J. C. Morton and R. Picken, “Transformation Double Categories Associated to 2-Group Actions”, *arXiv:1401.0149*; “2-Group Actions on Moduli Spaces of Higher Gauge Theory”, *in preparation.*

# História da Matemática

*Editor Convidado:* Bernardo Mota

<i>Jorge Nuno Silva</i> O livro dos jogos de Afonso X, o Sábio .....	63
<i>Carlota Simões</i> Pedro Nunes e a coroação de D. Sebastião .....	69
<i>Nuno Castel-Branco</i> Início da Mecânica em Portugal e o Tratado da Estática de Hendrick Uvens (1645) .....	73
<i>António Costa Canas</i> Longitude – Uma revolução na ciência náutica .....	77
<i>Maria Elisabete Ferreira</i> Teoria(s) de proporções em Portugal na primeira metade do século XVIII .....	81
<i>Reinhard Kahle</i> O fim da GRUNDLAGENKRISE .....	87



## O LIVRO DOS JOGOS DE AFONSO X, O SÁBIO

*Jorge Nuno Silva*

e-mail: jnsilva@gmail.com

No âmbito do projecto História dos Jogos em Portugal<sup>1</sup>, com vista a contribuir para as bases do estudo das tradições lúdicas portuguesas, elaborámos uma versão portuguesa da obra de Afonso X.

O *Livro de Jogos* de Afonso X, o Sábio, é uma fonte incontornável para o estudo dos jogos de tabuleiro medievais, não somente entre nós. Em boa hora optámos por produzir uma versão portuguesa, baseada na excelente tradução de Ida Boavida. Apesar de ter sido escrita há mais de sete séculos, esta obra ainda não tem versões nas línguas mais utilizadas no mundo, por exemplo, não existem versões em inglês ou em francês. A razão reside, estamos convencidos, na complexidade e profundidade da obra. O trabalho de Sonia Golladay (Golladay 2007), uma tese de doutoramento com mais de 1400 páginas, aí está para o mostrar.

As versões modernas da obra do Rei-Sábio foram consultadas, nomeadamente as que transcendem a simples tradução, abordando os jogos descritos na obra, como Calvo (Calvo 1987), Calvo & Schädler (Alfons X Der Weise 2009), Canettieri (Canettieri 1996) e Golladay (Golladay 2007). De acordo com a nossa opção, não explorámos as componentes artísticas e simbólicas do Livro de Jogos, como Golladay fez.

Quisemos proporcionar aos leitores de língua portuguesa, por um lado, um caminho simples para a obra afonsina, mantendo o estilo da escrita que transporta o leitor a tempos medievais; por outro lado, o tratamento moderno que demos aos jogos, principalmente ao xadrez, pretende servir o jogador hodierno.

Afonso, o Sábio, nasceu em Toledo em 1221 e morreu em Sevilha em 1284. Rei de Castela e Leão entre 1252 e 1284, foi também imperador do Sacro Império Romano-Germânico, cargo que nunca exerceu de facto. Os seus tempos foram marcados pelas guerras com os mouros provenientes do Norte de África, em que acompanhou seu pai, Fernando III de Castela, desde novo. A morte do seu filho primogénito, Fernando de La Cerda e as lutas pela sucessão que se seguiram, repletas de abandonos e traições, amarguraram os últimos anos do monarca.

O avô materno de D. Dinis de Portugal fomentou a actividade cultural de modo marcante. Do seu tempo é a escola de tradutores de Toledo, em que cristãos,

---

<sup>1</sup>Projecto FCT PTDC/HCT/70823/2006.

judeus e muçulmanos traduziram para as línguas ocidentais as obras clássicas, preservadas e anotadas pelos estudiosos islâmicos. Este «renascimento do século XIII» desencadeou os grandes avanços na sociedade medieval.

Afonso foi mecenas cultural generoso, mas também um autor maior. A sua obra mais conhecida, *As Cantigas de Santa Maria*, é um marco da literatura galaico-portuguesa medieval.

Nas ciências, colaborou em livros de astronomia, sendo as *Tabelas Afonsinas*, um registo científico do posicionamento dos astros, obra de referência para os vindouros, por muitos séculos.

Outros temas foram abordados pela pena do Rei-Sábio, como o direito (*As Sete Partidas*, 1265), a história (*Crónica Geral de Espanha, História Geral*) e a mineralogia (*O Lapidário*).

O Livro dos Jogos de Afonso X foi terminado em 1283<sup>2</sup>, em Sevilha, um ano antes da morte do erudito monarca. O volume único, ilustrado com centena e meia de iluminuras belíssimas, está hoje no Escorial<sup>3</sup>. A riqueza artística, cultural e simbólica da obra está hoje, tantos séculos depois do seu aparecimento, por compreender totalmente.

As iluminuras, nomeadamente as que acompanham os problemas de xadrez, contêm representações do próprio rei, de sua mulher, Violande (Prob. 16), de sua amante (Prob. 19), de seu filho Sancho (Prob. 74), de sua filha natural Beatriz, que viria a ser rainha de Portugal e mãe de D. Dinis (Prob. 86), mas também de árabes (Prob. 7), judeus (Prob. 5), músicos (Prob. 42), freiras (Prob. 44), entre outros.



Violande, à direita, defronta a concubina de Afonso, Mayor Guillén de Guzmán, Fol. 18r.

<sup>2</sup>Na era espanhola a data é 1321. Que a soma dos dígitos deste número seja 7, o número favorito de Afonso, pode ser aqui uma simples coincidência.

<sup>3</sup>Man. J.T.6.

Outras figuras parecem representar agentes importantes na época, ainda por identificar, ou referir-se ao passado. Muito há ainda para ler nestas ilustrações, como se pode constatar em Golladay (Golladay 2007).



O rei Afonso e a rainha Violande jogam xadrez, Fol. 54v.

Golladay, na sua extensa e profunda tese de doutoramento, faz a pergunta central: “Por que escreveu Afonso X um livro de jogos?”. Esta pergunta conduz-nos naturalmente a questionar a função dos jogos na história da Humanidade.

A prevalência dos jogos na cultura começou a ser teorizada em *Homo Ludens*, por Huizinga (Huizinga 1955) no século passado.

Johan Huizinga mostra como a actividade de jogar<sup>4</sup> precede a cultura e como esta surge nessa forma antes de se cristalizar no sagrado e no civilizacional.

[...] culture arises in the form of play, [...] it is played from the very beginning» (p. 46).

*Homo Ludens* apresenta ainda estudos pioneiros da relação entre o jogo e outras áreas da vivência humana, como a arte, a filosofia e a lei, por exemplo.

Entre nós, Sílvio Lima antecipa por pouco algumas das ideias fundamentais de Huizinga (Lima 2002).

A importância e ubiquidade dos jogos jamais deixou de ser constatada por estudiosos de vários campos. A sua origem perde-se nos tempos longínquos e emaranha-se com símbolos, mitos e artes divinatórias.

Esta obra em sete capítulos e doze (doze signos do zodíaco!) cabeçalhos tem, na opinião de Golladay, uma intenção profundamente espiritual.

As simulacra of cosmic interplay, games are physical expressions or artifacts of the same function as myths, i.e. man’s attempts

<sup>4</sup>Aqui, jogar entende-se em sentido lato, semelhante ao inglês to play.

to understand and explain the world and his place within it. Games, like myths, cathedral architecture and music, are all designed to elevate the consciousness to a spiritual plane and ultimately to awaken a higher dimension of understanding» (Golladay 2007, p. 85).

O livro está dividido em sete capítulos (O Livro do Xadrez, O Livro de Dados, Livro de Jogos das Tábulas, Livro dos Jogos Grandes, Jogos das Quatro Estações, Livro do Alguergue, O Livro dos Jogos de Astronomia) sendo sete um número simbolicamente muito importante para Afonso, dada a sua carga cristã, de união entre a Terra (4) e o Céu (3). Este número está presente em vários contextos na obra de Afonso. Dividiu a sua obra jurídica em sete partes; em múltiplos de sete, as tabelas astronómicas; o Setenário refere, por exemplo, os sete ensinamentos que recebeu de seu pai, os sete nomes de Deus, as sete virtudes, as sete artes liberais, os sete planetas. Há diversas ocorrências numerológicas no livro, tentaremos assinalar algumas das mais relevantes.

O capítulo dedicado ao xadrez contém sessenta e quatro fólios, numa referência óbvia ao número de casas do tabuleiro.

No prólogo, Afonso aborda a origem mítica dos jogos que vai tratar. Relata a lenda do rei que, na Índia, consultou três sábios sobre se deve ser a inteligência ou a sorte a ter maior relevância na vida, solicitando-lhes jogos que apoiassem as suas respostas. Após consultarem os seus livros, os sábios dividiram-se; o primeiro valorizava a inteligência e mostrou o xadrez; o segundo acreditava que nada se pode contra a sorte, e ilustrou com os Dados; o terceiro sábio defendeu a inteligência para tirar partido dos caprichos da sorte e mostrou o Gamão.

Dos muitos mitos ligados à criação do xadrez que se conhecem, este que Afonso apresenta é original. A presença de três sábios liga-o aos três Reis Magos e à religião cristã. Aliás, esta ligação vê-se reforçada ao constatar que Santo Isidoro de Sevilha (560-636) havia já mencionado os mesmos jogos, na mesma ordem, no «Livro XVIII» das suas *Etimologiae* (Isidoro 1960).

## Referências

Alfons X, “der Weise”. *Das Buch der Spiele*. Ludographie 1. Berlin, Wien: LIT, 2009.

Alfonso X El Sabio. *Libro de los juegos: acedrex, dados y tablas*. Orde-

*namiento de las tafurerias*. Edição de Raúl Orellana Calderón. Biblioteca Castro. Madrid: Fundación José Antonio de Castro, 2007.

Calvo, Ricardo. “El libro de los juegos”. In P. Garcia Morencos (org.), *Alfonso X el Sabio, libros del ajedrez, dados e tablas* (facsimile and commentary). Madrid/Valencia, 1987.

Canettieri, Paolo. *Alfonso X, El Sabio, Il Libro dei Giochi*. Bologna, 1996.

Crombach, Mechthild. “Transcripción de los textos del manuscrito original”. In P. Garcia Morencos (org.), *Alfonso X el Sabio, libros del ajedrez, dados e tablas* (facsimile and commentary). Madrid/Valencia, 1987.

Golladay, Sonja. *Los Libros de Acedrex Dados e Tablas: Historical, Artistic and Metaphysical Dimensions of Alfonso X's Book of Games*. University of Arizona, 2007.

Huizinga, Johan. *Homo Ludens*. Boston: Beacon Press, 1955.

Isidoro. *De Natura Rerum. Isidore de Seville: Traité de la Nature*. Org. por Jaque Fontaine. Féret, 1960.

Lima, Sílvio. *Obras Completas*. 2 vols. Fundação Calouste Gulbenkian, 2002.

*Das Schachzabelbuch Konig Alfons Des Weisen*. Genève/Zurich, 1941.

Silva, J.N., *O livro de jogos de Afonso X, o Sábio*. Apenas 2013.

# PEDRO NUNES E A COROAÇÃO DE D. SEBASTIÃO

*Carlota Simões*

Centro de Física Computacional e  
Departamento de Matemática da  
Faculdade de Ciências e Tecnologia, e  
Museu da Ciência  
Universidade de Coimbra  
e-mail: carlota@mat.uc.pt

**Resumo:** Nos anos 20 do século passado, Gomes Teixeira dava-nos conta de um suposto conselho dado por Pedro Nunes à Rainha D. Catarina, regente do Reino de Portugal, em vésperas da coroação de D. Sebastião, no sentido de adiar a cerimónia alegando motivos astrológicos. Neste texto discutimos a possibilidade de Pedro Nunes ter de facto construído a carta astrológica para o momento da coroação. Será que a análise das efemérides para aquele momento à luz dos tratados da época pode trazer algo mais a este assunto?

**Abstract:** During the 20's of last century, Gomes Teixeira wrote about an alleged advice from Pedro Nunes to Queen D. Catarina, ruler of the Kingdom of Portugal, a few days before the coronation of King Sebastian, in order to postpone the ceremony for astrological reasons. We discuss the possibility that Pedro Nunes had actually examined the astrological chart for the moment of the coronation. Will the analysis of ephemeris using literature from that period bring more information on this subject?

**palavras-chave:** Pedro Nunes; Gomes Teixeira; D. Sebastião.

**keywords:** Pedro Nunes; Gomes Teixeira; King Sebastian.

## 1 Pedro Nunes e D. Catarina

A fonte de Gomes Teixeira (1924) [6] é o Conde de Sabugosa (1919) [4] que por sua vez cita o Padre José Pereira Bayão (1737) [8], que afirma ter Pedro Nunes dito à Rainha que *cuidasse muito em dilatar o acto da entrega alguns dias, ainda que não fossem mais que três, porque [...] se El-Rei começasse a governar naquele dia, seria seu reinado instável, cheio de inquietação ordinária e de mui pouca dura*. Conhecemos ainda uma referência ao episódio por Manuel de Faria e Sousa (*Epítome de las Historias Portuguesas*, Madrid, 1628), anterior a Bayão em mais de cem anos, mas a indicação dos três dias não aparece. Será o episódio uma lenda, como afirma Gomes Teixeira, ou triste realidade, como diz o Padre Bayão?

## 2 Nascimento e Coroação de D. Sebastião

Embora não se conheça qualquer carta astrológica para o momento da coroação de D. Sebastião, chegou aos nossos dias uma carta do seu nascimento, da autoria de João Baptista Lavanha (1550-1624) [3]. Comparar esta carta com a que podemos produzir a partir de efemérides astronómicas calculadas nos dias de hoje permite avaliar o rigor dos dados de que dispunha Lavanha e deduzir que cálculos terá feito Pedro Nunes para a data da coroação - supondo que os fez.

D. Sebastião nasceu 19 horas e 18 minutos após a passagem meridiana do sol (o meio dia) do dia 19 de Janeiro de 1554, ou seja, às 7 horas e 18 minutos do dia 20 de Janeiro de 1554. Há ainda a fazer uma correcção da data, pois em 1554 estava em vigor o calendário Juliano. No calendário Gregoriano, a data é 30 de Janeiro de 1554. Comparando os valores obtidos por Lavanha com os que obtemos a partir da consulta de efemérides para aquela data [4], verificamos que as posições de Lavanha para o Sol, a Lua, os nodos lunares e Saturno têm um erro inferior a 30 minutos de grau. Para os restantes planetas o erro é de cerca de  $1^{\circ}30'$ , com excepção de Mercúrio. Lavanha comete um erro de mais de sete graus na posição de Mercúrio e coloca-o em movimento directo, quando o astro está em movimento retrógrado naquele momento. Podemos então confiar nas efemérides actuais, excepto eventualmente no que diz respeito a Mercúrio.

ASTRO	posição às 12.00 de 20 de Janeiro de 1568 (calendário Juliano)
Sol	$9^{\circ}47'45''$ Aquário
Lua	$0^{\circ}3'14''$ Escorpião
Mercúrio	$24^{\circ}54'50''$ Capricórnio (Ret.)
Vénus	$0^{\circ}49'7''$ Capricórnio
Marte	$27^{\circ}3'45''$ Cancer (Ret.)
Júpiter	$5^{\circ}28'5''$ Sagitário
Saturno	$26^{\circ}35'40''$ Virgo (Ret.)
Nodo Norte	$18^{\circ}51'27''$ Libra

D. Sebastião foi coroado rei no dia do seu décimo quarto aniversário, a 20 de Janeiro de 1568 (calendário Juliano), mas não é conhecida a hora. Podemos analisar que alterações sofre a carta astrológica ao longo do dia 20 de Janeiro e dos três dias seguintes consultando as efemérides para aquela semana. Apenas a Lua mudou de signo, de Libra para Escorpião no dia 20 às 12.10 e de Escorpião para Sagitário no dia 22 de Janeiro às 18.35. Vénus mudou de Sagitário para Capricórnio, mas tal aconteceu no dia 18 de Janeiro. Como Pedro Nunes aconselha a Rainha a esperar pelo menos três dias, o que quer que ele tenha visto não está relacionado com as casas astrológicas, já que estas dependem apenas da hora. Resta-nos analisar a

<sup>1</sup>Estes cálculos podem ser feitos a partir da página <http://www.astro.com>.

Lua, a única que muda de signo, e os aspectos entre os astros, ou seja, os ângulos que estes fazem entre si. Como as posições do Sol, dos planetas e do nodo norte variam muito pouco ao longo daqueles três dias, resta-nos analisar os astros em aspecto com a Lua. De 20 a 23 de Janeiro, a Lua esteve em quadratura<sup>2</sup>, primeiro com Marte durante o dia 20 e depois com o Sol durante o dia 21. No dia 23 a Lua estava já em Sagitário, em conjunção com Júpiter. Não há aspectos entre os restantes astros que se modifiquem ao longo daqueles três dias.

### 3 O Livro Cunprido de Aly Aben Ragel

Sabemos hoje que *El Libro Conplido en los Iudizios de las Estrellas*, tradução castelhana da obra de Aly Aben Ragel, terá chegado a D. Dinis pelas mãos do seu avô, o Rei Afonso X de Castela [7]. Na Biblioteca Nacional de Madrid encontra-se parte da obra (partes 1 a 5). O livro foi traduzido para português em 1411, por ordem de D. João I. O texto, intitulado *Livro Cunprido en os Juizos das Estrelas*, foi proibido em Portugal no Séc. XVI, constando dos índices portugueses de 1561 e 1581. Um manuscrito do livro em português chegou a Inglaterra em 1563 e parte dele (partes 4 a 8) encontra-se hoje na Bodleian Library Oxford [5]. A versão castelhana dos livros 1 a 5 e a versão portuguesa dos livros 4 a 8 dão-nos acesso à obra completa, cuidadosamente editada e comentada por Gerold Hilty [1, 2]. Mas será que Pedro Nunes conhecia esta obra? Tendo sido Cosmógrafo-Mor do Reino de Portugal desde 1529, certamente que sim.

A *Parte Séptima* do *Livro Cumprido* é inteiramente dedicada a '*eleções das estrelas e os começamentos das cousas*' [...]. Nela podemos ler: '*A boa eleição pera receber as coroas e os reynos e os grandes senhorios é que seja a Lua límpia e salva*' e ainda '*quando tu quizeres começar alguma cousa [...], poen a Lua e o ascendente nos signos convenientes a aquela cousa que queres e faz chegar a Lua aas fortunas con recebimento en aqueles signos. [...]* Quando quizeres começar alguun feito, melhora o ascendente e seu senhor e a Lua [...] e guarda-te de maus estados dela [...].'<sup>2</sup> E entre os maus estados da Lua, '*a setena é quando é cauda dos angulos ou en caminho queimada, que é a fin de Libra e o começamento de Escorpion, e isto é o pior de todos los infortunamentos da Lua*'. A *Parte Octava* acrescenta: '*Quando se ayuntare la Luna con Mares, signjfica nueuas mentirosas e vertymjentos de sangres e muchas mentiras [...]. E si este llegamjento fuere de quadratura e fuere de su quarta, signjfica malfetria de Rey e que Robaran e tomaran a tuerto*' [2].

<sup>2</sup>quadratura: ângulo de 90° (admite-se um erro de  $\pm 4^\circ$ ).

Se de facto Pedro Nunes construiu a carta para a coroação de D. Sebastião, terá visto que no dia 20 a Lua estava na pior posição possível: fim de Libra e princípio de Escorpião e em quadratura com Marte. A Lua só saiu de Escorpião no final do dia 22 de Janeiro e no dia seguinte estaria finalmente em posição favorável. Perante as efemérides e o livro de Aly Aben Ragel, o conselho a dar era precisamente o de adiar a cerimónia, nem que fosse apenas três dias. Nunca saberemos se tal conversa entre o matemático e a rainha alguma vez teve lugar, mas analisando a informação de que Pedro Nunes dispunha, à luz dos tratados de astrologia da época, é caso para dizer que *se non è vero, è ben trovato*.

## Referências

- [1] Aly Aben Ragel, *El libro Conplido en los Iudizios de las Estrellas. Partes 1 a 5*. Introducción y edición por Gerold Hilty. Prólogo de Arnald Steiger. Real Academia Española, Madrid, 1954.
- [2] Aly Aben Ragel, *El Libro Conplido en los Iudizios de las Estrellas. Partes 6 a 8*. Introducción y edición de Gerold Hilty, con la colaboración de Luis Miguel Vicente García. Instituto de Estudios Islámicos y del Oriente Próximo, Zaragoza, 2005.
- [3] Códice 887, *Relações das cousas principaes q sucederão em Portugal em tempo del Rey D. Sebastião, tiradas de originaes do Reyno per João Bap.ta Lavanha, Cronista mor do Reino de Portugal*, Biblioteca Nacional de Portugal.
- [4] Conde de Sabugosa, *Neves de Antanho*, Portugal-Brasil Limitada, Lisboa, 1919.
- [5] Gerold Hilty, 'A versão portuguesa do 'Livro Cunprido'', *Biblos*, Vol. LVIII, pp. 207-67, 1982.
- [6] Gomes Teixeira, "Pedro Nunes e a Astrologia", *Conde de Sabugosa: In Memoriam*, Portugália Editora, 1924.
- [7] Luciano Pereira da Silva, 'O Astrólogo João Gil e o Livro da Montaria', *Obras Completas de Luciano Pereira da Silva*, Agência Geral das Colónias, Lisboa, 1943.
- [8] Padre José Pereira Baião, *Portugal Cuidadoso e Lastimado com a vida e perda do Senhor Rey Dom Sebastião*, 1737.

# INÍCIO DA MECÂNICA EM PORTUGAL E O TRATADO DA ESTÁTICA DE HENDRICK UWENS (1645)

*Nuno Castel-Branco*

Departamento de Física, IST

e-mail: [nuno.castel-branco@tecnico.ulisboa.pt](mailto:nuno.castel-branco@tecnico.ulisboa.pt)

**Abstract:** The Society of Jesus' mathematicians from Flanders, from the so-called school of Grégoire de Saint-Vincent, were pioneers of a more practical way of doing mathematics. Heinrich Uvens (Henrique Buseu), a member of this school of thought, was in Portugal for several years. His classes in the "Aula da Esfera" survive in a 1645 manuscript and show that a window was opened in Portugal to an important mathematical tradition developed in our country in the mid-17th century, which was forgotten until today. In this communication, I gave answers to the questions related with its origin, contents and influence.

**palavras-chave:** Aula da Esfera; Mecânica; Heinrich Uvens.

**keywords:** Aula da Esfera; Mechanics; Heinrich Uvens.

## 1 Introdução

A mecânica é uma das principais áreas da Física moderna e o seu desenvolvimento acompanha e representa, sem dúvida, o desenvolvimento da ciência moderna [1]. O século XVII é um dos que mais se destaca nesse processo, pois foi o século em que Galileu (1564-1642) e Newton (1642-1727), entre outros, desenvolveram os seus estudos em filosofia natural. Mais importante ainda, sabe-se que a mecânica de Galileu é o culminar de uma grande tradição científica oriunda de filósofos como Tartaglia (1500-1557) e Guidobaldo (1545-1607), entre outros [2]. Ou seja, a mecânica como nós a conhecemos estava a nascer na Europa, mas o que se estava a passar em Portugal a nível de estudos de mecânica é ainda desconhecido.

A "Aula da Esfera" da Companhia de Jesus, que era um conjunto de aulas de matemática em português e em Lisboa, revelam que algo se passou em Portugal. Para leccionar nestas áreas os melhores professores da Companhia vinham de toda a Europa para Lisboa, no entanto era raro o que se dedicava a ensinar mecânica a sério, em detrimento de matérias mais teóricas e matemáticas [3].

## 2 A tradição de Flandres

As primeiras aulas de matemática no colégio jesuíta de Antuérpia começaram a ser dadas por Grégoire de Saint-Vincent (1584-1667), formado por Clavius (1538-1612) em Roma. Ele foi professor de notáveis estudantes que, por sua vez, também vieram a leccionar matemática e filosofia natural, entre os quais se destacam Joannes della Faille (1597-1652), Joannes Ciermans (1602-1648) e André Tacquet (1612-1660) [4].

Ciermans leccionou a cátedra de Saint-Vincent de 1637 a 1641. Os conteúdos dessas aulas podem ser encontrados na famosa obra *Disciplinae Mathematicae* (1640), que apresenta o exemplo típico da mecânica feita na Flandres, muito ligada ao rigor matemático de Clavius em Roma e, nessa linha, baseada na tradição arquimedeaniana divulgada por Guidobaldo.

Em 1641 Ciermans veio para Portugal, acompanhado pelo também jesuíta Heinrich Uwens (1618-1667), com apenas 23 anos de idade. Em Portugal, ficaram conhecidos pelos nomes João Pascásio Cosmander e Henrique Buseu. Ciermans leccionou na “Aula da Esfera” logo que chegou, em 1641 e 1642. Nos anos seguintes, até 1645, foi Uwens quem continuou a leccionar na “Aula da Esfera”. Na Índia, onde ficou até morrer, Uwens desempenhou diversos cargos, em particular o de reitor do Colégio de Agra e de preceptor do filho do Imperador da Índia [3].

## 3 O Tratado da Estática de Heinrich Uwens

As aulas de Uwens estão registadas num manuscrito da Biblioteca Nacional de Portugal de 1645 que pertence à colecção de manuscritos do Colégio de Sto. Antão, com a referência cod. 4333. Contém 211 folhas encadernadas e encontra-se em muito bom estado. Todos os seus conteúdos são escritos pela mesma mão, ainda que poucas vezes se note uma segunda mão para clarificar determinadas frases mais difíceis de ler. O manuscrito apresenta uma ordem de ideias clara e muitas figuras com rigor geométrico. Por esta razão, e por ter sido escrito no penúltimo ano das aulas de Uwens, pode-se concluir que o manuscrito foi cuidadosamente copiado de notas de aulas, de alunos ou do próprio professor.

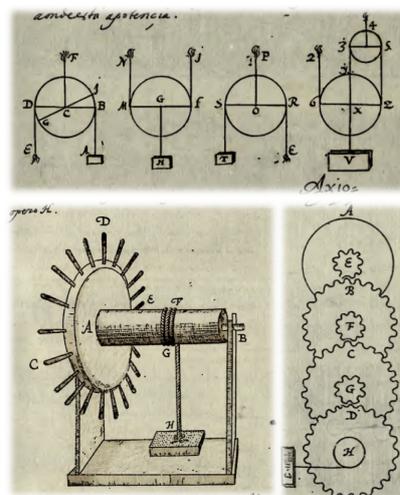
O autor começa por definir o que é a estática, dizendo que esta “hé sciencia que trata do movimento e quietação”, continuando depois com quatro definições gerais e oito axiomas. Só então entra no conteúdo próprio das aulas. O ms. está assim dividido em 5 partes: a Centrobarica (f. 1v), a Mecânica (f. 29v), a Hidrostática (f. 113v), a Aerostática (f. 161v) e a

Pirostática (f. 183r). Por sua vez, as várias partes estão divididas em capítulos, enumerados no início de cada parte, juntamente com um pequeno resumo dessa parte. A apresentação dos conteúdos segue a forma clássica de proposições, onde se apresenta a premissa ou teorema em questão e a sua respectiva demonstração, muitas vezes seguidas por um ou mais corolários.

A primeira parte é a centrobárica que “examina o centro de gravidade e as cousas pertencentes a elle”. Está dividida em três capítulos, que incluem o cálculo dos centros de gravidade de figuras geométricas, o estudo de situações sobre quando que um corpo cai quando está apoiado nalgum apoio e a aplicação desta teoria ao homem e outros seres vivos. Nesta parte, apesar de haver alguns esquemas sobre os centros de gravidade, há muitos espaços em branco, destinados a outros desses desenhos.

A parte da Mecânica é claramente a parte maior de todo o tratado. Ao descrever os cinco capítulos que a compõem, Uwens queixa-se que esta é uma tarefa complicada, pois é uma ciência que “de si he quazi infinita”. De facto, Rivka Feldhay, numa análise que faz a um documento jesuíta de 1655 sobre mecânica, explica que havia uma tentativa por parte da Companhia de Jesus de conferir à mecânica um carácter académico que ela parecia não ter antes [5].

Nesta parte referem-se as típicas cinco máquinas da tradição arquimedean: as balanças, as alavancas, as roldanas, as rodas dentadas ligadas a eixos e o movimento relacionado com a cunha e o parafuso de Arquimedes (a coclea), explicados através de planos inclinados, incluindo a relação correcta entre a força para levantar um peso com a inclinação do plano, obtida por Simon Stevin (1548-1620).



A parte da hidrostática, que é a “sciência que trata do movimento que se faz nas agoas e nas outras couzas liquidas”, está dividida em dois capítulos, sobre como os objectos se movem sobre a água e debaixo dela e sobre como conduzir as águas por diversas vias, em particular para níveis superiores.

A aerostática é a “sciência que trata dos movimentos que se fazem no

Ar e por meyo delle.” Esta parte dedica-se à atracção e à expulsão do ar e à recolha das águas por condensação e rarefacção do ar.

Por fim, a quinta parte diz respeito à pirostática, definida como a “sciencia que trata dos movimentos cauzados no fogo que nos outros instrumentos são vários mas que aqui, pella brevidade do tempo” e está reduzida ao estudo da pólvora.

Ainda que cite poucas vezes as suas fontes, Uvens refere os Elementos de Euclides mas também Luca Valerio (1553-1618), Joannes della Faille e François d’Aguilon, quando está a determinar os centros de gravidade; refere Johannes Kepler (1571-1630) e Niccolò Cabeo (1586-1650), para descrever determinadas características do planeta Terra. Na parte da mecânica, Uvens refere os vários filósofos que foram pegando nas tradições de Aristóteles e Arquimedes desde a antiguidade até ao século XVII, referindo Pappo e Hierão de Alexandria.

Hoje ainda há muitos manuscritos da “Aula da Esfera” por estudar e a surpresa ao abrir este manuscrito foi enorme, por revelar que Portugal não ficou atrás dos outros países da Europa na aprendizagem da mecânica a um bom nível científico.

## Referências

- [1] Westfall, Richard, *A Construção da Ciência Moderna: Mecanismos e Mecânica*. Porto: Porto Editora, 2001.
- [2] Drake, S. & Drabkin, I.E., eds (1969). *Mechanics in Sixteenth-Century Italy: Selections from Tartaglia, Benedetti, Guido Ubaldo & Galileo*. Madison: University of Wisconsin Press.
- [3] Leitão, Henrique (coord) (2008). *Sphaera Mundi: A Ciência na «Aula da Esfera»*. Manuscritos Científicos do Colégio de Santo Antão nas colecções da BNP. Lisboa: Biblioteca Nacional de Portugal.
- [4] Vanpaemel, G. (2002). “Jesuit Science in the Spanish Netherlands”. In: M. Feingold (Ed.), *Jesuit Science and the Republic of Letters*. The MIT Press, pp. 389-432.
- [5] Feldhay, R. (2006). «On Wonderful Machines, The Transmission of Mechanical Knowledge by Jesuits». In: *Science and Education* 15:2-4, Kluwer Academic Publishers, pp: 151-172.

# LONGITUDE – UMA REVOLUÇÃO NA CIÊNCIA NÁUTICA

*António Costa Canas*

Museu de Marinha—CINAV—CIUHCT

e-mail: [costacanas@gmail.com](mailto:costacanas@gmail.com)

**Resumo:** Partindo da definição de Thomas Kuhn para **revolução científica** tentaremos perceber quais os principais momentos em que ocorreram revoluções na ciência náutica. A nossa análise será centrada nas técnicas e nos procedimentos desenvolvidos na Europa Ocidental, para condução dos navios em alto-mar.

Começando na Idade Média, podemos considerar a existência de três momentos distintos na ciência náutica. O primeiro corresponde à chamada navegação por rumo e estima. A matemática a bordo é praticamente inexistente. Segue-se a determinação da latitude a bordo, a partir de finais do século XV usando navegação astronómica. É introduzida a matemática a bordo, mas que se resume a operações aritméticas simples. Finalmente, no século XVIII passa a determinar-se a longitude. A matemática usada é muito mais complexa, implicando a resolução de problemas de trigonometria esférica.

**palavras-chave:** longitude; náutica; revolução científica; paradigma; ciência normal.

## 1 Revolução científica

Começamos por caracterizar o conceito de revolução científica. Segundo Kuhn em qualquer ciência existem os chamados períodos de “ciência normal”. Esta é a situação mais comum na prática científica. Existe um determinado paradigma científico que vigora ao longo destes períodos. Durante os mesmos não se nota grande evolução em termos da ciência, ocorrendo essencialmente uma acumulação de dados.

Existem, contudo, outros momentos em que determinada ciência progride de uma forma bastante rápida. Estes outros momentos, mais raros e de duração relativamente curta, revolucionam profundamente a prática científica. Numa revolução científica ocorrem alterações profundas em termos de práticas, procedimentos e também ao nível dos instrumentos utilizados.

Em termos de ciência náutica europeia, de cariz oceânico, podemos considerar a existência de três períodos distintos:

Ao longo da Idade Média desenvolveu-se um método que ficou conhecido entre os historiadores da náutica como “rumo e estima”. Este período pode ser considerado como pré-científico. Durante o século XV passou a determinar-se a latitude no mar, implicando uma alteração de procedimentos e de processos de cálculo. Estes processos socorriam-se de matemática bastante simples, pelo que se pode afirmar que se assiste a uma época proto-científica. Finalmente, no século XVIII passou a ser calculada a longitude no mar. A partir daqui pode realmente afirmar-se que a navegação entrou numa fase científica.

## 2 Método de rumo e estima

Como eram conduzidos os navios na Idade Média? Para conhecerem a posição do navio os pilotos apenas precisavam saber a direção segundo a qual tinham navegado, assim como a distância percorrida. A introdução da bússola veio permitir o conhecimento mais ou menos rigoroso da direção seguida pelo navio, o rumo. A distância percorrida era estimada pelo piloto, daí o nome dado ao método. Em termos matemáticos bastava-lhes usar algumas noções geométricas simples. Com auxílio de compassos traçavam linhas paralelas e mediam distâncias.

Em relação às ferramentas ao dispor do piloto, além da já mencionada bússola, existiam os portulanos e as cartas-portulano. Os primeiros continham um conjunto de regras empíricas, desenvolvidas ao longo dos anos. Conhecem-se alguns textos escritos com essas regras, mas nalguns casos as mesmas poderiam ser transmitidas oralmente e decoradas pelos pilotos. Quanto às cartas-portulano consistiam na representação gráfica da informação descrita nos portulano. Estas cartas continham uma teia de direções (rumos) e uma escala para medir a distância percorrida.

## 3 Determinação da latitude

O método acima descrito apresentava uma limitação significativa. Foi desenvolvido no Mediterrâneo, onde as distâncias percorridas longe de terra nunca são muito grandes. A possibilidade de avistar frequentemente terra permitia anular os erros que se iam acumulando, devidos essencialmente a erros na estima da distância percorrida e na determinação do rumo a que se tinha navegado. Quando se passou a praticar uma navegação oceânica, na qual os navios passavam longos períodos ao largo, o método de rumo e

estima revelou-se insuficiente. Para minimizar os erros apontados, passou a determinar-se a latitude no alto-mar, recorrendo-se à observação de astros.

A navegação astronómica praticada pelos Portugueses a partir do século XV baseava-se na adaptação de procedimentos e de instrumentos usados pelos astrónomos em terra firme. Recorria-se à observação da altura da estrela Polar ou da altura máxima Sol, no seu movimento diurno.

Os pilotos passaram a realizar alguns cálculos, bastante simples. Para medir a altura dos astros usavam astrolábios, quadrantes ou balestilhas. Estes instrumentos permitiam medir alturas com rigor da ordem de um grau. Quanto às contas a efetuar, consistiam em operações aritméticas, de soma ou subtração. Para o caso do Sol, o tipo de conta a realizar dependia da posição relativa entre o equador, o Sol e a vertical do observador. O piloto teria apenas que aplicar a adequada regra do “Regimento do Sol” para obter a sua latitude. Precisava também de conhecer a declinação do Sol. Esta não é mais do que a distância angular entre o equador celeste e o Sol, e varia de dia para dia. O seu valor era geralmente obtido a partir de tabelas calculadas por astrónomos.

Quanto à latitude pela Polar era igualmente necessário fazer uma pequena conta de somar ou subtrair. As regras para escolher a conta a realizar encontravam-se no “Regimento do Norte”.

As cartas náuticas passaram a incluir uma escala de latitudes. No restante, mantiveram-se iguais às cartas-portulano, com uma rede de rumos e uma escala para medir distâncias. Também os roteiros, designação que em Portugal se dava aos portulanos, começaram a integrar tabelas de latitudes de diversos locais.

## 4 Determinação da longitude

Apesar de a determinação da latitude ter permitido uma melhoria no rigor das posições, relativamente ao método de rumo e estima, esse rigor das posições continuava a ser reduzido. A solução para este problema passou pela obtenção em simultâneo da latitude e da longitude, usando métodos astronómicos.

Assiste-se a uma nova mudança de paradigma. Os processos de cálculo implicam o domínio de matemática complexa, nomeadamente de trigonometria esférica. Para garantir o rigor dos cálculos recorre-se aos logaritmos. Além disso, muitos dos cálculos passam a ser preparados antecipadamente e apresentados em tabelas. Os valores tabelados eram obtidos por matemáticos em terra firme, sendo muitas vezes calculados por vários matemáticos, de

forma independente, comparando-se os valores obtidos por cada um. Com o uso de valores tabelados conseguia-se reduzir o tempo de cálculo no mar e minimizar os erros que poderiam resultar da realização de diversas operações complexas, levadas a cabo por marinheiros.

Surgem igualmente novos instrumentos: octante, sextante e cronómetro. Os dois primeiros serviam para medir alturas de astros e com eles conseguiam-se ângulos com aproximação ao minuto de grau. O cronómetro, inventado por John Harrison, em Inglaterra, fornecia o tempo com rigor de um segundo.

O problema da longitude apenas foi resolvido no século XVIII com a invenção do cronómetro e com o aperfeiçoamento do método das distâncias lunares. Ambos os métodos permitiam obter esta coordenada com o mesmo grau de precisão. A ocorrência de diversos acidentes marítimos com alguma gravidade impulsionou essa investigação. Assiste-se ao longo da centúria de Setecentos a um processo de busca de soluções para os diversos problemas que era necessário ultrapassar. Para estimular a investigação foi instituído um prémio de 20000 libras. Este prémio foi regulamentado pelo *Longitude Act* de 1714, do Parlamento Britânico. John Harrison recebeu o prémio, pelo seu cronómetro. Foram ainda pagas diversas quantias menores para recompensar contributos em termos de processos de cálculo ou de melhoria dos instrumentos usados.

Em jeito de conclusão pode afirmar-se que com as mudanças de paradigma acima apontadas se evolui de uma Arte de Navegar, baseada em processos empíricos, para uma Ciência Náutica, com forte suporte matemático.

## Referências

- [1] Luís de Albuquerque, *Curso de História da Náutica*, Publicações Alfa, Lisboa, 1989.
- [2] William J. H. Andrewes [ed.], *The Quest for Longitude. The Proceedings of the Longitude Symposium. Harvard University, Cambridge, Massachusetts. November 4–6, 1993*, Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, 1996.
- [3] Thomas S. Kuhn, *The Structure of Scientific Revolutions*, University of Chicago Press, 2012.

# TEORIA(S) DE PROPORÇÕES EM PORTUGAL NA PRIMEIRA METADE DO SÉCULO XVIII

*Maria Elisabete Barbosa Ferreira*  
Agrupamento de Escolas de Lousada Norte  
e-mail: betabferreira@gmail.com

**Resumo:** A teoria de proporções tem sido aplicada em diversas áreas ao longo dos tempos. Com a descoberta das grandezas incomensuráveis, na Antiguidade Grega, foi reconhecida a necessidade de uma teoria de proporções aplicável não só a grandezas comensuráveis como também a grandezas incomensuráveis. A teoria clássica de proporções foi frequentemente criticada pela sua alegada obscuridade e dificuldade, principalmente a partir do Renascimento Europeu. Foram muitos os autores que se dedicaram a esta investigação ao longo dos tempos, tendo sido apresentadas algumas alternativas. Neste artigo será feita uma pequena abordagem às versões da teoria de proporções em textos portugueses na primeira metade do século XVIII, e proceder-se-á à comparação das mesmas, quer entre si, quer com obras de autores europeus contemporâneos.

**palavras-chave:** Teoria(s) de proporções; Manoel de Azevedo Fortes; Manoel de Campos.

## 1 A “origem” da(s) Teoria(s) de Proporções

No tratado *Elementos*, Euclides apresenta duas teorias de proporções separadas: no Livro V aplicável a grandezas em geral, e no Livro VII aplicável apenas a números. A Definição 5<sup>1</sup> do Livro V explica a proporcionalidade para grandezas em geral e, por ter como base a propriedade dos equimúltiplos, tem sido alvo, ao longo dos tempos, de várias críticas, sendo apelidada de “obscura” por vários autores. A definição análoga para números, a Definição 20<sup>2</sup> do Livro VII, é considerada mais simples e assenta na noção de ser o mesmo múltiplo ou “parte” ou “partes”<sup>3</sup>.

<sup>1</sup>Diz-se que grandezas estão na mesma razão, uma primeira para uma segunda e uma terceira para uma quarta, quando quaisquer mesmos múltiplos da primeira e da terceira simultaneamente excedem, são simultaneamente iguais, ou são simultaneamente menores do que quaisquer mesmos múltiplos da segunda e da quarta, tomados na ordem correspondente.

<sup>2</sup>Números estão em proporção [ou dizem-se proporcionais] quando o primeiro é o mesmo múltiplo, ou a mesma parte, ou as mesmas partes, do segundo que o terceiro é do quarto.

<sup>3</sup>Neste contexto ser a mesma “parte” significa ser o mesmo submúltiplo; enquanto ser as mesmas “partes” significa ser o mesmo múltiplo do mesmo submúltiplo.

## 2 A(s) teoria(s) de proporções na Europa do séc. XVII

Nesta secção será feita uma breve referência à(s) teoria(s) de proporções na Europa na segunda metade do século XVII, visto ser esta a época em que se desenvolveram as teorias que serviram de referência aos autores portugueses.

### 2.1 Giovanni Alfonso Borelli

Borelli nasceu em Nápoles em 1608 e faleceu em Roma em 1679. Este italiano considerou a teoria de proporções presente nos *Elementos* como difícil e incompreensível, designadamente no que concerne à utilização da propriedade dos equimúltiplos. Na sua obra *Euclides Restitutus* (1658), Borelli reformulou as definições de Euclides, bem como proposições e axiomas, na tentativa de colmatar as lacunas que identificou nos *Elementos*. A sua preocupação era encontrar uma definição mais fácil que pudesse ser aplicada a todo o tipo de grandezas, comensuráveis<sup>4</sup> e incomensuráveis<sup>5</sup>, dado que defendia que qualquer definição é o princípio da ciência, devendo por isso ser o mais geral possível. Na obra supracitada, Borelli apresenta um processo para encontrar a “igualdade entre razões” por aproximação.

### 2.2 André Tacquet

Tacquet nasceu em Antuérpia e viveu entre 1612 e 1660. A partir da obra de Euclides, este belga escreveu em 1654 *Elementa geometriae planae ac solidae*, onde, entre outros aspetos, reformulou as definições clássicas de razão e proporção presentes nos *Elementos*. No seu trabalho Tacquet substituiu os termos parte/partes por parte alíquota/parte aliquanta, termos que não surgem nos *Elementos*. Tal como Borelli, Tacquet considera que a Definição 5 do Livro V está na base da dificuldade da(s) teoria(s) de proporções e reformula-a da seguinte forma: “duas razões (A para B e C para F) são semelhantes, iguais, ou as mesmas, quando um antecedente (A) contém igualmente ou do mesmo modo (isto é, nem mais nem menos) o seu consequente (B), assim como o outro antecedente (C) contém o seu consequente (F). Ou quando um antecedente (A) está contido do mesmo modo no seu consequente (B) como o outro antecedente (C) no seu consequente (F)”.

Na obra de Tacquet supracitada é apresentada uma outra propriedade/indício principal e infalível para a igualdade de razões: “as razões AB para CF e GM para NQ são iguais, quando tomadas quaisquer par-

<sup>4</sup>São grandezas que admitem uma medida comum, sendo a razão entre as mesmas expressa por números racionais.

<sup>5</sup>São grandezas que não admitem uma medida comum e a razão entre as mesmas está associada a números irracionais.

tes alíquotas semelhantes dos consequentes, estas estão contidas o mesmo número de vezes nos seus antecedentes”.

### 3 Teoria(s) de proporções em textos portugueses na primeira metade do século XVIII

#### 3.1 Manoel de Campos

Manoel de Campos, padre jesuíta nascido em Lisboa em 1680, foi professor de Matemáticas em Madrid, na aula da Esfera do Colégio de Santo Antão de Lisboa e académico da Academia Real de História. O seu trabalho *Elementos de Geometria Plana, e Sólida*, de 1735, é uma tradução adaptada da obra de Tacquet, *Elementa Geometriae*. No seu trabalho o português introduz algumas alterações na estrutura e na utilização de determinados conceitos. Enquanto Tacquet divide o Livro V em três partes, adotando uma estrutura diferente da dos *Elementos*, Manoel de Campos segue a ordem do tratado de Euclides. Não obstante, em termos de conteúdo, o trabalho do português é, de uma forma geral, idêntico ao do belga, estabelecendo as mesmas críticas relativamente à Definição 5. Para Manoel de Campos a Definição 5, por ser baseada nos *Equimúltiplos*, não é evidente nem clara, necessitando mais de ser demonstrada do que alguns resultados que dependem da mesma. Muitos dos resultados do Livro V têm como base esta definição, o que os torna difíceis de entender. Para ultrapassar esta obscuridade, Manoel de Campos sugere a substituição do Princípio dos *Equimúltiplos* pelo *Princípio dos Modernos das Equi-alíquotas*, adotando para razões semelhantes uma definição análoga à de Tacquet. Relativamente ao Livro VI, não se verificam diferenças significativas entre as obras do português e do belga.

#### 3.2 Manoel de Azevedo Fortes

Azevedo Fortes viveu entre 1660 e 1749. A sua formação técnica valeu-lhe uma cadeira de Matemática na Academia Militar da Fortificação portuguesa em 1695. Entre outros trabalhos, é autor do manuscrito *Geometria Especulativa. Trigonometria Espherica Modo de riscar e dar aguadas nas plantas militares* (1724) e de *Lógica Racional, Geométrica e Analítica* (1744), sendo este considerado o primeiro tratado sobre lógica escrito em português na íntegra.

##### 3.2.1 Geometria Especulativa

A ordem que surge neste manuscrito é a mesma dos *Elementos*, contudo, Azevedo Fortes expõe apenas as proposições/teoremas que considera pertinentes e necessárias na sua área. Comparando o manuscrito e a obra *Cours*

de *Mathématique* de Jacques Ozanam, edição de 1693, verifica-se que o primeiro é uma tradução da obra do francês. A Definição 5, do Livro V, dada por Azevedo Fortes, é mais genérica e concisa do que as similares de Tacquet e de Manoel de Campos, tendo contudo a mesma essência: “razões *iguais* ou *semelhantes* são aquelas em que os antecedentes contêm, ou são igualmente contidos nos seus consequentes”. Tal como Ozanam, Azevedo Fortes não expõe críticas aos *Elementos*, ao contrário de Manoel de Campos. Azevedo Fortes refere que para determinar a razão entre duas grandezas deve-se dividir o antecedente pelo consequente e recorre ao método das Equi-alíquotas para provar a igualdade de razões. Enquanto Tacquet, Dechales, Manoel de Campos e o próprio Ozanam, nas suas obras, referem a comensurabilidade de grandezas, este conceito não surge no Livro V do manuscrito.

### 3.2.2 Lógica Racional, Geométrica e Analítica

Esta obra encontra-se dividida em três partes: *Lógica Racional* (Parte I), *Lógica Geométrica* (Parte II) e *Lógica Analítica* (Parte III). A Parte I aborda a lógica filosófica; a Parte II trata da Geometria Euclidiana, enquanto a Parte III é dedicada à Álgebra. A temática das razões e das proporções é abordada nas Partes II e III. A principal fonte destas Partes é Bernard Lamy: enquanto a *Lógica Analítica* foi elaborada a partir de *Éléments des Mathématiques*, não se verificando uma correspondência tão “exata” como entre o manuscrito e a obra de Ozanam, constata-se que a *Lógica Geométrica* é uma tradução incompleta da obra *Les Éléments de Géométrie*<sup>6</sup>.

**Lógica Geométrica.** Nesta Parte Azevedo Fortes estabelece que, para comparar duas grandezas  $A$  e  $B$ , deve-se recorrer à divisão das mesmas:  $A$  por  $B$  ou  $B$  por  $A$ , e adota a notação atual:  $\frac{A}{B}$  ou  $\frac{B}{A}$ . A associação da razão entre duas grandezas a uma operação aritmética representa uma diferença em relação ao manuscrito e também às obras referidas anteriormente, uma vez que é feita de forma explícita. Surge a definição de proporção como sendo uma igualdade de razões e é utilizada a notação atual para designar a proporção entre as grandezas  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ :  $\frac{A}{B}$  ou  $\frac{B}{A}$ . Para além desta notação, existe também a utilizada no manuscrito, a saber,  $A.B :: C.D$ . No manuscrito não aparece a definição de proporção. Contudo, é referido que grandezas que têm entre si a mesma razão são grandezas proporcionais. Apesar de utilizar exemplos numéricos na explicação deste conceito, facto que é significativo e revelador da “arimetização”, Azevedo Fortes não mencionou operações aritméticas no seu manuscrito.

<sup>6</sup>No estudo realizado as edições consultadas destas obras de Lamy foram as de 1692 e de 1731, respetivamente.

**Lógica Analítica.** No Capítulo I do Livro III Azevedo Fortes apresenta uma crítica à natureza de uma razão, referindo que definir razão entre duas grandezas apenas como “o modo de uma conter ou estar contida na outra”, não é suficiente. Através de exemplos menciona que a razão é uma grandeza, ou quantidade, não absoluta, mas relativa, e por ser deste género é possível efetuar com ela as operações que se realizam com as grandezas absolutas<sup>7</sup>. Refere também que uma proporção é o que resulta da comparação de duas razões. No Capítulo IV é mencionado que a igualdade de duas razões se verifica através da divisão das grandezas que as constituem: se os quocientes forem iguais, as razões serão iguais. No Livro V a palavra fração é associada a *quebrado* e este termo é utilizado em todo o Livro. A fração é associada à divisão de dois números, o que torna possível assumir para as razões todas as operações aritméticas que se efetuam com os números, estando-se perante mais uma aritmetização das razões. Nas duas obras supracitadas de Lamy são dedicadas secções à incomensurabilidade de grandezas. Contudo, Azevedo Fortes aborda esta temática apenas na *Lógica Analítica*, no Capítulo VIII do Livro V, não utilizando os *Éléments des Mathématiques*, fonte principal para esta Parte III: recorre aos *Éléments de Géométrie*, principal referência para a Parte II. De acordo com Azevedo Fortes, a dificuldade na “matéria dos incomensuráveis” consiste em definir a igualdade de razões *surdas*<sup>8</sup>, sendo que a comparação entre razões de *número a número* é muito diferente da comparação entre razões *surdas*. É possível comparar razões de número a número, reduzindo-as (consiste em reduzir as razões ao mesmo conseqüente, o que é equivalente a reduzir duas frações ao mesmo denominador), procedimento que não pode ser aplicado às razões *surdas*, uma vez que se fosse possível, as razões não seriam *surdas*. Ao contrário de Lamy, Azevedo Fortes não apresenta as operações sobre os incomensuráveis, referindo apenas que estas operações são possíveis.

### 3.3 Algumas considerações sobre as obras referidas

Associar as grandezas comensuráveis a números racionais possibilita a aplicação das operações numéricas a estas grandezas, o que torna esta aritmetização vantajosa. Para proceder da mesma forma para as grandezas incomensuráveis, é necessário aferir da possibilidade de realizar as operações aritméticas entre os números irracionais (entidades que não eram consideradas números). A instituição de uma Aritmética para os irracionais em

<sup>7</sup>As grandezas absolutas são representadas por números inteiros e as relativas por números quebrados (racionais).

<sup>8</sup>As razões *surdas* são aquelas que são representadas por números irracionais, enquanto as de número a número são representadas por números racionais.

conjunto com a definida para os racionais viabiliza a realização de todas as operações para qualquer tipo de grandeza.

Efetuando uma comparação entre os autores referidos neste artigo verifica-se a existência de duas concepções. A primeira envolve Tacquet, Manoel de Campos, Ozanam e Azevedo Fortes (no manuscrito). Nas suas obras estes autores seguem a ordem dos *Elementos*, acrescentando alguns corolários e lemas que permitem a demonstração de algumas proposições de forma diferente de Euclides. A segunda concepção reúne Lamy e Azevedo Fortes (na *Lógica*). Estes não seguem a mesma ordem do tratado de Euclides e apresentam uma abordagem diferente: constroem uma teoria válida para todo o tipo de grandezas, com recurso a processos algébricos.

A evolução da Álgebra é acompanhada de uma transformação progressiva dos conceitos de razão e proporção. O desenvolvimento da Aritmética, decorrente da evolução do conceito de número, permitiu efetuar todas as operações, servindo de modelo à Álgebra, algo que não era possível com a “Aritmética Euclidiana”. A associação da Álgebra à Geometria reveste a Matemática de um carácter unitário, facto que exigiu a definição das operações sobre as linhas geométricas. Em teoria, estabelecer as operações da Aritmética no âmbito da Geometria possibilitaria a simplificação desta última e permitiria a associação da Geometria à Aritmética e à Álgebra. Para tornar possível esta associação, é necessário tornar válidas para as grandezas em geral, as operações que se realizam para as grandezas que se podem exprimir por números, ou seja, identificar a que operação geométrica corresponde uma operação aritmética/algébrica.

Estabelecer uma teoria de proporções suscetível de ser aplicada a todo o tipo de grandezas, que englobasse todos os *objetos matemáticos*, e que contemplasse as operações algébricas definidas no âmbito da Geometria, esteve na origem do trabalho de muitos estudiosos nos anos seguintes aos que foram objeto deste estudo.

## Referências

- [1] Ferreira, Maria Elisabete Barbosa, “Teoria(s) de Proporções em Portugal, na Primeira Metade do Século XVIII”, Dissertação de Mestrado, Universidade do Minho (Escola de Ciências), 2013.

# O FIM DA *GRUNDLAGENKRISE*

*Reinhard Kahle*

CENTRIA, CMA e DM, FCT, Universidade Nova de Lisboa  
2829-516 Caparica, Portugal  
e-mail: [kahle@mat.uc.pt](mailto:kahle@mat.uc.pt)

**Resumo:** Apresentamos uma breve discussão da reacção do mundo matemático aos resultados de Gödel que marcaram o fim da *Grundlagenkrise*.

**Abstract:** We give a short discussion of the reaction of the mathematical world to Gödel's theorems which mark the end of the *Grundlagenkrise*.

**palavras-chave:** crise de fundamentos; programa de Hilbert; intuicionismo; teoremas de Gödel; Bourbaki.

**keywords:** foundational crisis; Hilbert's programme; intuitionism; Gödel's theorems; Bourbaki.

## 1 A *Grundlagenkrise*

Com a palavra *Grundlagenkrise*, em português “crise de fundamentos”, referimo-nos normalmente à discussão sobre os fundamentos da Matemática nos anos 20 do século XX, com DAVID HILBERT e LUITZEN BROUWER como os principais actores em lados opostos. Quando BROUWER promoveu a sua “reconstrução” da matemática seguindo a sua posição filosófica chamada *Intuicionismo*, HILBERT defendeu a “matemática clássica” tentando dar uma justificação baseada no *Formalismo*.

A questão fundamental foi a *natureza* das afirmações matemáticas, e BROUWER pôs em causa certos princípios matemáticos como o *tertium-non-datur*. Ele viu a Matemática como uma actividade mental; e os seus resultados precisam de permitir a “construção” de todos os seus elementos. Ver, por exemplo, [2].

HILBERT tentou responder a este desafio com o seu *programa de Hilbert*: a Matemática só está condicionada pela consistência (coerência). E esta deve ser assegurada por uma reflexão sobre demonstrações formais.

Note-se que HILBERT não foi, de forma alguma, um formalista radical (no sentido: a Matemática é um jogo com símbolos). O seu formalismo foi *tático* para assegurar a Matemática na sua forma tradicional.

## 2 Teoremas de Gödel

A discussão teve o seu fim, o mais tardar, com os teoremas de GÖDEL, publicadas em 1931. Estes teoremas mostram que o programa de Hilbert, na sua forma original, não é exequível. Ver, por exemplo, [5].

O primeiro teorema de incompletude de Gödel diz:

**Teorema 1** *Um sistema formal (recursivo e consistente) que envolve, pelo menos, a aritmética, contém uma fórmula que, neste sistema, nem é demonstrável nem é refutável.*

O impacto deste teorema no programa de Hilbert não é tão imediato, mas o segundo teorema de incompletude de Gödel não deixa dúvidas:

**Teorema 2** *Um sistema formal (recursivo e consistente) que envolve, pelo menos, a aritmética, não permite demonstrar a sua própria consistência.*

Note-se que o primeiro teorema refuta o *logicismo*, como foi concebido por FREGE (que abandonou esta posição depois da descoberta do paradoxo de RUSSELL) e por WHITEHEAD e RUSSELL nos *Principia Mathematica*. Assim, o logicismo de WHITEHEAD e RUSSELL já estava na defensiva nos anos 20, por causa do *axioma de reducibilidade* cuja natureza logicista é mais do que duvidosa.

Pondo um fim ao programa de Hilbert, o segundo teorema, *a fortiori* refuta também o *formalismo*. Mas, por razões intrínsecas, o intuicionismo não pôde usufruir deste resultado.

Claro, que o intuicionismo está também sujeito à incompletude do primeiro teorema de Gödel: a rejeição do *tertium-non-datur* já implica uma forma de tal incompletude. Mas, quando o intuicionismo está a pôr em causa a consistência da matemática clássica, a situação não é melhor para o próprio intuicionismo (pelo menos ao nível da Aritmética): KOLOMOGOROFF, GÖDEL e GENTZEN demonstraram por volta de 1930, de forma independente, que a Aritmética clássica pode ser interpretada na Aritmética intuicionista—pela chamada *interpretação dupla negação*—e, por isso, as duas abordagens são *equiconsistentes*, i.e., se a Aritmética clássica é inconsistente, a Aritmética intuicionista é também inconsistente.

Note-se que a posição filosófica do próprio Gödel foi claramente *platonista* e, de certa forma, o *platonismo* pode ser declarado como “vencedor” do *Grundlagenstreit*.

### 3 A situação pós-Gödel

Numa avaliação do fim da *Grundlagenkrise* não podemos deixar de lado o contexto histórico/político. Os protagonistas da discussão estavam, principalmente, sediados na Europa. O regime nazi, que ganhou o poder na Alemanha em 1933, destruiu grande parte da cultura científica, entre outras a escola matemática em Göttingen, onde HILBERT e a sua escola estava baseada. Muitos matemáticos — incluindo GÖDEL — emigraram da Europa para a América. A segunda guerra mundial agravou bastante a situação em toda a Europa.

Em relação à reacção dos matemáticos, note-se que o “working mathematician” perdeu o interesse em questões filosóficas da matemática. É verdade que a lógica matemática foi “instalada” como sub-disciplina própria da matemática, mas pelo preço de menos interacção com as outras áreas da matemática. Em geral, a discussão filosófica perdeu o contacto com a matemática (e os matemáticos).

#### 3.1 Brouwer

Já o *Annalenstreit*—a expulsão de BROUWER do comité editorial da revista *Mathematische Annalen* por HILBERT em 1928 [6], deixou BROUWER frustrado e desiludido com a comunidade matemática. Depois BROUWER tornou-se mais e mais isolado, ficando com um grupo pequeno na Holanda — do qual fazia parte o seu aluno HEYTING — o único defensor do intuicionismo. Nos anos 50 e 60, o intuicionismo foi praticamente ignorado pelos matemáticos, e BROUWER ganhou mesmo a imagem de “maluco”. Só em 1967, com o trabalho de BISHOP sobre o *constructivismo*, a abordagem intuicionista de BROUWER foi novamente reconhecida na matemática. Mais tarde, surgiu a *informática* e foi capaz de usufruir dos trabalhos de BROUWER e da sua escola. Hoje em dia, o intuicionismo está reabilitado, não em competição com a matemática clássica, mas complementando-a.

#### 3.2 Hilbert e a sua escola

HILBERT morreu em 1943 e nunca respondeu propriamente aos teoremas de Gödel. Temos só duas peças: no prefácio do *opus magnum* de HILBERT e BERNAYS, *Grundlagen der Mathematik* [4], HILBERT diz, em relação aos resultados de GÖDEL, que é só necessário considerar uma “posição finitista mais focada”; e a Regra  $\omega$  sugerida por HILBERT em 1931, [3, p. 194]. Esta regra é hoje em dia uma base da teoria de demonstração transfinita. A escola

de HILBERT, nomeadamente BERNAYS, desenvolveu a nova disciplina de *teoria de demonstração*, paralelamente à escola americana de Alonzo Church. Mesmo sem demonstrações formais de consistência para áreas como a Análise Matemática, a comunidade matemática seguiu o “espírito de Hilbert” na forma como trata as questões filosóficas da matemática.

### 3.3 Bourbaki

O melhor exemplo para o “sucesso” de HILBERT, é o grupo francês BOURBAKI. BOURBAKI, que se tornou no grupo mais importante da matemática da segunda metade do século XX, propagou uma forma *estruturalista* da matemática [1], que pode ser vista como uma evolução das posições de HILBERT; não na direcção do formalismo, mas baseada no seu *método axiomático*. Não podemos encontrar uma filosofia específica de matemática nas obras de BOURBAKI — podemos mesmo falar de uma “não-filosofia” de BOURBAKI. Mas em termos práticos, BOURBAKI reivindicou a posição inicial de HILBERT contra o intuicionismo, em particular, que a matemática não deve ser limitada no seu desenvolvimento, senão por uma inconsistência.

## Referências

- [1] N. Bourbaki, “The Architecture of Mathematics”, *The American Mathematical Monthly* Vol. 57 (1950), 221–232.
- [2] F. Ferreira, “Grundlagenstreit e o intuicionismo Brouweriano”, *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática*, Vol. 58 (2008), pp. 1–23.
- [3] D. Hilbert, “Die Grundlegung der elementaren Zahlenlehre”, *Mathematische Annalen*, Vol. 104 (1931), pp. 485–494.
- [4] D. Hilbert e P. Bernays, *Grundlagen der Mathematik*, Vol. 1, Springer, 1934. (Bilingual German–English edition, College Publications, 2011.)
- [5] R. Kahle, “Os teoremas de incompletude de Kurt Gödel”, *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática*, Vol. 55 (2006), pp. 63–76.
- [6] D. van Dalen, “The War of the frogs and the mice, or the crisis of the *Mathematische Annalen*”, *The Mathematical Intelligencer*, Vol. 12 (1990), pp. 17–31.

Investigação apoiada pelos projectos *A Herança de Hilbert na Filosofia da Matemática* (PTDC/FIL-FCI/109991/2009) e *A noção da demonstração matemática* (PTDC/MHC-FIL/5363/2012), financiados pela FCT/MEC.

# Lógica e Computação

*Editor Convidado:* Fernando Ferreira

*Reinhard Kahle & Isabel Oitavem*

Towards recursion schemata for the probabilistic class PP ..... 91

*Daniel S. Graça*

Calculabilidade do comportamento assintótico de sistemas dinâmicos 95

*Mário J. Edmundo & Luca Prelli*

O-minimality and sheaf cohomology ..... 99



# TOWARDS RECURSION SCHEMATA FOR THE PROBABILISTIC CLASS $PP$

*Reinhard Kahle, Isabel Oitavem*

DM e CMA Faculdade de Ciências e Tecnologia

Universidade Nova de Lisboa

e-mail: kahle@mat.uc.pt

oitavem@fct.unl.pt

**Resumo:** Usando um esquema de recursão com ponteiros, apresentamos a primeira abordagem recursiva à classe de complexidade  $PP$ .

**Abstract** We propose a recursion-theoretic characterization of the probabilistic class  $PP$ , using recursion schemata with pointers.

**palavras-chave:** Complexidade implícita; classe  $PP$ ; esquemas de recursão com ponteiros.

**keywords:** Implicit complexity; the class  $PP$ ; recursion schemes with pointers.

## 1 Introduction

Our goal is to explore the potential of *pointers* in recursion-theoretic contexts as a tool to characterize probabilistic classes of computational complexity. In this work we study  $PP$ , the class of decision problems solvable by probabilistic Turing machines in polynomial time with an error probability of less than  $\frac{1}{2}$  for all instances.

It is well-known that  $PP$  contains  $NP$  and that it is contained in  $Pspace$ ; it is open whether these inclusions are proper or not.

In previous work of the second author, the use of recursion schemes with pointers lead to characterizations of  $NP$  and  $FPspace$  (the class of *functions* corresponding to  $Pspace$ ), [Oit11, Oit08]. On this base, our objective consists in extending/restricting the recursion schemes for  $NP$  and  $FPspace$ , respectively, in an appropriate way to capture exactly the power of the class  $PP$ . As a result of the *work in progress*, reported here, we get a purely recursion-theoretic characterization of the probabilistic class  $PP$ .

The characterization follows closely the one for  $NP$ , given in [Oit11]. It comes in two stages,  $ST_P$  and  $ST_{PP}$ , where  $ST_P$  characterizes the *functions* computable in polynomial time by deterministic Turing machines [BC92].  $ST_{PP}$  results then from “strengthening”  $ST_P$  with a scheme designed to characterize the decision problems of  $PP$ .

## 2 Notation

Let us consider the word algebra  $\mathbb{W}$ , i.e. the algebra generated by one nullary and two unary constructors, respectively,  $\epsilon$ ,  $\mathbf{S}_0$  and  $\mathbf{S}_1$ .  $\mathbb{W}$  can be interpreted over the set of all 0-1 words. As usually in word algebra contexts, one considers a destructor (or predecessor) symbol of arity one,  $\mathbf{P}$ . One also introduces a symbol  $\mathbf{C}$ , of arity 4, for the conditional function of the algebra. They are defined as follows:  $\mathbf{P}(\epsilon) = \epsilon$ ,  $\mathbf{P}(\mathbf{S}_i x) = x$  and  $\mathbf{C}(\epsilon, x, y_0, y_1) = x$ ,  $\mathbf{C}(\mathbf{S}_i z, x, y_0, y_1) = y_i$ ,  $i \in \{0, 1\}$ .  $\vec{x}$  abbreviates  $x_1, \dots, x_n$  for some natural number  $n$ .

We introduce some, polynomial time functions to be used later on the paper. The function *read* is supposed to read the last bit of its input. For technical reasons at the reading stage the bit 1 is coded by 10, so  $read(w)$  returns 10 if the last bit of  $w$  is 1 and it returns 0 otherwise.  $+$  denotes the binary addition. We extend  $+$  to all 0-1 words by considering that  $\epsilon$  and words starting with 0 correspond to  $0 \in \mathbb{N}$ . We use infix notation for  $+$ . Moreover,  $+_{read}(w_0, w_1)$  abbreviates  $read(w_0) + read(w_1)$  and we use infix notation for  $+_{read}$  too. Finally, let  $2^{|\epsilon|} = 1$  and  $2^{|\mathbf{S}_i z|} = \mathbf{S}_0(2^{|z|})$ , we define

$$\#_{1/2}(z, w) = \begin{cases} 1 & \text{if } w > 2^{|z|} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}.$$

## 3 The term systems $\mathbf{ST}_P$ and $\mathbf{ST}_{PP}$

For the definition of the classes  $\mathbf{ST}_P$  and  $\mathbf{ST}_{PP}$ , we adopt the framework introduced by Bellantoni-Cook in [BC92]. Thus, functions terms have two sorts of input positions, *normal* and *safe*. As usual, we write normal and safe input positions by this order, separated by semicolon:  $f(\vec{x}; \vec{y})$ .

**Definition 1** *Let  $\mathcal{I}$  be the class of function terms composed of the constructors of  $\mathbb{W}$ :  $\epsilon$ ,  $\mathbf{S}_0$ ,  $\mathbf{S}_1$ ; the destructor  $\mathbf{P}$ , the conditional  $\mathbf{C}$ , and the projection functions (over both input sorts).*

1.  $\mathbf{ST}_P$  is the closure of  $\mathcal{I}$  under  $\mathbf{SC}_P$  and  $\mathbf{SR}_{\mathbb{W}}$ ;
2.  $\mathbf{ST}_{PP}$  is the closure of  $\mathbf{ST}_P$  under  $\mathbf{SC}_P$  and  $\mathbf{STR}_{\mathbb{W}}[+]$ , where

$\mathbf{SC}_P$  — *input-sorted composition*:

$$f(\vec{x}; \vec{y}) = h(\vec{r}(\vec{x}); \vec{s}(\vec{x}; \vec{y})), \quad \vec{r}, \vec{s} \in \mathbf{ST}_P,$$

$\mathbf{SR}_{\mathbb{W}}$  — *input-sorted recursion on notation*:

$$f(\epsilon, \vec{x}; \vec{y}) = g(\epsilon, \vec{x}; \vec{y})$$

$$f(\mathbf{S}_i(z;), \vec{x}; \vec{y}) = h(\mathbf{S}_i(z;), \vec{x}; \vec{y}, f(z, \vec{x}; \vec{y})), \quad i \in \{0, 1\}.$$

$\text{STR}_{\mathbb{W}}[\dagger]$  — *input-sorted tree recursion with step function  $\dagger$* :

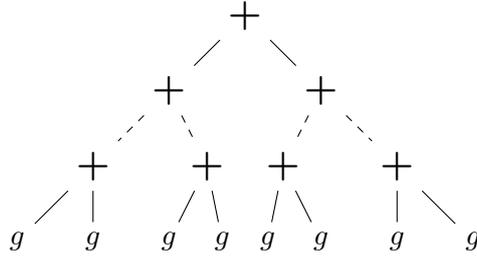
$$f(p, \epsilon, \vec{x};) = g(p, \epsilon, \vec{x};)$$

$$f(p, \mathbf{S}_i(z;), \vec{x};) = \dagger(p, \mathbf{S}_i(z;), f(\mathbf{S}_0(p;), z, \vec{x};), f(\mathbf{S}_1(p;), z, \vec{x};)), \quad i \in \{0, 1\}.$$

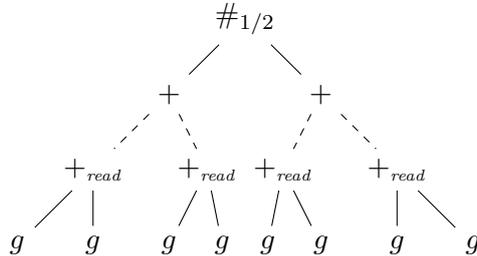
with  $g$  and  $\dagger$  in  $\mathbf{ST}_P$  such that  $\dagger$  satisfies:

$$\begin{aligned} \dagger(\epsilon, i, w_0, w_1;) &= \#_{1/2}(i, w_0 +_{\text{read}} w_1;), \\ \dagger(p, i, w_0, w_1;) &= w_0 +_{\text{read}} w_1, & p \neq \epsilon, \\ \dagger(\epsilon, zi, w_0, w_1;) &= \#_{1/2}(zi, w_0 + w_1;), & z \neq \epsilon, \\ \dagger(p, zi, w_0, w_1;) &= w_0 + w_1, & p, z \neq \epsilon, \end{aligned}$$

The motivation for this tree recursion scheme can be summarized as follows: the underline structure of  $\text{STR}_{\mathbb{W}}[\dagger]$  corresponds to the tree



where the pointer  $p$  and the recursion input  $z$  are omitted. By using them, one is able to obtain different outputs for  $\dagger$  depending on its level in the tree above. Therefore, accordingly to the definition of  $\dagger$  one may obtain the following labelling:



Once more, inputs are omitted. One reads from the leaves, and by performing the binary addition at all internal nodes one brings up to the root of the tree the information about how many times 1 occurs at the leaves.

Notice that  $\#_{1/2}$  after performing the binary addition operation, returns 1 if the sum meets the threshold (i.e. if strictly more than half of the leaves are labelled by 1) and 0 otherwise.

One should notice that:

**Remark 2** 1)  $\mathbf{ST}_P$  characterizes *FPtime*, the class of functions computable in deterministic polynomial time — see [BC92]; 2) Under this framework, recursive calls are usually placed into safe input positions of the step function. However, that becomes irrelevant when the recursion scheme imposes a fixed step function — like in  $\mathbf{STR}_{\mathbb{W}}[+]$ ; 3) The tree recursion scheme used in [Oit08] to characterize *FPspace*, the class of functions computable in polynomial space, is  $(i \in \{0, 1\})$

$$\begin{aligned} f(p, \epsilon, \vec{x}; \vec{y}) &= g(p, \epsilon, \vec{x}; \vec{y}) \\ f(p, \mathbf{S}_i(z; \cdot), \vec{x}; \vec{y}) &= h(p, \mathbf{S}_i(z; \cdot), \vec{x}; \vec{y}, f(\mathbf{S}_0(p; \cdot), z, \vec{x}; \vec{y}), f(\mathbf{S}_1(p; \cdot), z, \vec{x}; \vec{y})) \end{aligned}$$

$\mathbf{STR}_{\mathbb{W}}[+]$  can be seen as a restriction of it. Thus,  $\mathbf{ST}_{PP} \subseteq \mathbf{FPspace}$ .

## 4 $\mathbf{ST}_{PP}$ characterizes *PP*

The proofs of the upper and lower bound should now follow from an adaptation of the corresponding proofs for the recursion-theoretic characterization of *NP* in [Oit11]. Namely, by  $\mathbf{ST}_{PP}$  characterizes *PP* we mean that *PP* coincides with the boolean part of  $\mathbf{ST}_{PP}$ . However, there are specific technical issues of this characterization which are not shared with the mentioned characterization of *NP*, and which become visible in the proofs (not given in this summary).

## Referências

- [BC92] S. Bellantoni and S. Cook. A new recursion-theoretic characterization of the poly-time functions. *Computational Complexity*, 2:97–110, 1992.
- [Oit08] Isabel Oitavem. Characterizing Pspace with pointers. *Mathematical Logic Quarterly*, 54(3):317–323, 2008.
- [Oit11] Isabel Oitavem. A recursion-theoretic approach to NP. *Annals of Pure and Applied Logic*, 162:661–666, 2011.

Research supported by the projects PTDC/FIL-FCI/109991/2009, PTDC/MHC-FIL/5363/2012 and PEst OE/MAT/UI0209/2011 (CMAF-UL), from FCT/MEC.

# CALCULABILIDADE DO COMPORTAMENTO ASSIMPTÓTICO DE SISTEMAS DINÂMICOS

*Daniel S. Graça*

CEDMES/FCT, Universidade do Algarve, C. Gambelas

8005-139 Faro, Portugal

& SQIG/Instituto de Telecomunicações, Lisboa, Portugal

e-mail: [dgraca@ualg.pt](mailto:dgraca@ualg.pt)

A noção de *algoritmo* é uma noção bastante antiga em matemática. Por exemplo, o algoritmo de Euclides já é mencionado nos *Elementos* por volta do ano 300 ano a.C. Um problema muito comum em matemática é querer ter um algoritmo que nos permita calcular uma certa quantidade. Por exemplo, na escola primária todos nós aprendemos algoritmos (regras) para adicionar ou multiplicar dois números.

Portanto, dado um problema matemático que sabemos ter solução, é natural querer saber se é possível calcular (ou computar) essa solução através de um algoritmo. Para mostrar que um problema é resolúvel por meio de um algoritmo, basta apresentar um algoritmo que garantidamente o resolva. Mas e como mostramos que um problema não é resolúvel desta forma? O principal problema parece ter a ver com a falta de uma definição rigorosa da noção intuitiva de algoritmo. Sem sabermos exatamente o que é um algoritmo, não é possível demonstrar que nenhum algoritmo pode resolver um determinado problema.

Este problema da definição rigorosa do que é um algoritmo só foi resolvida na década de 1930 com os trabalhos de Alonzo Church e Alan Turing. Utilizando modelos, como por exemplo as máquinas de Turing, passou a ser possível dizer quando é que, por exemplo, uma função inteira é computável. Essa teoria, baseada em número inteiros (ou equivalentemente em determinados tipos de estruturas discretas) tem tido imenso sucesso, formando as bases da teoria da computação, e potenciou desenvolvimentos que permitiram dar início à revolução informática a que se assistiu nos anos seguintes.

Apesar do sucesso da teoria da computação em lidar com estruturas discretas, muito menos tem sido estudado sobre problemas que envolvem estruturas contínuas, como por exemplo os números reais. No entanto, muitos problemas na prática envolvem números reais, pelo que parece importante considerar esse caso. Aliás, Turing já aborda esse caso no seu artigo seminal [\[Tur36\]](#).

Hoje em dia é possível trabalhar com a computabilidade de números e funções reais utilizando a teoria da *análise computável*. A ideia é *codificar*

esses números e funções através de números inteiros ou funções sobre os números inteiros, que já sabemos computar (ou mostrar que não são computáveis) através da teoria clássica da computabilidade.

Seguidamente, e de forma muito resumida, apresentamos algumas definições básicas (para mais detalhes, aconselhamos o artigo [BHW08], onde são apresentadas muitas outras definições alternativas, mas equivalentes às utilizadas em baixo).

Uma sequência de números racionais  $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  pode ser codificada por meio de uma função  $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^3$ , com componentes  $\phi_1, \phi_2, \phi_3 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ , desde que se tenha  $q_n = (\phi_1(n) - \phi_2(n))/2^{\phi_3(n)}$ . Da mesma forma se pode codificar uma dupla sequência de racionais  $\{q_{i,j}\}_{i,j \in \mathbb{N}}$  através de uma função  $\phi : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}^3$ .

**Definição 1** *Um nome para um número real  $x \in \mathbb{R}$  é uma função  $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^3$ , que codifica uma sequência de racionais  $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tal que  $|q_n - x| \leq 2^{-n}$  para todo o  $n \in \mathbb{N}$ . Um nome para uma sequência de números reais  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  é uma função  $\phi : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}^3$  que codifica uma dupla sequência de racionais  $\{q_{n,i}\}_{n,i \in \mathbb{N}}$  tal que  $|x_i - q_{n,i}| \leq 2^{-i}$  para todo o  $i, n \in \mathbb{N}$ .*

**Definição 2** *Um número real (sequência de números reais) é computável se admite um nome computável.*

De forma intuitiva, um número é computável se pode ser aproximado com uma precisão arbitrária através de uma máquina de Turing (algoritmo). Os números racionais,  $\pi, e, \sqrt{2}$  são exemplos de números computáveis.

**Definição 3** *Uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é computável se existe uma máquina de Turing tal que, dado um nome  $\rho$  de  $x \in \mathbb{R}$  e algum  $n \in \mathbb{N}$ , então a máquina de Turing com input  $n$  e oráculo  $\rho$  calcula  $\phi(n)$ , onde  $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^3$  é um nome de  $f(x)$ .*

Pode-se mostrar que todas as funções usuais da análise como  $e^x, \cos$ , etc. são computáveis. Naturalmente pode-se estender esta definição para funções em  $\mathbb{R}^n$ .

**Definição 4** *Um conjunto fechado  $F \subseteq \mathbb{R}^n$  é computável se a função distância*

$$d_F(x) = \min_{y \in F} \|x - y\|$$

*é computável. Um conjunto aberto é computável se o seu complementar é computável.*

Por exemplo  $\emptyset$ ,  $\mathbb{R}^2$  ou o disco  $D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$  são exemplos de conjuntos computáveis. Na teoria clássica da computação, existe a noção de conjuntos recursivamente enumeráveis, que são conjuntos cujo elementos podem ser enumerados por uma função computável. Esta noção pode ser estendida para conjuntos de números reais como se segue.

**Definição 5** *Um conjunto aberto  $A \subseteq \mathbb{R}$  é recursivamente enumerável se existem sequências computáveis de números racionais  $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  e  $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tais que  $A = \cup_{n \in \mathbb{N}} B(q_n, r_n)$ , onde  $B(x, r) = \{y \in \mathbb{R} : |x - y| < r\}$ . Um conjunto fechado  $F$  é recursivamente enumerável se existe uma sequência computável de números reais  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tal que  $\cup_{n \in \mathbb{N}} \{x_n\}$  é denso em  $F$ .*

As definições anteriores podem ser estendidas de forma natural para subconjuntos em  $\mathbb{R}^n$ . Tal como nos resultados clássicos, pode-se também mostrar que um conjunto é computável sse esse conjunto e o seu complemento são recursivamente enumeráveis (r.e). Note-se que também poderíamos ter definido os conjuntos r.e. utilizando a função distância (ver por exemplo [BHW08]).

Nos nossos trabalhos, temos estado particularmente interessados em problemas que envolvem sistemas dinâmicos e o seu comportamento de longo prazo. Os sistemas dinâmicos aparecem em inúmeros contextos e são importantes em muitas aplicações. Devido à sua grande complexidade matemática, em muitas aplicações têm sido utilizados computadores para tentar obter informação sobre sistemas dinâmicos. O nosso objetivo foi o de compreender se os computadores podem ser utilizados com sucesso nessa tarefa. Apresentamos de seguida um resumo de alguns resultados que obtivemos (a referência [BGPZ13] apresenta uma descrição mais detalhada desses resultados, indicando as referências onde os resultados foram originalmente obtidos):

**Teorema 6** *Dado como input uma função analítica  $f$ , o problema de decidir o número de pontos de equilíbrio de  $y' = f(y)$  não é computável, mesmo em conjuntos compactos. O mesmo problema, mas considerando órbitas periódicas em vez de pontos de equilíbrio, também não é computável. No entanto, em sistemas estruturalmente estáveis, o conjunto formado por todos os pontos de equilíbrio é recursivamente enumerável, assim como o conjunto formado por todas as órbitas periódicas hiperbólicas.*

**Teorema 7** *O atrator (geométrico) de Lorenz é computável, assim como a ferradura de Smale.*

**Teorema 8** *A bacia de atração de um atrator é, em geral, não computável, mesmo que o atrator seja um ponto de equilíbrio hiperbólico e o sistema seja definido por uma função analítica computável. Essa não-computabilidade é persistente: pode-se perturbar o sistema e mesmo assim a bacia de atração pode continuar a ser não-computável. No entanto, a bacia de atração é recursivamente enumerável.*

**Teorema 9 (Versão computável do Teorema de Hartman-Grobman)** *Perto de um ponto de equilíbrio hiperbólico, é possível encontrar um homeomorfismo computável que transforma a solução do sistema não-linear na solução do seu sistema linearizado.*

**Teorema 10** *A variedade estável/instável de um ponto de equilíbrio hiperbólico é computável localmente, mas não globalmente.*

**Agradecimentos.** O trabalho descrito neste artigo foi parcialmente suportado pelo EU FEDER POCTI/POCI e pela *Fundação para a Ciência e a Tecnologia* via SQIG - Instituto de Telecomunicações através do projeto FCT PEst-OE/EEI/LA0008/2013.

## Referências

- [BGPZ13] Olivier Bournez, Daniel S. Graça, Amaury Pouly, and N. Zhong. Computability and computational complexity of the evolution of nonlinear dynamical systems. In P. Bonizzoni, V. Brattka, and B. Löwe, editors, *Proc. 9th Conference on Computability in Europe, CiE 2013: The Nature of Computation—Logic, Algorithms, Applications*, LNCS 7921, pages 12–21. Springer, 2013.
- [BHW08] V. Brattka, P. Hertling, and K. Weihrauch. A tutorial on computable analysis. In S. B. Cooper, , B. Löwe, and A. Sorbi, editors, *New Computational Paradigms: Changing Conceptions of What is Computable*, pages 425–491. Springer, 2008.
- [Tur36] A. M. Turing. On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem. *Proc. London Math. Soc.*, (Ser. 2–42):230–265, 1936.

# O-MINIMALITY AND SHEAF COHOMOLOGY

*Mário J. Edmundo*

Universidade Aberta  
Campus do Tagus Park, Edifício Inovação I  
Av. Dr. Jaques Delors  
2740-122 Porto Salvo, Oeiras, Portugal  
and  
CMAF Universidade de Lisboa  
Av. Prof. Gama Pinto 2  
1649-003 Lisboa, Portugal  
e-mail: [edmundo@ci.fc.ul.pt](mailto:edmundo@ci.fc.ul.pt)

*Luca Prelli*

CMAF Universidade de Lisboa  
Av. Prof. Gama Pinto 2  
1649-003 Lisboa, Portugal  
e-mail: [lprelli@fc.ul.pt](mailto:lprelli@fc.ul.pt)

**Resumo:** O objectivo deste trabalho é contribuir para o desenvolvimento da teoria de feixes o-minimais definindo as seis operações neste contexto. Estas construções, para além do interesse que apresentam em si, fornecem as ferramentas essenciais para a obtenção de novas provas gerais e uniformes a alguns problemas (e.g. as conjecturas de Pillay) da geometria o-minimal sobre grupos definivelmente compactos definidos em estruturas o-minimais arbitrárias.

**Abstract** The aim of our work is to contribute to the development of the theory of o-minimal sheaf cohomology by defining the six Grothendieck operations in this setting. Beside their own interest, these constructions will provide the main missing ingredients to obtain general and unified proofs of some problems (e.g. Pillay's conjectures) of o-minimal geometry about definably compact definable groups in arbitrary o-minimal structures.

**palavras-chave:** Estruturas o-minimais; algebra homológica; teoria de feixes.

**keywords:** O-minimal structures; homological algebra; sheaf theory

## 1 Introduction

The recent impact of model theoretic techniques in algebra, algebraic geometry, number theory, has been remarkable. O-minimality is the analytic part

of model theory and deals with theories of ordered, hence topological, structures satisfying certain tameness properties. It generalizes semi-algebraic and subanalytic geometry and it is claimed to be the formalization of Grothendieck's notion of tame topology (topologie modérée).

The geometry of definable sets has had an impact in the theory of definable groups. For example: the triangulation theorem allows the development of an o-minimal singular (co)homology with Hurewicz theorem, Künneth formula, Poincaré duality and degree theory. These are essential ingredients in the proof of Pillay's conjecture in the field case (a non-standard analogue of Hilbert's 5<sup>th</sup> problem for locally compact topological groups).

A natural question arises: Can we construct o-minimal cohomology for general o-minimal structures? The aim of this work is to give a positive answer to this question (under some suitable hypothesis). In order to make the required constructions we will need to develop o-minimal sheaf theory and define the Grothendieck operations in this setting.

## 2 Preliminaries

**O-minimal structures.** An ordered structure

$$\mathcal{M} = (M, <, (c)_{c \in \mathcal{C}}, (f)_{f \in \mathcal{F}}, (R)_{R \in \mathcal{R}})$$

is o-minimal if every definable subset of  $M$  in the structure is already definable in  $(M, <)$ , i.e. is a finite union of points and intervals. Examples of o-minimal structures are:

- $\mathcal{M} = (\mathbb{R}, <, 0, 1, +)$  PL-geometry
- $\mathcal{M} = (\mathbb{R}, <, 0, 1, +, \cdot)$  semi-algebraic geometry
- $\mathcal{M} = (\mathbb{R}, <, 0, 1, +, \cdot, (f)_{f \in \text{an}})$  subanalytic geometry

Other interesting examples can be obtained by adding the exponential exp or replacing  $\mathbb{R}$  with  $\mathbb{R}((t^{\mathbb{Q}}))$  (non-standard o-minimal structures).

**O-minimal sheaves.** Let  $X$  be a definable space (example:  $M^n$  with the order topology) and let  $\tilde{X}$  be the associated o-minimal spectrum. Let  $k$  be a field. Let  $\text{Op}(\tilde{X})$  be the family of open subsets of  $\tilde{X}$ . A presheaf of  $k$ -vector

spaces is the data of:

$$\begin{aligned} \text{Op}(\tilde{X}) &\rightarrow \{k\text{-vector spaces}\} \\ U &\mapsto \Gamma(U; F) \quad (= F(U)) \\ (V \subset U) &\mapsto (F(U) \rightarrow F(V)) \quad (\text{restriction}) \\ &\quad s \mapsto s|_V \end{aligned}$$

The restriction is compatible with the inclusions (i.e.  $U \subset V \subset W$ ,  $s \in F(W)$ , then  $s|_V|_U = s|_U$  and  $s|_W = s$ ). That is, a contravariant functor  $F : \text{Op}(\tilde{X}) \rightarrow \text{mod}(k)$ . A presheaf is a sheaf if satisfies the following gluing conditions: let  $U \in \text{Op}(\tilde{X})$  and let  $\{U_j\}_{j \in J}$  be a covering of  $U$  in  $\text{Op}(\tilde{X})$ , then we have the exact sequence

$$0 \rightarrow F(U) \rightarrow \prod_{j \in J} F(U_j) \rightarrow \prod_{j, k \in J} F(U_j \cap U_k)$$

### 3 O-minimal sheaf cohomology

**Operations.** Let  $X$  be a definable space. We still denote by  $X$  its o-minimal spectrum to lighten notations. One can define, for sheaves and their derived category the operations  $R\mathcal{H}om$  and  $\text{RHom}$  (hom-functors),  $\otimes$  (tensor product) and, given a continuous definable map  $f : X \rightarrow Y$ , the functors  $Rf_*$  (direct image) and  $f^{-1}$  (inverse image).

One can define sheaf cohomology as  $H^*a_{X*}F = H^*(X; F)$  ( $F$  sheaf,  $X$  definable manifold,  $a_X$  projection to a point). One can prove the following results ([3]):

- Vanishing theorems
- Vietoris-Beagle theorem
- Eilenberg-Steenrod axioms

**Proper direct image.** A definable set  $K$  is definably compact if every definable curve has a limit (in  $M^n$  iff definable closed and bounded). A definable map is definably proper if the inverse image of a definably compact is definably compact. Hence  $K$  is compact iff  $a_K$  is definably proper.

In order to study cohomology with definably compact support we need the functor of proper direct image  $f_!$

$$f_!F(U) = \{s \in F(f^{-1}(U)), f \text{ definably proper on } \text{supp}(s)\}$$

When  $f = a_X$  (in the derived category) we get cohomology with compact support. The following formulas hold ([4]):

- Projection formula
- Base change formula
- Künneth formula

**Duality.** In the derived category one can construct an extraordinary inverse image  $f^!$ . When  $f = a_X$  we get the Poincaré-Verdier duality for o-minimal sheaves.

**Cohomology computations.** Once we define the six Grothendieck operations and the above fundamental formulas we are able to compute cohomology for general o-minimal structures as follows:

$$\begin{aligned} H^*(X, \mathbb{Q}) &= H^*(a_{X*}a_X^{-1}\mathbb{Q}) \text{ (cohomology)} \\ H_c^*(X, \mathbb{Q}) &= H^*(a_{X!}a_X^{-1}\mathbb{Q}) \text{ (cohomology with compact support)} \\ H_*(X, \mathbb{Q}) &= H^*(a_{X!}a_X^!\mathbb{Q}) \text{ (homology)} \\ H_*^{\text{BM}}(X, \mathbb{Q}) &= H^*(a_{X*}a_X^!\mathbb{Q}) \text{ (Borel-Moore homology)} \end{aligned}$$

**Remark.** Some conditions ([4]) on the category of definable sets are needed. Examples of categories satisfying the conditions include: (i) regular, locally definably compact definable spaces in o-minimal expansions of real closed fields; (ii) Hausdorff locally definably compact definable spaces in o-minimal expansions of ordered groups with definably normal completions; (iii) locally closed definable subspaces of cartesian products of a given definably compact definable group in an arbitrary o-minimal structure.

## Referências

- [1] L. van den Dries *Tame topology and o-minimal structures* London Math. Soc. Lecture Note Series 248, Cambridge University Press, Cambridge 1998.
- [2] M. Kashiwara and P. Schapira, *Sheaves on Manifolds*, Grundlehren der Math. 292, Springer-Verlag, Berlin 1990.
- [3] M. Edmundo, G. Jones and N. Peatfield, “Sheaf cohomology in o-minimal structures”, *J. Math. Logic*, Vol. 6 N.2 (2006), pp. 163-179.
- [4] M. Edmundo and L. Prelli, “The six Grothendieck operations on o-minimal sheaves”, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I*, Vol.352 (2014), pp. 455-458.

# Matemática nas Ciências e Tecnologia

*Editores Convidados:* António Malheiro, Filipe Oliveira

*Filipe S. Cal, Gonçalo A. S. Dias & Juha H. Videman*

Wave trapping above freely-floating obstacles ..... 103

*Olivier Pellegrino, Luís Filipe Ribeiro & Eduarda Filipe*

Aspetos dos Algorismos Significativos em Metrologia ..... 107



# WAVE TRAPPING ABOVE FREELY-FLOATING OBSTACLES

*Filipe S. Cal, Gonçalo A. S. Dias, Juha H. Videman*

CAMGSD and Departamento de Matemática  
Instituto Superior Tecnico, Universidade de Lisboa  
Av. Rovisco Pais, 1, 1049-001 Lisboa, Portugal  
e-mail: videman@math.ist.utl.pt

**Abstract** We present conditions under which a freely-floating obstacle is most likely to amplify oscillations of the surrounding fluid.

**keywords:** Trapped mode, freely-floating, spectral problem.

## 1 Introduction

Trapped modes are localized harmonic oscillations in unbounded media that can be referred to as acoustics resonances, edge waves, bound states or Rayleigh-Bloch surface waves depending on the context (acoustics, water-wave theory, quantum mechanics, electromagnetics). They may appear in acoustic waveguides, around floating structures and along coastlines, in quantum waveguides and along diffraction gratings and their detection is critical, e.g., in naval architecture, offshore oil and gas drilling as well as in the design of turbomachinery, coupling devices and semiconductors.

In the water-wave theory, a trapped mode corresponds to a free oscillation of the fluid around a partially or totally submerged structure, having finite energy and existing only at a particular oscillation frequency. When the submerged structure is allowed to float freely the trapping problem becomes a quadratic spectral boundary-value problem for the mechanical system governing the coupled motion of the structure and the surrounding fluid. In a series of articles, cf. [5, 3, 1, 4] and the review article [2], we have shown how to make the quadratic spectral problem amenable to mathematical analysis. Moreover, we have put forward conditions on the floating structures that, if satisfied, warrant the existence of trapped modes. In this short note, we will zoom in on these conditions and on a submarine-shaped obstacle to show that there exists a submergence depth around which the obstacle is most vulnerable to wave trapping.

## 2 Problem definition

Consider two infinite liquid layers of finite depth, bounded laterally by rigid walls and lying on top of one another. Assume that a rigid body is totally

immersed and floating freely within the open fluid channel and that the fluid is incompressible, inviscid and layerwise homogeneous with the density in the lower layer greater than the one in the upper layer ( $\rho_2 > \rho_1 > 0$ ).

Let  $h_j > 0$  denote the layer depths,  $2l$  the channel width,  $B \subset \mathbb{R}^3$  the immersed body,  $\Theta^1$  and  $\Theta^2$  its submerged parts and  $\Sigma^1$  and  $\Sigma^2$  its surfaces in the upper and lower layer, respectively. Denote the fluid domain within each layer by  $\Omega^j$ ,  $j = 1, 2$ , the part of the interface not pierced by the obstacle by  $\Gamma$  and the cross-section of the part of the body piercing the interface by  $\theta$  (assume that the free surface is left unpierced).

Under the usual assumptions of the linear water-wave theory, the motion is time harmonic, with the radian frequency  $\omega > 0$ , and under gravity, with  $g$  denoting the acceleration due to gravity. Our coupled (spectral) water-wave problem consists in finding a non-trivial  $(\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \boldsymbol{\alpha}) \in H^1(\Omega^1) \times H^1(\Omega^2) \times \mathbb{C}^6$  and  $\omega \in \mathbb{C}$ , such that the following equations are satisfied for all  $(\psi^{(1)}, \psi^{(2)}, \boldsymbol{\beta}) \in H^1(\Omega^1) \times H^1(\Omega^2) \times \mathbb{C}^6$  (cf. [1]):

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^2 \rho_j (\nabla \varphi^{(j)}, \nabla \psi^{(j)})_{\Omega^j} + \sum_{j=1}^2 i\omega \rho_j (\mathbf{n}^T D(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \boldsymbol{\alpha}, \psi^{(j)})_{\Sigma^j} \\ & = g^{-1} \omega^2 \frac{1}{\rho_2 - \rho_1} (\rho_2 \varphi^{(2)} - \rho_1 \varphi^{(1)}, \rho_2 \psi^{(2)} - \rho_1 \psi^{(1)})_{\Gamma}, \end{aligned} \quad (1)$$

$$g (K \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})_{\mathbb{C}^6} - \sum_{j=1}^2 i\omega \rho_j (\varphi^{(j)}, \mathbf{n}^T D(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \boldsymbol{\beta})_{\Sigma^j} = \omega^2 (M \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})_{\mathbb{C}^6}. \quad (2)$$

Here,  $(\cdot, \cdot)_{\Omega^j}$ ,  $(\cdot, \cdot)_{\Sigma^j}$  and  $(\cdot, \cdot)_{\Gamma}$  denote the usual scalar products in  $[L^2(\Omega^j)]^3$ ,  $L^2(\Sigma^j)$  and  $L^2(\Gamma)$ , respectively. Moreover,  $D(\mathbf{x})$  is a matrix given by

$$D(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y & 0 & 0 & z \\ 0 & 1 & x & 0 & -z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & y & -x \end{bmatrix},$$

$M = \int_B \rho_B(\mathbf{x}) D(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T D(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) d\mathbf{x}$  is the mass matrix and  $K$  is the buoyancy matrix defined block-wise as

$$K = \begin{bmatrix} \mathbb{O}_3 & \mathbb{O}_3 \\ \mathbb{O}_3 & K' \end{bmatrix}, \quad K' = K^\theta + K^\Theta,$$

$$K^\theta = (\rho_2 - \rho_1) \int_{\theta} d(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T d(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) dx dy,$$

$$K^\Theta = \text{diag}\{0, \rho_1 I_z^{\Theta^1} + \rho_2 I_z^{\Theta^2}, \rho_1 I_z^{\Theta^1} + \rho_2 I_z^{\Theta^2}\},$$

where  $d(\mathbf{x}) = (1, y, -x)$ ,  $I_z^{\Theta^j} = \int_{\Theta^j} (z - z_0) d\mathbf{x}$  and  $\mathbb{O}_3$  denotes the  $3 \times 3$  null matrix, see [1] or [2] for more details.

**Definition.** A non-trivial solution  $(\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \boldsymbol{\alpha}) \in H^1(\Omega^1) \times H^1(\Omega^2) \times \mathbb{C}^6$  of problem (1)-(2) is called a trapped mode; the corresponding value of  $\omega$  is referred to as a trapping frequency.

One must also take into account the following stability conditions: (i) the mass of the displaced liquid is equal to that of the floating body (Archimedes’ principle of flotation); (ii) the centre of buoyancy lies on the same vertical line as the centre of mass; (iii) the quadratic form represented by matrix  $K'$  is positive definite. The last statement ensures stability of the equilibrium position of the floating body (cf. [1]).

### 3 Submarine-shaped obstacle

Let  $B$  be a totally submerged ellipsoidal obstacle of constant density  $\rho_B$  ( $\rho_1 < \rho_B < \rho_2$ ) with its immersed parts in each layer defined through

$$\Theta^1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{(z - z_0)^2}{c^2} \leq 1, 0 < z < c(t + 1)\},$$

$$\Theta^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{(z - z_0)^2}{c^2} \leq 1, c(t - 1) < z < 0\},$$

where  $t \in (-1, 1)$  is a parameter given, in view of the Archimedes’ principle of flotation, by  $t = 1 - 2\frac{\rho_B - \rho_1}{\rho_2 - \rho_1}$  and  $a > \max\{b, c\}$  (see Figure 1).

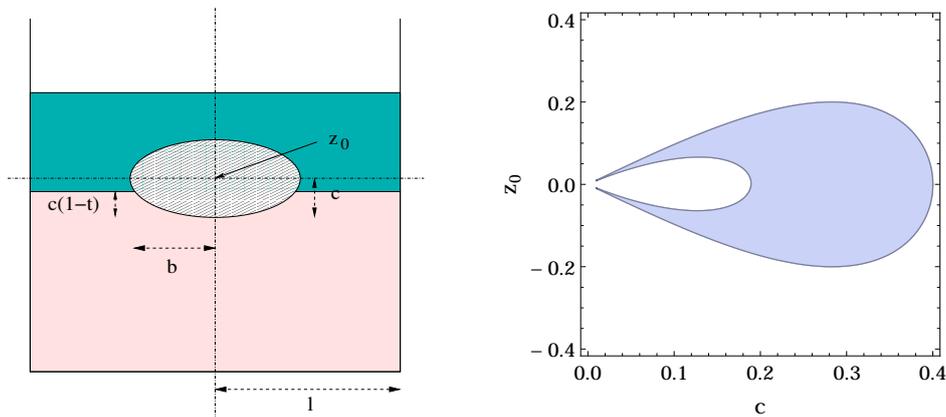


Figure 1: Left: an ellipsoid piercing the interface, with  $-c < z_0 < c$ . Right: Region where the stability and the trapping conditions are satisfied for  $l = 0.5$ ,  $b = 0.4$ ,  $\rho_1/\rho_2 = 0.9$ ,  $h_1 = 1$  and  $h_2 = 10$ .

It can be shown that the equilibrium position of the obstacle is stable if  $c/b < \sqrt{1-t^2}$ . At the same time, the obstacle supports trapped modes if

$$g^{-1}\omega_{\dagger}^2 \left( I_{yy}^B + I_{zz}^B \right) > \rho_1 I_z^{\Theta^1} + \rho_2 I_z^{\Theta^2} + (\rho_2 - \rho_1) I_{yy}^{\theta},$$

where  $I_{yy}^B = \int_B \rho_B (y-y_0)^2 d\mathbf{x}$ ,  $I_{zz}^B = \int_B \rho_B (z-z_0)^2 d\mathbf{x}$ ,  $I_{yy}^{\theta} = \int_{\theta} (y-y_0)^2 dx dy$  and  $\omega_{\dagger}^2$  is computed from the dispersion relation of the problem in the absence of obstacles (cf. [3], [4]).

In Figure 1 we have depicted the region where both the stability and trapping conditions are met in the  $(c, z_0)$ -plane. One can see that there is a critical value for  $|z_0|$ , that is, for the distance between the geometric centre of the ellipsoid and the interface, above which the trapping and stability conditions are never satisfied. This critical submergence depth occurs when the configuration of the ellipsoid satisfies  $b = \sqrt{2}c$ .

## References

- [1] F. S. Cal, G. A. S. Dias, S. A. Nazarov, and J. H. Videman. Linearised theory for surface and interfacial waves interacting with freely floating bodies in a two-layer fluid. *ZAMP*, 2014. doi:10.1007/s00033-014-0423-8.
- [2] F. S. Cal, G. A. S. Dias, and J. H. Videman. Wave interaction with floating bodies in a stratified multilayer fluid. In J. Bourguignon, R. Jeltsch, A. Pinto, and M. Viana, editors, *Mathematics of Planet Earth: Dynamics, Games and Science*, volume 2 of *CIM Series in Mathematical Sciences*. Springer-Verlag. To appear.
- [3] F. S. Cal, G. A. S. Dias, and J. H. Videman. Existence of trapped modes along periodic structures in a two-layer fluid. *Q. J. Mech. Appl. Maths.*, 65(2):273–293, 2012. doi:10.1093/qjmam/hbs001.
- [4] F. S. Cal, G. A. S. Dias, and J. H. Videman. Trapped modes around freely floating bodies in a two layer fluid channel. *Proc. R. Soc. A*, 470(2170):20140396, 2014. doi:10.1098/rspa.2014.0396.
- [5] S. A. Nazarov and J. H. Videman. Trapping of water waves by freely floating structures in a channel. *Proc. R. Soc. A*, 467(2136):3613–3632, 2011. doi:10.1098/rspa.2011.0288.

# ASPETOS DOS ALGARISMOS SIGNIFICATIVOS EM METROLOGIA

*Olivier Pellegrino, Luís Filipe Ribeiro, Eduarda Filipe*

Laboratório Nacional de Metrologia, IPQ, Caparica

e-mail: OPellegrino@ipq.pt

LRibeiro@ipq.pt, Efilipe@ipq.pt

*António Cruz*

UNIDO, Maputo, Mozambique

e-mail: ASRCruz@gmail.com

**Resumo:** É essencial que a escrita dos valores numéricos dos resultados de medição seja reconhecida por todas as partes interessadas. Assim, para os algarismos significativos e arredondamento, foram estabelecidas convenções e regras publicadas em normas internacionais, que apresentamos nesta comunicação. A proposta da Conferência Geral dos Pesos e Medidas de definir as unidades de base do sistema internacional de unidades de medida a partir de constantes fundamentais realça a importância da correta escrita dos respectivos valores numéricos, que exemplificamos na da constante de Avogadro.

**Abstract:** It is essential that the writing of the numerical values of the measurement results is acknowledged by all interested parties. Thus, for significant figures and rounding, rules and conventions were established and published in international standards that we display in this communication. The proposal by the General Conference of Weights and Measures to define the base units of the International System of Units from fundamental constants underlines the importance of the correct writing of the respective numerical values that we exemplify in the writing of the Avogadro constant.

**Palavras-chave:** algarismo significativo, arredondamento, valor estipulado, constantes fundamentais.

**Keywords:** significant figure, rounding, stipulated value, fundamental constants.

## 1 Introdução

De acordo com o “Guia para a estimativa de incertezas de medição”, designado por GUM [1], publicação conceituada e reconhecida por quem tem

necessidade de apresentar resultados de medição com rigor e sob a coordenação do Bureau Internacional dos Pesos e Medidas (BIPM), é suficiente apresentar a incerteza de medição "...com no máximo dois algarismos significativos" e que "...as estimativas de grandezas de entrada e saída devem ser arredondadas para ser coerentes com as suas incertezas." Propomos então apresentar as regras existentes nos documentos internacionais e nacionais respeitantes aos algarismos significativos e arredondamentos. No seguimento das reflexões do F. Pavese [2, 3] sobre algumas consequências da recente proposta da Conferência Geral dos Pesos e Medidas (CGPM) na redefinição das unidades de base do Sistema Internacional de Unidades de Medida (SI), consideramos também uma aplicação atual desta temática respeitante às constantes fundamentais [4]. Trata-se da constante de Avogadro que, para manter o respetivo significado de contagem de número de entidades, necessita de uma notação para escrita do valor numérico de grande amplitude.

## 2 Algarismos significativos, arredondamentos

### 2.1 Algarismos significativos

Segundo a norma americana ASTM E 29 [5], qualquer algarismo num número é um algarismo significativo à exceção dos 0 à esquerda ou, em números sem separador decimal, de alguns 0 à direita. O algarismo 0 à esquerda de algarismos não nulos só serve para indicar a ordem de grandeza do número e não é significativo. Por exemplo, o número 0,0017 tem dois algarismos significativos. Por sua vez, o algarismo 0 à direita do último algarismo não nulo é significativo em número com um separador decimal: 16,00 tem quatro algarismos significativos. Em número sem separador decimal, os algarismos 0 à direita do último algarismo não nulo podem ou não ser significativos: 700000 Pa pode ter um ou até seis algarismos significativos. Esta ambiguidade pode ser evitada utilizando uma unidade de medida com prefixo SI adequado: 0,700 MPa ou 0,70 MPa que têm três ou dois algarismos significativos, respetivamente. A norma ASTM E 29 sugere também o uso da expressão com potências de 10 para contar os algarismos significativos: em  $7,00 \times 10^5$  Pa, o valor numérico tem 3 algarismos significativos. Assim, ao expressar um valor numérico  $W$ , cuja maior potência de 10 é  $10^N$ , num desenvolvimento decimal segundo:

$$W = (d_N 10^0 + d_{N-1} 10^{-1} + \dots + d_{N-L} 10^{-L}) \times 10^N = \sum_{m=N-L}^N d_m 10^m, \quad (1)$$

em que os  $d_m$  são um dos 10 algarismos 0, 1, ..., 9, à exceção de  $d_N$  que é não nulo, evidencia-se  $L + 1$  algarismos significativos. Na expressão (I), podemos observar que  $10^{N-L}$ , a potência mínima de 10, apresenta-se como uma resolução da representação do valor numérico  $W$ .

## 2.2 Arredondamentos

A partir do desenvolvimento decimal do valor numérico  $W$ , sem fatorização pela potência máxima  $10^N$ :

$$\begin{aligned} W &= d_N 10^N + \dots + d_1 10^1 + d_0 10^0 + d_{-1} 10^{-1} + \dots + d_{l+1} 10^{l+1} + d_l 10^l \\ &= \sum_{m=l}^N d_m 10^m, \end{aligned} \quad (2)$$

a norma portuguesa NP 37 [6] define o arredondamento de  $W$  à casa de ordem  $n$ , ou seja à potência  $10^n$ , segundo o procedimento:

- se  $d_{n-1} < 5$ , para  $m \geq n$ ,  $d_m$  fica igual e, para  $m < n$ ,  $d_m = 0$ ; assim, 11341,01 é arredondado à casa de ordem 1 em 11340;
- se  $d_{n-1} > 5$  ou se  $d_{n-1} = 5$  sem ser o último  $d_{n-q} \neq 0$ , com  $q \geq 1$ , para  $m > n$ ,  $d_m$  fica igual,  $d_n$  muda para  $d_n + 1$  e, para  $m < n$ ,  $d_m = 0$ ; assim, 11346,01 e 11345,01 são arredondados à casa de ordem 1 em 11350;
- se  $d_{n-1} = 5$ , é o último  $d_{n-q} \neq 0$  e  $n = 2p$ , para  $m \geq n$ ,  $d_m$  fica igual e, para  $m < n$ ,  $d_m = 0$ ; assim, 11345,00 é arredondado à casa de ordem 1 em 11340;
- se  $d_{n-1} = 5$ , é o último  $d_{n-q} \neq 0$ , com  $q \geq 1$ , e  $n = 2p + 1$ , para  $m > n$ ,  $d_m$  fica igual,  $d_n$  muda para  $d_n + 1$  e, para  $m < n$ ,  $d_m = 0$ ; assim, 11335,00 é arredondado à casa de ordem 1 em 11340. Este procedimento de arredondamento, idêntico ao da norma ASTM E 29, “favorece” os algarismos pares e é alcunhado de “five-even” rule. Também é utilizado maioritariamente em Ciência e Tecnologia.

Uma abordagem semelhante a este procedimento de arredondamento do valor numérico  $W$  à casa de ordem  $n$  é a da norma internacional ISO 80000-1 [7] que, a partir da designação da potência  $r = 10^n$  por resolução de arredondamento (rounding range), considera os múltiplos inteiros de  $r$ . Arredondar consiste em identificar um desses múltiplos inteiros de  $r$  que é mais próximo de  $W$ . Assim, ainda para arredondamentos em casa de ordem 1, 11341,01 fica 11340, enquanto ambos 11346,01 e 11345,01 mudam para 11350. No entanto, quando dois múltiplos inteiros de  $r$  são equidistantes do valor numérico para arredondar, a norma ISO 80000-1 refere a existência de dois procedimentos diferentes. Segundo a regra A, é escolhido o múltiplo de  $r$

de divisor par; assim, 11345,00 e 11335,00 são arredondados em 11340, o que é o procedimento da norma NP 37 e da norma ASTM E 29. Segundo a regra B, é escolhido o múltiplo de  $r$  com a maior amplitude; assim,  $-11345,00$  é arredondado em  $-11350$ . Este procedimento, idêntico ao da norma ASTM D 6026, é alcunhado de “five-up” rule. A norma ISO 80000-1 mostra uma preferência para a regra A porque, nos tratamentos de dados experimentais, esta regra causa menos erros de arredondamento que a regra B. Mas refere que a regra B é às vezes utilizada nas aplicações informáticas. Por sua vez, a norma IEEE 754 [8] considera estas duas regras de arredondamento.

Devido àquelas regras de arredondamento poderem ser diferentes das aplicadas na recolha dos dados experimentais, é necessário efetuar os arredondamentos no fim de todos os cálculos e não após cada cálculo. Por sua vez, o GUM recomenda de avaliar os algarismos significativos da incerteza para os consequentes arredondamentos na apresentação do resultado da medição. Finalmente, se o primeiro algarismo significativo da incerteza for entre 5 e 9, a incerteza fica só com este algarismo, porque o valor numérico arredondado do resultado de medição não cria um erro absoluto maior que o décimo da incerteza. Se o primeiro algarismo significativo da incerteza for entre 0 e 4, a incerteza mantém-se com dois algarismos significativos e arredonda-se o valor numérico do resultado de medição à casa de ordem seguinte.

### 3 Uma aplicação atual

Evocada por F. Pavese [2, 3], uma das consequências da redefinição das unidades de base explicitamente a partir de constantes fundamentais [4] respeita à natureza e expressão do valor numérico da constante de Avogadro,  $N_A$ . Estipular tal valor numérico mantendo o significado de contagem associado a  $N_A$  levanta a questão: como expressar corretamente este número inteiro com 24 algarismos em que só os primeiros algarismos 602214129 são conhecidos? A expressão  $6,02214129 \times 10^{23}$  não parece ser a mais apropriada e como os dois últimos algarismos 2 e 9 são estipulados, essa expressão significa que só pacotes de  $10^{17}$  unidades são exatamente conhecidos. Embora de maior resolução, múltiplos de  $10^3$  não podem ser utilizados porque não correspondem a uma contagem direta. É portanto necessária uma notação específica para tais números inteiros de grande amplitude só sendo conhecidos os primeiros algarismos. A partir da sugestão de F. Pavese [3], de apresentar um número inteiro  $I$  em que os  $M$  primeiros algarismos dentro do total de  $N$  são conhecidos com:  $|I_M| \rightarrow N$ , para  $N_A$  dando:  $602214129| \rightarrow 24$ , propo-

mos para  $N_A$  a notação:  $602214129| \rightarrow 10^{15}$ , em que “ $| \rightarrow |$ ” representa um separador decimal e a presença de algarismos desconhecidos.

## 4 Conclusões

Nesta comunicação, foram sintetizadas as regras publicadas em normas internacionais da determinação dos algarismos significativos e arredondamentos. No entanto, se o número a arredondar for equidistante de dois múltiplos sucessivos da resolução de arredondamento, no domínio técnico-científico, como na norma nacional NP 37, escolhe-se o múltiplo par, enquanto o domínio informático escolhe o múltiplo de maior amplitude. As redefinições previstas das unidades de base do SI, a partir de constantes fundamentais, colocam questões sobre a correta utilização desses valores estipulados, nomeadamente quando se perde informação contida nas respetivas incertezas. Uma representação de número inteiro de grande amplitude com algarismos desconhecidos é sugerida, baseada numa proposta de F. Pavese.

**Agradecimentos.** A apresentação desta comunicação foi possível graças à Sociedade Portuguesa de Metrologia (SPMet).

## Referências

- [1] Evaluation of measurement data - Guide to the expression of uncertainty in measurement, BIPM, IEC, IFCC, ISO, IUPAC, IUPAP, OIML, JCGM 100: 2008.
- [2] Pavese, F., Some reflections on the proposed redefinition of the unit for the amount of substance and other SI units, *Accred Qual Assur* 16, 161-165, 2011.
- [3] Pavese, F., Rounding and notation, namely when using stipulations in the definition of measurements units, *Measurement* 46, 3725-3729, 2013.
- [4] On the possible future revision of the SI, <http://www.bipm.org/en/measurement-units/new-si/>
- [5] ASTM E 29, Standard Practice for Using Significant Digits in Test Data to Determine Conformance with Specifications, 2013.
- [6] NP 37, Arredondamento dos valores numéricos, 2009.
- [7] ISO 80000-1, Quantities and units Part 1: General, 2009.
- [8] The Institute of Electrical and Electronic Engineers, IEEE Standard for Floating-Point Arithmetic, 2008.

# Probabilidades e Estatística

*Editor Convidado:* Maria Antónia Turkman

*Sandra Ramos, Antónia Amaral Turkman & Marília Antunes*  
Abordagem bayesiana não paramétrica do problema de triagem ..... 113

*Maria Polidoro, Fernando Magalhães & Maria A. Amaral Turkman*  
Abordagem bayesiana não paramétrica para o estudo da adequação  
de modelos ..... 117



# ABORDAGEM BAYESIANA NÃO PARAMÉTRICA DO PROBLEMA DE TRIAGEM

*Sandra Ramos*

Instituto Politécnico do Porto & CEAUL  
Rua Dr. António Bernardino de Almeida, 431  
4200-072 Porto, Portugal  
e-mail: [sfr@isep.ipp.pt](mailto:sfr@isep.ipp.pt)

*Antónia Amaral Turkman, Marília Antunes*

Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa & CEAUL  
Bloco C6 - Piso 4, Campo Grande  
1749-016 Lisboa, Portugal  
e-mail: [antonia.turkman@fc.ul.pt](mailto:antonia.turkman@fc.ul.pt)  
[marilia.antunes@fc.ul.pt](mailto:marilia.antunes@fc.ul.pt)

**Resumo:** O procedimento de triagem envolve a construção de uma região de especificação  $C_{\mathbf{X}}$ , num espaço  $d$ -dimensional, de modo a que um indivíduo futuro com um vetor de características em  $C_{\mathbf{X}}$  tenha maior probabilidade de ser identificado como um *sucesso* (a resposta  $Y$  pertence a uma região conhecida  $C_Y$ ). Na abordagem preditiva bayesiana a obtenção da região  $C_{\mathbf{X}}$  é baseada num critério ótimo assente na maximização de  $P(Y \in C_Y | \mathbf{X} \in C_{\mathbf{X}}; D)$ , restringida à classe das regiões  $C_{\mathbf{X}}$  com probabilidade preditiva de triagem  $\alpha$ . Habitualmente, a construção da região  $C_{\mathbf{X}}$  baseia-se em modelos paramétricos para  $(Y, \mathbf{X})$ , mas que nem sempre descrevem adequadamente o processo que gera os dados. Neste trabalho, propõe-se uma abordagem não paramétrica bayesiana que relaxa o pressuposto paramétrico.

**Abstract:** The screening procedure consists in building a specification region  $C_{\mathbf{X}}$  in a  $d$ -dimensional space such that a future individual with a characteristic vector in  $C_{\mathbf{X}}$  has higher probability of being a success that is, a response variable  $Y$  of interest belongs to a well defined set  $C_Y$ . In the Bayesian predictive approach,  $C_{\mathbf{X}}$  is obtained considering an optimality criterion based on the maximization of  $P(Y \in C_Y | X \in C_{\mathbf{X}}; \mathcal{D})$  constrained to the class of regions  $C_{\mathbf{X}}$  of size  $\alpha$ , that is, with fixed predictive probability of screening  $\alpha$ . Parametric modeling is a usual way to obtain the predictive distributions required for the formulation of the screening problem. Such modeling often implies the specification of a certain number of assumptions which are difficult to verify in practice. In this work the parametric assumption is relaxed by proposing a Bayesian nonparametric screening methodology.

**palavras-chave:** Triagem; modelação não paramétrica; métodos MCMC.

**keywords:** Screening; nonparametric Bayesian models; MCMC methods.

## 1 Introdução

Os procedimentos de triagem são atualmente usados em vários contextos como a medicina, psicologia, educação, ambiente e controlo de qualidade. Estes procedimentos têm como objetivo a retenção de indivíduos da população de modo a que, para os indivíduos retidos, a probabilidade de uma determinada característica estar presente (a resposta  $Y$  pertencer a uma região conhecida  $C_Y$ ) exceda um determinado valor pré-especificado  $\delta$ . Os indivíduos que apresentam a característica são rotulados como *sucesso*.

Em várias situações  $Y$  é de difícil obtenção direta, devendo ser observada apenas quando o indivíduo tem grande probabilidade de ser classificado como um *sucesso*. A avaliação indireta dessa probabilidade pode ser feita recorrendo à observação de um vetor  $d$ -dimensional ( $d \geq 1$ )  $\mathbf{X}$  correlacionado com  $Y$  e de mais fácil observação, de modo a reter indivíduos uma alta probabilidade de serem *sucesso*. Assim, o procedimento de triagem envolve a construção de uma região de especificação  $C_{\mathbf{X}}$ , no espaço  $d$ -dimensional, de modo a que um indivíduo futuro com um vetor de características em  $C_{\mathbf{X}}$  tenha maior probabilidade de ser identificado como um *sucesso*. No campo preditivo bayesiano a obtenção da região  $C_{\mathbf{X}}$  é baseada num critério ótimo assente na maximização de  $P(Y \in C_Y | \mathbf{X} \in C_{\mathbf{X}}; \mathcal{D})$ , restringida à classe das regiões  $C_{\mathbf{X}}$  com probabilidade preditiva de triagem  $\alpha = P(\mathbf{X} \in C_{\mathbf{X}} | \mathcal{D})$ . Em [3] é apresentado um critério de triagem ótimo de onde resulta a região:  $C_{\mathbf{X}} = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : P(Y \in C_Y | \mathbf{x}, \mathcal{D}) \geq k \}$  onde  $k$  é tal que  $P(\mathbf{X} \in C_{\mathbf{X}} | \mathcal{D}) = \alpha$  e  $\mathcal{D} = \{(y_1, x_{11}, x_{21}), \dots, (y_n, x_{1n}, x_{2n})\}$  o conjunto de dados.

É prática corrente, tanto em contexto clássico como bayesiano, utilizar modelos paramétricos na construção de  $C_{\mathbf{X}}$ . Porém, em muitas situações práticas os modelos paramétricos não conseguem descrever o processo que gera as observações, justificando-se assim a necessidade de relaxar o pressuposto paramétrico. Em [1] é apresentada uma abordagem clássica que traz alguma flexibilidade ao problema de triagem, não sendo conhecido trabalho semelhante num quadro bayesiano. Neste trabalho desenvolve-se um método de triagem bayesiano que não especifica qualquer modelo paramétrico.

## 2 Abordagem não paramétrica bayesiana

Considerando a decomposição  $[\mathbf{X}, Y] = [Y | \mathbf{X}] [\mathbf{X}]$ , a obtenção da solução não paramétrica bayesiana do problema de triagem e das estimativas das CO (probabilidades preditivas que interessam ter em consideração no problema de triagem; veja-se [3] e [2] para uma descrição destas medidas) resume-se à estimação não paramétrica bayesiana de  $P(Y \in C_Y | \mathbf{x}; \mathcal{D})$  e  $P(\mathbf{X} \in C_{\mathbf{X}} | \mathcal{D})$ .

Por sua vez, a obtenção dessas estimativas exige a estimação das funções densidade de probabilidade subjacentes por aplicação de métodos não paramétricos de estimação de densidades. Nesse problema, a distribuição desconhecida é vista como um parâmetro aleatório e é considerada uma distribuição *a priori* para esse parâmetro. Este raciocínio requer a introdução do conceito de medidas de probabilidade aleatórias (RPM) que são, genericamente, definidas como medidas de probabilidade sobre uma coleção de funções de distribuição. Há várias RPM descritas na literatura, sendo os processos de Dirichlet (DP) e as árvores de Pólya (PT) as mais estudadas.

## 2.1 O modelo

Sejam  $\{y_i, \mathbf{x}_i\}_{i=1}^n$  os dados, onde  $Y \in \mathbb{R}$  e  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^d$ . Considere-se que  $y_i | \mathbf{x}_i \sim f(\cdot | \mathbf{x}_i)$  com  $f(\cdot | \mathbf{x}_i)$  desconhecida e para a qual se considerou uma mistura por um processo de Dirichlet dependente (DDP) como distribuição *a priori*:

$$f(\cdot | \mathbf{x}) = \int \phi(\cdot | \mathbf{x}'\beta, \sigma^2) dG(\beta, \sigma^2); G | \alpha, G^* \sim DP(\alpha, G^*),$$

$$G^* = N_d(\beta | \mu_b, s_b) \Gamma(\sigma^2 | \tau_1/2, \tau_2/2).$$

Para a completa especificação do modelo consideraram-se as distribuições:  $\alpha | a_0, b_0 \sim \Gamma(a_0, b_0)$ ,  $\tau_2 | \tau_{s_1}, \tau_{s_2} \sim \Gamma(\tau_{s_1}/2, \tau_{s_2}/2)$  e  $\mu_b | m_0$ .

Para a distribuição desconhecida de  $\mathbf{X}$  considerou-se uma mistura por uma árvore de Pólya multivariada finita (PT) como distribuição *a priori*:

$$\mathbf{X} | G \sim G; G | c, m, C \sim PT(c, \Pi^{\mathbf{m}, \mathbf{C}}); p(\mathbf{m}, \mathbf{C}) \propto \mathbf{C}^{-1}; c | a, b \sim \Gamma(a, b).$$

Na simulação *a posteriori* do modelo consideraram-se métodos MCMC.

Como facilmente se reconhece, não é possível obter uma região com expressão em forma fechada, tendo-se implementado uma adaptação do procedimento apresentado em [2] para a aproximar a região ótima.

## 3 Aplicação

Esta secção apresenta resultados da aplicação do método proposto a 3 conjuntos de dados reais.  $(X_1, X_2)$  são níveis de expressão genética de um par de genes. Na Figura 1 encontra-se, para cada estudo, o diagrama de dispersão do par de genes, assim como uma apreciação intuitiva da natureza dos limites da região. A fronteira de natureza quadrática encontra-se também

representada. Na Tabela 1 mostram-se as estimativas das CO das regiões representadas. Analisando os resultados, pode-se concluir que o método proposto apresenta bom desempenho. Os valores das estimativas das CO são satisfatórios. Por exemplo, no conjunto de dados 1 a probabilidade de preditiva de sucesso passa de 0.532 para 0.981 quando  $\mathbf{X} \in C_{\mathbf{X}}$  é considerado e a probabilidade de um indivíduo não retido ser um *sucesso* é 0.082.

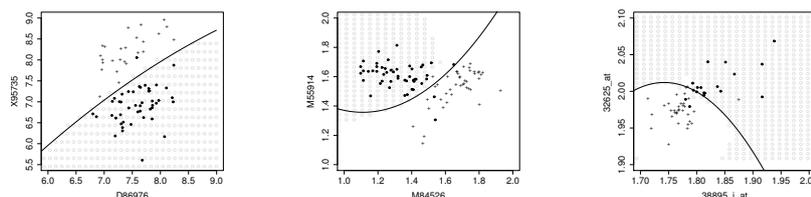


Figura 1: Região de especificação ótima aproximada.

Tabela 1: CO; polinómios de segundo grau na aproximação das fronteiras.

Estudo	$\hat{\gamma}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\delta}$	$\hat{\epsilon}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\eta}$
I	0.532	0.501	0.981	0.082	0.924	0.979
II	0.649	0.578	0.985	0.198	0.872	0.975
III	0.352	0.250	0.843	0.181	0.924	0.980

$$\begin{aligned} \gamma &= P(Y \in C_Y | \mathcal{D}); \alpha = P(\mathbf{X} \in C_{\mathbf{X}} | \mathcal{D}); \delta = P(Y \in C_Y | \mathbf{X} \in C_{\mathbf{X}}; \mathcal{D}); \epsilon = P(Y \in C_Y | \mathbf{X} \notin C_{\mathbf{X}}; \mathcal{D}); \\ \beta &= P(\mathbf{X} \in C_{\mathbf{X}} | Y \in C_Y; \mathcal{D}); \eta = P(\mathbf{X} \notin C_{\mathbf{X}} | Y \notin C_Y; \mathcal{D}). \end{aligned}$$

## 4 Conclusões

Neste trabalho apresentou-se uma solução não paramétrica bayesiana para o problema de triagem. O método foi ilustrado em três conjuntos de dados, tendo revelado bom desempenho. Contudo, é necessário proceder a um estudo de simulação de forma a avaliar uma aplicação ampla desta abordagem.

## Referências

- [1] Boys, R.J., “On a Kernel Approach to a Screening Problem”, *J. R. Statist. Soc. B*, Vol.54, No.1 (1992), pp. 157–169.
- [2] Ramos, S., Amaral Turkman, M.A., e Antunes, M., “Bayesian classification for bivariate normal gene expression”, *Computational Statist. and Data Analysis*, Vol.54, No.8 (2010), pp. 2012–2020.
- [3] Turkman, K.F. e Amaral Turkman, M.A., “Optimal screening methods”, *J. R. Statist. Soc. B*, Vol.51, No.2 (1989), pp. 287–295.

**Agradecimentos:** Este trabalho foi parcialmente financiado pela FCT: Projetos *PTDC/MAT/118335/2010* e *Pest – OE/MAT/UI0006/2011*.

# ABORDAGEM BAYESIANA NÃO PARAMÉTRICA PARA O ESTUDO DA ADEQUAÇÃO DE MODELOS

*Maria J. Polidoro e Fernando J. Magalhães*

CEAUL e Instituto Politécnico do Porto  
Rua Doutor Roberto Frias  
4200-465 Porto, Portugal  
e-mail: [mjp@estgf.ipp.pt](mailto:mjp@estgf.ipp.pt)  
[fjmm@iscap.ipp.p](mailto:fjmm@iscap.ipp.p)

*Maria A. Amaral Turkman*

CEAUL e FCUL  
Bloco C6, Piso 4 - Campo Grande  
1749-016 Lisboa, Portugal  
e-mail: [maturkman@fc.ul.pt](mailto:maturkman@fc.ul.pt)

**Resumo:** A base de muitas metodologias estatísticas pressupõe que um determinado modelo probabilístico paramétrico se ajusta a um conjunto de dados observados. Se esta suposição falha, a qualidade das inferências realizadas é posta em causa. Uma das soluções proposta pela abordagem bayesiana, para o estudo da adequabilidade de um modelo, consiste em definir um modelo bayesiano não paramétrico alternativo que incorpore o modelo paramétrico em estudo. Seguidamente, a averiguação da adequabilidade do modelo é feita através de métodos de comparação de modelos, destacando-se o factor de Bayes como método de eleição para a comparação.

Neste trabalho, propõe-se um teste de ajustamento bayesiano não paramétrico para o estudo da adequabilidade do modelo exponencial, que considera um modelo bayesiano alternativo baseado em mistura de árvores de Pólya. São ainda referidos os resultados de um estudo de simulação, sobre o desempenho do teste de ajustamento bayesiano com alguns dos testes de ajustamento clássicos.

**Abstract** The basis for several statistical methodologies assumes that a specified parametric probabilistic model fits a observed data set. If this assumption does not hold, the quality of the inferences is doubtful. One of the solutions proposed by the Bayesian approach, to study the adequacy of a model, is to define a Bayesian nonparametric alternative model that embed the parametric model under study. Next, to study the adequacy of the model, we use measures of comparison between the two models. The Bayes factor is one of the most relevant of such measures.

In this work, we propose a nonparametric Bayesian test of fit to study the adequacy of the exponential model, using as Bayesian alternative model a mixture of Pólya trees. It is also referred some practical examples and the performance of the Bayesian test of fit is compared, through a simulation study, with some of the classic tests.

**palavras-chave:** teste de ajustamento bayesiano não paramétrico; factor de Bayes; mistura finita de árvores de Pólya; estudo de simulação.

**keywords:** nonparametric Bayesian test of fit; Bayes factor; finite mixture of Pólya trees; simulation study.

## 1 Introdução

A distribuição exponencial é uma das mais simples e importantes distribuições utilizadas na modelação de dados que representam o tempo até à ocorrência de um determinado acontecimento de interesse. O estudo da adequabilidade da distribuição exponencial é fundamental para que as inferências realizadas sejam válidas.

A abordagem clássica para o estudo da adequabilidade tem sido um tema bastante debatido. Henze e Meintains [1] fizeram um estudo de simulação Monte Carlo, onde compararam vinte e uma estatísticas de teste para o estudo da adequabilidade da distribuição exponencial contra dezoito distribuições alternativas. O estudo exaustivo dos referidos autores dá indicações que algumas das dezoito estatísticas de teste, estão entre as mais potentes e simples de calcular.

A abordagem bayesiana sobre métodos para estudar a adequabilidade de um modelo contínuo, ao contrário da literatura clássica, é ainda muito reduzida e focada no estudo da adequabilidade da distribuição gaussiana (ver [2] e [3]).

Neste trabalho propõe-se um teste bayesiano não paramétricos para o estudo da adequabilidade da distribuição exponencial considerando como modelo bayesiano não paramétrico alternativo ( $H_1$ ), o modelo de mistura de árvores de Pólya (ver [4] e [5]). A averiguação da adequabilidade do modelo proposto na hipótese nula ( $H_0$ ) é feita utilizando o factor de Bayes.

Na secção [2] apresenta-se muito resumidamente a abordagem bayesiana ao problema (um estudo pormenorizado encontra-se em [6] e [7]) e na secção [3] apresentam-se as conclusões obtidas, através de um estudo de simulação, sobre o desempenho do novo teste com alguns dos testes clássicos considerados como os mais potentes.

## 2 Abordagem Bayesiana

O teste de ajustamento bayesiano não paramétrico pressupõe a comparação de dois modelos. O modelo bayesiano paramétrico ( $H_0$ ) é dado por

$$X_i|\lambda \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{Exp}(\lambda), \text{ para } i = 1, 2, \dots, n, \\ \lambda \sim \text{Ga}(a, b)$$

e o modelo bayesiano não paramétrico ou alternativo ( $H_1$ ) é dado por

$$X_1, X_2, \dots, X_n|G \stackrel{\text{iid}}{\sim} G \\ G|\Pi, \mathcal{A}_\lambda \sim \text{MPT}_M(\Pi, \mathcal{A}_\lambda), \\ \lambda \sim \text{Ga}(a, b)$$

onde  $\text{MPT}_M(\Pi, \mathcal{A}_\lambda)$  define uma distribuição *a priori* mistura finita de árvores de Pólya, com parâmetros  $(\Pi, \mathcal{A}_\lambda)$  e  $M$  níveis pré-especificados.

A averiguação da adequabilidade do modelo exponencial é feita utilizando o factor de Bayes a favor de  $H_0$  e contra  $H_1$ , dado por

$$\text{BF}_{01}(x) = \frac{p_0(x)}{p_1(x)}.$$

onde  $p_0(x)$  e  $p_1(x)$  é, respetivamente, a distribuição preditiva *a priori* de cada modelo.

Com o objectivo de comparar o desempenho do teste bayesiano não paramétrico proposto com alguns dos testes clássicos mais potentes, realizou-se um estudo de simulação. Foram utilizados 6 testes clássicos e várias distribuições alternativas de entre as distribuições frequentemente consideradas em outros estudos e com diferentes taxas de falha; a distribuição Gama, a distribuição Weibull, a distribuição Log-Normal, a distribuição Half-Normal, a distribuição do Qui-Quadrado e a distribuição Half-Cauchy. Os parâmetros destas distribuições alternativas foram escolhidos de modo a que as formas das distribuições fossem diferindo da forma de uma distribuição exponencial padrão. Foram simuladas amostras com diferentes dimensões:  $n = 25, 50$  e  $100$ . Pormenores e resultados deste estudo podem ser encontrados em [6] e [7].

## 3 Conclusões

Para as distribuições alternativas com taxa de falha crescente, notou-se que a potência empírica do teste de ajustamento bayesiano é quase sempre

superior à dos testes clássicos. Por outro lado, quando as amostras simuladas são obtidas a partir de distribuições alternativas com função taxa de falha decrescente, o teste de ajustamento bayesiano é, pelo menos, tão potente quanto os clássicos. Saliente-se, ainda, o facto de que quando as amostras são de pequena dimensão, o teste de ajustamento bayesiano é o que apresenta melhor desempenho. Assim, pode afirmar-se que o estudo de simulação efetuado, não sendo exaustivo, na medida que se restringiu o trabalho a distribuições alternativas usualmente consideradas em outros estudos, permite concluir que o teste bayesiano não paramétrico proposto para o estudo da adequabilidade da distribuição exponencial tem, de uma forma geral, um excelente desempenho.

**Agradecimentos:** Este trabalho foi parcialmente financiado pela Fundação para a Ciência e a Tecnologia, no âmbito do projecto PEst-OE/MAT/UI0006/2014.

## Referências

- [1] N. Henze e S. Meintanis, "Recent and classical tests for exponentiality: A partial review with comparisons". *Metrika*, Vol. 61, (2005), pp.29-45
- [2] J. O. Berger e A. Guglielmi, "Bayesian Testing of a Parametric Model versus Nonparametric Alternatives", *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 96, (2001), pp. 174-184.
- [3] S. T. Tokdar e R. Martin, (2011). "Bayesian test of normality versus a Dirichlet process mixture alternative", Tech. Rep., 2011.
- [4] N. L. Hjort, C. Holmes, P. Muller e S. G. Walker, *Bayesian Nonparametrics*, Cambridge University Press, 2010.
- [5] M. Lavine, "Some aspects of Polya tree distributions for statistical modeling", *The Annals of Statistics*, Vol. 20, (1992), pp. 1222-1235.
- [6] M. J. Polidoro, F. J. Magalhães e M. A. Amaral Turkman, "Classical and Bayesian Goodness-of-fit Tests for the Exponential Model: A Comparative Study", *14th International Conference on Computational Science and its Applications*, B. Murgante et al. (Eds.): ICCSA 2014, Part III, LNCS 8581, pp. 483–497.
- [7] M. J. Polidoro, "Metodologia bayesiana e adequação de modelos", Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa, Portugal, 2014.

# Sistemas Dinâmicos

*Editor Convidado:* Mário Bessa

*Alexandre Rodrigues*

Bifurcações Homoclínicas ..... 121

*Mário Bessa, Jorge Rocha & Maria Joana Torres*

Estabilidade de Hamiltonianos ..... 125



# BIFURCAÇÕES HOMOCLÍNICAS

*Alexandre Rodrigues*

Centro de Matemática da Universidade do Porto  
Rua do Campo Alegre, 687  
4169-464 Porto, Portugal  
e-mail: alexandre.rodrigues@fc.up.pt

**Resumo:** Bifurcações homoclínicas associados a um ponto de equilíbrio constituem centros organizadores para a análise de modelos concretos. Neste texto apresentam-se os quatro tipos genéricos de bifurcações homoclínicas associadas a pontos de equilíbrios hiperbólicos.

**Abstract** Homoclinic bifurcations provide useful organizing centers for the analysis of explicit models. In this article, we present the four generic types of homoclinic bifurcations associated to a hyperbolic equilibrium.

**palavras-chave:** Bifurcação, Ciclo homoclínico, Caos, Bifoco

**keywords:** Bifurcation, Homoclinic cycle, Chaos, Bifocus

## 1 Introdução

Uma *trajectória homoclínica* para uma equação diferencial do tipo:

$$\dot{x} = f(x, \lambda), \quad (1)$$

onde  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  é um campo de vectores diferenciável, é uma solução não trivial biassimptótica ( $t \rightarrow \pm\infty$ ) para um ponto estacionário. Na exposição assumir-se-á que esse ponto é a origem  $O \equiv 0_{\mathbb{R}^n}$ . O *ciclo homoclínico* associado a  $O$  é a união da trajectória com o ponto estacionário e será designado por  $\Gamma$  – ver Figura [1](#).

Para campos de vectores genéricos, a existência de um ciclo homoclínico é estruturalmente instável, existindo apenas para valores isolados do parâmetro  $\lambda$ . Assume-se, daqui em diante, que o ciclo existe para  $\lambda = 0$ . Em bifurcações homoclínicas, pretende-se estudar o que acontece numa pequena vizinhança de  $\Gamma$  para  $|\lambda| \approx 0$ , sendo determinante para isso a caracterização da dinâmica quando  $\lambda = 0$ .

Bifurcações homoclínicas têm sido estudadas por muitos autores nas últimas décadas e cada vez mais se torna claro que podem ser consideradas como centros organizadores da dinâmica caótica de alguns modelos – ver por exemplo [\[6\]](#), [\[7\]](#). Algum esforço tem sido implementado para catalogar

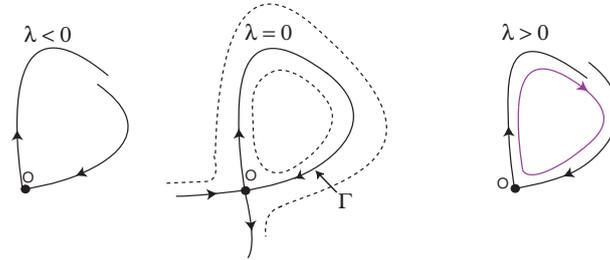


Figura 1: Bifurcação homoclínica planar.

os diferentes tipos de bifurcações que podem ocorrer, tendo-se constituído um instrumento fulcral no estudo de modelos concretos. As condições que determinam a existência de caos na vizinhança de ciclos homoclínicos estão baseadas na parte linear de  $df$  em  $O$ .

## 2 Linearização

Admita-se que os valores próprios de  $df_O$  são não-nulos e que não há ressonâncias não triviais<sup>[1]</sup>. Assumindo que o ciclo homoclínico não passa perto de outros pontos estacionários para além de  $O$ , a dinâmica perto de  $\Gamma$  pode ser determinada estudando o sinal dos valores próprios de  $df_O$ . A menos de uma mudança de coordenadas, pode-se assumir que a equação diferencial (1) pode ser escrita como:

$$\dot{x} = df|_{(O,\lambda)}x + G(x, \lambda)$$

onde  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  e  $n \geq 2$ . Neste caso,  $G(0, \lambda) = 0$ ,  $G$  é suave e contém termos não lineares<sup>[3]</sup>. Uma vez que  $O$  é uma sela hiperbólica, os valores próprios de  $df|_{(O,\lambda)}$  podem ser divididos em dois conjuntos  $\{\rho_i\}_{i=1,\dots,n_u}$  e  $\{\nu_i\}_{i=1,\dots,n_s}$  onde

$$n_u + n_s = n \quad \text{e} \quad \forall i (Re(\rho_i) > 0 \quad \text{e} \quad Re(\nu_i) < 0).$$

Podem ainda ser ordenados do seguinte modo:

$$Re(\nu_{n_s}) \leq \dots \leq Re(\nu_2) \leq Re(\nu_1) < 0 < \dots < Re(\rho_1) \leq Re(\rho_2) \leq \dots \leq Re(\rho_{n_u}).$$

Tipicamente, trajectórias que se aproximam de  $O$  em  $+\infty$  fazem-no tangencialmente ao subespaço gerado pelos valores próprios com maior parte real

<sup>1</sup>Detalhes sobre ressonâncias podem ser encontrados em [1].

negativa (*i.e.* os que estão mais próximos de 0). Analogamente, trajectórias que se aproximam de  $O$  em  $-\infty$  fazem-no tangencialmente ao subespaço gerado pelos valores próprios com menor parte real positiva. Estes valores próprios são conhecidos como *valores próprios dominantes* e, genericamente, determinam completamente a dinâmica na vizinhança de  $\Gamma$ .

**Catálogo:** Assumindo que o campo de vectores é genérico, a menos de reversão do tempo, há quatro tipos possíveis de bifurcações associadas a um ponto de equilíbrio estacionário (ver [2, 3]):

1. **sela-nó:** os valores próprios dominantes  $\rho_1$  e  $\nu_1$  são reais. No caso em que  $\rho_1 + \nu_1 \neq 0$ , a bifurcação homoclínica cria uma solução periódica para  $\lambda > 0$  ou  $\lambda < 0$ . Quando  $\lambda \rightarrow 0$  (do lado em que a solução periódica é gerada), o período do ciclo limite tende para  $+\infty$  e colapsa com  $\Gamma$  em  $\lambda = 0$ . Dependendo do sinal de  $\rho_1 + \nu_1$ , o ciclo emergente é atractor ou repulsor – ver Figura [1].
2. **sela-foco atractiva:** os valores próprios dominantes são  $\rho_1$  e  $\nu_1$  e  $\nu_2$  onde  $\rho_1 \in \mathbb{R}$  e  $\nu_1 = \bar{\nu}_2 \in \mathbb{C}$ . No caso em que  $Re(\nu_1) + \rho_1 < 0$ , a bifurcação é semelhante ao caso sela-nó.
3. **sela-foco caótica:** os valores próprios dominantes são  $\rho_1$  e  $\nu_1$  e  $\nu_2$  onde  $\rho_1 \in \mathbb{R}$  e  $\nu_1 = \bar{\nu}_2 \in \mathbb{C}$ . No caso em que  $Re(\nu_1) + \rho_1 > 0$ , existe caos perto do ciclo homoclínico para  $\lambda = 0$ . Há uma sequência de selas-nó acumulando em  $\lambda = 0$  de ambos os lados do espaço de parâmetros e sequências de bifurcações homoclínicas acumulando em  $\lambda = 0$ .
4. **bifoco:** os valores próprios dominantes são  $\rho_1$ ,  $\rho_2$ ,  $\nu_1$  e  $\nu_2$  onde  $\rho_1 = \bar{\rho}_2 \in \mathbb{C}$  e  $\nu_1 = \bar{\nu}_2 \in \mathbb{C}$ . Este caso aparece com  $n \geq 4$  e a dinâmica é similar à sela-foco caótica [6, 7]; todavia tipicamente surgem bifurcações mais complicadas. Devido à topologia complicada das soluções perto de  $\Gamma$  (Fig. [2]), a geometria das soluções que passam perto de  $\Gamma$  não está completamente descrita.

### 3 Ciclo homoclínico bifocal (caso 4.)

Actualmente, a análise de modelos cujo fluxo tem ciclos homoclínicos associado a um bifoco é um grande desafio. Inicialmente considerada em [6, 7], a geometria das bifurcações foi estudada nos anos 90 em [2, 3, 5]. Com base nestes trabalhos e nas Condições de Conley e Moser, em [4] descreve-se a

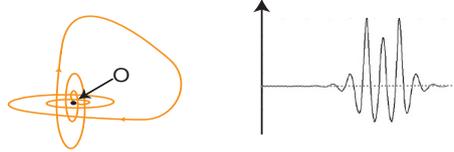


Figura 2: (a) Esquema de um ciclo homoclínico associado a um bifoco e respectiva série temporal.

existência de uma sucessão de ferraduras suspensas  $\mathcal{L}(\Lambda_n)$  acumulando em  $\Gamma$ . Os índices de Morse das soluções periódicas (*i.e.* a dimensão das variedades instável) nessas ferraduras depende crucialmente do sinal de  $\nu_1 + \rho_1$ . Cada ferradura suspensa  $\mathcal{L}(\Lambda_n)$ , bem como a sua hiperbolicidade, persiste para pequenas perturbações do sistema – detalhes em [4].

## Referências

- [1] G.R. Belitskii, *Functional equations, and conjugacy of local diffeomorphisms of finite smoothness class*, *Funkcional. Anal. i Prilozen* **7**, pp. 17–28, 1973.
- [2] P. Glendinning, *Differential equations with bifocal homoclinic orbits*, *Internat. J. Bifur. Chaos.* **7**(1), pp. 27–37, 1997.
- [3] P. Glendinning, C. Laing, *A homoclinic hierarchy*, *Physics Letters A.* **211**, pp. 155–160, 1996.
- [4] S. Ibáñez, A.A.P. Rodrigues, *On the dynamics near a homoclinic network to a bifocus: switching and horseshoes*, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, Vol. 25, No. 11, 15300(19p), 2015.
- [5] C. Laing, P. Glendinning, *Bifocal homoclinic bifurcations*, *Phys. D* **102**, pp. 1–14, 1997.
- [6] L.P. Shilnikov, *The existence of a denumerable set of periodic motions in four dimensional space in an extended neighbourhood of a saddle-focus*, *Sov. Math. Dokl* **8**(1), pp. 54–58, 1967.
- [7] L.P. Shilnikov, *A contribution to the problem of the structure of an extended neighborhood of a rough equilibrium state of saddle-focus type*, *Math. USSR Sb.* **10**(1), pp. 91–102, 1970.

## ESTABILIDADE DE HAMILTONIANOS

*Mário Bessa*

Departamento de Matemática, Universidade da Beira Interior  
Rua Marquês d'Ávila e Bolama, 6201-001 Covilhã, Portugal  
e-mail: [bessa@ubi.pt](mailto:bessa@ubi.pt)

*Jorge Rocha*

Departamento de Matemática, Universidade do Porto  
Rua do Campo Alegre, 687, 4169-007 Porto, Portugal  
e-mail: [jrocha@fc.up.pt](mailto:jrocha@fc.up.pt)

*Maria Joana Torres*

CMAT, Departamento de Matemática e Aplicações, Universidade do Minho  
Campus de Gualtar, 4700-057 Braga, Portugal  
e-mail: [jtorres@math.uminho.pt](mailto:jtorres@math.uminho.pt)

**Resumo:** Nesta breve nota considera-se o contexto dos sistemas Hamiltonianos, definidos numa variedade simplética  $M$  de dimensão  $2d$  ( $d \geq 2$ ). Prova-se que um sistema Hamiltoniano estrela é Anosov. Como consequência obtém-se a prova da conjectura da estabilidade para Hamiltonianos. Prova-se ainda que um sistema Hamiltoniano  $H$  é Anosov se qualquer das seguintes afirmações se verifica:  $H$  é robustamente topologicamente estável;  $H$  é estavelmente sombreável;  $H$  é estavelmente expansivo; e  $H$  possui a propriedade de especificação fraca estável. Além disso, para um Hamiltoniano  $C^2$ -genérico  $H \in C^2(M, \mathbb{R})$ , a união das hipersuperfícies de energia regulares parcialmente hiperbólicas e das órbitas fechadas elípticas, forma um subconjunto denso de  $M$ . Como consequência, qualquer hipersuperfície de energia regular robustamente transitiva de um Hamiltoniano  $C^2$  é parcialmente hiperbólica. Por fim, as hipersuperfícies de energia regulares estavelmente fracamente sombreáveis são parcialmente hiperbólicas.

**Abstract** In this brief note we consider the setting of Hamiltonian systems, defined on a  $2d$ -dimensional symplectic manifold  $M$  ( $d \geq 2$ ). We prove that a Hamiltonian star system is Anosov. As a consequence we obtain the proof of the stability conjecture for Hamiltonians. We also prove that a Hamiltonian system  $H$  is Anosov if any of the following statements holds:  $H$  is robustly topologically stable;  $H$  is stably shadowable;  $H$  is stably expansive; and  $H$  has the stable weak specification property. Moreover, for a  $C^2$ -generic Hamiltonian  $H \in C^2(M, \mathbb{R})$ , the union of the partially hyperbolic regular energy hypersurfaces and the closed elliptic orbits, forms a dense subset of

$M$ . As a consequence, any robustly transitive regular energy hypersurface of a  $C^2$ -Hamiltonian is partially hyperbolic. Finally, stably weakly shadowable regular energy hypersurfaces are partially hyperbolic.

**palavras-chave:** campo de vetores Hamiltoniano; órbitas fechadas hiperbólicas; estabilidade estrutural; hiperbolicidade parcial; órbitas fechadas elípticas.

**keywords:** Hamiltonian vector field; hyperbolic closed orbits; structural stability; partial hyperbolicity; elliptic closed orbits.

## 1 Sistemas Hamiltonianos

Seja  $(M, \omega)$  uma variedade simplética, onde  $M$  é uma variedade Riemanniana de dimensão  $2d$  ( $d \geq 2$ ) compacta, sem bordo, conexa, munida de uma forma simplética  $\omega$ . Um *Hamiltoniano* é uma função real  $C^r$  definida em  $M$ ,  $2 \leq r \leq \infty$ . Denotamos por  $C^r(M, \mathbb{R})$  o conjunto dos Hamiltonianos  $C^r$  em  $M$ . No que se segue estaremos restritos à topologia  $C^2$  e, portanto, tomamos  $r = 2$ . Dado um Hamiltoniano  $H$ , o *campo de vetores Hamiltoniano*  $X_H$  é definido por  $\omega(X_H(p), u) = \nabla H_p(u)$ , para todo  $u \in T_p M$ ; este campo de vetores gera o fluxo Hamiltoniano  $X_H^t$ . Uma *energia* de  $H$  é um escalar  $e \in H(M) \subset \mathbb{R}$ . Dada uma energia  $e$ , definimos o conjunto *nível de energia* como  $H^{-1}(\{e\})$ ; uma *hipersuperfície de energia*  $\mathcal{E}_{H,e}$  é uma componente conexa de  $H^{-1}(\{e\})$ , e é *regular* se não contém singularidades.

Um *sistema Hamiltoniano* é um triplo  $(H, e, \mathcal{E}_{H,e})$ , onde  $H$  é um Hamiltoniano,  $e$  é uma energia e  $\mathcal{E}_{H,e}$  é uma componente conexa regular de  $H^{-1}(\{e\})$ .

Fixada uma pequena vizinhança  $\mathcal{W}$  de uma hipersuperfície de energia regular  $\mathcal{E}_{H,e}$ , existem uma pequena vizinhança  $\mathcal{U}$  de  $H$  e  $\epsilon > 0$  tais que, para todo o Hamiltoniano  $\tilde{H} \in \mathcal{U}$  e para todo o nível de energia  $\tilde{e} \in (e - \epsilon, e + \epsilon)$ ,  $\tilde{H}^{-1}(\{\tilde{e}\}) \cap \mathcal{W} = \mathcal{E}_{\tilde{H},\tilde{e}}$ , onde  $\mathcal{E}_{\tilde{H},\tilde{e}}$  é uma hipersuperfície de energia de  $\tilde{H}$ . Chamamos a  $\mathcal{E}_{\tilde{H},\tilde{e}}$  a *continuação analítica* de  $\mathcal{E}_{H,e}$ .

No espaço dos sistemas Hamiltonianos consideramos a topologia gerada por um sistema fundamental de vizinhanças. Dado um sistema Hamiltoniano  $(H, e, \mathcal{E}_{H,e})$  dizemos que  $\mathcal{V}$  é uma *vizinhança* de  $(H, e, \mathcal{E}_{H,e})$  se existem uma pequena vizinhança  $\mathcal{U}$  de  $H$  e  $\epsilon > 0$  tais que, para todo o Hamiltoniano  $\tilde{H} \in \mathcal{U}$  e para todo o nível de energia  $\tilde{e} \in (e - \epsilon, e + \epsilon)$ , a continuação analítica  $\mathcal{E}_{\tilde{H},\tilde{e}}$  de  $\mathcal{E}_{H,e}$  está bem definida.

## 2 Hiperbolicidade versus estabilidade estrutural

Um sistema Hamiltoniano  $(H, e, \mathcal{E}_{H,e})$  é *Anosov* se a hipersuperfície de energia  $\mathcal{E}_{H,e}$  é uniformemente hiperbólica.

Um sistema Hamiltoniano  $(H, e, \mathcal{E}_{H,e})$  é um *sistema Hamiltoniano estrela* se existe uma vizinhança  $\mathcal{V}$  de  $(H, e, \mathcal{E}_{H,e})$  tal que, para qualquer  $(\tilde{H}, \tilde{e}, \mathcal{E}_{\tilde{H},\tilde{e}}) \in \mathcal{V}$ , a correspondente hipersuperfície de energia regular  $\mathcal{E}_{\tilde{H},\tilde{e}}$  possui todas as órbitas fechadas hiperbólicas.

Um sistema Hamiltoniano  $(H, e, \mathcal{E}_{H,e})$  é *estruturalmente estável* se existe uma vizinhança  $\mathcal{V}$  de  $(H, e, \mathcal{E}_{H,e})$  tal que, para qualquer  $(\tilde{H}, \tilde{e}, \mathcal{E}_{\tilde{H},\tilde{e}}) \in \mathcal{V}$ , existe um homeomorfismo  $h_{\tilde{H},\tilde{e}}$  entre  $\mathcal{E}_{H,e}$  e  $\mathcal{E}_{\tilde{H},\tilde{e}}$  que preserva as órbitas e as suas orientações. Além disso,  $h_{\tilde{H},\tilde{e}}$  é contínuo nos parâmetros  $\tilde{H}$  e  $\tilde{e}$ , e converge para *id* quando  $\tilde{H}$   $C^2$ -converge para  $H$  e  $\tilde{e}$  converge para  $e$ .

Em [1] foi provado que todo o sistema Hamiltoniano estrela, definido numa variedade simplética de dimensão 4, é Anosov. Posteriormente, em [2], este resultado foi generalizado a dimensões superiores (ver Teorema 1). Como consequência foi obtida a prova da conjectura da estabilidade para Hamiltonianos (ver Teorema 2).

**Teorema 1** *Se  $(H, e, \mathcal{E}_{H,e})$  é um sistema Hamiltoniano estrela, então  $(H, e, \mathcal{E}_{H,e})$  é Anosov.*

**Teorema 2** *Se  $(H, e, \mathcal{E}_{H,e})$  é um sistema Hamiltoniano estruturalmente estável, então  $(H, e, \mathcal{E}_{H,e})$  é Anosov.*

## 3 Hiperbolicidade versus sombras estáveis

Nesta secção fornecemos caracterizações da estabilidade estrutural de sistemas Hamiltonianos, usando as noções de estabilidade topológica, sombreamento, expansividade e especificação (as definições das propriedades referidas, no contexto Hamiltoniano, podem ser consultadas em [3, Secção 3]). Os sistemas Anosov e, portanto, os Hamiltonianos estruturalmente estáveis, são topologicamente estáveis, expansivos e satisfazem a propriedade de sombreamento. Mas o recíproco não é verdade (ver [3, Secção 1]). Consequentemente, o problema sobre a relação entre a estabilidade estrutural e propriedades topológicas e geométricas do sistema não é trivial. A restrição a  $C^2$ -interiores de conjuntos de Hamiltonianos que satisfazem uma certa propriedade, que explorámos em [3], tornou-se uma abordagem efetiva

para a solução deste problema (ver Teorema 3). Dizemos que uma propriedade vale de *modo estável* para algum sistema Hamiltoniano se for válida em alguma  $C^2$ -vizinhança desse sistema.

**Teorema 3** *Seja  $(H, e, \mathcal{E}_{H,e})$  um sistema Hamiltoniano. Se qualquer das seguintes afirmações se verificar:  $(H, e, \mathcal{E}_{H,e})$  é robustamente topologicamente estável;  $(H, e, \mathcal{E}_{H,e})$  é estavelmente sombreável;  $(H, e, \mathcal{E}_{H,e})$  é estavelmente expansivo; e  $(H, e, \mathcal{E}_{H,e})$  possui a propriedade de especificação fraca estável, então  $(H, e, \mathcal{E}_{H,e})$  é Anosov.*

## 4 Hiperbolicidade parcial versus órbitas elípticas densas

Um sistema Hamiltoniano  $(H, e, \mathcal{E}_{H,e})$  é *parcialmente hiperbólico* se a hipersuperfície de energia  $\mathcal{E}_{H,e}$  é parcialmente hiperbólica.

Em [3] foi provado que,  $C^2$ -genericamente, os Hamiltonianos possuem apenas dois tipos de comportamento bem diferenciado: hiperbolicidade parcial ou então muitas órbitas fechadas elípticas.

**Teorema 4** *Para um Hamiltoniano  $C^2$ -genérico  $H \in C^2(M, \mathbb{R})$  a união das hipersuperfícies de energia regulares parcialmente hiperbólicas e das órbitas fechadas elípticas, forma um subconjunto denso de  $M$ .*

Como consequência, qualquer hipersuperfície de energia regular robustamente transitiva de um Hamiltoniano  $C^2$  é parcialmente hiperbólica. Por fim, obtivemos que as hipersuperfícies de energia regulares estavelmente fracamente sombreáveis são parcialmente hiperbólicas (ver [3, Teorema 6]).

MJT foi parcialmente financiada pelo CMAT - “Centro de Matemática da Universidade do Minho”, através de fundos Portugueses da “Fundação para a Ciência e a Tecnologia”, Projeto PEstOE/MAT/UI0013/2014.

## Referências

- [1] M. Bessa, C. Ferreira and J. Rocha, “On the stability of the set of hyperbolic closed orbits of a Hamiltonian”, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, Vol. 149, No. 2 (2010), pp. 373–383.
- [2] M. Bessa, J. Rocha e M. J. Torres, “Hyperbolicity and Stability for Hamiltonian flows”, *Jr. Diff. Eq.*, Vol. 254, No. 1 (2013), pp. 309–322.
- [3] M. Bessa, J. Rocha e M. J. Torres, “Shades of Hyperbolicity for Hamiltonians”, *Nonlinearity*, Vol. 26, No. 10 (2013), pp. 2851–2873.

# Alunos de Doutoramento

*Editor Convidado:* Hugo Tavares

*Ronald A. Zúñiga-Rojas*

Estratificações no Espaço Moduli dos Fibrados de Higgs ..... 129



# ESTRATIFICAÇÕES NO ESPAÇO MODULI DOS FIBRADOS DE HIGGS

Ronald A. Zúñiga-Rojas<sup>1</sup>

Centro de Matemática  
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto  
Rua do Campo Alegre, s/n  
4197-007 Porto, Portugal  
e-mail: ronalbzur@gmail.com

**Resumo:** O trabalho de Hausel prova que a estratificação de Bialynicki-Birula do espaço moduli dos fibrados de Higgs de posto dois coincide com a sua estratificação de Shatz. Estas estratificações não coincidem para posto geral. Aqui, damos uma abordagem para o caso de posto três da classificação da estratificação de Shatz em termos da estratificação de Bialynicki-Birula.

**Abstract:** The work of Hausel proves that the Bialynicki-Birula stratification of the moduli space of rank two Higgs bundles coincides with its Shatz stratification. These two stratifications do not coincide in general. Here, we give an approach for the rank three case of the classification of the Shatz stratification in terms of the Bialynicki-Birula stratification.

**palavras-chave:** Geometria Algébrica, Espaços Moduli, Teoria de Gauge, Fibrados de Higgs, Estratificações, Fibrados Vetoriais.

**keywords:** Algebraic Geometry, Moduli Spaces, Gauge Theory, Higgs Bundles, Stratifications, Vector Bundles.

## 1 Espaço Moduli de Fibrados de Higgs

Seja  $\Sigma$  uma superfície de Riemann compacta de género  $g \geq 2$ , e seja  $K = K_\Sigma = (T\Sigma)^*$  o fibrado de linhas canónico de  $\Sigma$ .

**Definição 1.1.** Um *fibrado de Higgs* sobre  $\Sigma$  é um par  $(E, \Phi)$  onde  $E \rightarrow \Sigma$  é um fibrado vetorial holomorfo e  $\Phi: E \rightarrow E \otimes K$  é um endomorfismo de  $E$  torcido por  $K$ , chamado *campo de Higgs*. Repare que  $\Phi \in H^0(\Sigma; \text{End}(E) \otimes K)$ .

---

<sup>1</sup>Este trabalho é financiado por Fundos FEDER através do Programa Operacional Factores de Competitividade-COMPETE e por Fundos Nacionais através da FCT-Fundação para a Ciência e a Tecnologia no âmbito dos projetos PTDC/MAT-GEO/0675/2012 e PEst-C/MAT/UI0144/2013 e a bolsa de estudo com a referência SFRH/BD/51174/2010.

Para um fibrado  $E \rightarrow \Sigma$  o *declive* define-se como:  $\mu(E) := \frac{\deg(E)}{\text{rk}(E)} = \frac{d}{r}$ , onde  $\deg(E)$  é o grau de  $E$  e  $\text{rk}(E)$  é seu posto. Para mais informação, veja-se por exemplo Kobayashi [5].

**Definição 1.2.** Um subfibrado  $F \subset E$  é  $\Phi$ -invariante se  $\Phi(F) \subset F \otimes K$ . Um fibrado de Higgs chama-se *semi-estável* se  $\mu(F) \leq \mu(E)$  para qualquer subfibrado  $\Phi$ -invariante não trivial  $0 \neq F \subset E$ . Chama-se *estável* se a desigualdade é estrita para qualquer subfibrado próprio  $\Phi$ -invariante não trivial  $0 \neq F \subsetneq E$ . Finalmente, um fibrado de Higgs chama-se *poli-estável* se é a soma directa de subfibrados de Higgs estáveis, todos com o mesmo declive.

Fixando o posto  $\text{rk}(E) = r$  e o grau  $\deg(E) = d$  de um fibrado de Higgs  $(E, \Phi)$ , as classes de isomorfismo dos fibrados poli-estáveis são parametrizadas por uma variedade quase-projetiva: o espaço moduli  $\mathcal{M}(r, d)$ . Construções deste espaço podem encontrar-se no trabalho de Hitchin [4], utilizando Teoria de Gauge, ou no trabalho de Nitsure [6], utilizando métodos de geometria algébrica.

## 2 Ação de $\mathbb{C}^*$ em $\mathcal{M}(r, d)$

Existe uma ação holomorfa do grupo multiplicativo  $\mathbb{C}^*$  em  $\mathcal{M}(r, d)$  definida pela multiplicação:  $z \cdot (E, \Phi) \mapsto (E, z \cdot \Phi)$ . Note que Hausel [3] prova que o limite  $\lim_{z \rightarrow 0} z \cdot (E, \Phi) = \lim_{z \rightarrow 0} (E, z \cdot \Phi)$  está bem definido e existe para todo o  $(E, \Phi) \in \mathcal{M}(r, d)$ . Além disso, este limite é fixo pela ação de  $\mathbb{C}^*$ . Sejam  $\{F_\lambda\}$  as componentes irredutíveis do lugar de pontos fixos de  $\mathbb{C}^*$  em  $\mathcal{M}(r, d)$ .

Com base no trabalho de Bialynicki-Birula sobre ações de grupos algébricos [1], Hausel [3] define a estratificação de Bialynicki-Birula da seguinte maneira:

**Definição 2.1.** Considere o conjunto  $U_\lambda^{BB} := \{(E, \Phi) \in \mathcal{M}(r, d) \mid \lim_{z \rightarrow 0} z \cdot (E, \Phi) \in F_\lambda\}$ . Este conjunto é o *estrato ascendente* da *estratificação* Bialynicki-Birula:

$$\mathcal{M} = \bigcup_{\lambda} U_\lambda^{BB}.$$

Simpson [8] prova que os pontos fixos da ação  $\mathbb{C}^* \curvearrowright \mathcal{M}(r, d)$  são as chamadas *Variações de Estructura de Hodge*, VHS:

$$(E, \Phi) \text{ tal que } E = \bigoplus_{j=1}^n E_j \text{ e } \Phi : E_j \rightarrow E_{j+1} \otimes K.$$

Dizemos que  $(E, \Phi)$  é uma  $(\text{rk}(E_1), \dots, \text{rk}(E_n))$ -VHS.

### 3 Estratificação de Shatz

**Definição 3.1.** Uma *filtração Harder-Narasimhan* de  $E \rightarrow \Sigma$ , é uma filtração da forma:

$$\text{HNF}(E) : E = E_s \supset E_{s-1} \supset \dots \supset E_1 \supset E_0 = 0 \quad (1)$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

- i.  $\mu(E_{j+1}/E_j) < \mu(E_j/E_{j-1})$  para  $1 \leq j \leq s-1$ .
- ii.  $V_j := E_j/E_{j-1}$  é semi-estável para  $1 \leq j \leq s$ .

**Teorema 3.2** (Shatz [7, Theorem 1]). *Todo fibrado vetorial  $E \rightarrow \Sigma$  tem uma única filtração de Harder-Narasimhan.*

Isto foi provado no caso em que  $\Sigma$  é uma curva algébrica projetiva não-singular, por Harder e Narasimhan [2]. A prova de Shatz [7] é válida para variedades projetivas lisas de qualquer dimensão.

**Definição 3.3.** Seja  $E \rightarrow \Sigma$  um fibrado vetorial de posto  $\text{rk}(E) = r$ , com uma filtração Harder-Narasimhan como a mencionada acima em (1). Definimos o *tipo Harder-Narasimhan*, abreviado HNT, como o vetor

$$\text{HNT}(E) : \vec{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_2, \dots, \dots, \mu_s, \dots, \mu_s) \in \mathbb{Q}^r \quad (2)$$

onde  $\mu_j = \mu(V_j) = \mu(E_j/E_{j-1})$  aparece  $r_j$  vezes e  $r_j = \text{rk}(V_j)$ .

**Definição 3.4.** Em consequência das Proposições 10 e 11 de Shatz [7], existe uma estratificação finita de  $\mathcal{M}(r, d)$  pelo tipo Harder-Narasimhan do fibrado vetorial subjacente a um fibrado de Higgs:

$$\mathcal{M}(r, d) = \bigcup_t U'_t$$

onde  $U'_t \subset \mathcal{M}(r, d)$  é o subespaço de fibrados de Higgs  $(E, \Phi)$  cujo fibrado subjacente  $E$  tem  $\text{HNT}(E) = t$ , e a união é sobre os tipos que existem em  $\mathcal{M}(r, d)$ .

**Proposição 3.5** (Hausel [3, Proposition 4.3.2]). *Se  $\text{rk}(E) = 2$  temos que a Estratificação de Shatz coincide com a Estratificação de Bialynicki-Birula.*

## 4 Resultado Principal

Seja  $[(E, \Phi)] \in \mathcal{M}(3, d)$  e denote  $(E^0, \Phi^0) := \lim_{z \rightarrow 0} (E, z \cdot \Phi)$ . O estrato da estratificação Bialynicki-Birula a que  $(E, \Phi)$  pertence é determinado por  $(E^0, \Phi^0)$ , e depende do tipo de Harder-Narasimhan de  $E$ , e de certas propriedades de  $\Phi$ . O nosso Teorema Principal descreve em detalhe esta dependência.

Para enunciar o Teorema é conveniente usar a seguinte notação: para um morfismo entre fibrados vetoriais  $\phi : E \rightarrow F$  vamos escrever  $\ker(\phi) \subset E$  e  $\text{im}(\phi) \subset F$  para os subfibrados que se obtêm saturando os respectivos subfeixes.

**Teorema 4.1.** (1.) *Suponha que  $E \rightarrow \Sigma$  é um fibrado holomorfo que tem  $\text{HNT}(E) = (\mu_1, \mu_2, \mu_2)$  onde  $\mu_j = \mu(V_j)$  e  $V_j = E_j/E_{j-1}$  são semi-estáveis. Considere  $\phi_{21} : V_1 \rightarrow V_2 \otimes K$  induzido por*

$$E_1 \xrightarrow{\iota} E \xrightarrow{\Phi} E \otimes K \xrightarrow{j \otimes \text{id}_K} (E/E_1) \otimes K.$$

Defina  $\mathcal{I} := \phi_{21}(E_1) \otimes K^{-1} \subset V_2$  onde  $\text{rk}(\mathcal{I}) = 1$ , e defina também  $F := V_1 \oplus \mathcal{I} \subset V_1 \oplus V_2 = E$  onde  $\text{rk}(F) = 2$ . Então temos duas possibilidades:

(1.1.) *Suponha que  $\mu(F) < \mu(E)$ . Então  $(E^0, \Phi^0)$  é uma  $(1, 2)$ -VHS da forma:*

$$(E^0, \Phi^0) = \left( V_1 \oplus V_2, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \phi_{21} & 0 \end{pmatrix} \right).$$

(1.2.) *Por outro lado, se  $\mu(F) \geq \mu(E)$  então  $(E^0, \Phi^0)$  é uma  $(1, 1, 1)$ -VHS da forma:*

$$(E^0, \Phi^0) = \left( L_1 \oplus L_2 \oplus L_3, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \varphi_{21} & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_{32} & 0 \end{pmatrix} \right)$$

onde  $L_1, L_2$ , and  $L_3$  são fibrados de linhas.

(2.) *Analogamente, suponha que  $E \rightarrow \Sigma$  é um fibrado holomorfo tal que  $\text{HNT}(E) = (\mu_1, \mu_1, \mu_2)$  onde  $\mu_j = \mu(V_j)$  e  $V_j = E_j/E_{j-1}$  são semi-estáveis. Considere  $\phi_{21} : V_1 \rightarrow V_2 \otimes K$  induzido por*

$$E_1 \xrightarrow{\iota} E \xrightarrow{\Phi} E \otimes K \xrightarrow{j \otimes \text{id}_K} (E/E_1) \otimes K.$$

Defina  $N := \ker(\phi_{21}) \subset V_1$  onde  $\text{rk}(N) = 1$ . Então, temos duas possibilidades:

(2.1.) *Suponha que  $\mu(N) < \mu(E)$ . Então  $(E^0, \Phi^0)$  é uma  $(2, 1)$ -VHS da forma:*

$$(E^0, \Phi^0) = \left( V_1 \oplus V_2, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \phi_{21} & 0 \end{pmatrix} \right).$$

(2.2.) Por outro lado, se  $\mu(N) \geq \mu(E)$  então  $(E^0, \Phi^0)$  é uma  $(1, 1, 1)$ -VHS da forma:

$$(E^0, \Phi^0) = \left( L_1 \oplus L_2 \oplus L_3, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \varphi_{21} & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_{32} & 0 \end{pmatrix} \right)$$

onde  $L_1, L_2$ , and  $L_3$  são fibrados de linhas.

(3.) Finalmente, suponha que  $E \rightarrow \Sigma$  é um fibrado holomorfo tal que  $\text{HNT}(E) = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$  onde  $\mu_j = \mu(V_j)$  e  $V_j = E_j/E_{j-1}$  são semi-estáveis.

(3.1.) Suponha que  $\mu(E_2/E_1) < \mu(E)$ . Então podemos definir  $F$  como no caso (1.), e então, temos duas possibilidades:

(3.1.1.) Suponha que  $\mu(F) < \mu(E)$ . Então:  $(E^0, \Phi^0)$  é uma  $(1, 2)$ -VHS.

(3.1.2.) Se  $\mu(F) \geq \mu(E)$ , então:  $(E^0, \Phi^0)$  é uma  $(1, 1, 1)$ -VHS.

(3.2.) Por outro lado, se  $\mu(E_2/E_1) > \mu(E)$ , então podemos definir  $N$  como no caso (2.), e então, temos duas possibilidades:

(3.2.1.) Se  $\mu(N) < \mu(E)$ , então:  $(E^0, \Phi^0)$  é uma  $(2, 1)$ -VHS.

(3.2.2.) Se  $\mu(N) \geq \mu(E)$ , então:  $(E^0, \Phi^0)$  é uma  $(1, 1, 1)$ -VHS.

## Referências

- [1] A. Białynicki-Birula, “Some theorems on actions of algebraic groups”, *Ann. of Math.*, Vol. 98 (1973), pp. 480-497.
- [2] G. Harder and M.S. Narasimhan, “On the Cohomology Groups of Moduli Spaces of Vector Bundles on Curves”, *Springer-Verlag Math. Ann.*, Vol. 212 (1975), pp. 215-248.
- [3] T. Hausel, “Geometry of Higgs Bundles”, Tese de Doutorado, Cambridge, United Kingdom, 1998.
- [4] N.J. Hitchin, “The Self-Duality Equations on a Riemann Surface”, *Proc. London Math. Soc.*, Vol. 55, No. 3 (1987), pp. 59-126.
- [5] S. Kobayashi, *Differential geometry of complex vector bundles*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, U.S.A., 1987.
- [6] N. Nitsure, “Moduli Space of Semistable Pairs on a Curve”, *Proc. London Math. Soc.*, (3) Vol. 62 (1991), pp. 275-300.
- [7] S.S. Shatz, “The Decomposition and Specialization of Algebraic Families of Vector Bundles”, *Compositio Mathematica* Vol. 35, Fasc. 2. Netherlands, (1977), pp. 163-187.
- [8] C.T. Simpson, “Higgs Bundles and Local Systems”, *Inst. Hautes Études Sci. Math. Publ.*, (1992), pp. 5-95.