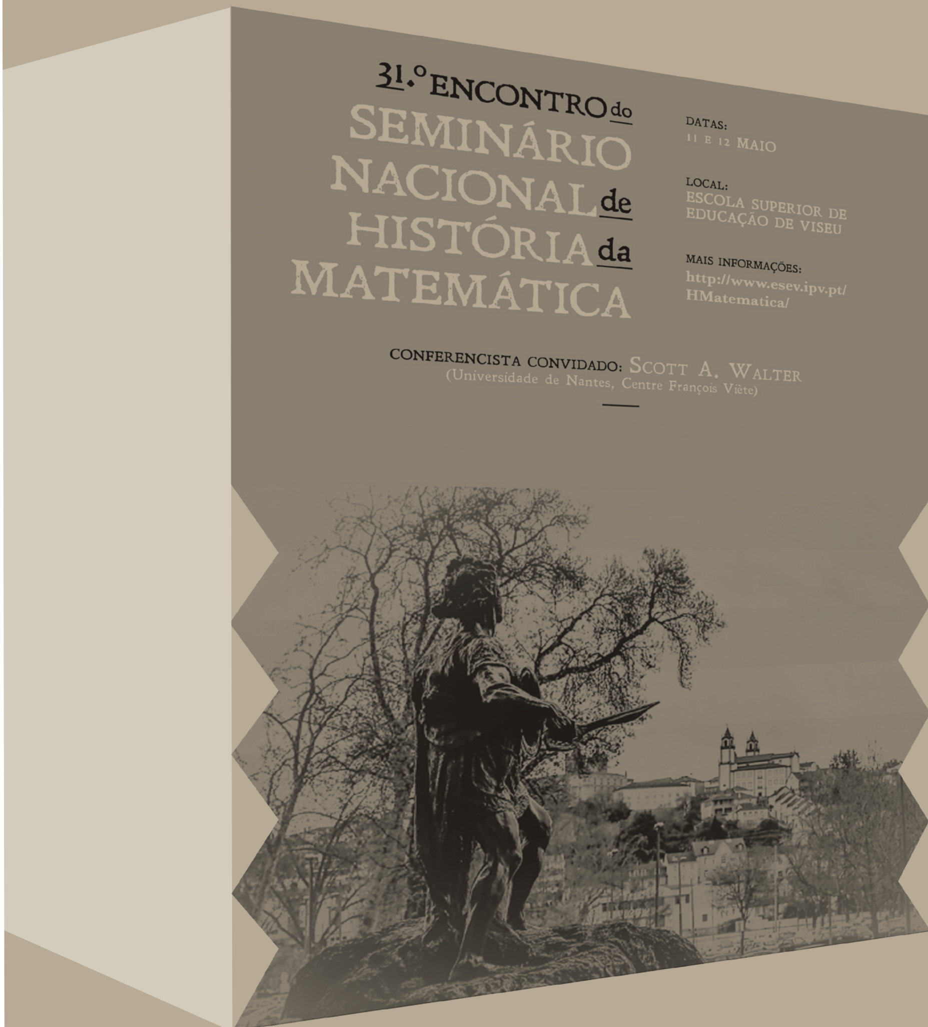
βoletim

da Sociedade Portuguesa de Matemática



Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática

suplemento do número 76

Alguns resumos das comunicações

Boletim
da Sociedade Portuguesa de Matemática

Propriedade e Edição
Sociedade Portuguesa de Matemática
Av. da República, 45–3º E, 1050–187 Lisboa
☎ 217 939 785
FAX 217 952 349

Internet: http://www.spm.pt

Este suplemento é parte integrante do número 76 do Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática. Não pode ser vendido separadamente.

https://revistas.rcaap.pt/boletimspm

29º Encontro do Seminário Nacional de História da Matemática

Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa
Monte da Caparica
18 e 19 de Novembro de 2016

$29^{\underline{o}}$ Encontro do Seminário Nacional de História da Matemática

Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa
Monte da Caparica
18 e 19 de Novembro de 2016

Teve lugar, na Sala Ágora da Biblioteca da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa, o $29^{\underline{o}}$ Encontro do SNHM.

Como conferencistas convidados tivemos Laurent Mazliak, da Universidade Pierre et Marie Curie, Paris, e Wilfried Sieg, da Carnegie Mellon University. O primeiro falou-nos sobre os começos da Enciclopédia Soviética e os problemas que os matemáticos autores de entradas para essa enciclopédia tiveram de enfrentar, um equilíbrio precário entre a liberdade científica e a necessária adaptação às condições de então, na turbulência política da União Soviética dos anos 20 do século XX. O segundo desenvolveu o tema dos caminhos axiomáticos de David Hilbert, distinguindo entre a sua axiomática estrutural do fim do século XIX e a sua axiomática formal do fim dos anos 10 do século XX.

Esta segunda conferência foi complementada por uma palestra de Reinhard Kahle sobre o $24^{\underline{o}}$ problema de Hilbert, descoberto em 2000 num seu livro de notas, e que não tinha sido apresentado no Congresso Internacional dos Matemáticos de 1900, onde Hilbert enunciou os seus 23 problemas.

Tivemos por um dos polos deste Encontro a chamada Geração de 40, com especial destaque para Hugo Ribeiro. Na intervenção de Nuno Jerónimo e Reinhard Kahle, foi analisada correspondência de Hugo Ribeiro com matemáticos portugueses e estrangeiros durante a segunda guerra mundial (1939-1945) e no imediato pós guerra; tivemos ainda o testemunho de quem conheceu e conviveu com Hugo Ribeiro, ouvindo os depoimentos de Mário Ribeiro, seu sobrinho, que falou do período entre 1976 e 1988, em que seu tio viveu em Portugal, e Vítor Neves, que referiu impressões que lhe deixou o convívio com Hugo Ribeiro, quer na ajuda que lhe deu nos seus começos de matemático, quer nas histórias que lhe contou, como Vítor Neves referiu, sobre a "clandestinidade salazarenta que viveu com Aniceto Monteiro".

Em Mértola também tivemos um conjunto de conferências dedicadas a Sebastião e Silva: estavam previstas quatro, mas problemas de última hora impediram o Professor Augusto Franco de Oliveira de estar presente para apresentar a sua comunicação "O envolvimento de Sebastião e Silva com a Lógica Matemática". As três comunicações apresentadas tocam diversos aspectos da vida e obra deste matemático: uma reflexão a partir de uma carta por ele escrita em 1945 a José Vicente Gonçalves, durante a sua estadia em Roma; a sua intervenção na *Gazeta de Matemática*; e uma reflexão global sobre a sua acção como matemático e cientista. O Encontro terminou com uma tertúlia realizada no *Centro de Estudos Islâmicos e do Mediterrâneo* sobre o tema "José Sebastião e Silva – o matemático e o seu tempo".

Outros dois matemáticos da geração de 40 foram falados neste Encontro: Augusto Franco de Oliveira apresentou uma comunicação sobre José Sebastião e Silva e a Lógica Matemática, uma comunicação que estava prevista ser feita no anterior Encontro do SNHM, mas que imprevistos inultrapassáveis impediram de ser feitas. E Augusto Fitas falou sobre a introdução da Mecânica Quântica nas escolas superiores portuguesas, evidenciando o papel dos matemáticos. Em particular foi exposto o seu envolvimento, com destaque para Ruy Luis Gomes, na organização e funcionamento na Universidade do Porto, no início da década de 40 do século XX, do primeiro seminário de física teórica em Portugal.

João Queiró falou sobre a história da Carta de Mercator, e na contribuição de Pedro Nunes nas suas Opera de 1566, quando nelas explica claramente o que são linhas de rumo e dá um método matemático rigoroso para a construção de tabelas de rumos. Helena Sousa Melo e Maria do Carmo Martins apresentaram uma comunicação sobre o "método do galeão", um método para fazer divisões e que foi muito utilizado entre os séculos XV e XVIII nas transações comerciais, quando o sistema de numeração dos intervenientes era o decimal posicional, dando um exemplo prático da sua utilização.

Os contextos do Cálculo Fluxionário de José Anastácio da Cunha são analisados por João Caramalho Domingues partindo de uma recensão à tradução francesa dos Principios Mathematicos, recensão anónima mas que se pensa ter sido feita pelo matemático italiano Vincenzo Brunacci, um dos difusores da análise lagrangiana em Itália.

Ana Patrícia Martins analisa os textos sobre seguros de José Maria Dantas Pereira, mostrando que elas revelam uma preocupação com o progresso da indústria dos seguros e sua correcta fundamentação, e igualmente contextualiza a obra de Dantas Pereira na evolução desta temática na sua época.

António Canas, depois de apresentar um resumo da evolução da navegação astronómica marítima, fez o levantamento de alguns problemas matemáticos da navegação aérea, e apresentou as soluções de Gago Coutinho e Sacadura Cabral para alguns deles.

O tema da comunicação de Mária Almeida foi o ensino da Matemática na Telescola, tendo a sua análise incidido sobre os objectivos do ensino da Matemática, os novos conteúdos matemáticos, as orientações metodológicas gerais e os recursos propostos para o ensino, neste novo subsistema de ensino.

Ilda Perez contextualizou a obra de Norbert Wiener dentro do desenvolvimento da cibernética, apresentando igualmente as suas obras de divulgação, publicadas após o fim da 2ª guerra mundial, que tiveram grande divulgação e influência na sua época.

Teresa Sousa deu uma perspectiva sobre o historial do problema das quatro cores, que foi pela primeira vez formulado em 1852, e igualmente fez considerações sobre a sua resolução, que incluiu a utilização de um computador, em 1976, e que ficou conhecida pelo teorema das quatro cores.

Este ano de 2016 foi mais sobrecarregado que o costume, pois houve em Julho teve lugar em Coimbra o 2º Encontro Ibérico de História da Matemática, onde pela primeira vez estiveram igualmente presentes conferencistas da América Latina. Os nossos recursos são limitados, mas com a acção de uma forte comissão local, e com a generosidade habitual dos membros do Seminário, foi possível a realização deste Encontro, e pudemos ter, como se pode comprovar pelos resumos alargados aqui incluídos, um óptimo programa, de um encontro que correu muito bem e que certamente deixa recordações agradáveis e duradouras a todos os que nele participaram.

Como é costume, espero que a publicação destes resumos seja útil a quem não esteve presente, e seja um estímulo para uma futura participação, seja como conferencistas, seja como assistentes. O Seminário precisa de todos, conferencistas e meros participantes. Serão todos bem recebidos.

Luís Saraiva
Coordenador Nacional
do Seminário Nacional de História da Matemática

Programa

18 de Novembro

09.00 Entrega de pastas

09.30 Abertura do Encontro. Mesa: Reinhard Kahle, Luis Saraiva, representante da SPM, representante do DM da Universidade Nova

09.45 Wilfrield Sieg (Carnegie Mellon University) - Hilbert's Axiomatic Ways: structural and formal

10.35 *Coffee break*

11.00 Reinhard Kahle (CMA e DM, FCT, U. Nova de Lisboa) – Some historical considerations concerning Hilbert's 24th Problem

11.30 Augusto Franco de Oliveira (Professor Emérito da U. Évora, CFF-CUL) – O envolvimento de Sebastião e Silva com a Lógica Matemática

12.20 Almoço

14.00 Testemunhos e dados sobre Hugo Baptista Ribeiro:

Nuno Jerónimo (CFCUL) e Reinhard Kahle – Alguns destaques da correspondência de Hugo Ribeiro
Vitor Neves (Professor aposentado da Univ. Aveiro) – O olhar de Hugo Ribeiro
Mário Ribeiro (Lisboa) – Vivências com Hugo Ribeiro

15.30 João Filipe Queiró (DM da Universidade de Coimbra) – Nota sobre a história da carta de Mercator

16.00 Helena Melo e Maria do Carmo Martins (D. Mat. e Estatística da Fac. Ciências e Tecnologia da U. dos Açores) – Tradução de imagens do "método do galeão"

16.30 *Coffee break*

17.00 Passeio incluindo a visita ao Cristo Rei.

20.00 Jantar do Encontro

Programa

19 de Novembro

09.30 Laurent Mazliak (U. Pierre e Marie Curie, Paris, e Laboratoire de Probabilités et Modèles Aléatoires) – The beginnings of the Soviet encyclopedia. Utopia and misery of mathematics in the political turmoils of the 1920s

10.20 Augusto Fitas (U. de Évora) – Os matemáticos e as primícias da Mecânica Quântica em Portugal

10.50 *Coffee break*

11.30 João Caramalho Domingues (U. Minho) – Os diferentes contextos do Cálculo Fluxionário de Anastácio da Cunha

12.00 Ana Patrícia Martins (Escola Superior de Educação de Viseu/CIUHCT) – José Maria Dantas Pereira: os seus escritos sobre seguros

12.30 Almoço

14.30 António Canas (Escola Naval) – Problemas matemáticos da navegação aérea

15.20 Mária Almeida – (UIED- FCT, U. Nova de Lisboa/Agrupamento de Escolas dos Casquilhos) – Apontamentos sobre o Ensino da Matemática na Telescola

15.50 Ilda Perez da Silva (DM da FCUL) – Norbert Wiener e a Cibernética

16:20 Teresa Maria Sousa (Escola Naval e CINAV) – Os 40 anos do Teorema das Quatro Cores

16.50 Encerramento do Encontro

Esteve durante o Encontro aberta a exposição

António Augusto Lopes. Professor, com muito gosto

Concepção e Organização: António Almeida, Mária Almeida, Henrique Guimarães e José Manuel Matos

Montagem: Mária Almeida

Site do Encontro: http://eventos.fct.unl.pt/snhm29

Hilbert's Axiomatic Ways: structural and formal

Wilfried Sieg
Carnegie Mellon University
Dietrich College of Humanities and Social Sciences
Department of Philosophy
e-mail: sieg@cmu.edu

David Hilbert was among the great mathematicians who expounded the centrality of mathematics in human thought over a long, remarkable career. And yet, his programmatic "formalist" papers from the 1920s, often seriously misinterpreted, still shape almost exclusively the contemporary perspective on his views concerning (the foundations of) mathematics. Even his own earlier and quite different work on the foundations of geometry (Hilbert 1899) and arithmetic (of real numbers) (Hilbert 1900) is most often seen through that lens.

Hilbert was an *intellectual experimentalist*. The thread holding the intellectual experiments together is the *axiomatic method* in a broad sense (*mit Bewusstsein denken*) and in a narrow sense (*Beweistheorie entwickeln*). Hilbert's perspective on the power and reach of this method is presented in a talk he gave in the fall of 1917 to the Swiss Mathematical Society in Zürich. The title of the talk, *Axiomatisches Denken*, is standardly translated as *Axiomatic Thought*. However, *Axiomatic Thinking* captures better the flexible, adaptive method that allows the systematic organization of a subject, but also serves as a tool of discovery. Hilbert's Zürich talk is pivotal: it is rooted in the past and, with a programmatic direction, points to the future. As to the future, Hilbert suggested:

> . . . we must - that is my conviction - take the *concept of the specifically mathematical proof as an object of investigation*, just as the astronomer has to consider the movement of his position, the physicist must study the theory of his apparatus, and the philosopher criticizes reason itself.

Hilbert recognized in the next sentence that "the execution of this program is at present, . . . , still an unsolved problem".

As to the past, Hilbert harks back to his earlier axiomatic work from around 1900 that is reflected in three papers: "Grundlagen der Geometrie" (1899), "Über den Zahlbegriff" (1900), and "Mathematische Probleme" (1900). It is deeply connected to, what Stein called, *the radical transformation of mathematics* in the 19th century. This transformation is complemented by *the fundamentally new structure of logic* that also emerged in the

19$^{\text{th}}$ century. That is perhaps evident, if I point to two important figures in these developments: Dedekind and Frege. In any event, this broader historical context is crucial for our understanding of Hilbert's work, but it is also critical for the self-understanding of modern mathematical logic and that of contemporary analytic philosophy (whose roots can be traced to these developments in mathematics and logic).

Thus, I sharply distinguish between Hilbert's *existential or structural axiomatics* from the 1890s and his *formal axiomatics* from the late 1910s. That distinction allows us, on the one hand, to connect structural axiomatics with Dedekind's work (Dedekind 1888) and the related radical transformation of mathematics in the second half of the 19$^{\text{th}}$ century (Sieg & Morris 2015) and, on the other hand, to link formal axiomatics with Whitehead and Russell's *Principia Mathematica* and the related dramatic changes in logic due, in part, to Frege. The formalizability of mathematics was basic for the finitist consistency program as articulated in 1922. See (Sieg 2013).

The methodological innovations of the earlier mathematical developments are reflected in the well-known, but not very well understood correspondence between Frege and Hilbert (Gabriel e.a., 1980); the articulation of structural axiomatics can be seen to correspond to Frege's introduction of second-level concepts. Taking seriously the goal of formalizing mathematics in *effective* logical frameworks (and the limitations due to Gödel's incompleteness theorems) leads to contemporary tasks, not just historical and systematic insights. Those tasks I think include in "one direction" work at the intersection of automated proof search, proof theory, and cognitive science.

References

Dedekind, R., *Was sind und was sollen die Zahlen?*, Vieweg Verlag, 1888.

Hilbert, D., *Grundlagen der Geometrie*, Teubner Verlag, 1899.

Hilbert, D., "Über den Zahlbegriff", *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung*, **8**, pp. 180–194, 1900.

Gabriel, G., Kambartel, F., and Thiel, C. (eds.), "Gottlob Freges Briefwechsel", Felix Meiner Verlag, 1980.

Sieg, W., *Hilbert's Programs and Beyond*, Oxford University Press, 2013.

Sieg, W. and Morris, R., "Dedekind's structuralism: creating concepts and deriving theorems", In Erich Reck (ed.), *Logic, Philosophy of Mathematics, and their History: Essays in Honor W.W. Tait*, 2018.

Some historical considerations concerning Hilbert's 24th Problem

Reinhard Kahle
CMA & DM, FCT
Universidade Nova de Lisboa
e-mail: `kahle@mat.uc.pt`

At the International Congress of Mathematicians in 1900 in Paris, Hilbert presented his famous 23 mathematical problems which shaped to a good part the mathematical research landscape in the 20th century.

1 Hilbert's 24th Problem

In 2000, the historian of Mathematics Rüdiger Thiele found in Hilbert's notebook [2] a draft note concerning a 24th problem to be presented at the International Congress of Mathematicians (ICM) in 1900 in Paris. This note reads as follows (in Thiele's translation, [4]):

> The 24th problem in my Paris lecture was to be: Criteria of simplicity, or proof of the greatest simplicity of certain proofs. Develop a theory of the method of proof in mathematics in general. Under a given set of conditions there can be but one simplest proof. Quite generally, if there are two proofs for a theorem, you must keep going until you have derived each from the other, or until it becomes quite evident what variant conditions (and aids) have been used in the two proofs. Given two routes, it is not right to take either of these two or to look for a third; it is necessary to investigate the area lying between the two routes. Attempts at judging the simplicity of a proof are in my examination of syzygies and syzygies between syzygies. The use or the knowledge of a syzygy simplifies in an essential way a proof that a certain identity is true. Because any process of addition is an application of the commutative law of addition etc. and because this always corresponds to geometric theorems or logical conclusions, one can count these processes, and, for instance, in proving certain theorems of elementary geometry (the Pythagoras theorem, on remarkable points of triangles), one can very well decide which of the proofs is the simplest.

In the given form, this problem was never taken up by Hilbert or his collaborators, and we have also no indication what causes Hilbert to not include it in the final list of his problems.

2 Hilbert's 1900 address to the ICM

The 1900 address of David Hilbert to the ICM in Paris could well be judged as the most influential address ever given at an ICM. Next to a sketch of the 23 problems of Hilbert it contains some general considerations concerning the objective and value of mathematical research. In these considerations, Hilbert actually addresses *simplicity* (and therefore, implicitly, his 24th problem) in connection with rigor:

Besides it is an error to believe that rigor in the proof is the enemy of simplicity. On the contrary we find it confirmed by numerous examples that the rigorous method is at the same time the simpler and the more easily comprehended. The very effort for rigor forces us to find out simpler methods of proof.

The underlying claim is shortly illustrated by three examples: the *theory of algebraic curves, power series*, and – "as the most striking example" – the *calculus of variations.* Afterwards, we found only one further mentioning of the problem of simplicity in Hilbert's writings, namely in a talk given in 1917.

3 Axiomatic Thinking, 1917

Hilbert gave in 1917 a talk at a meeting of the Swiss Mathematical Society in Zurich which is considered as his return to foundational research in Mathematics (it was, in fact, the opportunity where he hired Paul Bernays as collaborator to work on his foundational programme in Göttingen). In the course of the discussion of foundational questions he mentions also a criterion of simplicity [3].

By closer inspection, we realize soon that the question of consistency for the whole numbers and sets is not a isolated one, but it belongs to a wide range of most difficult epistemological questions of specific mathematical coloring: I mention, to characterize briefly this area of questions, the problem of the principle *solvability of any mathematical question*, the problem of a posteriori *controllability* of the result of a mathematical investigation, further the question of a *criterion for the simplicity* of mathematical proofs, the question of the relation between *contentness* and *formalism* in mathematics and logic, and finally the problem of the *decidablity* of a mathematical question by a finite number of operations.

This list gives a good overview of Hilbert's initial motivation to develop *proof theory*, and simplicity was one of them. While most of the other questions were, in one way or another, to be treated in the research of the Hilbert School, simplicity was not taken up. Still, in a encyclopedia entry for "David Hilbert", written by Paul Bernays in 1967 [1], the latter one included the problem "of finding a standard of simplicity for mathematical proofs" when he recalled the talk of 1917 (but, notably, he left out the controllability). Thus, we can consider the question of simplicity of mathematical proof as one of the basic motivations to develop proof theory; however, an answer to this question – and whether such one could be given by use of proof-theoretic insights – is still a desideratum.

Referências

[1] Paul Bernays, "Hilbert, David", *Encyclopedia of Philosophy* Macmillan, 1967, Ed. Paul Edwards, pp. 496–505.

[2] David Hilbert, "Mathematische Notizbücher", 3 notebooks, Niedersächsische Staats - und Universitätsbibliothek Göttingen, Handschriftenabteilung, Cod. Ms. D. Hilbert 600:1-3.

[3] David Hilbert, "Axiomatisches Denken", *Mathematische Annalen*, Vol. 78, No. 3/4 (1918), pp. 405–415. English translation "Axiomatic Thinking", *Philosophia Mathematica*, Vol. 7 (1970), pp. 1–12.

[4] Rüdiger Thiele, "Hilbert's Twenty-Fourth Problem", *American Mathematical Monthly*, Vol. 110 (2003), pp. 1–24.

Research partially supported by the Portuguese Science Foundation, FCT, through the projects UID/MAT/00297/2013 (Centro de Matemática e Aplicações) and PTDC/MHC-FIL/2583/2014 (Hilbert's 24th Problem).

José Sebastião e Silva, um Lógico *at heart*

Augusto J. Franco de Oliveira
Professor Emérito da Universidade de Évora e
Centro de Filosofia das Ciências da Universidade de Lisboa
Departamento de Matemática
e-mail: ajfrancoli@gmail.com

1 Introdução. Os rapazes da "Portugaliæ"

José Sebastião e Silva (JSS) teve sempre um especial interesse e carinho pela lógica matemática e os fundamentos da matemática. Distinguem-se três fases do seu envolvimento em vida e postumamente com estes assuntos:

- **A fase da lógica básica**, ou seja, dos artigos de divulgação de temas lógicos e de propostas para a sua inclusão em diferentes graus de ensino, abrangendo as décadas de 40 e 50 do séc. XX, bem como as propostas de reforma dos planos de estudo da licenciatura em Ciências Matemáticas na Faculdade de Ciências de Lisboa – oportunidade perdida – e os capítulos dos manuais e guias utilizados na reforma "matemáticas modernas" nos anos 60;

- **A fase de investigação em lógica superior** (definibilidade, teoria dos modelos de ordem superior, linguagens infinitárias), abrangendo a época da estadia em Itália, com a elaboração de uma "tese" não submetida e um artigo publicado, bem como a famosa axiomática das distribuições e a aplicação de alguns dos seus resultados (o método metamatemático) em trabalhos posteriores em análise funcional e teoria das distribuições;

- **A fase póstuma**, a partir de 1985 (publicação na revista *Hist. and Phil. of Logic* da tradução do artigo de 1945), que compreende as investigações de Newton da Costa e colaboradores, estendendo (corrigindo, refinando e generalizando) os trabalhos de JSS no sentido de uma teoria de Galois generalizada (com aplicações à lógica, à geometria, à álgebra e à análise funcional) e uma teoria universal das estruturas.

Entre a conclusão da licenciatura (1937) e a sua partida para Roma (1943) como bolseiro do Instituto para a Alta Cultura, JSS terá sido um dos (ou, pelo menos, contactado com os) “rapazes da *Portugaliæ Mathematica*”, de que fala Edmundo Curvelo em 1947:

“(. . .) Aqui em Lisboa, contudo, os homens da Matemática e da Física, mas principalmente os da Matemática, vão considerando o conhecimento da lógica simbólica cada vez mais indispensável para as suas próprias especialidades. Eu tenho andado a trabalhar com os rapazes da *Portugaliæ Mathematica*, no problema dos fundamentos lógicos da Matemática. . . ” (Carta a Joaquim de Carvalho, 4 de Outubro de 1947, [Cur05]).

O panorama dos estudos de lógica estava então (finais dos anos 30 e primórdios dos anos 40) em mudança fervilhante, como anota Manuel Curado em 2001:

“Não foi feliz o destino da lógica no pensamento filosófico português do século XX. A herança prestigiosa de Pedro Hispano e dos conimbricenses não teve sucessores.

“(...) A revista *Portugaliæ Mathematica*, desde o primeiro volume de 1937, publicou ocasionalmente artigos de lógica matemática de autores nacionais (António Aniceto Monteiro, Hugo Baptista Ribeiro, José Morgado Jr., José Ribeiro de Albuquerque) e de grandes vultos estrangeiros (John von Neumann, Alonzo Church, Haskell B. Curry, Patrick Suppes e outros). Professores dedicados defenderam dissertações universitárias sobre assuntos lógicos (Arnaldo de Miranda Barbosa, em Coimbra, e Curvelo, em Lisboa). O influente e muito dotado Francisco Vieira de Almeida dedicou uma parte substancial da sua obra à divulgação da lógica, e Edmundo Curvelo, o seu assistente na Faculdade de Letras de Lisboa, para além de escrever obras lógicas de maior fôlego (...) e de revelar uma informação extraordinária do que se fazia além-fronteiras, dedicou-se com grande empenho e sucesso à didáctica, um dos aspectos mais difíceis da lógica.” ([Cur01])

Recordemos António Aniceto Monteiro, que, depois do doutoramento em Paris com Maurice Fréchet em 1936, tendo passou gradualmente da topologia e da teoria dos filtros às álgebras da lógica, que nunca mais abandonou. Hugo Baptista Ribeiro doutorou-se em Zurique com Paul Bernays também em 1936, no tema das álgebras de Boole, emigrou para os EUA e também nunca mais deixou a lógica, e José Ribeiro de Albuquerque trabalhou inicialmente em conjuntos projectivos. Em 1940, JSS foi chamado por António Monteiro para integrar o Centro de Estudos de Matemática da Universidade de Lisboa.

2 A lógica média

É à luz do clima descrito no final da secção anterior que devemos encarar os interesses emergentes de JSS na lógica e seu ensino. A nível do ensino pré-universitário destacam-se os artigos de divulgação:

- A Lógica Matemática e o ensino médio I, II e III. *Gazeta de Matemática*, ns. **5**, **6** e **7**, 1941.
- Sobre o método axiomático. *Gazeta de Matemática*, n. **26**, 1945.
- O que é uma axiomática? *Gazeta de Matemática*, n. **54**, 1953.
- Introdução à lógica simbólica e aos fundamentos da matemática. Revista *Palestra*, n. **6**, 1959, Lisboa.

O primeiro destes trabalhos foi redigido tendo em mente e exemplificando principalmente alguns aspectos lógicos e metodológicos do ensino da Geometria no então 3.ž ciclo.

Lamentavelmente, JSS nunca chegou a escrever a parte de Aritmética (dos números naturais) que pretendia para o curso liceal, mas entre as novas matérias que preconizou para os ensinos nas reformas que liderou nos anos 60 estiveram sempre presentes a lógica, a teoria dos conjuntos, as álgebras de Boole com aplicações a computadores, a teoria das relações, a par de outros tópicos inovadores, como a álgebra vectorial, a estatística e as transformações geométricas. Mas JSS era realista e atento aos resultados da experiência, e sempre criticou e combateu os excessos de formalismo e abstracção por si mesmos: primeiro experimenta-se, depois avalia-se, e finalmente modifica-se o que é necessário. Como se faz actualmente nos ensinos básico e secundário?

3 Tertúlias romanas

JSS partiu para Roma em 1943, para preparar o doutoramento no Instituto Nazionale di Alta Matematica sob a orientação do geómetra (geometria algébrica e transformações), lógico, historiador e filósofo da ciência Federigo Enriques (1871-1946). Aí conviveu também com matemáticos e filósofos como Francesco Severi, Luigi Fantappié, Guido Castelnuovo e sua filha Emma, e Mauro Picone, entre outros.

Não sabemos ao certo porquê, mas entre 1943 e 1944 JSS elaborou uma segunda "tese" intitulada "Para uma teoria geral dos homomorfismos", de que publicou uma parte em 1945 nos anais da Academia Pontifícia, relativa a automorfismos, traduzida e publicada em 1985 na revista *History and Philosophy of Logic*. Segundo Andrade Guimarães [Gui72, p. 15], a referida "tese" não terá sido submetida para provas de doutoramento em Portugal por indicação de Enriques, mas devemos salientar o seu pioneirismo e posicionamento relativamente à investigação *mainstream* em Lógica Matemática na primeira metade do séc. XX. O próprio título da "tese" e do artigo dela extraído são bastante sugestivos a este respeito. Trata-se de investigações sobre sistemas matemáticos (ou estruturas matemáticas) arbitrários, seus homomorfismos e automorfismos e relação com noções de definibilidade.

Lembremos o panorama da lógica matemática nas primeiras décadas do séc. XX: as investigações lógicas e de fundamentos rondavam a assimilação/digestão dos sistemas lógico-fundacionais à la Frege, Peano e Russell, onde se constata o crescente papel das linguagens e teorias formais; as infames críticas de Poincaré aos formalismos hilbertianos; a famosa polémica Hilbert-Brouwer; a formulação do famoso programa de conservatividade e consistência dos sistemas formais de Hilbert nos anos 20; os estudos primaciais da computabilidade por Turing, Church, Kleene e outros; o problema da completude semântica, formulado por Hilbert e Ackermann em 1928 e resolvido por Gödel em 1930, a que se seguiram pouco depois os famosos metateoremas de incompletude (1931).

Ora, JSS conhecia estes desenvolvimentos, como é patente na lista bibliográfica no final do artigo de 1945, partes I (fundamentos da matemática) e II (lógica, processos de definição) [JSS45], com trabalhos referenciados de Ackermann, W. 1928. Borel, E. 1928. Bernays, P. 1935a, 1935b. Church, A. 1938. Church, A. and Kleene, S. C. 1937. Hilbert, D. 1925. 1900. Hilbert, D. e Ackermann, W. 1928. Hilbert, D. e Bernays, P. 1934. Kleene, S. C. 1936. 1937. Lebesgue, H. 1905. Lewis, C. I. e Langford, C. H. 1932. Lukasiewicz, J. e Tarski, A. 1940. Lusin, N. 1930. Peano, G., 1895- 1908. 1934. Peter. R. 1934. 1935. Turing, A. M. 1936-1937. Von Neumann, J. 1928. Whitehead, A. N. and Russell, B. 1910-1913, 1925-1927.

Mas JSS encetou outro caminho – com vista à realização de grandes objectivos – , que descreve sucintamente no Sumário do mesmo artigo:

"Depois de definir as noções gerais referentes a sistemas matemáticos e seus automorfismos, o autor obtém conclusões que se estendem à doutrina máxima exposta no 'Programa de Erlangen' de Felix Klein no campo da teoria de Galois generalizada. Além disso, estas conclusões não apenas ajudam a organizar e clarificar muitas questões em todas as partes da matemática, como também se mostram úteis em questões na análise funcional. Os resultados aqui enunciados serão demonstrados noutro trabalho."

Na minha *Introdução* à tradução publicada em 1985 escrevi (com adaptação):

"O corpo principal do artigo é dedicado a sistemas matemáticos (estruturas), seus automorfismos e sua relação com a definibilidade. O objectivo é generalizar para sistemas matemáticos arbitrários as principais proposições da teoria de Galois, e a terminologia adoptada (predicados irredutíveis, grupo de Galois de um conjunto, etc.) reflecte este objectivo. Ao descrever esta *teoria de Galois metamatemática*, devemos observar que, para Silva, um sistema matemático $[U, \mathfrak{P}]$, onde U é um conjunto e $\mathfrak{P}$ uma lista de primitivos (predicados ou relações, elementos e operações em U) é definido a menos de inter-definibilidade, no sentido de que $[U, \mathfrak{P}_1] = [U, \mathfrak{P}_2]$ se e somente se cada primitivo de um sistema é definível em termos dos primitivos do outro. Isto não é a noção habitual de [sistema ou] estrutura na teoria dos modelos, mas não é assim tão rara em matemática, por exemplo, onde uma estrutura topológica pode ser dada num número de maneiras alternativas inter-definíveis (família de conjuntos abertos, operador de fecho, etc.). Ele pode então afirmar, como consequência do Segundo Teorema Fundamental (secção 18), que dois sistemas são idênticos se e só se têm o mesmo grupo de automorfismos. Outra tal consequência é que o fecho lógico de um subconjunto A do universo U de um sistema (i. e. o conjunto dos elementos de U logicamente definíveis a partir dos predicados primitivos e parâmetros em A) é o conjunto de elementos de U que permanecem fixos por cada automorfismo do sistema que deixa invariantes os elementos de A.

"Os teoremas fundamentais das secções 17 e 18 são a base do seu *método metamatemático*, que ele aplicou com sucesso pelo menos três vezes na sua obra posterior na análise funcional e na teoria de distribuições ([JSS50, p. 40], [JSS58, p. 107] e [JSS60, p. 5]). O problema geral nos três casos foi o de *determinar a expressão geral para as aplicações lineares contínuas de um espaço funcional noutro*."

Interessa assinalar o pioneirismo da incursão de JSS em assuntos de lógica matemática importantes mas ainda por explorar, e com ligações evidentes a um dos mais revolucionários programas de renovação das concepções matemáticas em muitas áreas, o *Programa de Erlangen* de Felix Klein. Mas não deixa de ser extraordinário o facto de JSS ter tido o ensejo de aplicar pelo menos três vezes *um* (o seu) *método metamatemático* em questões de matemática até quase vinte anos depois da invenção do método. Isto sugere um forte enraizamento da lógica matemática no seu espírito matemático, presente durante toda a sua produção científica e, por isso, nunca deixou de ser fundamentalmente um lógico.

4 Frutos serôdios

No Sumário do seu artigo de 2007, Newton e Rodrigues escrevem:

"Na sua tese *Para Uma Teoria Geral dos Homomorfismos* (1944), o matemático português José Sebastião e Silva construiu uma teoria de Galois abstracta ou generalizada, que está intimamente ligada ao *Programa de Erlangen* de F. Klein e que prenuncia algumas noções e resultados da teoria dos modelos hodierna; uma teoria análoga foi trabalhada de modo independente, por M. Krasner em [Kra38]. Mas o trabalho de Silva sobre o assunto não é nem totalmente claro nem suficientemente rigoroso. [Algumas observações críticas no mesmo sentido foram formuladas por A. Marques Fernandes [Fer90]]"

Na *Introdução* desenvolvem estas observações:

"A tese de Silva é realmente importante, não só pela sua originalidade, mas também porque prenuncia vários conceitos e resultados da teoria de modelos de ordem superior (ver [JSS85a]). Além disso, em outros trabalhos Silva fez aplicações da sua teoria, hoje chamada teoria de Galois generalizada, à análise funcional e à teoria das distribuições. (...)

"Deve-se observar que, independentemente de Silva, o algebrista russo-francês Mark Krasner desenvolveu uma teoria análoga (cf., por exemplo, [Kra38] e Krasner 1968-69). Em certo sentido, a teoria de Krasner pode ser reduzida à de Silva.

"Um dos objectivos básicos da teoria é o estudo de certas conexões entre duas noções lógico-matemáticas centrais: a de invariância sob um grupo de transformações e de definibilidade numa linguagem (abstracta) apropriada. A partir deste ponto de vista, a teoria de Galois generalizada está relacionada com o Programa de Erlangen de Klein, e constitui uma das suas possíveis extensões."

Desenvolvimentos adicionais encontram-se no artigo mais recente de Newton da Costa e Otávio Bueno [dCB11, pp. 151-183]. Por tudo o que precede, e sem receio de exagerar, podemos dizer que a ligação de JSS à lógica no início da sua carreira científica foi, afinal, uma perene relação com muitos frutos serôdios de que só agora começamos a disfrutar. Para todos os efeitos, também, José Sebastião e Silva, nascido em Mértola em 1914, além de grande matemático, cientista, e professor que continua a iluminar-nos o caminho no ensino das matemáticas, foi fundamentalmente um lógico: um lógico de alma e coração.

Referências

[Cur01] J. M. Curado, "Lógica em Portugal no séc. XX", Vol. V, tomo II (O Século XX) da *História do Pensamento Filosófico Português*, editado por Pedro Calafate. (2001) Lisboa, Caminho, 327-419.

[Cur05] E. C. Curvelo, "Cartas de Edmundo Curvelo a Joaquim de Carvalho" (1947-1953) e outros inéditos, Edição e introdução por A. Franco de Oliveira, *Cadernos de Filosofia das Ciências* 1, Centro de Filosofia das Ciências da Universidade de Lisboa (2005).

[dCB11] N. C. A. da Costa, e O. Bueno, "Remarks on abstract Galois theory", Manuscrito Rev. Int. Fil., Campinas, **34** n. 1, (2011) 151-183.

[dCR07] N. C. A. da Costa, Rodrigues, A. A. M. "Definability and invariance", *Studia Logica* **86**, 1-30.

[Fer90] A. M. Fernandes, "Sobre a obra lógica de José Sebastião e Silva", Gazeta de Matemática, **137** (1990).

[Gui72] A. A. Guimarães, "Vida e obra do Prof. Sebastião e Silva" (1972). Disponível online em `www.esss.edu.pt/images/stories/downloads/Jose_Sebastiao_e_Silva.pdf`

[Kra38] M. Krasner, "Une généralisation de la notion de corps", *Journal de Math. Pures et Appl.* **17**, (1938) 367-385.

[JCS] J. C. Silva, "O pensamento pedagógico de José Sebastião e Silva" – uma primeira abordagem – , Disponível online em `www.mat.uc.pt/~{}jaimecs/pessoal/sebsilva.html`.

[JSS45] J. Sebastião e Silva, "Sugli automorfismi di un sistema matematico qualunque", *Comm. Pontif. Acad. Sci.* **9** (1945) 327-357.

[JSS50] – "As funções analíticas e a análise funcional", Portug. Math. **9** (1950) 1-130.

[JSS58] – "Sur 1'espace des fonctions holomorphes à croissance lente à droite", Portug. Math. **17** (1958) 105-132.

[JSS60] – "Sur la définition et la structure des distributions vectorielles", Portug. Math. **19** (1960) 1-80.

[JSS85a] — "On automorphisms of arbitrary mathematical systems", trad. port. e edição por A. J. Franco de Oliveira, *History and Philosophy of Logic*, 6 (1985) 91-116.

[JSS85b] – "Para Uma Teoria Geral Dos Homomorfismos", in J. C. Ferreira, J. C. Santos Guerreiro and Silva Oliveira, *Obras de José Sebastião e Silva*, Vol. 1 (1985) 135-339.

Alguns destaques da correspondência de Hugo Baptista Ribeiro

Nuno Jerónimo
CFCUL
Universidade de Lisboa
e-mail: nmfjeronimo@gmail.com

Reinhard Kahle
CMA & DM–FCT
Universidade Nova de Lisboa
kahle@fct.unl.pt

I. O desvio (de Princeton) para Zurique. No acervo de Hugo Ribeiro há três cartas escritas por John von Neumann.[1] Na última, dirigida a António Monteiro (a quem sugere o ingresso no novíssimo Institute of Advanced Studies [IAS]), o apoio à prevista ida de Ribeiro para Princeton é inequívoco e caloroso. (A carta de aceitação formal em Princeton é redigida a 17 de Outubro de 1941.) Entre informações gerais, von Neumann elenca os professores (além de ele mesmo) que podiam colaborar com Monteiro e Ribeiro, tanto da Universidade como do IAS – Einstein, Weyl, Chevalley, Church, Wigner, entre outros. Gödel e Halmos, residentes no IAS (mas ainda sem a posição de professores) não são mencionados, nem Tarski, visitante no primeiro semestre de 1942.

O rascunho de um requerimento[2] ao Instituto para a Alta Cultura [IAC] é claro: a bolsa para Princeton foi concedida em Dezembro mas, com a entrada dos Estados Unidos da América na guerra (Pearl Harbor), o governo suspendeu a sua aplicação. Era pois preciso assegurar a bolsa. Talvez aconselhado por Monteiro (antigo aluno de Fréchet e conhecedor do trabalho de Hopf), Ribeiro indica então um plano de três alternativas: "[Se Princeton] é agora impossível [solicito bolsa] em Paris ou, no caso de impedimento, em Zürich." Em Abril de 1942 o IAC atribui a Ribeiro uma bolsa para Paris mas, passados 4 meses, altera-a para Zurique. Ribeiro e Pilar chegariam à Zurique a 30 de Setembro desse ano. Ao fim de 3 meses de estudos na Politécnica de Zurique, tenta ainda mudar-se para Princeton.[3]

[1] Cf. colecção N69, sita na Biblioteca Nacional de Portugal: documentos 1093 (8 Fev. 1941; 1 p.); 1094 (24 Abr. 1941; 2 p.); 1443 (9 Set. [1941]; 3 p.).

[2] Cf. N69-BNP doc. 1114; escrito provavelmente em inícios de 1942.

[3] Ribeiro aponta duas faltas no ensino superior suíço: a de "especialistas americanos da Teoria das estruturas" (indica noutro doc.: Stone, Birkhoff, Tarski) e de autêntico trabalho colaborativo (talvez como o que viveu nos seminários de Monteiro em Lisboa); cf. relatórios ao IAC, N69-BNP: doc. 1297 (Dez. 1942; 5 p.); doc. 1302 (14 Abr. 1944; 3 p.). Em 1944 decorrerá na Politécnica, por sua iniciativa, um conjunto de 7 sessões especiais (4 delas dirigidas em francês por Ribeiro) sobre estruturas e lógica algébrica.

II. O Journal of Symbolic Logic via Church-Lisboa-Ribeiro-Bernays. Em Maio de 1944, Ribeiro escreve a Silva Paulo: "Peço-lhe que me envie registados os fascículos do [JSL] de 1942. O Zaluar tem-me enviado alguns. Mas aquêles interessam muito ao prof. Bernays."[4] A nossa hipótese é que seriam as partes III e IV do "A system of axiomatic set theory" de Paul Bernays (a 3.ª parte relativa aos axiomas do infinito e reais à Dedekind; a 4.ª, sobre a cardinalidade de Cantor numa teoria geral de conjuntos). A princípio, Bernays considerou a sua axiomatização algo artificial e por isso não a publicou. Tal hesitação só foi vencida por Church que, perante os receosos artificialismos do autor (de visita ao IAS em 1935), terá dito sorrindo: "That cannot be otherwise".[5]

No fim de Setembro de 1945, em resposta a Ribeiro, Church escreve: "I was glad to learn of this way of getting to Professor Bernays material which I am unable to mail directly (because of restrictions still imposed by the United States Post Office on mail address to Switzerland)".[6] Rodeados pela loucura e violência da guerra, os correios suíços sofriam paragens frequentes. À beira do Atlântico, a politicamente parda Lisboa transformou-se em intenso elo postal. A correspondência Church-Bernays, quase quinzenal, diminui muito (paragens de 3 a 6 meses) entre 1944 e 46. Na carta citada, Church refere ainda o envio de um artigo de Bernays – julgamos que se trata da quinta parte da axiomatização, publicada em 1943.

Com a ajuda de Zaluar Nunes e Silva Paulo em Lisboa (via oficial, *Portugaliae Mathematica*), Hugo Ribeiro tem participação activa em pelo menos duas ocasiões na transmissão do JSL entre Church e Bernays.

III. A ajuda de Schaerf na ida para Berkeley. Em Novembro de 1946, Pilar e Ribeiro regressam a Lisboa. Nem o pedido de equivalência, nem as candidaturas ao ensino em Ciências e Agronomia obtiveram resposta. O sopro decisivo – "woudn't you like to come to the States too?"[7] – vem do amigo e colega dos tempos de Zurique, Henry Schaerf (1907-2006), chegado à América no ano anterior. Passados 3 meses, o matemático polaco aconselha cartas para as instituições mais prestigiantes: Harvard, Princeton ou Berkeley. Ribeiro decide enviar candidaturas *simultâneas*. Após 2 rejeições, chega em Agosto a oferta duma *Lectureship* de 9 horas semanais em Berkeley.

Mas antes de partir, o que Ribeiro vivia não era comparável ao cenário duma guerra. A miséria circundante, a incompreensão da academia e o risco

[4] Cf. N69-BNP doc. 158 (14 Mai. 1944, Zürich; 1 p.).
[5] Cf. Bernays 1976: xii.
[6] Cf. N69-BNP doc. 340 (24 Set. 1945, Princeton; 1 p.).
[7] Cf. N69-BNP doc. 1019, carta de Schaerf (7 Jan. 1947, Montana; 4 p.).

da clandestinidade criariam um espectáculo pior. Numa carta ao também exilado José Rodrigues Miguéis, Ribeiro recorda (já em Berkeley) que o seu regresso a Lisboa o "ia pondo a caminho do manicómio".[8] Foi nesse terrível ano de 47 que Ribeiro iniciou a tradução (suportada pela SPM) do clássico de van der Waerden, *Moderne Algebra*.

É Zygmunt W. Birnbaum (1903-2000), matemático em Washington (formado em Lwów e Göttingen), quem consegue ajudar Schaerf (que perdera toda a família em Bergen-Belsen) a escapar à deportação certa para a Polónia. Ribeiro também tentou Portugal com a ajuda de Ruy Gomes, mas os contactos no Porto não resultaram.[9] Schaerf (recomendado por Weyl, M. Kac, J. Hurst, Hopf, Plancherel e Saxer) começou a ensinar em Montana em Junho de 1946. Os seus experimentados conselhos – 6 cartas; sem esquecer a recomendação formal para Berkeley – foram decisivos para Ribeiro e Pilar: a quem e o que escrever na candidatura; o que *não dizer* no consulado; o que havia a reservar (quartos, voos, etc.) ou mesmo a evitar (Nova Iorque).

E eis o sonho do resistente Ribeiro na América: a Califórnia como centro de investigação ("um núcleo de trabalho") para jovens portugueses.[10] Diz acompanhar um seminário de Tarski (que alcança resultados interessantes mas que se perde "a redigir coisas triviais", confessa a Monteiro[11]); e lecciona, com gosto, métodos de ataques de problemas matemáticos.

Referências

[1] Biblioteca Nacional de Portugal, *Colecção Esp. N69: Hugo Ribeiro*.

[2] Paul Bernays, "A short biography", *Sets and classes* (North-Holland, Amsterdam), 1976, Ed. G.H. Müller, pp. xi–xiii.

[3] Reinhard Kahle et al., *The correspondence of Hugo Ribeiro*, projecto da Fundação Calouste Gulbenkian: http://ribeiro.dm.fct.unl.pt/blog/.

[8] Cf. N69-BNP doc. 130 (11 Fev. 1948, Berkeley; rascunho, 4 p.) Além da referência implícita à depuração política de 1947, lembra os seminários "não-oficiais" com jovens – primeiro no Laboratório de Física e depois transferidos para a casa de Ribeiro e Pilar (conhecida por 'Universidade do Murtal').

[9] Escreve Ruy L. Gomes: "as minhas demandas (. . .) bateram em ferro frio; (. . .) são todos umas bestas!"; cf. N69-BNP doc. 586, carta de Gomes (10 Mar. 1946, Porto; 4 p.).

[10] Cf. Cf. N69-BNP doc. 130 (11 Fev. 1948, Berkeley; rascunho, 4 p.).

[11] Cf. N69-BNP doc. 140 (11 Mai. 1949, Berkeley; 2 p.). Em carta talvez dirigida aos amigos que ficaram em Lisboa ("caros amigos"), Ribeiro escreveu (cf. doc. 1152: 20 Jan. 1948, Berkeley, 6 p.): "O professor Tarski para cuja classe de graduados ["curso de álgebra"] dou umas aulas suplementares (...)." Tarski e John Kelley seriam as referências de Ribeiro ao ingressar (1961) no departamento de matemática da Pennsylvania State U.

Investigação apoiada pela Fundação Calouste Gulbenkian, projecto *A correspondência de Hugo Ribeiro* e pela Fundação de Ciência e Tecnologia, UID/MAT/00297/2013 (Centro de Matemática e Aplicações) e PTDC/MHC-FIL/2583/2014 (24º problema de Hilbert).

O olhar de Hugo Ribeiro

Vítor Neves
Professor associado aposentado da
Universidade de Aveiro
Departamento de Matemática
e-mail: vneves@ua.pt

Passeámos muito! Ouvi mais do que falei.

As recordações seguintes são, certamente egocêntricas, temperadas pela emoção.

Iniciei por volta de 1978 o estudo da Análise Não Standard (ANS) que se tornaria a minha área de investigação. Por conselho do Professor Franco de Oliveira, cujas notas me forneciam os alicerces da ANS, procurei um certo Professor Hugo Ribeiro, já reformado da *Penn State University*, nos EUA, por esses tempos a ensinar no Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências de Universidade do Porto. Constava que Hugo Ribeiro era pessoa acessível e aberta; veio a mostrar-se muito interessado na ANS de *Robinson*, ainda muito associada à Teoria de Modelos.

Os nossos primeiros contactos terão sido em sua casa no Porto, durante os quais me foi orientando para o que viria a ser a minha primeira palestra sobre ANS, em Viseu, num encontro da delegação do Centro da SPM; a propósito deu-me um fascículo do *Journal of Mathematical Logic* que continha um artigo de W. A. J. Luxemburg sobre o assunto. No Porto, deu-me também, um exemplar do livro de H. B. Enderton *A Mathematical Introduction to Logic* (veio a ser o texto base do curso graduado de Mathematical Logic que frequentei na *University of Iowa* em 1983); de muito poucas coisas me arrependi, mas entristece-me nem sequer ter pedido a Hugo Ribeiro que me assinasse qualquer das ofertas. Também me deu, possivelmente aquando de uma das minhas visitas à casa de Bicesse, uma cópia das suas notas manuscritas sobre *Teoria Axiomática de Conjuntos*, que viriam a ser utilizadas pelo Professor Jorge Almeida. No Bairro Alto, num jantar de homenagem a Pilar Ribeiro promovido pela SPM, travei conhecimento com o Professor Fernando Ferreira, do Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa (FCUL), outro doutorado nos EUA, para onde foi também por influência de Hugo Ribeiro.

Fui-me encontrando com Hugo Ribeiro com alguma frequência até meados de Agosto de 1981, quando viajei para a *University of Iowa* onde viria a ter Keith Stroyan como orientador de *PhD*.

Não esquecerei a intensidade de cada contacto com Hugo Ribeiro durante os três anos antecedentes à partida para Iowa City como bolseiro INVOTAN; também não me vou esquecer de não lhe ter feito uma entrevista para o SNHM: o então já coordenador do SNHM, Professor Luís Saraiva, bem me dizia que poderíamos perder a oportunidade – como de facto perdemos – de a fazer dada a sua avançada idade.

Hugo Ribeiro notou a passividade dos estudantes universitários de então: estranhava que se não manifestassem, por exemplo [sentando-se de qualquer maneira pelos corredores da Faculdade de Ciências, em protesto pela falta de espaço disponível na Faculdade]. Muito mais a carácter, terá certa vez caminhado de Lisboa a Bicesse para fugir à PIDE. Mais ainda: contou-me que quando esteve preso, sem acesso a material de escrita, para não enlouquecer "demonstrava teoremas de cabeça". Enfim... Como poderia não considerar passivos os estudantes?

Conversávamos, sobre a justeza da apresentação da ANS por Luxemburg no *Journal of Mathematical Logic* enquanto passeávamos pelos relvados da reitoria da Universidade de Lisboa, a caminho do Hospital de Santa Maria, do lado da Faculdade de Direito onde decorria um encontro promovido pela SPM: "*Brincamos aos peripatéticos*", como dizia sorrindo o professor – nunca o vi zangado! Lembro sim os seus olhos muito brilhantes, iluminando a expressão de um ser humano curioso, interessado, marcante, inteligente, com muito para contar – e eu aproveitava para me lamentar de problemas na leitura de ***Introduction to the Theory of Infinitesimals*** de Keith Stroyan e W. A. J. Luxemburg –por exemplo não poucas demonstrações utilizavam hipóteses não expressas– e sentia-me inseguro perante **Teoremas da Função Inversa** e de **Mudança de Variáveis do Cálculo Integral**, que se não demonstravam com a ligeireza esperada da utilização de Infinitesimais. Eis senão quando Hugo Ribeiro diz:

– ***Porque não escreve ao Keith Stroyan? Quase sempre [esses autores] respondem.***

Provavelmente foi esta a última conversa de carácter por assim dizer essencialmente científico que tivemos... Levei um ano a escrever uma carta de não sei quantas páginas, que teve resposta em duas semanas!

Desde muito cedo Hugo Ribeiro insistiu na minha ida para os EUA, mesmo sem bolsa de estudos como tinha acontecido com ele, pois não via grandes dificuldades em me ser atribuído um lugar de estudante graduado associado a um *Teaching Assistantship*, podendo mesmo vir a acompanhar o eventual orientador de *PhD* se este transitasse entre universidades. E a propósito contou-me também que alguma vez terá conseguido ajuda para si e Maria Pilar com um telefonema, durante uma tempestade de neve, já nos EUA para onde tinham ido, não muito tempo depois de Aniceto Monteiro lhe ter dito "*vou [para o estrangeiro] amanhã! Vendi hoje o meu último [sofá]...*"

Corria a década de 1980 quando eu e a minha mulher encontrámos por acaso Hugo e Pilar Ribeiro na estalagem da Varanda dos Carqueijais, entre as Penhas da Saúde e a Covilhã, na Serra da Estrela, e ganhámos mais uma história:

> Em férias com Bento de Jesus Caraça na Nave de Santo António, haviam decidido descer à Covilhã e foram ao Café Montalto no Largo do Pelourinho onde Maria Pilar fumando e de calças deverá ter escandalizado uma clientela machista e particularmente conservadora.

Vou tentar repetir o que escrevi a Maria Pilar aquando da morte de Hugo Ribeiro:

> *Três professores de Matemática me marcaram profundamente:*
>
> ***João Santos Guerreiro****. Ao longo de três disciplinas anuais de licenciatura mostrou-me parte da Matemática mais linda que aprendi. Mostrou-se excelente conversador e homem de grande sensibilidade e cultura.*
>
> ***Hugo Baptista Ribeiro****. Com um sorriso emoldurado por um olhar luminoso que encontrei raramente e apenas em pessoas de excepcional poder intelectual e grande humanidade.*
>
> ***Keith Duncan Stroyan****. Poucos se terão dedicado aos seus orientandos como a mim se dedicou. Poucas amizades se terão construído como a nossa.*

Nota sobre a história da carta de Mercator

João Filipe Queiró
CMUC e Departamento de Matemática
Universidade de Coimbra
e-mail: `jfqueiro@mat.uc.pt`

É bem sabido que as linhas de rumo — as curvas sobre o globo terrestre que fazem um ângulo constante com os meridianos — foram analisadas pela primeira vez por Pedro Nunes nos tratados sobre navegação publicados em 1537. O interesse para a navegação das linhas de rumo, que Pedro Nunes distingue dos círculos máximos, é óbvio. E é claro que é importante dispor de cartas em que essas linhas sejam representadas por segmentos de recta. Também esta observação foi feita por Pedro Nunes, que esboça um processo de construção de cartas que satisfaçam esse requisito, e ambos os temas foram retomados com mais pormenor nas versões latinas dos tratados publicadas em 1566 [4].

O primeiro exemplo conhecido de uma carta satisfazendo o requisito mencionado — representar as linhas de rumo por rectas — é a carta *ad usum navigantium* de Mercator, de 1569. A técnica usada pelo flamengo para traçar a sua carta constituiu durante muito tempo um enigma histórico. Mas, de facto, as perguntas sobre a história da carta de Mercator são duas:

1 - Como traçou Mercator a sua carta?
2 - O que se passou desde a ideia inicial de Pedro Nunes?

Quanto à primeira pergunta, várias possibilidades foram propostas desde o século XIX. No seu livro [1], Raymond D'Hollander examina 14 métodos hipotéticos, propostos entre 1889 e 2003.

O enigma pode estar resolvido. Em dois artigos recentes muito interessantes [2, 3], Henrique Leitão e Joaquim Alves Gaspar apresentaram o que provavelmente será a resposta definitiva à questão: Mercator traçou a sua carta utilizando um método gráfico baseado numa tabela de rumos, isto é, uma tabela contendo as coordenadas de pontos sobre linhas de rumo.

A persistência, durante tanto tempo, da dúvida sobre a técnica de Mercator levanta um curioso paradoxo. Precisamente porque essa técnica nunca foi compreendida até agora, é bem possível que nenhum cartógrafo, excepto o próprio autor flamengo, alguma vez a tenha usado para traçar cartas de Mercator, que se tornaram comuns a partir do século XVII. A probabilidade

Suplemento do Boletim da SPM 76, Dezembro 2018, pp. 29-32

de que isto foi assim aumenta com a simples observação de que vários autores, a começar por Edward Wright no fim do século XVI, apresentaram clara e explicitamente os princípios matemáticos (por oposição a métodos gráficos) subjacentes à construção da carta.

Isto mostra que a segunda pergunta é diferente da primeira. A história da carta de Mercator, entendida como a sequência de passos que conduziram à solução usando o novo cálculo diferencial e integral no final do século XVII, torna-se então independente do processo específico usado por Mercator e finalmente identificado em [2, 3]. A carta de Mercator faz parte da história. Em certo sentido, o processo que ele utilizou não faz, uma vez que só foi compreendido em 2014 e não teve influência nos desenvolvimentos posteriores a 1569.

O que aqui afirmo — como fiz noutras ocasiões [5, 6, 7] — é que essa história começa com Pedro Nunes, em 1537, mas de forma desenvolvida sobretudo nas suas *Opera* de 1566 [4]. Neste segundo trabalho, Pedro Nunes é muito claro na explicação do que são linhas de rumo, descreve um método matemático rigoroso para construir tabelas de rumos e é mais preciso do que em 1537 quanto ao processo de construção de cartas que satisfaçam o requisito de representar as linhas de rumo por rectas.

Em relação a este último aspecto a citação fundamental ([4], p. 299) é a seguinte (destaques meus):

> *"De todas as formas usadas por Ptolemeu para representar o orbe no plano, parece-nos o mais adequado para a arte de navegar o método que emprega para traçar as tábuas particulares das regiões, em que se guarda a proporção do meridiano ao paralelo médio. Nestas [tábuas], porque os meridianos são paralelos uns aos outros, qualquer linha recta que sobre eles seja traçada faz sempre ângulos iguais com eles. É preciso, porém,* ***que os paralelos extremos não distem muito uns dos outros****. Deve colocar-se em cada tábua* ***a totalidade da longitude do orbe****"*

O que significa "guardar a proporção do meridiano ao paralelo médio"? Fixemos dois meridianos. Para cada latitude φ, o comprimento da parte do paralelo de latitude φ compreendida entre os dois meridianos é igual ao comprimento da correspondente parte no equador multiplicado por $\cos\varphi$. Portanto, numa carta em que os meridianos sejam representados por rectas verticais, o paralelo de latitude φ — onde se medem os graus de longitude

— deve ser multiplicado por um factor de "dilatação horizontal" igual a $\frac{1}{\cos\varphi}$. Para se manter a proporção entre os graus de latitude e os graus de longitude — a propriedade que garantirá a representação das linhas de rumo por rectas — é preciso aplicar aos graus de latitude um igual factor de "dilatação vertical"

Olhemos agora para a porção da superfície do globo delimitada pelos dois meridianos e pelos paralelos de latitudes $\varphi-\varepsilon$ e $\varphi+\varepsilon$. O que Pedro Nunes propõe é que essa porção de superfície seja representada, na carta, pelo rectângulo em que os lados horizontais provenham da diferença de longitude entre os meridianos fixados e os lados verticais sejam afectados pelo factor de dilatação vertical correspondente à latitude do paralelo médio, isto é, na nossa linguagem, $\sec\varphi$.

Logo, como a dilatação dos graus de latitude é cumulativa à medida que as latitudes aumentam, para construir uma carta, na passagem das coordenadas longitude-latitude para as coordenadas do plano, $(\lambda,\varphi)\mapsto(x,y)$, deve fazer-se

$$x=\lambda\,,\quad y=\sum_{0}^{\varphi}\sec t_i\,.\,\Delta t_i$$

Para que "os paralelos extremos não distem muito uns dos outros", as diferenças Δt_i devem ser pequenas. Esta frase e a relativa à "totalidade da longitude do orbe" são significativas, tornando claro o que Pedro Nunes tinha em mente. Daqui para a carta de Mercator é um pequeno passo.

Esta é a interpretação da proposta de Pedro Nunes. Não se conhece nenhuma carta traçada por ele, usando este ou qualquer outro método.

O primeiro autor a tornar completamente explícito este processo de construção de cartas náuticas (e apresentando um exemplo com parte do Atlântico Norte) foi o inglês Edward Wright, em 1599 [8]. Wright cita várias vezes os tratados de 1566 de Pedro Nunes na análise da carta, embora não refira a proposta cartográfica. Nas tabelas com os valores de $\sum\sec t_i\,.\,\Delta t_i$, Wright usa diferenças de latitude de 10 minutos de grau. Numa segunda edição do seu livro, em 1610, usa diferenças de um minuto de grau.

Após a criação do cálculo, claro que se passou a usar $y=\int_0^\varphi\sec t\,dt$.

Várias fontes canónicas sobre história da cartografia omitem o nome de Pedro Nunes. Mesmo em Portugal há alguma resistência a reconhecer a contribuição de 1566, primeiro por não se conhecer nenhuma carta de Pedro Nunes e depois porque o interesse prático da "carta de Mercator" demorou muito tempo a impor-se.

Referências

[1] Raymond D'Hollander, *Loxodromie et projection de Mercator*, Institut océanographique, Paris, 2005.

[2] Joaquim Alves Gaspar e Henrique Leitão, "Squaring the circle: how Mercator constructed his projection in 1569", *Imago Mundi*, Vol. 66 (2014), pp. 1-24.

[3] Henrique Leitão e Joaquim Alves Gaspar, "Globes, rhumb tables, and the pre-history of the Mercator projection", *Imago Mundi*, Vol. 66 (2014), pp. 180-195.

[4] Pedro Nunes, *De arte atque ratione navigandi*, Obras - Volume IV, Academia das Ciências e Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 2008.

[5] João Filipe Queiró, Nota de apresentação a *Petri Nonii Salaciensis Opera*, Departamento de Matemática, Universidade de Coimbra, 2002.

[6] João Filipe Queiró, "Proposta cartográfica de Pedro Nunes em 1566", *Boletim da SPM*, n.º 65 - Supl. (2011), pp. 23-25.

[7] João Filipe Queiró, "Uma proposta cartográfica de Pedro Nunes", *in António Estácio dos Reis: Marinheiro por Vocação e Historiador com Devoção. Estudos de Homenagem (coord. Jorge Semedo de Matos)*, Lisboa, Comissão Cultural de Marinha, 2012, pp. 161-166.

[8] Edward Wright, *Certaine Errors in Navigation*, Valentine Sims, Londres, 1599.

Tradução de imagens do "método do galeão"

Helena Sousa Melo, *Maria do Carmo Martins*
Departamento de Matemática e Estatística
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Universidade dos Açores
e-mail: helena.fs.melo@uac.pt
maria.cc.martins@uac.pt

Ao estudar a História da Matemática recorrendo às diversas bibliografias, nomeadamente Padilha [1], Boyer [2], Eves [3], entre outros, deparamos com manuscritos acerca do (des)conhecido "método do galeão" ("método da galera", "método de riscar") para a operação aritmética da divisão efetuada entre os séculos XV e XVIII, muito utilizada nas transações comerciais dos povos cujo sistema de numeração era o decimal posicional. A salientar que o facto do sistema decimal ser o mais usado a nível mundial, desde a antiguidade, contribuiu para a divulgação do método do galeão.

Desde algum tempo, o método do galeão suscita a curiosidade de historiadores e de matemáticos. Encontrado em livros de matemática financeira e em livros de história da matemática, fomos à procura das suas origens.

O livro *Arithmetica Practica* do Padre Juan Joseph de Padilla, datado de 1732, apresenta uma descrição detalhada do algoritmo da divisão segundo o método do galeão, entre as páginas 21 e 29, sem nunca denominá-lo, ou usar o termo "galeão", e apenas referenciando tal método como Regra 4. O método descrito por Padilha [1] envolve uma escrita mais clara, mas ainda semelhante à encontrada nos manuscritos do século XVI.

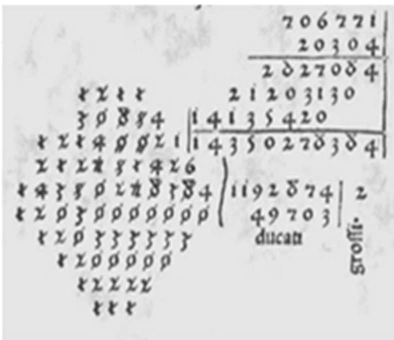
Segundo Gomes e Morey [4],

> "Smith (1925) afirma que o método de divisão em forma de Galeão era utilizado pelos árabes por volta do século IX e algumas variações surgiram por volta do século XI. Ainda, Lay-Yong (1966) afirma que o método do Galeão era o mais utilizado na Europa até meados de 1600 e muito popular até o século XVIII."

Segundo Boyer [2] e Eves [3], grande parte dos métodos aritméticos da Índia foram adotados pelos árabes, e entre eles, com quase toda a certeza, o método do galeão, um algoritmo muito aplicada à operação de divisão antes do século XVI. A sua denominação vem provavelmente do facto de, após a sua execução, esse algoritmo da divisão parecer-se com um galeão, um navio utilizado no transporte de cargas pelos oceanos entre os séculos XVI e XVIII.

O método do galeão torna-se, com a prática, fácil de ser executado e era utilizado juntamente com o ábaco de areia. Nesse método de divisão, o divisor é colocado abaixo do dividendo, repetindo-se, após a sua deslocação de uma casa para a direita, toda a vez que se encontra um algarismo para o quociente, o qual é colocado à direita logo a seguir ao dividendo, no mesmo alinhamento e separados por uma barra vertical. As sucessivas subtrações, efetuadas da esquerda para a direita, são colocadas acima do dividendo, sem deixar espaços em branco entre os algarismos, riscando-se os algarismos utilizados nesse passo da divisão, bem como no decorrer de todo o método. Outro detalhe desse método é quando no divisor existe o algarismo zero (0), pois nesse caso, não riscamos o algarismo do dividendo, mantendo-o para o novo dividendo da próxima divisão.

Para ilustrar o método do galeão apresentamos uma divisão de 14350278384 por 12030, obtendo-se o quociente 1192874 e o resto 4164, com a respetiva tradução, e uma multiplicação que constam em *Arithmetica de Treviso*, datado de 1478. Optou-se por não colocar os riscos na imagem da direita (tradução), deixando-a no formato original, para tornar a sua compreensão mais simples.



```
    1211
    30854
  12149921
  212751426
14350278384 | 1192874
12030000000 |
  120333333
   1200000
    12222
     111
```

A partir do século XVIII, o método do galeão melhora a sua apresentação e exibe uma escrita mais ordenada, tal como a que se encontra em Padilha [1].

Referências

[1] Juan Joseph de Padilla, *Arithmetica Practica*, com un prefacio e introducción de Luis Radford, Guatemala, 1732.

[2] Carl B. Boyer, *História da Matemática*, Tradução de Elza F. Gomide, Editora Edgar Blucher Ltda, Brasil, 1974.

[3] Howard Eves, *Introdução à História da Matemática*, Tradução de Higyno H. Domingues, Unicamp. 1.ª reimpressão de 2005, 2004.

[4] Severino Carlos Gomes e Bernadete Morey, "Algoritmos de divisão medievais e renascentistas: o método do galeão", *XI SNHM, Sociedade Brasileira de História da Matemática*, 2014. http://www.sbhmat.org/wa_files/C60.pdf

The beginnings of the Soviet encyclopedia. Utopia and misery of mathematics in the political turmoils of the 1920s

Laurent Mazliak
LPMA
Université Pierre et Marie Curie
PARIS, France
e-mail: `laurent.mazliak@upmc.fr`

The Great Soviet encyclopedia (GSE in the sequel) was a gigantic enterprise to the glory of "Marxist science"and of the Soviet regime. There were three editions : the first one was published between 1926 and 1947, the second one between 1950 and 1958, the third one between 1969 and 1978. The statement of these years alone allows to understand the enormous differences between the three editions. One observes in particular that if the second and the third were launched in a relatively short period of time, nine years for both, the first edition needed more than twenty years to be completed.

Roughly speaking, the second edition of the GSE was characterized by the years of Stalinist glaciation of the 1950s, when, after World War 2, Soviet Union and its satellite countries were more or less isolated behind the iron curtain. As for the third one, it represented the last attempt for the declining regime to present a general picture of the Soviet conception of the world and it implied a deep tidying up of the most salient aspects inherited from the Stalinist period. Thus, clearly, the first edition represents the richest of the three editions as historical source for a better understanding of how Soviet thinking was constructed after 1917. There are several reasons why this edition provides such a capital wealth. First of all, it is so precisely because it was the first edition : it imposed several forms to the publication which would be continued in the following editions. Among these forms, the most obvious, which bore many consequences, was the choice of the alphabetical ordering for the entries, so that the publication can be seen as an encyclopedic dictionary as well as an encyclopedia. Some other choices were kept in future editions : a rather small dimension for the volumes, a two-column display of the pages, two sizes of fonts with large or small letters. Also the presence of numerous pictures and drawings. Another reason for this edition to be precious is that it included among its collaborators a huge number of first-rate personalities of the Soviet academic stage of the time. But the most important of all the reasons for this first edition to be so important is in fact that the publication between 1926 and 1947 witnessed the enormous changes met by the Soviet Union during this period. Even if we limit ourselves to the first five years, it is worth recording that the 1920s in USSR began in the violence of war communism, followed since 1922 by the very particular time of the New Economic Policy (NEP in the sequel). The decade was abruptly closed after 1928 by the end of the NEP and, in the academic world, by the fight against bourgeois specialists. The volumes of the GSE published during, say, the five years 1926-1930, joining the immediate aftermath of Lenin's death (1924) to the consolidation of the Stalinist dictatorship were written on the background of the sinuosities of the Soviet orthodoxy during this period and are precious to document the history of these difficult times, especially the intellectual history, marked by the still vivid ambition that Bolshevik Russia would be the spearhead of a world revolution.

I examine four entries, published in the first volumes of the GSE, and connected to the important debates existing in Soviet science in the 1920s about the status of the calculus of probability and its use in the scientific approach of phenomena. The right place to give to randomness, and to its scientific measure, in the communist society under construction was at stake during the 1920s. The economical primacy resulting from the Marxist social conception led indeed to ask what margin of randomness was left politically admissible when the means of production were supposed to be under the absolute control of the State. In the economical sciences, any excursion beyond strict deterministic models was considered with a priori suspicion and was essentially related to the existence of a market where private actors could speculate. It was for sure an originality of the Soviet scientific stage of the 1920s and 1930s that the mathematics of randomness were at the same time a topic in which Soviet science obtained blatant successes but also a topic regularly subject to hard critics. Moreover, by the chance of the alphabetical order, all four belong to the beginning of the alphabet and therefore were published around 1926 in the very first volumes of the encyclopedia. Two entries deal with two mathematicians : a living foreigner, Emile Borel, and a dead Russian, Nikolaï Vassilievich Bugaïev and the two others concern fundamental theoretical aspects : probability and the law of large numbers. The aim of the following comments is above all to illustrate the kind of balance the authors had kept between their scientific freedom and their necessary adaptation to the circumstances, before the harsh taking in hand by the Stalinist one-track thinking of the 1930s.

The composition of the editorial board placed the GSE in the front row to be under attack when began the ideological crispation in the beginning of the 1930s. In 1929, the journal Natural science and Marxism, devoted to the study of natural sciences from a Marxist point of view, was founded under the direction of Schmidt as an extension of the Soviet encyclopedia with more room available for debates. In 1931, Schmidt was replaced by E.Kol'man and the journal was refounded under the title For a Marxist-Leninist natural science which in its first issue declared war to Schmidt. His choices for the GSE were for instance violently opposed in an article by A.Maksimov, asserting that the "science section of the GSE must be considered as anti-marxist. (...) To the ideological character of some observed errors must be related the errors made in choosing the authors."And the logician S.Yanovskaya, who, for some times had become E.Kolman's companion as a guard dog of the ideological purity of Soviet mathematics, composed a long diatribe against the way in which mathematics were presented in the encyclopedia, supposedly non Marxist. Harder times had begun.

Mathematicians and the first steps of Quantum Mechanics in Portugal

*Augusto Fitas**
IHC-CEHFCi
Universidade de Évora
e-mail: afitas@uevora.pt

1 Introduction

Until the first half of the twentieth century Theoretical Physics had not been included on any Portuguese university course or received the slightest attention from Portuguese physicists and without any difficulty this period could be extended by a few more decades. Indeed, with the exception of a few so-called "classical mathematical physics" topics, Theoretical Physics had never been taught at the Faculties of Science of Portuguese Universities. Two main factors explained this absence: the first one is the special link of physics to laboratory practice and phenomenological observation — this discipline teaching was confined to the training in Physical Chemistry Sciences and as propaedeutic domain of engineering; the second factor happened because only in mathematics degree, for mathematicians and astronomers, there were a Mathematical Physics discipline — special studies on mathematical methods in physics — where advanced topics on theoretical physics were taught and, it is important to underline, this discipline didn't belong to the Physical Chemistry and engineering degrees curricula. In Portugal, the development, or lectures, of theoretical models applied to physical theories was reserved especially for mathematical degree in Mathematical Physics courses.

Special topics like theory of relativity, special and general, have been taught in Portugal in the last century, in the early twenties, for the degree on Mathematics and only in the mid-thirties, the relativistic kinematics, in a very simple way, were presented to the Physical Chemistry degree students. In Portugal, during the period between the two world wars, the only scientific research associated with the theory of relativity were concerned with its mathematical foundations, namely differential geometry. It was the mathematician Aureliano Mira Fernandes (1884–1958) — full professor in

*Professor da Universidade de Évora de Física e História e Filosofia da Ciência (aposentado), investigador do IHC-*cehfci* (UE) e coordenador do Grupo de Historia da Física da SPF the Lisbon school of engineering, where he held the chair in rational mechanics — the main author of this research whose papers were published from 1928 onwards, under the influence of Tullio Levi-Civita (1873–1941), in the prestigious Italian journal of the *Academia dei Lincei*.

Other major theme of contemporary theoretical physics — quantum physics and all its derivations (like nuclear physics, structure of matter, elementary particle physics, etc.) — were located completely outside official curricula. It was also in the thirties of last century, that some references were made to this new branch of physics, but there was not any discipline or seminar that approached this subject on a systematic way.

2 Two mathematicians

In January 1933, Mira Fernandes, wrote a letter to Rui Luís Gomes (1905–1984), a young full professor of mathematics at the University of Porto, where he describes a course on the «*Modern Concepts of Mechanics in the Institute for Advanced Studies*». In this letter, beyond other issues, the main subject is quantum mechanics and those books which will support his lectures: *Die gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik* from Van der Waerden, a Dutch algebrist who was a professor of mathematics at the University of Leipzig since 1931, an Heisenberg's colleague, and Weyl's work on quantum mechanics, *Gruppentheorie und Quantenmechanik*, published in 1928 whose english translation appeared in 1931. In the letter there is also a reference to Weyl's theory of relativity book *Raum-Zeit-Materie* which appeared in 1918 and they both knew.

Mira Fernandes' course were widely publicized in the national newspapers and it inaugurated the activity of an Institute which belongs to *Academia das Ciências de Lisboa* whose main purpose was to enable "non-academics" to attend *academics*' lessons. Mira Fernandes' course was published and it is possible to see that Quantum Mechanics lessons began with a brief presentation of the main aspects of the quantum hypothesis and its consequent applications to the experimental results of Atomic Physics. He spent more time with mathematical explanation's details of the theory. Although no bibliographic references were pointed, one percepted that the author was aware with the main ongoing discussions subjects and also the important authors committed with the standing up of quantum mechanics theory.

Quantum Mechanics is an issue that persists in the correspondence between Mira Fernandes and Rui Luís Gomes over the years 1934 and 1937. For the latter one, Rui Luís Gomes, in the mid-thirties and the beginning of the following decade, quantum mechanics was his work's subject in Mathematical Physics. This fact can be considered as a clear influence of Mira Fernandes over Gomes research orientation.

Rui Luís Gomes got his PhD at the University of Coimbra in 1928 with a dissertation on Rational Mechanics. From 1934 he started to publish research on Quantum Mechanics Mathematics: "*Les matrices de Dirac dans un espace riemannien*" (1934), "*L'operateur S, operateur de Schrondinger*" (1935), "*Quelques considerations sur l'equation fondamentale de la nouvelle conception de la lumière de Louis de Broglie*" (1935), "*Sur la proprieté de l'operateur H de Louis de Broglie*" (1935) and "*Sur les systèmes de Dirac au sens large*" (1937) . This last paper had aroused from Louis de Broglie (1892–1987) a hand written card to the author: "*J'ai examiné cette note et il me parait en effet que vous donnez une méthode très simple pour faire la démonstration donnée sous une autre Form for M. Pauli dans ses conférences à l'Institut Henri Poincaré (…) Votre méthode me parait donc interessant*".

And Rui Luís Gomes, a half-dozen years later (February, 1942), in a letter to Guido Beck (1903–1988), an Austrian physicist passing through Portugal, inviting him to participate in the Seminary of Theoretical Physics in Mathematics Department of University of Porto, wrote: "*(. . .) and there is no need to tell you that you can count on me to delineate any subject that has a closer relationship with the domain of Mathematical Physics that I work here at Porto, that is, quantum mechanics (…)*".

3 Oporto Theoretical Physics Seminar

Escaping from nazi power because of his Jewish origin, already with a large teaching experience in countries with diverse cultural traditions and political regimes — Heizenberg's assistant in Munich, guest lecturer at the universities of Prague, Kansas and Odessa, a researcher at the Bohr institute at Copenhagen, a fellow researcher in Paris and Lyon — and with a relevant scientific production, Guido Beck, after passing through the Chambereau internment camp in the French Pyrenees as an enemy of French republic, arrived at the University of Coimbra on Christmas Day 1941. Sponsored by a Portuguese grant from IAC (Portuguese governmental institution that was responsible for awarding grants to Portuguese and foreign scientists), Beck studied the possibility of organizing a course in Theoretical Physics in Coimbra. Although installed in this city, Beck sought to work with all Portuguese physicists and, at the beginning of February 1942, the Lisbon Physics Laboratory announced Beck's lessons under the title *Introduction à la théorie des quanta.* Only in Lisbon, the Physics Laboratory had a team engaged in carrying out physics scientific research on a regular basis. The two research leaders were Manuel Valadares (1904–1982) and Marques da Silva (1905–1965), both got their PhD degree in the University of Paris. This was the main reason that led Beck to inaugurate his course in Lisbon. While teaching the course, Guido Beck met Rui Luís Gomes who had travelled from Oporto to Lisbon especially to attend these lessons. This meeting marked the beginning of a relationship which would prove to be extremely fruitful in terms of joint work and it gave rise to the letter mentioned before.

Beck returned to Coimbra and, in the second half of September 1942, wrote to Gomes making definite plans for what would become the Oporto Theoretical Physics Seminar. This seminar was initially made up of mathematicians: Ruy Luís Gomes, Mathematical Physics professor in the department of mathematics at the University of Porto, his colleague, António Almeida e Costa (1903–1978), a mathematician teaching celestial mechanics who had briefly studied theoretical physics at the University of Berlin in 1938–1939 and who suffered a special influence from Max Köhler's lessons in Berlin on *Group Theory Applied to Quantum Mechanics*. On his return to Portugal, Almeida e Costa enthusiastically promoted algebraic studies as an application to physics and he was responsible for introducing algebraic studies into the Portuguese mathematics degree curriculum. Gomes and Costa were both promoters of mathematical applications to theoretical physics and they were the seminar's core which included also a Gomes's graduate student, Fernandes de Sá (1904-1971). Carlos Braga (1899–1982) and José Sarmento (1899–1986), both physicists from University of Porto with close ties to Valadares and the Lisbon group of experimental physicists, had an important participation in the seminar which was attended also by Rodrigues Martins (1914–1994) from University of Coimbra.

Beck left Portugal for Argentina on March 29, 1943; Oporto Theoretical Physics Seminar carried on without Beck... Deliberately we omit the almost tragic historical path of what was the continuation of Oporto Theoretical Physics Seminar activity, a very important initiative of mathematicians and physicists interested in Physical New Theories.

References

[1] A.J.S. Fitas, A.A.P. Videira (org.), *Cartas entre Guido Beck e Cientistas Portugueses*, Instituto Piaget, Lisboa, 2004.

[2] A.J.S. Fitas, A.A.P. Videira, "Guido Beck, Alexandre Proca, and the Oporto Theoretical Physics Seminar", *Physics in Perspective*, 9 (2007), pp. 4-25.

[3] A.J.S. Fitas, "As primícias da Mecânica Quântica e a aventura da Física teórica em Portugal", In *Histórias da Física em Portugal no século XX*, 2011, Teresa Peña e Gonçalo Figueira (eds.), Gradiva, Lisboa, 49-65.

Os diferentes contextos do Cálculo Fluxionário de Anastácio da Cunha

João Caramalho Domingues
Centro de Matemática
Universidade do Minho
e-mail: jcd@math.uminho.pt

Uma das mais conhecidas originalidades dos *Principios Mathematicos* de José Anastácio da Cunha [1790] é a sua definição de «fluxão» que, numa famosa apreciação de Youschkevitch [1973, 19], constitui a «primeira [...] definição analítica rigorosa de diferencial, retomada e utilisada mais tarde pelos matemáticos do século XIX». O primeiro desses matemáticos do século XIX a retomarem essa definição (ou pelo menos a definirem diferencial analítica e rigorosamente) seria Cauchy, em 1823.

No entanto, já numa recensão à tradução francesa dos *Principios* o matemático italiano Vincenzo Brunacci dizia que essa definição de Anastácio da Cunha era «em substância, a mesma que se dá hoje em dia [1816] das diferenciais», referindo-se a certos «novos métodos» [Brunacci, 1816].

Mas então a definição de fluxão de Anastácio da Cunha foi precursora de novos métodos populares já em 1816 ou de métodos analíticos rigorosos que se implantaram apenas mais tarde? E que «novos métodos» eram esses?

Para entender esta questão é necessário antes de mais ter em conta que o contexto europeu da análise mudou muito nos quase 25 anos que decorreram entre a morte de Anastácio da Cunha e a publicação da tradução francesa do seu livro. Seguindo parcialmente [Grattan-Guinness, 1990], podemos falar em três tradições para caracterizar o contexto da época da composição original. Antes de mais a tradição dos limites, onde sobressai Newton, um dos heróis de Anastácio da Cunha, mas também d'Alembert — o conceito de limite era usada de forma vaga e intuitiva, com poucas demonstrações, as quantidades consideravam-se como fluindo ou variando e em geral os conceitos eram geométricos. Opunha-se-lhe a tradição das diferenciais, de Leibiniz, que utilizava quantidades infinitamente pequenas — os conceitos eram também geométricos, com excepção da versão euleriana, se incluirmos Euler nesta tradição. Grattan-Guinness apresenta como terceira alternativa o cálculo de funções de Lagrange, baseada em expansões em séries de potências, mas em 1787 esta alternativa era ainda apenas uma sugestão. Uma verdadeira terceira alternativa, bem desenvolvida, era a análise pura de Euler, que embora utilizasse também diferenciais e infinitamente pequenos, se distinguia da tradição leibiniziana pela sua ênfase em quantidades analíticas abstractas e em funções como expressões analíticas.

Anastácio da Cunha não se enquadra plenamente em nenhuma destas tradições. Usa a palavra «infinitésimo», mas com um significado próprio, e (em [Cunha, 1790]) a notação leibniziana, mas a terminologia newtoniana; um manuscrito (com texto incompleto) sugere que uma versão anterior incluía uma definição de «limite» [Domingues *et al.*, 2006], mas esta foi abandonada. Provavelmente Anastácio da Cunha terá evoluído duma abordagem baseada em limites para uma abordagem muito própria mas com importantes influências eulerianas — é de notar que na secção de [Cunha, 1790] dedicada ao cálculo fluxionário o conceito de função é definido logo no início (o que não era muito comum), «fluxão» é definida para funções e não para quantidades variáveis (no mínimo muito raro) e a palavra «variável» refere-se a expressões que representam vários valores e não a quantidades que variam (o que só por si parece remeter para Euler [Domingues, 2004]).

Nas décadas seguintes o panorama da análise matemática mudou consideravelmente. Na década de 1790 Lagrange e outros desenvolveram a sua sugestão de 1772, criando uma versão da análise que se tornaria canónica nas primeiras décadas do século XIX. Nesta versão assumia-se que o incremento de qualquer função podia ser expandido em série de potências ($f(x+h) = f(x) + p\,h + q\,h^2 + \ldots$) e definia-se «derivada» da função como o coeficiente do incremento da variável nessa expansão ($f'(x) = p$, por definição) e/ou «diferencial» como o termo de primeira ordem dessa expansão (escrevendo $dx = h$, $df(x) = p\,dx$, por definição). O resultado era «análise pura» (e muitos detalhes técnicos inspiravam-se em Euler).

Brunacci foi um dos difusores da análise lagrangiana em Itália, e é neste contexto que deve ser lida a sua recensão de Cunha [1790]. Brunacci salienta que a palavra «infinitésimo» é aplicada «não à ideia de quantidade infinitamente pequena, mas à de uma variável que se pode tornar menor do que qualquer grandeza proposta; diferindo apenas no nome dos incrementos indeterminados das variáveis segundo os novos métodos» (ou seja, h na série acima); e, mais surpreendentemente, que «a definição das fluxões, ainda que mais complicada, é em substância a mesma que se dá hoje em dia das diferenciais».

Não é completamente claro como é que a definição de Anastácio da Cunha ($df(x)$ é tal que $\frac{df(x)}{dx}$ é constante e $\frac{f(x+dx)-f(x)}{dx} - \frac{df(x)}{dx}$ é infinitésimo se

dx for infinitésimo) é «em substância» a mesma que a definição de diferencial como o termo $p\,dx$ na série $f(x+dx) = f(x) + p\,dx + q\,dx^2 + \cdots$

Talvez a resposta esteja numa memória de Brunacci [1810] sobre as diferenças entre «a metafísica do cálculo sublime de Lagrange e as metafísicas dos métodos anteriores»: o cálculo de funções lagrangiano é um ramo da álgebra ordinária — não introduz novas operações nem novos princípios, as quantidades são consideradas sob o mesmo aspecto; por outro lado, o cálculo infinitesimal leibniziano requer quantidades infinitesimais; o método dos limites considera quantidades no preciso momento em que deixam de ser quantidades, o que levanta dúvidas; e o método das fluxões original depende de ideias físicas (velocidade). Sob esse ponto de vista, de facto, o cálculo fluxionário de Anastácio da Cunha partilhava com o cálculo lagrangiano o serem ramos da álgebra ordinária — isto é, puramente analíticos.

Referências

Vincenzo Brunacci, 1810. *Memoria premiata dall'Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Padova*, Pádua: Nicolò Zanon Bettoni.

Vincenzo Brunacci (anonimamente), 1816. Recensão de [Cunha, 1790, ed. 1816], *Giornale di Fisica, Chimica, Storia Naturale, Medicina ed Arti* IX, págs. 153–154; reimpr. com trad. port. em [Domingues, 2011, 95–98].

José Anastácio da Cunha, 1790. *Principios Mathematicos*, Lisboa. Trad. francesa por João Manuel d'Abreu, *Principes Mathématiques*, Bordeaux: André Racle, 1811; republ. como *Principes de Mathématiques*, Paris: Courcier, 1816.

João Caramalho Domingues, 2004. «Variables, limits, and infinitesimals in Portugal in the late 18th century», *Historia Mathematica* 31, 15–33.

João Caramalho Domingues, 2011. «Uma recensão italiana dos *Princípios Matemáticos* de José Anastácio da Cunha», *Boletim da SPM* 65, 89–98.

João Caramalho Domingues, Maria Elfrida Ralha, José Francisco Rodrigues, Jaime Carvalho e Silva, 2006. «Notas ao manuscrito *Principios do Calculo Fluxionario: Março de 1780* de José Anastácio da Cunha», em M. E. Ralha *et al.* (eds.), *José Anastácio da Cunha: O Tempo, as Ideias, a Obra e... os Inéditos*, Braga: ADB/CMAT/CMUP, I, 265–275.

Ivor Grattan-Guinness, 1990. «Da Cunha's calculus in its time», em Maria de Lurdes Ferraz *et al.* (eds.), *Anastácio da Cunha 1744/1787 — o matemático e o poeta*, Lisboa: INCM, 53–62.

A. P. Youschkevitch, 1973. «J. A. da Cunha et les fondements de l'analyse infinitésimale», *Revue d'histoire des sciences* 26, 3–22.

José Maria Dantas Pereira – os seus escritos sobre seguros

Ana Patrícia Martins
Escola Superior de Educação de Viseu & CIUHCT
e-mail: anapatmartins@gmail.com

Em 1810 foi publicado no Rio de Janeiro, anonimamente, *Reflexões sobre o commercio dos seguros*, um texto composto de duas partes, sendo a segunda uma tradução de "Assurances maritimes" de Marie Jean Antoine Nicolas de Caritat Condorcet (1743-1794), publicado em 1784.

A sua autoria é atribuída, desde 1812, ao economista e político brasileiro José da Silva Lisboa (1756-1835) – a primeira referência, num catálogo da *Loja Paulo Martim e filhos*, em Lisboa; a partir de 1860, no *Diccionario bibliographico portuguez*, de Inocêncio da Silva; em 1874, a 6ª edição dos *Princípios de Direito Mercantil*, de Silva Lisboa, identifica-o como sendo da sua autoria. Uma associação que não é correta. O texto é, antes, do oficial de Marinha e matemático José Maria Dantas Pereira (1772-1826), conforme se comprova em *Escritos maritimos e académicos* (1828). Comandante da Companhia dos Guardas Marinhas e professor de Matemática da Academia dos Guardas Marinhas, Dantas Pereira embarcou para o Brasil aquando da partida da família Real em 1807. Consideramos possível que esse opúsculo resulte de uma cooperação entre os dois: Silva Lisboa fora distinguido pelo príncipe regente para o auxiliar a levantar o império brasileiro, ocupando cargos políticos de destaque; Dantas Pereira possuía formação académica em ciências matemáticas.

Os assuntos de seguros interessavam a Dantas Pereira desde a década de 1790 – traduziu *Calcul des rentes viagères sur une et sur plusieurs têtes* (1779), de Paul-Edme Crublier de Saint-Cyran (1738-1793), publicada em 1897. Em França, o tema era pouco conhecido, quer pelo Governo, quer pelo público. Em Portugal, é o primeiro texto em Português sobre assuntos de pensões, sendo um contributo relevante para instituições que providenciassem pensões de sobrevivência. Acrescenta ao texto original um apêndice, contendo tábuas de juros compostos e anuidades, de outro autor estrangeiro, explicando a sua teoria e prática. Existe, pois, a intenção de facilitar a utilização dessa obra. De qualquer modo, não estavam reunidas, em Portugal, as condições para a aplicação correcta dessa teoria – não existiam estatísticas de mortalidade fidedignas que permitissem uma escolha de adequadas tábuas monetárias estrangeiras.

Suplemento do Boletim da SPM 76, Dezembro 2018, pp. 47-49

Reflexões sobre o commercio dos seguros inicia-se com um prefácio onde se apresentam os propósitos da obra: promover o bem do Estado e estimular a curiosidade dos comerciantes para a correcta fundamentação dos seguros. Notamos que, a partir de 1808, com a abertura dos portos brasileiros, o comércio era uma actividade em franco desenvolvimento.

A segunda parte de *Reflexões* é a tradução do artigo "Assurances maritimes", de Condorcet, onde a teoria dos seguros navais é apresentada fazendo intervir probabilidades associadas ao naufrágio e ao sucesso de uma viagem, expondo os pontos de vista, quer do negociante quer do segurador. Condorcet considerava que era possível alcançar, nas emergentes ciências morais e políticas, o mesmo grau de certeza do que em áreas tradicionais como a física, a química ou a astronomia, e este seu contributo é original nesse sentido. Faz ainda considerações sobre a possibilidade de generalização da teoria a seguros agrícolas, o que constitui uma novidade em França. De qualquer modo, segundo Pradier, a importância prática desse artigo fica reduzida a pouco, dado o grande volume de cálculos envolvidos.

A primeira parte de *Reflexões*, o "Discurso relativo aos seguros em geral, e aos Navaes em particular", foi escrita por Dantas Pereira, sendo destacado o papel da Matemática na fundamentação da indústria dos seguros e os contributos franceses no que respeita aos seguros navais na década de 1780. Esse "Discurso" constitui uma introdução ao artigo de Condorcet, sendo que para o cálculo de prémios não faz intervir probabilidades de sucesso ou fracasso de uma viagem. À semelhança de Condorcet, faz uma aproximação aos seguros agrícolas. Não faz considerações sobre a articulação com o trabalho do matemático francês.

No seu "Discurso", Dantas Pereira remete o leitor para a "Noticia Geral do Commercio", que identifica como "nossa", onde se trata "muito amplamente" dos diversos seguros que vigoravam na Europa. Em (Dantas, 1828) não há menção a um texto dessa natureza, pelo que julgamos ser de outro autor nacional. Consideramos que seja um manual bastante difundido da *Aula do Commercio*, criada em Lisboa em 1759; o seu autor é o lente Alberto Jacquery de Salles (1731-1791). O manuscrito *Noticia Geral do Commercio* (1789) é o único, de entre os que se encontram nos arquivos nacionais, que tem identificado esse título (e autor) e a sua sétima lição, dedicada aos seguros, é desenvolvida (49 folhas, num total de 198). O conteúdo dos restantes manuscritos em pouco difere do desse, pelo que se conclui serem versões suas.

As traduções de Dantas Pereira aqui apresentadas revelam preocupação com o progresso da indústria dos seguros e sua correcta fundamentação. A importância dos temas abordados é reconhecida na época – sendo as sociedades de socorros mútuos uma alternativa à acção do Estado, é legítima a preocupação em assegurar a sua viabilidade financeira; os seguros navais contribuíam para a prosperidade da atividade comercial que nos inícios de Oitocentos era florescente no Brasil. Preenchem uma lacuna de textos em Português e reconhece-se a preocupação em abordar autores relevantes no estudo das temáticas, contribuindo, ainda, com acrescentos que facilitam a sua aplicação.

A repercussão destes contributos justifica-se ser estudada com mais pormenor: se a tradução de Saint-Cyran não encontrou em Portugal as condições necessárias para a sua aplicação, a tradução de Condorcet deverá ser contextualizada no panorama do desenvolvimento dos seguros no Brasil.

Referências

[1] Condorcet, M. J. A. N. C., "Assurances maritimes", *Encyclopédie méthodique*, tome 1er , 150-154, 1784.

[2] Dantas Pereira, José Maria, *Escritos maritimos e académicos a bem do progresso dos conhecimentos uteis, e mormente da nossa Marinha, Industria e Agricultura.* Lisboa: Na Impressão Regia, 1828.

[3] Dantas Pereira, José Maria, *Reflexões sobre o commercio dos seguros.* Rio de Janeiro: Na Impressão Régia, 1810.

[4] Jacquery de Salles, Alberto, *Noticia Geral do Commercio composta pelo Lente da mesma Alberto Jacquery de Sallesno anno 1789* (manuscrito), 1789.

[5] Pradier, Pierre-Charles, "«L'actuariat au siècle des Lumières» Risque et décision économiques et statistiques", *Revue économique*, Vol. 54, 139-156, 2003.

[6] Saint-Cyran, Paul-Edme Crublier de, *Calculo de pensões vitalicias por Saint Cyran.* Lisboa: Regia Typographica (trad. José Maria Dantas Pereira), 1797.

Problemas matemáticos da navegação aérea

António Costa Canas
Escola Naval – CINAV & CIUHCT & CH–ULisboa
e-mail: costacanas@gmail.com

A navegação aérea, com base científica, nasceu em Portugal, pelas mãos de Gago Coutinho e Sacadura Cabral. Sendo ambos oficiais de Marinha, é natural que tenham adaptado, para o novo meio em que se deslocavam, as técnicas de navegação que estavam habituados a usar no mar. Por esse motivo, este resumo começará com uma breve síntese da evolução da navegação marítima, desde finais da Idade Média até ao século XX.

Podem considerar-se três momentos na evolução da navegação, na Europa. Na Idade Média, com a introdução da bússola, desenvolveu-se, no Mediterrâneo, o método de rumo e estima. O nome deste método deriva do facto de o piloto precisar apenas de conhecer a direção em que seguia (rumo) fornecida pela bússola e a distância percorrida, que era estimada, fruto da sua experiência.

O método anterior tinha associados diversos erros, que cresciam em função da distância percorrida e do tempo decorrido, sem terra à vista. Servia para distâncias curtas, como era o caso do Mediterrâneo. Porém, a partir do século XV, este método revelou-se insuficiente, devido aos longos períodos que os navios portugueses passavam sem avistar terra, nas longas viagens oceânicas. Os pilotos passaram então a usar alguns astros para determinar a latitude, em alto-mar, reduzindo os erros acumulados. O cálculo da latitude era bastante simples, sendo necessário fazer apenas adições ou subtrações.

A determinação da longitude no mar, com rigor aceitável, apenas foi possível a partir de meados do século XVIII. Foi necessário resolver diversos problemas, a nível de instrumentos e de métodos de cálculo. Ao contrário do que acontecia com a latitude, o cálculo da longitude exigia o domínio da trigonometria esférica dependendo o rigor do resultado alcançado do rigor com que eram feitos cálculos bastante complexos.

Ao longo do século XIX ocorreram diversos desenvolvimentos no cálculo da posição no mar, usando métodos astronómicos. Um deles foi devido ao francês Marcq de Saint-Hilaire. Em 1875 sugeriu uma forma de determinar uma linha de posição a partir da observação da altura de um astro. Para tal, bastava comparar a altura medida com um instrumento, geralmente um sextante, com a altura calculada. Medindo a altura de vários astros, determinavam-se várias linhas de posição e o seu cruzamento dava a posição do navio. Era este o método mais comum quando Gago Coutinho e Sacadura Cabral realizaram a sua viagem. Os valores a calcular eram a altura (a) e o azimute (Z) do astro, para a posição estimada, que eram função da latitude (φ), da declinação do astro (δ) e do ângulo no polo (P), que por sua vez era dependente da longitude e da hora. As fórmulas de cálculo eram as seguintes:

$$\sin a = \sin \varphi * \sin \delta + \cos \varphi * \cos \delta * \cos P$$

e

$$\cos Z = \sin \delta * \sec \varphi * \sec a - \tan \varphi * \tan a$$

As primeiras viagens aéreas de longa distância ocorreram em 1919, uma travessia da Terra Nova para a Irlanda e outra viagem de Nova Iorque para Lisboa. Em ambas praticou-se essencialmente navegação estimada, usando a bússola e um odómetro, tal como nos primeiros tempos em que se praticou navegação marítima usando instrumentos. Na segunda destas viagens os hidroaviões contaram com o apoio de mais de vinte navios, posicionados de 60 em 60 milhas, ao longo do percurso. Sacadura Cabral conheceu, em Lisboa, Albert Cushing Read, que comandava o único hidroavião que concluiu a viagem. A partir deste ano, Sacadura começou a desenvolver o projeto de ligar Lisboa com o Rio de Janeiro, por ocasião do primeiro centenário da independência do Brasil. Para garantir o sucesso da missão era importante dispor de um método de navegação que permitisse conhecer com rigor a posição da aeronave ao longo do percurso. Sacadura Cabral convidou Gago Coutinho para o projeto, pois conhecia bem as suas capacidades para resolver problemas de posicionamento, uma vez que tinham trabalhado juntos em levantamentos geodésicos em África.

A navegação aérea apresentava várias semelhanças com a navegação marítima, nomeadamente a falta de referências em alto-mar e o facto de tanto num caso como noutro a plataforma se deslocar sobre um fluído que se desloca, o que implica que muitas vezes a direção seguida não é aquela para onde aponta a proa. Mas existem também algumas diferenças em relação à navegação marítima. Por um lado, a velocidade de uma aeronave é muito mais elevada que a de um navio e o combustível é consumido muito mais rapidamente. Tal acarreta a necessidade de fazer os cálculos de uma forma mais expedita. Existia igualmente a dificuldade em definir com rigor a linha do horizonte, importante para medir a altura dos astros, assim como a dificuldade em determinar a altitude da aeronave, necessária para corrigir a altura observada. Por outro lado, na navegação aérea não era necessário que a determinação das posições fosse tão rigorosa como no mar.

Gago Coutinho propôs soluções para todos os problemas, em conjunto com Sacadura Cabral. O facto de o ar ter movimento fazia com que o avião não seguisse, geralmente, o caminho desejado, pois sofria abatimento, devido ao vento. Para determinar o efeito do abatimento, foi inventado um instrumento, o «corretor de rumos». Com o avião a voar numa determinada direção, lançava-se para a água uma «bomba de fumo», recipiente com um produto químico que libertava fumo quando caía no mar. Na cauda da aeronave existiam umas marcas, que permitiam medir o ângulo de abatimento. Repetindo o procedimento para uma outra direção, afastada 45.º da primeira, e usando o corretor de rumos, calculava-se o abatimento. O instrumento permitia ainda calcular qual a direção para onde deveria apontar o avião, de modo a compensar o abatimento.

Para colmatar a dificuldade, sentida em altitude, de definir com rigor a linha do horizonte, Gago Coutinho adaptou um sistema de horizonte artificial ao seu sextante marítimo. Consista numa bolha de nível que se refletia no espelho onde também se refletia o astro a observar, tornando bastante simples o processo de medição da altura. Além disso, era importante conhecer a altitude a que o avião se encontrava, e na época não existiam instrumentos para tal. Coutinho media com um sextante a sombra da envergadura do avião e calculava trigonometricamente a altitude.

Outro problema residia na carta que geralmente se usa em navegação, na projeção de Mercator. Esta carta não tem uma escala constante, variando a mesma com a latitude. Tal não era nada prático, pois implicava demora na marcação da posição. Gago Coutinho preparou uns cartões, numa projeção cónica secante, com escala constante.

Finalmente, existia o problema da complexidade dos cálculos. Para tornar mais rápida a marcação da posição, eram preparados, antecipadamente, diversos cálculos, para algumas posições estimadas, ao longo percurso. Usando estes valores, ficava bastante facilitado o processo de cálculo das alturas e azimutes, que eram os cálculos mais complexos.

Referências

Gago COUTINHO, 1920. «Navegação Aérea», *O Automóvel*, Lisboa, 1.º ano, 16, 15 de dezembro de 1920, 241–243.

Gago COUTINHO, 1920. «Algumas considerações sobre navegação astronómica aérea», *Anais do Clube Militar Naval*, novembro–dezembro de 1920, 277–290.

Gago COUTINHO, 1972. «Relatório técnico sobre a navegação», *Relatório da viagem aérea Lisboa–Rio de Janeiro*, Lisboa, Centro de Estudos da Marinha, 109–139.

Apontamentos sobre o ensino de Matemática na Telescola

Mária Cristina Almeida
UIED-FCT-UNL & Agrupamento de Escolas de Casquilhos
e-mail: `ajs.mcr.almeida@gmail.com`

A implementação da Telescola, durante os anos de 1965/66 e 1966/67, para além do uso educativo da televisão, no que respeita à disciplina de Matemática incorporou também a inovação curricular da Matemática Moderna. Com este artigo, pretendemos contribuir para o conhecimento dos objectivos do ensino da Matemática, os conteúdos, as orientações metodológicas gerais e os materiais utilizados. As fontes utilizadas foram a legislação, as *Indicações didáticas de ordem geral* da disciplina de Matemática do 1.° e 2.° anos (1965/66 e 1966/67) e entrevistas com António Augusto Lopes.

O Ministro da Educação Nacional, Galvão Telles, tomou a iniciativa de pôr a televisão ao serviço da educação e do ensino. Ambicionando o alargamento da escolarização pós-primária a mais estratos populacionais, havia que conceber cursos, ministrá-los à distância e estruturar apoios educativos presenciais, através nomeadamente da figura do monitor e dos postos de recepção, assegurando o aproveitamento pelos alunos distantes (Telles, 1965). Coordenar todas estas atividades exigia uma instituição adequada, a Telescola, que foi criada como organismo ligado ao Instituto de Meios Audiovisuais de Ensino (IMAVE)[1]. O Curso Unificado da Telescola (CUT)[2] iniciou as suas lições em 25 de outubro de 1965 e terminou em junho de 1968. O modelo seguido neste novo subsistema de ensino compreendia a difusão televisiva (em direto) de aulas em "postos de recepção", seguida de uma exploração pelos alunos de atividades apoiadas por um "monitor". O ciclo básico de aprendizagem era constituído por uma "lição" televisiva de 20 minutos (leccionada por um "professor", era usualmente em emissão direta), seguida de uma "exploração" de 30 minutos orientada por um "monitor". O primeiro professor da disciplina de Matemática foi António Augusto Lopes, que se manteve no cargo até 1975, tendo sido também coordenador da disciplina.

Os objetivos do ensino da Matemática eram: atingir o mais possível os fins formativos no respeitante às funções intelectuais e à formação do carácter; fornecer um instrumento que permita agir num mundo real que exige

[1] Decreto–Lei n° 46 136, de 31 de Dezembro de 1964.
[2] Portaria n.° 21.113, de 17 de fevereiro de 1965,

cada vez mais conhecimentos matemáticos correntes; e, revelar que a Matemática é indispensável na cultura geral (Almeida, 2013). No que respeita ao programa de Matemática do CUT, apesar da legislação apontar para o programa do ciclo inicial das Escolas Técnicas, "envereda-se abertamente – não sem algumas apreensões – pelos caminhos da Matemática Moderna, sem prejuízo do ensino das matérias constantes dos programas oficiais". ("Introdução ao Curso Unificado", 1965, p. 12). Os conjuntos e suas operações são introduzidos como uma linguagem básica para a matemática. Os conteúdos a tratar na disciplina de Matemática do CUT eram então os seguintes: 1.° ano – Noções de base; As noções anteriores em termos de Geometria intuitiva no plano; Correspondência biunívoca entre conjuntos; Representação dos números inteiros; Ordenação dos números inteiros; Operações com conjuntos de um universo dado (Intersecção, reunião e diferença; Produto cartesiano de dois conjuntos); Operações com números inteiros (Adição; Subtração; Multiplicação; Divisão exata; divisão inteira (ou euclidiana); Medidas de grandezas físicas (Os comprimentos; As áreas; Os volumes e as capacidades: As massas dos corpos); Ângulos e arcos de circunferência: O conjunto das fracções. 2.° ano – Revisões e síntese das noções de base e das operações com conjuntos; Relações fundamentais entre conjuntos determinados no plano; Os triângulos; Os quadriláteros; Perímetros; Áreas; Volumes; As operações fundamentais no conjunto dos números inteiros; Potenciação (expoente natural). Raiz quadrada; Números primos. Máximo divisor comum. Mínimo múltiplo comum; O conjunto das fracções; Números complexos; Relação de proporcionalidade simples.

As indicações didáticas referiam que o monitor deveria:

> promover a adaptação do ensino às capacidades individuais e à evolução mental dos alunos; estimular no aluno a sua participação pessoal e activa na aprendizagem; tomar o concreto como ponto de partida para o abstracto e recorrer à experimenŋtação (real, figurada ou imaginada) para sugerir uma definição ou uma demonsŋtração (...) o desenvolvimento da iniciativa pessoal e do trabalho de equipa; a criação de hábitos de rigor e precisão necessários à comunicação eficaz e à clareza do próprio pensamento. (1965, pp. 83-84, negrito no original); fomentar o aparecimento de situações matematizáveis para que, a partir delas, os alunos vão tomando conhecimento das estruturas matemáticas (tal como o fazem com as estruturas do mundo real, manipulando objectos reais); promover o domínio consciente das propriedades das construções realizadas por meio de actividade analítica – oposta à actividade construtiva anterior, mas nela originada; recorrer a material didático susceptível de permitir aos alunos uma aprendizagem natural. (1966, p. 32)

É preconizada a utilização de variados materiais para apoiar o ensino, tais como, material Cuisennaire, o geoplano de Gattegno, o modelo feito com barras de "Meccano", carrinhos de brincar, os modelos clássicos de cartão e de madeira, modelos de plástico, e, filmes de Nicolet ([1]). Em jeito de conclusão, podemos dizer que as alterações na matemática escolar detetadas foram o recurso aos conjuntos como uma forma de comunicar conhecimentos matemáticos e a introdução de tópicos especificamente associados a conjuntos e suas operações. O ensino da Matemática visava estimular o desenvolvimento de uma maneira de pensar importante para a vida social e para o exercício da cidadania e a capacidade de entender a linguagem matemática usada na vida real e a capacidade de usar um modo matemático de pensar em situações pessoais e profissionais. Preconizava-se que o processo de ensino-aprendizagem fosse centrado no aluno e que fossem reconhecidos, identificados e considerados os seus conhecimentos anteriores como ponto inicial do trabalho pedagógico.

Referências

[1] Almeida, M., "Um olhar sobre o ensino da matemática, guiado por António Augusto Lopes", Dissertação de doutoramento, Faculdade de Ciências e Tecnologias da Universidade Nova de Lisboa, Lisboa, 2013.

[2] "Introdução ao Curso Unificado", *Boletim IMAVE*, Outubro–Novembro, 12-13, 1965.

[3] "Matemática, indicações didácticas de ordem geral", *Boletim IMAVE*, Outubro–Novembro, 83-85, 1965.

[4] "Matemática, indicações didácticas de ordem geral", *Boletim IMAVE*, Outubro, 32–33, 1966.

[5] Telles, I. G., *Meios Audiovisuais de Ensino*, Lisboa: Ministério da Educação Nacional, 1965.

Nobert Wiener e a cibernética

Ilda Perez da Silva
FCUL – Dep.to de Matemática
Universidade de Lisboa
e-mail: `ipsilva@fc.ul.pt`

Cibernética foi o termo utilizado em 1947 por Norbert Wiener (1894-1964) para designar o estudo de certos mecanismos de controlo e comunicação de máquinas e seres vivos que surgiu da exploração das fronteiras entre a matemática, lógica, computação e neurofisiologia. A cibernética está na origem directa de diversas áreas de investigação actual quer dentro da matemática, em teorias de controlo e informação, quer fora da matemática, em engenharia de sistemas, computação, inteligência artificial.

A história da Cibernética começa durante a 2^a Guerra Mundial, com o fim de um projecto da National Defense Research Comitee (N.D.R.C.) [1] para aumentar a eficácia de tiro da artilharia anti-aérea cuja coordenação científica fora atribuida a N. Wiener, matemático do M.I.T. com uma obra matemática já reconhecida.

Wiener atacou o problema reduzindo-o à determinação do futuro de uma série temporal controlada por feedback o que lhe permitiu usar técnicas de análise de Fourrier, que desenvolvera anteriormente, e definir uma solução óptima que podia ser calculada mecânicamente. Wiener e J. Bigelow, o engenheiro da equipe, chegaram a construir e a testar, com sucesso, um protótipo de uma máquina que poderia acoplar-se à arma, substituindo o atirador humano.

A componente teórica do projecto teve (e tem) um impacto grande em engenharias de sistemas e comunicações. Foi publicada com circulação restrita pela N.D.R.C. em 1942 e para o público em geral em 1949 [4]. Na vertente de engenharia de comunicações tinha alguma sobreposição com os trabalhos desenvolvidos independentemente, por C. Shannon também nos U.S.A. e por A. Kolmogorov, um pouco antes, na U.S.S.R.. A implementação prática do projecto não avançou.

[1] A National Science Research Comitee, criada em 1940 no seio do National Defense Council, tinha como finalidade organizar, mobilizar e financiar projectos da comunidade científica civil, com interesse para a guerra que estava a decorrer.

Com o fim do projecto, Wiener procurou explorar os seus resultados de outra forma. Contactou então o seu amigo mexicano A. Rosenblueth, cardiologista, no grupo de fisiologia da Harvard Medical School, com a ideia de aprofundar as analogias homem máquina em termos de mecanismos de feedback. O artigo [3] em que é feita uma classificação de tipos de comportamento (ser vivo ou máquina) baseada nos conceitos de propósito/intenção e de retroação (feedback) é um dos primeiros artigos de cibernética.

Surgiam também analogias homem/máquina, motivadas pela concepção dos primeiros computadores electrónicos e digitais - ENIAC e EDVAC - que estavam já em construção. John von Neumann, que integrava o projecto Manhattan (construção da bomba atómica), estava particularmente interessado nestes desenvolvimentos e na relação circuitos lógicos/redes neuronais. Esta relação fora explorada do ponto de vista da engenharia eléctrica por C. Shannon e, no âmbito da neurofisiologia, por J. McCulloch (psiquiatra) e W. Pitts (lógico), que conheciam o trabalho de A. Turing.

Wiener descreve assim o ambiente em finais de 1943 [7]: *Everywhere we met with a sympathetic hearing , and the vocabulary of the engineers soon became contaminated with the terms of the neurophysiologist and the psychologist. At this stage of the proceedings, Dr. von Neumann and myself felt it desirable to hold a joint meeting of all those interested in what we now call cybernetics, and this meeting took place in Princeton in the late winter of 1943-44.* Nessa reunião participaram [7] os médicos, J. McCulloch e R. Lorente de Nó (neurofisiologista), o especialista em computação H. Goldstine, responsável pela construção do Eniac e do Edvac, e os matemáticos J. von Newmann, N. Wiener e o mais jovem W. Pitts. Tinham sido convidados, mas não puderam estar presentes A. Rosenblueth e H. Aiken (engenheiro responsável pela construção do primeiro computador de Harvard).

Em 1946 o mesmo grupo, alargado a uma vintena de investigadores, com representantes das áreas da biologia e ciências sociais procura lançar, numa série de conferências patrocinadas pela Fundação Macy, uma nova área de investigação - a cibernética. Contudo, no pós guerra, as direções e preocupações das duas estrelas das Macy Conferences: Wiener, anti-militarista e von Newmann, activamente pró Guerra Fria divergiram rápidamente. Ambos marcaram significativamente a actividade científica e política do pós-guerra, não só nos E.U.A. como fora dos E.U.A. [2], [1], [8], [9].

É a sua obra de divulgação que tornará Wiener particularmente influente no pós-guerra. O seu primeiro livro para um público universitário alargado, *Cybernetics* [5], foi lançado em 1948, simultâneamente em França e nos

U.S.A. Nele, Wiener faz uma introdução detalhada e rigorosa às ideias e trabalhos científicos na origem da cibernética, acompanhado por reflexões pessoais sobre as consequências sociais do que chama a segunda revolução industrial - a da comunicação e controlo entre máquinas e/ou seres vivos. O livro teve um sucesso imediato: 3 reimpressões nos seis primeiros meses, mais de 21.000 cópias vendidas [1].

Mais de setenta anos após a sua primeira edição penso que continua a ser interessante reler, ou ler pela primeira vez, e sobretudo comentar (artigo em preparação), a extraordináriamente bem escrita introdução a *Cybernetics* [5], e o livro mais popular *The human use of human beings* [6] publicado pela primeira vez em 1950.

Referências

[1] D. Mindell , J. Segal, S. Gerovitch, Cybernetics and Information Theory in the United State, France and the Soviet Union, in *Science and Ideology: a comparative History*, Mark Walker (dir.), Routledge, London 2003, pp. 66–95.

[2] S. Heims, *John von Neumann and Norbert Wiener, from mathematics to the technologies of life and death*, M.I.T. Press, 1980.

[3] A. Rosenblueth, N. Wiener, J.Bigelow, Behavior, Purpose and Teleology, *Philosophy of Science*, Vol.10, No.1 (1943), pp. 18–24.

[4] N. Wiener, *Extrapolation, interpolation, and smoothing of stationary time series: with engineering applications*, Technology Press M.I.T., 1949.

[5] N. Wiener, *Cybernetics*, M.I.T. Press, 1948, 1961.

[6] N. Wiener, *The human use of human beings, Cybernetics and Society*, Houghton Mifflin Hartcourt Publishing Conpany 1950, 1954.

[7] N. Wiener, *I am a mathematician*, M.I.T. Press, 196.

[8] *Bulletin of the American Mathematical Society* , 64, no 3, part 2 (1958), special number dedicated to J. von Neumann.

[9] *Bulletin of the American Mathematical Society* , 72, no 1, part 2 (1966), special number dedicated to N. Wiener.

Os 40 Anos do Teorema das Quatro Cores

Teresa Sousa
Escola Naval e Centro de Investigação Naval
Centro de Matemática e Aplicações da UNL
e-mail: `tmjs@fct.unl.pt`

O Teorema das Quatro Cores é claramente um dos problemas matemáticos mais simples de enunciar e compreender. Diz o seguinte: *Serão suficientes quatro cores para pintar um mapa plano, de modo a que países vizinhos não partilhem a mesma cor? (Por países vizinhos, estamos a considerar países que têm na fronteira pelo menos uma linha em comum.).* Por mais simples que possa parecer, levou mais de um século a ser demonstrado e celebrou no ano de 2016 os seus primeiros 40 anos de vida.

O problema surgiu pela primeira vez em 1852, quando Augustus De Morgan, professor do University College em Londres, recebia de um aluno, Frederick Guthrie, o enunciado do Problema das Quatro Cores. O autor da questão era Francis Guthrie, irmão de Frederick, a quem o problema ocorrera quando coloria um mapa com os condados de Inglaterra. Francis estava interessado em saber se este facto seria verdadeiro para todos os mapas e se poderia ser provado matematicamente. Augustus De Morgan, impressionado com a conjectura e não tendo uma resposta para o problema, apresentou-a ao matemático Sir William Hamilton, por carta, a 23 de outubro de 1852, marcando oficialmente o nascimento do Problema das Quatro Cores. No entanto, o problema não capta a atenção de Hamilton que lhe responde "I am not going to attempt your quaternion of colour very soon". O problema permanece esquecido até que Arthur Cayley o publica, em 1878, nos *Proceedings of the London Mathematical Society* num artigo intitulado *On the colouring of maps* alertando, deste modo, a comunidade matemática para o Problema das Quatro Cores.

Em 1879, Alfred Kempe publica, no *American Journal of Mathematics*, uma demonstração do Teorema das Quatro Cores e, em 1880, Peter Tait publica uma demonstração alternativa. Estava, assim, aparentemente estabelecido o Teorema das Quatro Cores. Infelizmente, em 1890 Percy Heawood prova que a demonstração de Kempe tinha um erro e usa as ideias desenvolvidas por Kempe para demonstrar o Teorema das Cinco Cores, ficando provado que *Todo o mapa plano admite uma coloração usando no máximo cinco cores.* Na realidade, e sem surpresa, o Teorema das Cinco

Cores é bem mais fácil de demonstrar do que o Teorema das Quatro Cores. Restava, todavia, a demonstração de Tait. Mas, em 1891, Julius Petersen mostra que esta também está errada e, deste modo, o Teorema das Quatro Cores regressa ao estatuto de Problema das Quatro Cores, pela segunda vez na história.

Durante o século XX fazem-se progressos para tentar provar o teorema ou para encontrar um contra exemplo, ou seja, um mapa que requeira 5 ou mais cores. As boas notícias surgem em 1976, pelo punho de Kenneth Appel e Wolfgang Haken da *University of Illinois* que, com a preciosa ajuda de um IBM 360, transformaram o já famoso Problema das Quatro Cores no, não menos famoso, Teorema das Quatro Cores, apresentando à comunidade matemática uma demonstração que envolvia mais de 1200 horas de computação. Neste contexto, o Problema das Quatro Cores ascende novamente ao estatuto de Teorema para não mais o perder. Estava, assim, matematicamente provada a questão colocada por Francis Guthrie em 1852.

A demonstração de Appel e Haken faz-se por redução ao absurdo, ou seja, se existe um mapa que precise de 5 ou mais cores, então algo impossível terá que acontecer. A ideia da demonstração é a seguinte: Consideremos um contra exemplo mínimo, ou seja, um mapa que precise de 5 cores e tenha o menor número de regiões. Em primeiro lugar mostra-se que o mapa em causa tem que conter pelo menos uma das 1476 configurações inevitáveis. De seguida prova-se que cada uma das 1476 configurações é redutível, ou seja, pode ser substituída por algo mais pequeno, sem afetar o número de cores necessário. Esta parte da demonstração foi realizada computacionalmente, já que, para cada caso, o computador teve que realizar mais de 500 mil operações lógicas. Conclui-se, então, que o mapa em causa admite uma coloração com 4 cores, o que é um absurdo. Assim, 4 cores são suficientes para colorir qualquer mapa.

A demonstração de Apple e Haken era, de facto, colossal. Valerá a pena citar a seguinte descrição dos próprios sobre a demonstração do Teorema das Quatro Cores. "This leaves de reader to face 50 pages containing text and diagrams, 85 pages filled with almost 2500 additional diagrams, and 400 microfiche pages that contain further diagrams and thousands of individual verifications of claims made in the 24 lemmas in the main sections of text. In addition, the reader is told that certain facts have been verified with the use of about twelve hundred hours of computer time and would be extremely time-consuming to verify by hand. The papers are somewhat intimidating..." Muitos matemáticos não reconheceram a demonstração como válida, uma vez que envolvia muitas horas de computação, praticamente impossíveis de verificar. Porém, apesar de todo o cepticismo, a demonstração foi efectivamente comemorada com sendo válida. Para celebrar o feito, o Departamento de Matemática da *University of Illinois* adoptou um carimbo postal com o slogan *Four Colors Suffice*.

Em 1997, Neil Robertson, Daniel Sandres, Paul Seymour e Robin Thomas simplificaram a demonstração de Appel e Haken, reduzindo o conjunto de configurações inevitáveis para 633 e provando que cada uma das 633 configurações é redutível, usando um algoritmo mais eficiente do que o algoritmo original de Appel e Haken.

Contudo, algo ainda estava em falta, visto que ambas as demonstrações combinavam argumentos escritos que poderiam ser verificados por humanos, com códigos de algoritmos de difícil, senão mesmo impossível, verificação manual.

Em 2005, Georges Gonthier publica uma demonstração formal do Teorema das Quatro Cores, consolidando de forma definitiva o estatuto de Teorema, alcançado em 1976. Citando Georges Gonthier sobre a sua demonstração: "The approach that proved successful for this proof was to turn almost every mathematical concept into a data structure or a program, thereby converting the entire enterprise into one of program verification. [...] Perhaps this is the most promising aspect of formal proof: it is not merely a method to make absolutely sure we have not made a mistake in a proof, but also a tool that shows us and compels us to understand why a proof works."

Referências

[1] A. S. Calude. "The Journey of the Four Colour Theorem Through Time", *The New Zealand Mathematics Magazine*, Vol. 38, No. 3 (2001), pp 27-35.

[2] G. Gonthier. "Formal Proof – The Four Color Theorem", *Notices of the AMS*, Vol. 55, No. 11 (2008), pp. 1382-1393.

[3] N. Robertson, D. P. Sanders, P. Seymour, and R. Thomas. "A new proof of the Four-Colour Theorem", *Electronic Research Announcements of the American Mathematical Society*, Vol. 2, No. 1 (1996), pp. 17-25.

[4] R. A. Wilson. *Graphs, Coulourings and the Four-Colour Theorem*, Oxford University Press, 2002.

30º Encontro do Seminário Nacional de História da Matemática

Academia Militar
Amadora
30 de Junho e 1 de Julho de 2017

30º Encontro do Seminário Nacional de História da Matemática

Academia Militar
Amadora
30 de Junho e 1 de Julho de 2017

Teve lugar, no Auditório Marquês Sá da Bandeira, Academia Militar, Campus da Amadora o 30º Encontro do SNHM. O tema dominante neste Encontro foi "Os Militares e a Matemática", tendo 14 das 19 comunicações versado sobre ele.

Como conferencistas convidados tivemos Liliane Alfonsi, da Universidade de Paris-Sud, França, e do Laboratório ESTGHDSO, e Dulcyene Ribeiro da Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Brasil. A primeira falou-nos da Guerra dos Sete Anos (1756-1763), travada entre duas coligações de países, lideradas pela França e pela Inglaterra, com consequências desastrosas para a França, que perdeu a maior parte do seu império colonial e ficou com a marinha destruída, e as consequências que daí derivaram para as escolas militares francesas. Foi realçado o papel que Etienne Bézout teve na reforma dos estudos matemáticos nas escolas militares. A segunda evidenciou aspectos da formação dos engenheiros militares na primeira metade do século XVIII em Portugal e no Brasil, com especial destaque para a vida e obra de Azevedo Fortes.

Dentro do tema "Os militares e a Matemática", Marquês de Sousa referiu a função específica da música militar através dos tempos, com especial incidência sobre a utilização dos tambores na infantaria de linha e dos clarins na cavalaria; Pereira da Silva falou da matemática na evolução da Balística; César Reis explicitou vários métodos e processos de cálculo que, ao longo dos tempos, têm sido aplicados no âmbito do tiro de artilharia, salientando o modo como a alteração das táticas influenciou a evolução técnica deste; João Rocha deu uma panorâmica da evolução do ensino superior militar em Portugal no que diz respeito à sua componente matemática, tendo em especial analisado os começos desse ensino com a Academia Real de Marinha e a Academia Real de Fortificação, Artilharia e Desenho em fins do século XVIII. Filipe Papança referiu alguns temas tratados no manual *Lições de Balística*, escrito nos anos 40 do século XX pelo capitão de artilharia Luís António Vicente, professor da Escola Central de Sargentos; Helena Sousa Melo e Maria do Carmo Martins analisaram a Aula de Matemática na Academia Militar da Ilha Terceira; Luis Saraiva deu uma breve panorâmica sobre a vida e obra de três matemáticos militares: José Anastácio da Cunha, Francisco Garção Stockler e Rodolfo Guimarães; por sua vez Francisco Domingues e Ana Luísa Correia falaram sobre outros três matemáticos militares: Luiz Motta Pegado, António dos Santos Lucas e Victor Hugo de Lemos; Rui Teodoro abordou a relação entre a matemática e os militares em campos como a Geodesia, a Cartografia e a Topografia; Paulo Balsinhas analisou diversos métodos que ao longo do tempo têm sido utilizados para a proteção de informação, evidenciando o aumento da sua complexidade, culminando desde os anos 70 do século XX com a utilização do conceito de criptografia assimétrica. Também ligado a este assunto, Carlos Albuquerque expôs um caso de utilização de cifras para esconder informação numa conspiração contra a ditadura em 1932; e Miguel Martins analisou a notável Memória de Daniel Augusto da Silva (outro matemático militar), *Propriedades Geraes e Resolução Directa das Congruencias Binomias*, apresentada na 1ª Classe da Academia Real das Sciencias de Lisboa, na sessão do dia 24 de Março de 1852.

Noutros temas, João Tomás do Amaral analisou a acção de Bento de Jesus Caraça no Cálculo Actuarial; Reinhard Kahle falou sobre a vida e obra de Pasul Bernays; Carlota Simões perspectivou o modo como foram vistos e interpretados vários cometas nos séculos XVI e XVII; Teresa de Sousa deu uma visão de conjunto sobre 280 anos da teoria de grafos, começando a sua exposição com a solução apresentada por Leonard Euler para o problema das Pontes de Könisberg; finalmente Ana Patrícia Martins analisou a revista *Seguros e Finanças*, uma publicação pioneira na divulgação e promoção do seguro Vida, e que foi publicada em duas séries, de 1906 a 1911 e depois em 1926/27, salientando o papel do seu fundador, Fernando Brederode.

Como em anos anteriores, espera-se que a publicação destes resumos, quase todos alargados, possa ser útil aos seus leitores, e que os possa motivar a uma futura participação num dos Encontros do Seminário Nacional de História da Matemática, quer como conferencistas quer como participantes sem conferência. O Seminário precisa de todos para cumprir a sua dupla função de fórum da investigação feita em Portugal em História da Matemática e de divulgador de temas da História da Matemática, nacional e internacional.

Luís Saraiva
Coordenador Nacional
do Seminário Nacional de História da Matemática

Programa

30 de Junho

09.00 Entrega de pastas
09.15 Abertura do Encontro. Mesa constituída pelo Coordenador Geral do SNHM, representante da SPM, representante da Academia Militar, coordenador da Comissão local
09.30 Liliane Alfonsi (Université de Paris-Sud, France, e Laboratoire ESTGHDSO) – *The seven years' war (1756-1763) and its consequences for French Military Schools*

10.30 *Intervalo para café*
11.00 Pedro Marquês de Sousa (Academia Militar, Instituto Universitário Militar) – *Música com Matemática na função operacional da música militar*
11.30 João Paulo Pereira da Silva (Academia Militar) – *A Matemática na Evolução da Balística*
12.00 César Reis (Regimento de Apoio Militar de Emergência - Abrantes) – *Conceitos das ciências exatas e naturais essenciais para o Tiro de Artilharia de Campanha e sua evolução*

12.30 Almoço

14.00 João Rocha (Academia Militar) – *A Matemática e a Criação do Ensino Superior militar em Portugal: 225 anos do Ensino Superior Militar em Portugal*
15.00 Filipe Papança (Academia Militar) *As lições de Balística na Escola Central de Sargentos na década de 1940*
15.30 *Intervalo para café*
16.00 Helena Sousa Melo e Maria do Carmo Martins (Departamento de Matemática e Estatística, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade dos Açores) – *A Aula de Matemática e o aparecimento da Academia Militar da Ilha Terceira*
16.30 Luis Saraiva (Universidade de Lisboa/CIUHCT/CMAFCIO) – *Três matemáticos militares: José Anastácio da Cunha (1744-1787), Garção Stockler (1759-1829) e Rodolfo Guimaraes (1866-1918)*
17.00 Francisco Domingues (Academia Militar) e Ana Luísa Correia (Academia Militar e CEAFEL) – *Três militares, três matemáticos a conhecer: Luiz Motta Pegado (1831-1903), António dos Santos Lucas (1866-1939) e Victor Hugo de Lemos (1894-1959)*
17.45 Saída do Aquartelamento da Amadora
18.30 Visita guiada ao Palácio da Bemposta
20.00 Jantar da conferência

Programa

1 de Julho

09.00 Dulcyene Ribeiro (Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Brasil) – *Formação e carreira dos engenheiros militares no século XVIII – Azevedo Fortes e o Ensino da Matemática*

10.00 Rui Teodoro (Centro de Informação Geoespacial do Exército) – *A Matemática nas Ciências Geoespaciais*

10.30 *Intervalo para café*

11.00 Paulo Balsinhas (Gabinete Nacional de Segurança) – *Identidade digital*

11.30 João Tomas do Amaral (Faculdade de Educação da Univ. de S. Paulo, Brasil) – *Bento de Jesus Caraça e a sua atuação na Atuaria*

12.00 Reinhard Kahle (CMA e DM da FCT, Universidade Nova de Lisboa) – *Paul Bernays (1888-1977)*

12.30 Almoço

14.00 Carlota Simões (C. Física, Museu da Ciência e Dep. de Matemática da Faculdade de Ciências de Coimbra) – *Alguns cometas dos séculos XVI e XVII*

14.30 Teresa de Sousa (Escola Naval) – *280 anos da História da Teoria de Grafos*

15.00 Carlos Albuquerque (Faculdade de Ciências da U. Lisboa) – *Cifras em correspondência numa conspiração contra a ditadura em 1932*

15:30 *Intervalo para café*

16.00 Miguel Martins (Dep. Matemática da Faculdade de Ciências da U. Lisboa) – *Daniel Augusto da Silva e as Congruências Binomiais*

16.30 Ana Patrícia Martins (Escola Superior de Educação de Viseu/ CIUHCT) – *Seguros e Finanças – revista pioneira na divulgação e promoção do seguro Vida*

17.00 Encerramento do Encontro

The Seven Years' War (1756-1763) and its consequences for Military French Schools

Liliane Alfonsi
Université Paris Sud
France
e-mail: liliane.alfonsi@orange.fr

The Seven Years' War took place from 1756 to 1763 between two alliances, Austria, France, Russia, Spain and Sweden on one hand, England, Portugal and Prussia on the other Hand. Several of these countries having colonies in the other continents (Africa, North and South America, Asia), battles were all around the world, on the earth and on the sea. Thus this war has been one of the most important wars, because of its area and because of its consequences. The war has had a catastrophic economic balance sheet for all the countries and it ended with the defeat of the first alliance and, for France, with an almost complete loss of its colonies.

On February 10th 1763, France signs the Treaty of Paris which ends the Seven Years' War and gives to England all the French territories of Asia and North America, Senegal and all the West Indies except Santo Domingo. War ends with a complete destruction of the French Navy in 1759 and a disastrous capitulation. It is mainly the French Navy which has made the proof of its inferiority in front of the English Navy. Not only the French Navy was unable to protect the troopships for America and Asia, but also it was unable to protect the French coasts and the English Navy was able to occupy some French ports repeatedly. The French land forces also lost many battles in front of the Prussians, even if they won some others.

After the peace treaty, there is urgency to reconstruct the army and most of all, the entire Navy and the schools of its officers. Many battles, mainly naval battles, were lost because of the incompetence and indiscipline of officers, and thus recruitment and formation of officers must be questioned.

1 The situation of the French Military Schools, before the war

1.1 The preliminary of Nobility to enter the schools

In the schools of Artillery and Navy, the rule was, that to enter an officers' school, the young man had to be noble for four generations in the paternal line. That is to say that the young man, his father, his grand-father and his great-grand-father, all of them had to be noble.

On the contrary, in the school of Royal engineers, created in 1748, this rule did not exist. Nobility was not mandatory.

In the Navy, there were 3 schools, in Brest, Rochefort and Toulon, created in 1686, and the maritime nobility used to send them his boys. Pupils were almost only the children of this maritime nobility. Thus, the rule of Nobility was strictly applied.

In Artillery, first, every regiment had its own school, and then they were gathered in a single school, in 1756. To enter the school, the rule of Nobility existed but was not strictly applied.

1.2 The mathematical and scientific level

In the Navy, there was no examination, neither for entrance nor for departure or for promotion from year to year; promotion was only by seniority or by influence. There was no mathematical textbook. Each of the naval officers' schools had to manage with its own teacher, often with a light and low level, and powerless in front of the nobles' influence and pride. We can find in the archives of Navy, many reports written by officers of the schools, questioning the knowledge of theory and valuing only the practice.

In the schools of Royal engineers and of Artillery, the situation was not at all the same. The school of royal engineers had a very hard entry examination, because of the lack of posts, since its creation in 1748. After that, there were examinations to pass from a year to another one. The examinations are made by an academician and mathematician, Camus (1699-1768), and the course was written by him and not by one of the teachers of the school. His course, wrote in 1748, contained only arithmetic, geometry and statics. There were no algebra, no differential and integral calculus, neither dynamics nor hydraulics. We have to notice that Camus was not in charge of the school, he was not the head of training for the school. He was only the examiner, who came only one time by year, to judge the students' level.

The Artillery school, created in 1756, had, the same course, the same examinations, and the same examiner Camus, which, also, was not the head of training for this school.

In the schools of engineers and Artillery the level was, by far, better than the level of the Navy. But, still, there were in one side, prevention against theory and in the other side, on the contrary, a criticism of the content of the course, judged as insufficient. We can find in the archives many reports to show these two points. For example, against the lacks of Camus' course, a student wrote: «I must say that after working hard on the four volumes of Camus' course, I had no idea, either about algebraic equation, or about parabola, and I had never read that bullets describe this curve. I was incapable to find where a cannon-ball would fall.»

2 Consequences of the war

2.1 To question the nobility as preliminary to be officer

As we know, many naval battles had been lost because of the incompetence and indiscipline of officers. And many people in the environment of the Navy thought that these causes were due in part, to the exigence of nobility for to be an officer. This is a quotation, taken from a report, among many, sent to the minister of Navy, after the war in 1763:

«French Navy is in the worst possible situation, since it was assumed that nobility is sufficient for to be an officer of the Navy, even without knowledge and experience. This prejudice has excluded and closed the door to true merit [...] and it is there the real cause of our troubles and defeats. If Duquesne, Jean Bart et Duguay-Trouin were prodigies, they were prodigies also because they became famous, in spite of this jealousy of noblemen which tried to make them fail because they were commoners. [...] By rank-order you put an unable man before a talented and deserving man».

In front of all these reports and of the defeats, Choiseul, minister of Navy, wants, at first, to open the schools of officers to commoners, but he gives up because of the disorders caused by the maritime nobility and its allies close to the king.

In Artillery, instead, the situation was less tense and Gribeauval, who was General Controller of the armies, is able to change the rule, with Choiseul's approbation. In 1763, Gribeauval writes to Choiseul: « It is necessary to reduce to few things the rights of seniority, to annihilate those of nobility and protection, to promote superior talents and to introduce them to command. » And with the approbation of the minister, Gribeauval, in the reform which he sets up in 1765, books half of lieutenant's posts to sergeants (non-noble persons) who had received mathematics courses.

2.2 To raise the mathematical and scientific level

The most important change is for the navy. In 1764, Choiseul makes new rules. Taking example from Artillery and Royal engineers, he appoints a mathematician well known for his researches in algebra, and already academician despite his youth (33 years old), Etienne Bézout, for to be responsible, head of training and examiner of the schools of the Navy. Bézout writes a course of a very high level from 1764 to 1769, which contains arithmetic, geometry, algebra, differential and integral calculus, statics, dynamics, hydraulics, and a treaty of navigation, therefore with many more subjects than in any course at his time, and, among another, than in Camus' course which only contains, arithmetic, geometry and statics. Furthermore, Choiseul and Bézout made mandatory the examinations, for entrance in the schools, departure and for promotion from year to year. Thus, in 1764, the schools of the Navy had the same rules as the other schools (Artillery and royal engineers), but with a course much more complete than them.

In 1768, Camus dies. Then, Bézout becomes head of training and examiner for Artillery, while keeping his post for the Navy. And at the same time, Bossut, who was also mathematician and academician, becomes the same for Royal engineers, that is examiner and head of training. The Bézout's course for the navy has a great success and is a best seller in France and, a few years later, around the world, even in Portugal. So the schools of artillery and royal engineers embrace his course in 1768. Artillery keeps it definitively, while the school of royal engineers embraces in 1775 the course of Bossut.

3 A new conception of mathematics courses

Why the new course (1764 for Navy and 1768 for Artillery and Royal engineers), the Bézout's, is improving the level of military schools? Not only by a great increase of the number of subjects but also by his new conception. Bézout puts in his textbooks not only exercises and already spread knowledge, but also his own researches in algebra, about equations and elimination, very new results of other mathematicians, most of all d'Alembert. He uses differential and integral calculus to explain well known points of dynamics and hydraulics and this was new in a textbook. He uses also calculus to search for new formulae, because dynamics and hydraulics were, at the time, subjects not well known where many points were still being searched, and he makes experiments for to verify, change or work out a theory. His course is not only the book of a teacher but also the book of a researcher and this makes a great difference for the level.

Following the Bézout's example, Bossut, the responsible and examiner of the royal engineers, has the same approach, when he writes a course for the Royal engineers in 1775. He obtains 6000 pounds from Choiseul to do hydrodynamics experiences and then to write his "Traité élémentaire d'hydrodynamique, ouvrage dans lequel la théorie et l'expérience s'éclairent ou se suppléent mutuellement" (1775) (Elementary treaty of hydrodynamics, work in which the theory and the experience get clearer or supply mutually) for his students.

In conclusion of this article, we can give the consequences of the seven years' war for the French military schools. First, the war and the many defeats of the French armies, essentially of the French Navy, allowed people to question and to challenge the necessity of to be noble for to be an officer in Navy or Artillery. In the Navy, this idea have lost in a first time, but won temporarily in 1774, with a new change into the Navy's schools. In Artillery this idea won for about 6 years. But this is very important, because that it is one of the first times that nobility was challenged at that time. And we remind that the French Revolution was only 25 years later. Another consequence is a very high importance, unprecedented, given to mathematics and to science by a new course which contains all parts of pure and applied mathematics, arithmetic, geometry, algebra, differential and integral calculus, statics, dynamics and hydraulics, and also by the fact that, because of this amount of mathematical subjects, mathematics is almost the only subject taught in the schools.

Examinations have become mandatory in each military school, and the examiner is for each school a mathematician and an academician, well known for his works. It is also the head of training of the school, even if he lives in Paris: He makes the planning, the schedule (between 3 and 5 hours of mathematics by day) and chooses the teachers. This point gives even more weight to mathematics, because it is a mathematician who leads the school. Furthermore this academician is a researcher who writes his own researches in his course and who makes experiences, to verify, to change or to get up a theory for his textbooks, and he has the approbation and the financial support of the minister. This results that, in each school the best students are directed to research.

All these consequences of the seven years' war, contribute to a better understanding of the creation of the military "Ecole Polytechnique" in 1794 (ten years after Bézout' s death) the most famous school for French officers and engineers, which is also one of the two best schools for the mathematical and physical research in France. More generally, they also explain the French particularity that is the "grandes écoles" of engineers often take the best students in mathematics and are in competition with University for the research.

Bibliography

[**2011a**] Liliane ALFONSI, *Etienne Bézout (1730-1783), mathématicien des Lumières*, L'Harmattan, Paris, 2011.

[**2011b**] Liliane ALFONSI, L'enseignement scientifique et technique au XVIIIe siècle, dans les écoles des Gardes de la Marine: le rôle essentiel d'Étienne Bézout (1730–1783), in *Espaces de l'enseignement scientifique et technique: Acteurs, savoirs, institutions, XVIIe-XXe siècles*, dir. R. D'Enfert, V. Fonteneau, Hermann, Paris, 2011, chap. 2, p. 31–43.

[**2012**] Liliane ALFONSI, Un «savant» du siècle des Lumières: Étienne Bézout (1730-1783), mathématicien, académicien et enseignant, in *Les uns et les autres... Biographies et prosopographies en histoire des sciences*, dir. L. Rollet, P. Nabonnand, Presses Universitaires de Nancy, 2012, chap. 2, p. 29–48.

[**2015**] Liliane ALFONSI and Christian GUILBAUD, La guerre de Sept Ans (1756-1763) et ses conséquences pour les écoles militaires françaises, in *Sciences mathématiques 1750-1850, Continuité et ruptures*, dir. C. Gilain, A. Guilbaud, CNRS Editions, 2015, chap. I, p. 127–155.

[**2016**] Liliane ALFONSI, Une expérience de remise en question du critère de noblesse: l'Ecole Royale de Marine du Havre (1773-1775), *Annales Historiques de la Révolution Française*, N° 384, April-June 2016, pp. 25–55.

Música com Matemática na Função Operacional da Música Militar

Pedro Marquês de Sousa
Academia Militar

A música, através do seu carácter funcional e da sua dimensão artística, está ligada à atividade militar desde a antiguidade, mas foi na idade moderna que a "arte da guerra" passou a utilizar a "arte dos sons" para, além do efeito psicológico, assumir uma função verdadeiramente operacional na coordenação dos movimentos, na execução de ações em combate e para regular a rotina diária nos quartéis.

O nosso trabalho aborda a presença da matemática na música militar de carácter funcional, mostrando como os ritmos e as sonoridades serviam para a divisão do tempo, segundo padrões regulares, refletindo assim a presença da matemática usada com uma função verdadeiramente operacional, na coordenação dos movimentos e na execução de ações em combate. A função operacional da música, implicava a utilização de estruturas rítmicas adequadas à função de transmitir sinais por meio de sons, para transmitir ordens e indicar ações táticas através de trechos musicais (toques militares) cuja natureza refletia sequências binárias, ternárias, quaternárias ou estruturas rítmicas mais complexas, com padrões rítmicos e harmónicos adequados a diversas funções específicas da atividade militar.

Neste âmbito podemos observar também a matemática como a ciência das regularidades, que servia para regular os passos dos militares da infantaria, para marcar cadências das ações em combate e estabelecer os intervalos dos sons das melodias dos toques que serviam para transmitir ordens com o carácter adequado à atividade militar.

A função da música militar

Além do efeito psicológico e da influência da música na moral das tropas, para motivar e preparar os militares para a atividade militar, a música era usada para transmitir ordens, regular ações táticas em combate e regular as tarefas da rotina diária dos militares em tempo de paz. Este caráter funcional da música em contexto militar, foi particularmente relevante durante o século XVIII e no século XIX, até às profundas transformações registadas na arte da guerra, com as guerras industriais, na mudança para o século XX.

Suplemento do Boletim da SPM 76, Dezembro 2018, pp. 77–80

Aquilo que designamos de função operacional da música militar, enquadra-se no conceito apresentado na obra de Elie Siegmeister (1909–1991) sobre as funções sociais da música, na qual o autor destaca que "O conceito de música como puro entretimento, tão predominante na nossa sociedade, desempenhava apenas um papel secundaríssimo em muitas outras sociedades. [. . .] O facto da música desempenhar um serviço objectivo não exclui a sua qualidade aliciante; pelo contrário, o uso funcional pode torná-la mais aliciante. [. . .] como a música como auxiliar do trabalho"[1]. O economista e sociólogo alemão Karl Bucher (1847–1930), foi autor da obra "Trabalho e Ritmo"[2] que foi pioneira no estudo da utilização da música como auxiliar do trabalho e como influenciava a produtividade do trabalho das pessoas, ao regular o ritmo e motivar para a realização de tarefas. Como poderemos verificar através dos toques apresentados neste trabalho, o ritmo bem marcado com acentuações fortes, e as melodias simples e curtas em tonalidade maior, produziam o efeito que designamos de "marcial", vocacionado para estimular a acção dos militares. Outra função da música referida por Elie Siegmeister, é despertar e intensificar emoções colectivas em cerimónias ou actividades de grupo[3], cujo efeito também podemos reconhecer em diversos toques do cerimonial militar, desde a "marcha de continência" ao toque de "homenagem aos mortos".

A matemática serve de base à divisão do tempo e assim dos esquemas rítmicos usados pela música militar, desde a função de regular a passada da infantaria em combate até aos sinais dados para coordenar a ação da cavalaria. A representação dos toques militares, sob a forma da notação musical, usa a matemática na divisão do tempo segundo a representação gráfica normalizada.

Os Tambores na Infantaria de linha e Clarins na Cavalaria

As tácticas militares passaram a utilizar a música como meio de transmissão de ordens e de coordenação rítmica dos movimentos e acções tácticas. Os toques com esta função operacional surgem no inicio no século XVII em

[1] Elie Siegmeister, *A Música e a Sociedade*, tradução de Fernando Lopes Graça, Lisboa, Biblioteca Cosmos, 1945, pp. 24–26.

[2] A obra original tinha o titulo *Arbeit und Rhythmus* e teve uma primeira edição em Leipzig (1896) e uma segunda edição em 1899 mais completa.

[3] *A Música e a Sociedade*, Tradução de Fernando Lopes Graça, Lisboa, Ed. Cosmos, 1945.

França e na Itália[4] com os toques de clarim na cavalaria e com toques de tambor na Infantaria de linha, e em Portugal a obra de João Brito de Lemos de 1631[5], também refere as funções dos tambores para mandar "dar carga e disparar" tal como acontecia na célebre ordenança militar do Ministro da Guerra francês, Michel Tellier, Marquês de Louvois (1641–1691)[6].

Durante o século XVIII, as célebres escolas militares francesa e prussiana adoptaram, na Infantaria, a táctica da ordem linear usando a marcha cadenciada pelos tambores para coordenar a aproximação e os disparos das sucessivas fileiras de Infantaria, enquanto a Cavalaria actuava nos flancos da Infantaria à ordem dos toques de guerra das suas trombetas[7].

A táctica da Infantaria de linha recorria à música para assegurar a difícil tarefa de coordenar as manobras e as acções das extensas fileiras de atiradores, que tinham que fazer a marcha de aproximação e os sucessivos disparos, de forma coordenada ao som da cadência do tambor, que também traduzia as ordens verbais (para fazer fogo, atacar, retirar etc.). Mas foi no inicio do século XIX, com as novas tácticas da infantaria ligeira, de actuação mais flexível e maior capacidade de manobra, que os sinais sonoros em combate assumiram maior importância, para que as ordens dos comandantes das unidades de infantaria ligeira fossem reproduzidas através de sinais pré estabelecidos, interpretados pelos Corneteiros[8], que eram inseparáveis dos seus comandantes. Os ruídos dos disparos da artilharia e das armas ligeiras, no ambiente confuso do combate, não permitiam que as ordens verbais fossem escutadas pelos soldados,

[4]Na Itália, os toques de ordenança de 1638 da autoria de Girolamo Fantini da Spoleti (Clarim Mor do Duque da Toscana, Ferdinando II) e na França os toques regulamentados em 1636 por P. Mersenne, no reinado de Louis XIII, são as mais antigas referências conhecidas, tal como apresenta G.Kastner, *Manuel General de Musique Militaire*, Paris,1848, p. 384.

[5]*Abecedário Militar*, Imp de Pedro Graesbuck, Lisboa,1631.

[6]Tomo XXII Ordennances Militaires de la Bibliothéque du Dépot de La Guerre, Années 1668-1672 in *Manuel General de La Musique Militaire*, Paris, 1848, p. 393.

[7]A ordenança estabelecida pelo Marechal de Saxe em 1754: Ordennances Militaires, 1754–56, a Ordenança Real de 1 Junho 1766 (Signaux pour la Cavalerie française. (Louis XV) App12-13 de 1791 e a regulamentação "L'Instruccions pour les Tambours", App 14 "Batteries d'Ordenance avec les Airs de hautbois ou fifres"(Louis XVI) in G.Kastner, *Manuel General de Musique Militaire*, Paris, 1848.

[8]Na Infantaria passaram a existir os Corneteiros e na Cavalaria e na Artilharia os Clarins, segundo um critério que perdurou em Portugal até ao final do século XX (1995).

pelo que os sinais sonoros dos Corneteiros (na Infantaria) e dos Clarins (na Cavalaria) eram necessários para transmitirem as ordens dos comandantes.

Entre as obras de referência que regulamentavam os toques militares, devemos referir o manual elaborado pelo Coronel David Dundas (1735–1820)[9] do exército britânico, intitulado "Principles of Military Movements" de 1788 e que foi adoptado oficialmente em 1798 como regulamento: "Rules and Regulations for the Formation, Field Exercices and Movements of His Majesty's Forces" e que definia diversos aspectos ligados à música militar, como as seguintes três cadências de marcha para a infantaria:

- Passo ordinário "Ordinary March": 75 ppm (passos por minuto), que representava 4 Km/hora
- Passo "Quick March": 108 ppm
- Passo "Quickest" ou "Wheeling Step": 120 ppm (usada para manobrar o dispositivo)

Tambor de Infantaria de linha do século XIX

O tambor era usado pela Infantaria de linha, o clarim pela Cavalaria e a Corneta (Bugle) passou a ser usada pela Infantaria ligeira, que pela sua forma de actuação mais flexível, não precisava de tambor mas sim de uma forma de transmissão de ordens, semelhante aquela que já era usada também pela Cavalaria. No manual de 1806 do Capitão Cooper "Thomas Cooper's Light Infantry Manual" surge a curiosa indicação "A good bugle may be heard at the distance of three miles (4,8 Km)"[10] que nos mostra a importância operacional desta função e nele também podemos verificar que alguns dos toques (sinais) eram comuns entre os diversos exércitos, tal como se verifica em Portugal com a regulamentação de Beresford em 1810 que reflecte a influência dos toques ingleses regulamentados em 1806 no referido manual da autoria de Thomas H.Cooper: "A Practical Guide for the Light Infantry Officer".

[9] O General David Dundas (1735-1820), oriundo da arma de Artilharia, participou na Guerra dos sete anos e já depois da guerra participou em exercícios com os exércitos da Prússia, Áustria e França, pelo que este seu trabalho tinha uma forte influência do Manual da Prússia de 1784 "Taktik der Infaterie" de Friedrich Christoph von Saldern.

[10] Thomas Henry Cooper, *A Practical Guide for the Light Infantry Officer*, London, R. Wilks, 1806, p. 98.

A Matemática na evolução da Balística

João Paulo Pereira da Silva
Academia Militar

Este trabalho descreve de forma resumida a evolução da Balística ao longo dos tempos até aos dias de hoje e a importância que a Matemática teve e continua a ter na sua evolução.

Sendo a Balística uma ciência que se ocupa do estudo dos fenómenos relacionados com a partida e a chegada de projéteis, bem como das respetivas causas, é por assim dizer um campo especial da aplicação mecânica e pode ser subdividida em 3 partes distintas: A Balística Interna, Externa e Terminal.

A Balística Interna estuda todos os fenómenos físicos e químicos no interior do tubo, relacionados com a deflagração de pólvoras e deslocamento da munição no seu interior, enquanto a Balística Externa estuda o movimento de projéteis na atmosfera, e por fim a Balística Terminal estuda o efeito e ação desses mesmos projéteis no alvo. Poderemos assim dizer que todos estes fenómenos, sejam eles no interior dos tubos ou fora deles e nos alvos, são estudados de uma forma matemática, recorrendo a expressões matemáticas bastante complexas e posteriormente validadas experimentalmente em carreiras de tiro.

Considerando a evolução da balística ao longo de séculos, a mesma remonta à época da primeira pedra que foi lançada pelo Homem na pré-história, surgindo posteriormente as fundas e as lanças e com isso o arco. Associado ao arco, surge então a "Ballista" (do latim *"ballein", que quer dizer atirar*), de onde deriva o nome de Balística.

Na era Pré-Newton e com Leonardo da Vinci (1452-1519), iniciou-se o desenvolvimento da moderna engenharia do armamento, projetando armas ofensivas e defensivas, munições esféricas para canhão, bombardas, primitivas versões de Carros de Combate e Submarinos, e a regulação de trajetórias de projéteis passou a ser uma realidade, tendo apresentado estudos teóricos para o estudo de fenómenos aerodinâmicos (centro de pressão). Mais tarde, Niccolo Tartáglia (1499-1557), Matemático e Engenheiro, foi o primeiro a aplicar a Matemática à investigação da trajetória de projéteis de Artilharia, constatando que o alcance máximo de um canhão corresponderia a um ângulo de 45 graus. Assim, conseguiu medir ângulos de tiro das bocas de fogo com uma precisão muito considerável (1537). Verificou ainda que o alcance real obtido pelos projéteis era inferior aos previstos por Galileu (1564-1642).

Este Físico e Matemático deduziu a trajetória parabólica do projétil no vácuo, demonstrando que a distância percorrida por um corpo em queda livre é proporcional ao quadrado do tempo, conseguindo assim apresentar fundamentos científicos precisos do estudo do movimento de corpos, conjeturando que no vazio todos caem com igual velocidade. Galileu argumentou ainda que o retardamento e aceleração resultante do movimento de um corpo no seio do ar era função do seu peso, velocidade e da forma, para além de muitas outras conclusões tiradas em benefício da balística. Torriceli (1608-1647) seguiu os estudos de Galileu do movimento de projéteis, demonstrando que para uma determinada velocidade inicial, todas as trajetórias para diferentes ângulos são tangentes à curva chamada *Parábola de Segurança*. Isaac Newton (1642-1727) provou que se incrementasse continuamente a velocidade inicial de um projétil, existiria uma velocidade para a qual o projétil percorreria uma volta completa à terra, regressando à posição inicial. Apresentou também estudos sobre movimento de corpos rígidos e de fluídos, para o conhecimento da resistência do ar no deslocamento de projéteis. Euler (1707-1783), o mais importante sucessor de Newton, analisou resultados experimentais que relacionavam o atrito das bolas nos canhões com o seu alcance, no sentido da determinação da resistência do ar ao movimento de qualquer corpo no seu seio, sendo o primeiro trabalho realizado de forma analítica, enquanto no passado era todos analisados de uma forma geométrica. Charles Wheaststone (1802-1875) permitiu progressos significativos na precisão da medição do tempo de um projétil, desde o início (boca da arma), até passar por um quadro onde um circuito elétrico era interrompido, calculando-se assim a velocidade média, bem como extrapolar a velocidade inicial. Na era Pós Newton, surgem as armas com estabilizadores (William Hale) e assim a necessidade de tratar o projétil como um corpo sujeito a forças aerodinâmicas para além da gravidade e da resistência do ar. No século XX foi então estabelecida uma base matemática complexa, para descrever todas as forças que atuam num projétil em voo, as quais se chamam de tabelas balísticas e que posteriormente foram novamente substituídas pelos computadores de tiro que se usam nos dias de hoje.

Em termos de Balística Interna, poderemos dizer que a sua história começa com o uso das pólvoras pela primeira vez a.C. com o uso de mezclas pelos chineses, não se conhecendo bem a data. O primeiro esforço para testar pólvoras foi feito por Boume (1578), queimando pólvora num pequeno cilindro metálico e a extensão da tampa do crivo dava a indicação da força que tinha a pólvora. Nos finais do século XVIII, foi normalizada então a composição da pólvora, chamada de pólvora negra com 75% de salitre, 15%

de carvão e 10% de enxofre. Benjamin Robins, com a invenção do pêndulo Balístico em 1742, mediu a velocidade à boca de projéteis de mosquetes e deduziu assim a pressão de propulsão dos gazes resultantes da deflagração de pólvoras, apresentando o problema principal da Balística Interna no seu livro "New Principal of Gunnery". Piobert (1839) apresentou um estudo teórico fundamental para deflagração das pólvoras, que apelidou de lei de queima das pólvoras, bem como uma solução aproximada para o problema do movimento dos gases no interior dos tubos, relacionando-a com a pressão dos gases na culatra e na base do projétil ou do invólucro. Em 1857, o General Rodman (USA), inventou um medidor de pressões para medir a propulsão dos gases. A pressão era determinada pela cunhagem de um êmbolo em contacto com os gases. Um dos aparelhos medidores mais preciso, chamado de "medidor de Crusher", foi inventado por Andrew Noble em 1860. Avançando nos estudos, e como a Matemática é indissociável dos estudos de Balística, são deduzidas as equações fundamentais da Balística, entre as quais a "Equação da Energia",

$$\frac{f\overline{\omega}z}{\gamma-1}=\frac{p}{\gamma-1}\left[\sigma(x+L)-\overline{\omega}z\left(b-\frac{1}{\delta}\right)\right]+\frac{1}{2}mv^2$$

que traduz os fenómenos que se passam no interior do tubo de uma boca de fogo, relacionando a energia interna dos gases resultantes da deflagração da pólvora com a energia cinética de translação comunicada ao projétil.

Com o aparecimento dos Computadores foi possível determinar, com maior precisão, soluções balísticas nos sistemas de armas, dado que os programas contemplam dezenas de variáveis. Já com os propulsores modernos, surge o aparecimento da nitrocelulose com Schönbein (1846), com Alfred Nobel (1888) surge a Dinamite e os químicos ingleses Sir Frederick Augustus Abel e Sir James Dewar inventam a Cordite (1889). Posteriormente, surge com Robert Goddard (1926) o primeiro disparo de um foguete com líquido propulsor, realizando grandes progressos no desenvolvimento de propulsores líquidos e híbridos, capazes de atingir impulsos muito fortes.

Na Balística Terminal, os estudos dos efeitos dos projéteis são relativamente recentes, sendo que recentes esforços são no sentido de aumentar a eficiência da arma consistem em fazer o projétil maior. A introdução de blindagens nos alvos conduziu ao desenvolvimento de um artifício de blindagem de penetração, que só com os avanços da metalurgia, resistência dos materiais e o desenvolvimento de sofisticados instrumentos balísticos capazes de medir pressões elevadas e fenómenos que ocorrem em milésimos de segundo, permitem estudos de balística terminal. Já na Segunda Guerra

Mundial obtiveram-se progressos consideráveis no fabrico de munições de alto explosivo e tiros capazes de causar elevados danos pela explosão, dispersão, fragmentação e penetração de blindagens, com cargas ocas de efeito dirigido. Nos últimos anos, os estudos dos efeitos terminais das armas nucleares táticas têm alargado as fronteiras da balística terminal. Nesta exposição foram apresentados pequenos vídeos dos ensaios balísticos realizados no Regimento de Artilharia 5 em Vendas Novas no âmbito do projeto FIREND, que confirmam os cálculos matemáticos e computacionais que foram realizados anteriormente.

Em termos de Academia Militar e de I&D, poderemos dizer que se encontram em desenvolvimento alguns projetos de investigação e desenvolvimento, nomeadamente o projeto FIREND, que trata do desenvolvimento de uma munição de combate a incêndios florestais, bem como outros projetos de I&D que têm por base o estudo de proteções balísticas em equipamentos balísticos de uso do combatente em teatros de operações adversos. Outros estudos estão em desenvolvimento, nas áreas da Balística Interna, Balística Terminal e Balística Externa com diversos alunos finalistas dos ciclos de estudos de Mestrado Integrado em Engenharia Mecânica e Eletrotécnia, na especialidade de Material e Transmissões.

Bibliografia

D. E. Carlucci, S. S. Jacobson, "Theory and Design of Guns and Ammunition", 2nd ed., 2010.

R. L. McCoy, "Modern Exterior Ballistics", Editorial Schiffer, 2nd ed., 2012.

C. L. Farrar, D. W. Leeming, "Military Ballistics", 1982.

G. Dyckmans, "Fundamentals in Ballistics", 2003.

Marco Cianchi, "Les Machines de Léonard de Vinci", Ed. Becocci, 1984.

E. Cartoux, "Balistique Extérieure", 1974.

Elementos de Balística Interna e Externa, Academia Militar, 1984.

C. Castanheira, "Fabrico e Ensaio Balístico em Condições Reais de Conceito Melhorado de um Projetil de Detonação Mecânica", Instituto Superior Técnico, 2012.

D. Marques, "Estudo de Balística Interna", Instituto Superior Técnico, 2014.

R. Fonte Boa, "Análise de Balística Externa de um Projétil de Calibre 155MM", Instituto Superior Técnico, 2014.

Conceitos das ciências exatas e naturais essenciais para o Tiro de Artilharia de Campanha e sua evolução

César Reis
Regimento de Apoio Militar de Emergência
Abrantes

A comunicação tem como objetivo central apresentar os conceitos das ciências exatas e naturais que têm sido essenciais para a evolução técnica do Tiro de Artilharia de Campanha, disciplina nuclear para a formação de qualquer oficial dos quadros permanentes da Arma de Artilharia.

Para o efeito, serão expostos sumariamente os diferenciados métodos e processos de cálculo que, ao longo dos tempos, têm sido aplicados no âmbito da direção técnica do tiro de artilharia, realçando a influência que a alteração das táticas teve na referida evolução técnica.

Daremos igualmente nota da importância que alguns artilheiros ilustres tiveram no ensino e consolidação de uma disciplina cuja plena compreensão se encontra indissociavelmente ligada às ciências exatas e naturais.

Bibliografia

Alves, J.V. (1959). *Seis Séculos de Artilharia: A História da Arma dos Fogos Largos, Poderosos e Profundos.* Biblioteca do Exército – Editora, Rio de Janeiro.

Direcção da Arma de Artilharia (1962). *Instruções Gerais sobre o Tiro de Artilharia de Campanha, Título IV, Organização do Tiro no Grupo e na Bateria.* Ministério do Exército, Lisboa.

Leal, F. (1955). *O Poder Artilheiro: Sua Evolução e Influência Táctica*, *In* Separata da Revista Militar, fascículo I, janeiro, Lisboa.

Supico, F. L. (1947). *O Tiro de Artilharia de Campanha e os Artilheiros.* Tipografia Duarte, Lisboa.

A matemática e a criação do ensino superior militar em Portugal
225$^+$ Anos de Ensino Superior Militar em Portugal

João Pedro Pereira Bastos Rocha

Academia Militar

> "A matemática é a música da razão; enquanto que a música dos sentidos se pode gozar sem saber tocar, não se pode gozar a música da razão sem a conhecer profundamente." (Teixeira, 1934, p. 215)

1. Uma Academia fundada nos finais do século das luzes pode-se dizer que foi iluminada pelas Ciências a par de outros modelos europeus. O professor David Bien afirma que a "École Royale Militaire" também foi criada com a consciência de realçar o ensino da matemática, não para a sua aplicação militar imediata, mas porque se acreditava que era mais adequada para a formação das mentes dos militares (Bien, 1969, p. 55). O argumento de que o ensino de cariz científico-matemático é o mais adequado para o treino da tomada de decisões, que os futuros líderes militares terão de enfrentar, tem sido usado para justificar os planos de curso de ensino Superior Militar, prevalecendo ainda nos dias de hoje.

Com o advento do século das luzes e decorrente dos desenvolvimentos científicos o ensino superior militar assentou numa escola de formação científica a par de uma tradição militar e comportamental. Em Portugal o aparecimento da Academia Real de Fortificação, Artilharia e Desenho (ARFAD), em 1790, é o marco indelével deste novo conceito na formação de oficiais (Machado, 1979). Para que isto fosse possível que ao longo dos anos, sobretudo após a restauração, promoveram uma formação académica dos oficiais do Exército. Serrão Pimentel (Pimentel, 1680), Azevedo Fortes (Fortes, 1728) e Anastácio da Cunha (Curado, 2012) (Cunha, 1790), são nomes inolvidáveis neste percurso até se chegar ao ensino Superior em Portugal. Serrão Pimentel está na génese da Academia Militar da Corte. Azevedo Fortes, fruto das suas estadias por vários países europeus, introduz novos conceitos na formação de oficiais no início do século XVIII. Anastácio da Cunha é um vulto que nunca despiu a farda e foi modelo de uma geração de militares e matemáticos nos finais do século XVIII. Podemos dizer que o Ensino Superior Militar em Portugal é criado em finais do século XVIII através da Academia Real de Marinha (ARM) e da ARFAD. Com a extinção da Academia Real da Corte (Ribeiro, 2009) é criada a ARM em 1779, conforme decreto de 5 de agosto de D. Maria I. Esta Academia destinava-se a preparar oficiais para a Marinha e para o Exército e determina a criação de um curso de Matemática nesta nova instituição.

2. Para podermos analisar com justeza e rigor o Ensino Superior de cariz científico no seio militar, necessitamos de usar os "instrumentos de medida" da época. A forma mais simples de avaliar o Ensino Superior Militar nos fins do século XVIII é usar um padrão já existente: a Faculdade de Matemática da Universidade de Coimbra em 1772. Fá-lo-emos analisando quatro componentes: <u>os planos de curso, os professores, os alunos e o sistema de avaliação</u>.

i. <u>Planos de curso</u>
O curso matemático da ARM tinha a duração de três anos para os Oficiais de Marinha e de dois para os que se destinassem ao Exército como Artilheiros ou Engenheiros. As cadeiras estavam distribuídas pelos anos conforme mostrado no quadro I, onde fazemos um paralelo com os anos e as cadeiras que se ensinavam em Coimbra desde 1772. O curso da ARFAD frequentava-se na sequência de parte do curso da ARM e era constituído por 3 ou 4 anos.

Da análise destes planos de curso evidencia-se a fortíssima componente científica, fruto das inovações ocorridas neste século. Os oficiais do exército tinham uma formação mínima de 4 anos (Infª e Cavª) ou de 6 anos (Artª e Engª).

ii. <u>Os professores</u>
Para se ser professor na ARM dever-se-ia ter completado o curso matemático da Faculdade de Matemática da Universidade de Coimbra. Depois, o docente teria de ser proposto pelos lentes de Coimbra e pelos três professores da Academia sendo então considerados como professores de Coimbra gozando de todos os "privilégios, indultos e franquezas dos lentes daquela Universidade". Os professores da ARFAD eram equiparados aos lentes da ARM, donde podemos deduzir que eram equiparados aos professores de Coimbra. Em síntese podemos dizer que o grau de exigência do corpo docente era o mesmo quer para os lentes da Universidade de Coimbra quer para os lentes das escolas militares.

iii. <u>Os alunos</u>
Para se ser admitido ao curso de matemática da ARM era necessário realizar um exame que estava a cargo do professor de geometria sobre as quatro regras fundamentais da aritmética. Os alunos que se destinavam a oficiais Engenheiros ou de Artilharia, para frequentarem a ARFAD, tinham de obter

Ano	Plano de curso da ARM	Curso da Fac. Mat. Univ. Coimbra
1º	Aritmética Geometria Trigonometria Plana Álgebra até às equações 2º Grau	1ª Cadeira - Geometria, compreendendo Elementos de Aritmética, Geometria e de Trigonometria Plana, com aplicação à Geometria e Estereometria.
2º	Álgebra a partir das eq. 2º grau Cálculo diferencial e integral Estática e dinâmica Hidrostática, Hidráulica e Ótica	2ª Cadeira - Álgebra, Princípios de cálculo infinitesimal, direto e inverso, com aplicações à Geometria sublime e transcendente.
3º	Trigonometria esférica Arte de navegação teórica e prática	3ª Cadeira - Foronomia (Mecânica-Física), compreendendo a ciência geral do movimento com a sua aplicação a todos os ramos de Foronomia.

Ano	Plano de curso da ARFAD
1º	Fortificação Regular; Ataque e defesa das Praças Princípios de qualquer fortificação
2º	Fortificação Irregular; Fortificação Efetiva; Fortificação de Campanha
3º Fim Infª/Cavª	Teoria da Artilharia das minas e contraminas – sua aplicação no ataque e defesa das Praças
4º Apenas Artª, Engª	Arquitetura civil Corte das pedras e madeiras; Orçamento de Edifícios; Materiais Hidráulica (arquitetura de pontes, canais, portos diques e comportas)

Quadro I – Plano de curso da ARM+ARFAD em 1779 e 1790 – Fonte: **(Freire, 1872, pp. 25, 26)**

aprovação nos dois primeiros anos do curso de Matemática da ARM ou os três primeiros anos do Curso de Matemática em Coimbra. No caso de serem destinados aos cursos de Infantaria ou de Cavalaria bastaria obter aprovação no primeiro ano do curso de Matemática da ARM.

iv. Avaliação

No fim da semana os alunos eram avaliados sobre os assuntos tratados. O mesmo acontecia ao fim de cada mês. Era um sistema de sorteio, pelo que nunca se sabia quem iria ser avaliado. Os alunos que pretendiam seguir para a Marinha Real tinham também exames práticos de navegação e observação astronómica, enquanto os destinados ao Exército passavam, depois de aprovados nos dois anos da ARM, para as aulas de Fortificação onde se mantinha o sistema de avaliação. Este era um sistema usado também em Coimbra.

3. As Academias Militares desempenharam um papel fundamental no Ensino Superior Militar em Portugal. Foi mudada a praxis existente – uma instrução militar avulsa e uma educação militar marcadamente regimental. Foi possível sistematizar todo um corpo de matérias essenciais para a promoção na carreira de Oficial e iluminou-se definitivamente com a luz dos desenvolvimentos científicos e dos progressos filosóficos e militares que se desencadeavam na Europa. As Academias Militares afirmaram-se, a par da Universidade de Coimbra, como instituições de Ensino Superior que promoviam as Matemáticas e as Ciências. A institucionalização do Ensino Superior Militar requeria um corpo docente capaz de assegurar uma formação qualificada e sustentada nos melhores e mais atualizados manuais. A criação e reformulação da formação e Ensino Superior Militar na Europa num período de pouco mais de 30 anos é sinal inequívoco da necessidade sentida, na generalidade dos exércitos europeus, de elevar o grau de formação dos seus Oficiais. Os Exércitos necessitavam de Oficiais instruídos na arte da guerra e na "ciência dos equipamentos". A Artilharia e a Engenharia foram o motor deste desenvolvimento e provocaram alterações indeléveis no emprego das forças em campanha. As lições de equitação e de esgrima tornaram-se ineficazes nos novos campos de batalha europeus, e passou a ser imperativo que o oficial soubesse das capacidades das novas armas de ataque e defesa, e as empregasse judiciosamente.

Bibliografia

AHM. (1791). Relações de alunos da real academia de fortificação, artilharia e desenho e suas classificações. Lisboa, Portugal: Arquivo Histórico Militar/DIV/3/05/08/30/06.

AHM. (28 de junho de 1794). Artigos referentes ao governo da Academia. Lisboa, Portugal: Arquivo Histórico Militar/DIV/3/05/08/30/21.

Barata, M. T., & Teixeira, N. S. (2003). *Nova História Militar* (Vol. 3). Lisboa: Círculo dos Leitores.

Bien, D. D. (1969). Military education in 18th century france; technical and non-technical determinants. *Proceedings of the Third Military History Symposium* (pp. 51-59). Washington: Office of Air Force History.

Cunha, A. d. (1790). *Princípios Matemáticos.* Lisboa: Oficina de António Rodrigues Galhardo.

Curado, S. d. (2012). *Princípios Matemáticos.* Algumas notas sobre José Anastácio da Cunha, enquanto militar. Em L. Saraiva (Ed.), Boletim da SPM (pp. 227-242). Lisboa: SPM.

Ferreira, N. A. (2013). *A institucionalização do ensino da náutica em Portugal (1779-1807).* Lisboa: Faculdade de Letras de Universidade de Lisboa.

Fortes, A. (1728). *O Engenheiro Português.* Lisboa: oficina de Manoel Fernandes da Costa.

Freire, F. d. (1872). *Memória Histórica da Faculdade de Matemática.* Coimbra: Imprensa da Universidade.

Machado, J. T. (1979). *Esboço Histórico do Ensino Superior Militar.* Lisboa: Academia Militar.

Pimentel, L. S. (1680). *Método Lusitânico de Desenhar as Fortificações.* Lisboa: Antonio Craesbeeck de Mello.

Ribeiro, D. M. (2009). *A formação dos engenheiros militares: Azevedo Fortes, Matemática e ensino da Engenharia Militar no Século XVIII em Portugal e no Brasil.* São Paulo: Universidade de São Paulo.

Sampaio, R. M. (1991). *História da Academia Militar.* Lisboa: Academia Militar.

Teixeira, F. G. (1934). *História das Matemáticas em Portugal.* Lisboa: Academia das Ciências de Lisboa.

As Lições de Balística na Escola Central de Sargentos na década de 1940

Filipe Papança
Academia Militar
e-mail: filipe.papanca@gmail.com

Desde meados da década de 20 e até ao final dos anos 30 consolida-se a diversificação das instituições que formam Oficiais do Exército com a reestruturação da Escola Central de Sargentos e a criação da *Escola Militar de Aviação* e da *Escola de Serviço de Saúde Militar*.

Encontrado no espólio Bibliográfico do meu avô materno Bento Dias Loureiro (1915-2009) e com dedicatória do próprio autor, o manual *Lições de Balística* da autoria do capitão de artilharia Luís António Vicente, professor da Escola Central de Sargentos constitui um excelente exemplo de Manual didático militar do tempo do Estado Novo.

Bibliografia

Vicente, L. (1943). *Lições de Balística.* Lisboa: Tipografia e Papelaria America.

Martins, F. (1945). *História do Exército Português.* Lisboa: Editorial Inquérito.

Barata, M. T. e Teixeira, N. S. (Eds.). (2004). *Nova história militar de Portugal.* Lisboa: Círculo de Leitores.

A aula de Matemática e o aparecimento da Academia Militar da Ilha Terceira

Helena Sousa Melo, *Maria do Carmo Martins*
Departamento de Matemática e Estatística
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Centro de Estudos Humanísticos – CEHu/UAc
Universidade dos Açores
e-mail: helena.fs.melo@uac.pt
maria.cc.martins@uac.pt

A primeira escolar militar de Portugal, a Academia Real de Fortificação, Artilharia e Desenho, foi criada a 2 de janeiro de 1790. Onze anos antes, tinha sido aberta a Academia Real de Marinha. Estávamos no reinado de D. Maria I, cuja aclamação deu-se a 13 de maio de 1777. "A piedosa" pretendia trazer aos portugueses a paz e a harmonia abaladas pela governação de Marquês de Pombal. O reino afundava-se em grandes dificuldades. Entretanto, D. Maria I adoece e fica incapacitada de reinar, assumindo a regência o seu filho D. João VI. Este toma decisões dispendiosas para defender o reino das ameaças por mar e por terra, sendo reforçadas as guarnições e aumentando-se os efetivos em navios e pessoal da Marinha. Estas providências de defesa estendem-se às Ilhas Adjacentes, pois receava-se um ataque naval aos Açores para desviar as nossas tropas e tornar mais fácil a invasão de Portugal Continental.

Em 1807, ocorre a primeira invasão francesa pelo Vale do Tejo, comandada pelo Marechal Junot. Em novembro desse mesmo ano, a corte em Lisboa decide retirar-se para o Brasil. É neste cenário que aparece a Aula de Matemática e a Academia Militar na ilha Terceira, uma vez que a cidade de Angra era a Capital dos Açores e nela funcionava o Governo-Geral dos Açores, o qual reconhece a urgência em colocar um corpo de tropas regular na Capitania dos Açores, nomeadamente no castelo S. João Baptista. Como complemento da organização militar, pelo decreto de 22 de abril de 1797 e aviso de 16 de agosto de 1799, foi aberta, por ordem do 4.º capitão-general, o Conde de S. Lourenço, uma Aula de Matemática, que decorreu de 1804 a 1807, a qual cumpria o estipulado na carta-régia de 18 de agosto de 1799. A abertura formal desta Aula deu-se em agosto de 1805, fazendo parte da formação dos oficiais de Artilharia e devendo ser frequentada regularmente por todos os oficiais do batalhão.

Em pouco tempo foi reconhecida a insuficiência desta única disciplina como curso teórico para esses oficiais e após as conclusões tiradas pelo Inspetor de Artilharia, Brigadeiro Pamplona Corte Real, que as transmitiu ao Conde de Murça, foi proposta a criação de um Curso completo, idêntico ao estabelecido na Academia Real de Marinha. Assim, pelo 5.º governador e capitão-general dos Açores, Miguel António de Melo de Abreu Soares de Brito Barbosa Palha Vasconcelos Guedes, Conde de Murça, foi autorizada, por carta-régia de 10 de novembro de 1810, a abertura de uma "Escola de guerra", regendo-se segundo a prática da Academia Real de Marinha, da Universidade de Coimbra e da Academia Real de Fortificação, Artilharia e Desenho.

A Academia Militar da Ilha Terceira é inaugurada solenemente a 4 de novembro de 1811, sob a presidência do 6.º capitão-general dos Açores, Aires Pinto de Sousa Coutinho, cujo corpo docente era constituído por três professores (lentes) todos com graduação militar: o Capitão Caetano José Pinheiro; o Primeiro Tenente João de Lemos Caldeira e o Major Caetano Paulo Xavier.

O plano de estudos era inspirado no que era adotado nos Regimentos de Artilharia do Continente e o curso compreendia quatro anos. No 1.º ano lecionavam-se Aritmética de Bézout; ideia fundamental da numeração; extração de raiz, suas proporções aritméticas e geométricas; logaritmos, regra de três simples, composta, direta e inversa; regra de liga; Geometria de Bézout e Geometria de Legendre; proporções geométricas, suas aplicações; sólidos; trigonometria: princípios, proposições e usos com a prática no campo; trabalhos de geodesia e gráficos; Álgebra de Bézout, até às equações de segundo grau inclusive. O seu regente de 1811 a 1818 foi o Capitão de Artilharia Caetano José Pinheiro. No 2.º ano as disciplinas eram álgebra transcendente; resoluções das equações superiores às do segundo grau; cálculo diferencial e integral; mecânica e noções de balística. O seu regente de 1811 a 1820 foi o Primeiro Tenente do Batalhão de Artilharia João de Lemos Caldeira, que tinha o bacharelato em Matemática pela Universidade de Coimbra. No 3.º ano ensinava-se fortificação e no 4.º ano, balística e artilharia. O regente desses dois últimos anos, de 1811 a 1828, foi o Major de Artilharia Caetano Paulo Xavier. Quando o serviço militar tornava possível, em dias estipulados pelo chefe de batalhão e docente, ainda tinham aulas de desenho, geografia e francês.

Podemos ter uma noção do aproveitamento escolar entre 1811 e 1825 através dos dados obtidos no Boletim do Arquivo Histórico-Militar, 50º volume, de 1980, página 12, onde constatamos os maus resultados finais, sendo esses nunca superiores a 47% (1812/1813) e rondando sempre entre os 20% e os 25% de aproveitamento.

O barão da Vila da Praia, na Ilha Terceira, Francisco Borja Garção Stokler, Bacharel em Matemática pela Universidade de Coimbra, 8.º governador e capitão-general dos Açores, em ofício enviado ao Almirante Joaquim José Monteiro Torres, Ministro e Secretário d'Estado dos Negócios da Marinha e do Ultramar, referia o fracasso que representava a criação da Academia nos Açores semelhante à de Lisboa, pois só interessava aos soldados. Consequentemente, a Academia exigia profundas reformas, incluindo também disciplinas de navegação, dado ao número elevado de açorianos dedicados à vida marítima

No ano de 1828, devido às lutas liberais que ocorreram no encadeamento das reformas que se seguiram à Revolução Liberal do Porto, dá-se o encerramento das aulas na Academia. Dois anos depois, em 10 de abril de 1830, por despacho em nome da Rainha D. Maria II, dá-se a abertura de uma Escola Militar provisória, denominada "Academia de Instrução Militar". Neste enquadramento, pode-se até pensar que se tratasse da reabertura da Academia com propósito de desenvolver o estudo da Matemática para os oficiais de Artilharia e de Engenharia.

A "Academia de Instrução Militar" durou até 1832, altura em que foi extinta. O seu plano de estudos era: 1.º ano – aritmética, álgebra até às equações do segundo grau, geometria e trigonometria retilínea; 2.º ano – álgebra superior, cálculo diferencial e integral, e mecânica; 3.º ano – fortificações; 4.º ano – tática superior.

Referências Bibliográficas

[1] Dias, Urbano Mendonça (1928), *História da Instrução nos Açores.* Vila Franca do Campo, Empresa Tipográfica.

[2] Dias, Teixeira (2004), *Instituições e Ideais educativos nos Açores.* Ponta Delgada, Edição do autor.

[3] Menezes, Manuel de Sousa (1993), *A Academia Militar da Ilha Terceira: Algumas notas*, Boletim do Instituto Histórico da Ilha Terceira, Volume XLVIII, pp. 441–464, Angra do Heroísmo.

Três militares matemáticos: Anastácio da Cunha (1744–1787), Garção Stockler (1759–1829) e Rodolfo Guimarães (1866–1918)

Luís Saraiva
CIUHCT & CMAFCIO
Universidade de Lisboa
e-mail: `lmsaraiva@fc.ul.pt`

Nesta comunicação foram sumariamente abordados aspectos importantes da actividade matemática de três militares que foram distintas figuras da matemática portuguesa.

José Anastácio da Cunha (1744-1787) é um dos poucos matemáticos portugueses importantes na história mundial da matemática. Tendo tido a vantagem de ter sido educado pelos Oratorianos, que apresentavam um ensino mais moderno e virado para a experimentação por comparação com o praticado na Assistência Portuguesa da Companhia de Jesus, então a entidade dominante no ensino em Portugal, em 1764 foi nomeado primeiro tenente da Companhia de Bombeiros do Regimento de Artilharia do Porto, que estava estacionado em Valença. O Conde de Lippe tinha chegado a Portugal em 1762 para operar a reorganização do exército português, tendo estabelecido *Aulas de Artilharia* nos regimentos de artilharia existentes. Como componente do trabalho feito na reorganização do exército, foram igualmente contratados oficiais estrangeiros. Alguns deles foram colocados no Regimento do Porto, com um número significativo vindo de países protestantes, e Anastácio beneficiou dessa convivência, tendo conhecido autores, ideias e livros a que um oficial português dessa época não tinha normalmente acesso. É enquanto militar nesse Regimento que escreve o *Ensaio sobre as Minas* e a *Carta Físico-Matemática sobre a Theorica da Pólvora*, tendo o primeiro sido decisivo no seu futuro, pois é por meio da reputação que conseguiu graças à sua escrita que o Marquês de Pombal o vai chamar em 1773 para professor da Universidade de Coimbra na recém-criada Faculdade de Matemática, a primeira existente no país, uma das importantes realizações da reforma da Universidade de 1772. Contudo a acção que poderia ter desenvolvido na Universidade foi cortada em 1778: o rei morrera em 1777, pouco depois o Marquês de Pombal foi afastado e as forças que ele tinha combatido voltaram ao poder. Em particular a Inquisição surge em acção, Anastácio da Cunha está entre os presos, tendo sido julgado e expulso da Universidade, condenado a três anos de reclusão na Congregação do Oratório e proibido de voltar quer a Coimbra quer a Valença. Mesmo assim, acaba de escrever a sua obra fundamental, os *Principios Mathematicos*, que contudo só é publicada 3 anos após a sua morte, em 1790. Embora os vários temas que a compõem sejam analisados com diferentes graus de profundidade e de rigor, desde o elementar ao altamente especializado e inovador, trata-se de uma obra notável. Os temas vão da Geometria Euclidiana á Geometria Analítica, do Cálculo Diferencial às Equações Diferenciais, das Equações Algébricas à Teoria das Séries Numéricas. Anastácio utiliza o método grego de desenvolver os temas, numa sequência de **axiomas − definições-proposições-demonstrações**, tentando ser o mais conciso possível. Anastácio da Cunha é hoje considerado um dos precursores da reforma que se operou no Cálculo Infinitesimal no século XIX e realizada por matemáticos como Cauchy, Bolzano, Gauss e Abel.

Francisco de Borja Garção Stockler (1759-1829) começou a sua carreira militar muito cedo, aos 16 anos, no *Regimento de Infantaria nº 11*, tendo terminado os seus estudos na *Academia Real de Marinha* em 1783. Entra para a *Universidade de Coimbra* no ano seguinte. Escreve várias obras de matemática, tentando fazer uma fundamentação da análise a partir da noção de limite, ecoando a perspectiva de d'Alembert na *Enciclopédia Metódica*: "A teoria dos limites é a verdadeira Metafísica do cálculo diferencial". Em 1799 é nomeado secretário da *Real Academia de Ciências de Lisboa* e propõe um plano nacional de educação que não é aceite por ter sido considerado demasiado avançado para a época. Durante a primeira invasão francesa, em 1807, sendo então Stockler Brigadeiro Efectivo de Infantaria, a sua atitude face aos franceses não é clara, e acaba por ser demitido de todos os seus cargos. Vai para o Rio de Janeiro, onde desde 1808 está o Rei e a Corte Portuguesa, e consegue ser reintegrado, entrando para a direcção da notável *Real Academia Militar do Rio de Janeiro*, onde se mantém até 1820. Vai sendo sucessivamente promovido, terminando a sua carreira como Tenente General Efectivo. A maior notoriedade de Stockler é devida ao seu *Ensaio Histórico sobre as Origens e progressos das Mathematicas em Portugal*, publicada em 1819, a primeira história da Matemática num país escrita no Ocidente. Nesse ano é eleito membro estrangeiro da *Royal Society de Londres*.

Rodolfo Ferreira Dias Guimarães (1866-1918) é um dos principais historiadores da matemática portuguesa. Foi aluno da Academia Politécnica do Porto, e aos 21 anos entrou para a Escola do Exército de Lisboa, antepassado da Academia Militar, cursando Engenharia Militar. Tem a consciência da necessidade dos matemáticos portugueses se integrarem na comunidade matemática internacional, e participa, com outros portugueses, nos congressos da *Associação Francesa para o Progresso das Ciências* entre 1892 e 1897. Em particular no Congresso de Besançon, de 1893, divulga a obra do notável matemático Daniel Augusto da Silva (1814-1878), levando o italiano Cristoforo Alasia a escrever dois artigos sobre ele. Antes de 1900 escreveu principalmente artigos sobre temas de geometria. Em 1899/1900 publica com o Coronel Mendes de Almeida um Curso de Topografia em 2 volumes, para ensino na Escola do Exército. O primeiro destes volumes foi premiado com uma medalha de bronze na *Exposição Universal de Paris* de 1900. Para o Pavilhão Português nesta Exposição escreveu *Les Mathématiques en Portugal au XIXe Siècle*, um catálogo de 150 páginas dos escritos matemáticos dos portugueses no século XIX, antecedido de dois breves apontamentos, um sobre a história da matemática em Portugal, outro sobre a matemática no século XIX. Encorajado por uma recensão do matemático sueco Gustaf Eneström, Guimarães dedicou a maior parte dos nove anos seguintes a ampliar esta obra, procurando fazer o levantamento de todas as publicações matemáticas portuguesas, e simultaneamente escrevendo uma história da matemática portuguesa, que no essencial segue as linhas gerais da de Stockler, juntando depois informação relativa aos últimos 130 anos, uma vez que o livro de Stockler conclui com a fundação da Academia das Ciências de Lisboa (1779). Os resultados da sua pesquisa foram sendo publicados em fascículos na revista *O Instituto de Coimbra*, e foram reunidos em livro em 1909, com o título *Les Mathématiques en Portugal*. O número de páginas do catálogo das obras matemáticas mais do que triplicou em relação à obra de 1900, acompanhando muitas das obras mencionadas ou por uma descrição de conteúdo ou por um comentário. Na sua carreira militar, Guimarães foi nomeado tenente em 1893, capitão em 1901, tenente-coronel em 1917 e coronel em 1918.

Bibliografia sumária

Queiró, João, 1992. José Anastácio da Cunha: um matemático a recordar, 200 anos depois, *Matemática Universitária* nº 14, pp. 5–27.

Saraiva, Luis, 1993. On the first History of Portuguese Mathematics, *Historia Mathematica*, 20, pp. 415–427.

Saraiva, Luis, 1997. Historiography of Mathematics in the Works of Rodolfo Guimarães, *Historia Mathematica* 24, pp. 86–97.

Três Militares, Três Matemáticos a Conhecer

LUIZ PORFIRIO DA MOTTA PEGADO (1831-1903)
ANTÓNIO DOS SANTOS LUCAS (1866-1939)
VICTOR HUGO DE LEMOS (1894-1959)

Ana Correia
Academia Militar & CEAFEL
e-mail: ana.correia@academiamilitar.pt

Francisco Domingues
Academia Militar

1 Introdução

Na segunda metade do século XVIII, o ensino superior era assumido pela Universidade de Coimbra, que serviu de modelo às Instituições de Ensino Superior Militar. Com a extinção da Academia Militar da Corte, foi criada, em 1779, a Academia Real da Marinha (ARM) e em 1790 a Academia Real de Fortificação, Artilharia e Desenho (ARFAD). Estas Academias destinavam-se a preparar oficiais para a Marinha e para o Exército.

A Escola Politécnica de Lisboa (EP), instituída em 11 Jan 1837, sucedeu à ARM. Esta Escola foi criada no âmbito de um processo geral de reforma do ensino superior e militar em Portugal. Tinha como objetivo ministrar um ensino preparatório científico aos candidatos a oficiais do Exército e da Marinha, que seria depois completado em escolas especializadas (Escola do Exército (EE) e, mais tarde, Escola Naval (EN)). No seu início, a EP foi tutelada pelos ministérios da Guerra e da Marinha e Ultramar, sendo considerado um estabelecimento de ensino militar. No Porto, foi criada a Academia Politécnica do Porto, em 13 Jan 1837, com características semelhantes, substituindo a ARM e Comércio do Porto. A EE, que sucedeu em 12 Jan 1837 à ARFAD, para além de se destinar a formar os oficiais das diferentes Armas do Exército, foi organizada para formar também engenheiros civis. Toda esta dinâmica originou a que, nos finais do século XIX princípios do século XX, os professores do ensino superior tivessem maioritariamente formação militar. Assim, na recém criada Faculdade de Ciências (1911), todos os docentes provinham da EP, dos quais 59% eram militares, 18% médicos, e os restantes 23% possuíam outro tipo de formação [16, pp. 89].

Nesta comunicação, foi aflorado o percurso de três militares, que se destacaram pela sua notável carreira científico-académica, nas Ciências Matemá-

Suplemento do Boletim da SPM 76, Dezembro 2018, pp. 103-106

ticas, com extensa obra publicada, desde cedo abraçando funções docentes e de investigação: três oficiais, de três Armas distintas, um de Infantaria, um de Engenharia, e um de Artilharia. Três carreiras, três épocas, cada uma com as suas especificidades, mas que ilustram todas a excelência da formação académica de base, a dedicação colocada bem cedo ao serviço da Matemática e a relevância que, nas várias épocas, a Instituição Militar tinha no panorama científico nacional.

2 Três militares, três matemáticos

2.1 Luiz Porfirio da Motta Pegado – General de Divisão (1831-1903)

Ingressou na Escola do Exército em 1852 com 21 anos de idade, sendo alferes graduado para o Batalhão de Caçadores 9, após ter realizado os estudos preparatórios na Escola Politécnica.

Matriculado no curso de Engenharia, interrompeu o curso no 3º ano, pois já em 1854 era lente de matemática no Real Collegio Militar, funções que desempenhou até 1856, por ter sido nomeado lente provisório substituto de Matemática na Escola Politécnica (lente efectivo em 1859).
No ano seguinte, foi nomeado lente proprietário da recentemente criada cadeira de Geometria Descritiva da Escola Politécnica, regência que manteve, sem interrupção, até 1902. Foi assim o primeiro lente proprietário da cadeira de geometria descritiva dessa Escola.
Leccionou em acumulação de funções como professor provisório no Liceu Normal de Lisboa durante mais de 20 anos, tendo para este nível de ensino produzido o *"Tratado Elementar de Arithmetica"* [3], obra emblemática, que teve várias edições, e foi usada nos liceus nacionais durante mais de duas décadas.
Das obras que publicou, salientamos: [1], [2], [3], [4] e [5].

2.2 António dos Santos Lucas – Coronel Graduado de Engenharia (1866-1939)

Ingressou, aos 23 anos, como soldado na Escola do Exército, para o curso de Engenharia, após frequência dos estudos preparatórios na Escola Politécnica.
Em 1895, no posto de tenente, obteve o doutoramento em Matemática pela Universidade de Coimbra, com tese intitulada "Transformações de Contacto" [6].

Em 1899 concorreu a uma vaga de lente substituto na secção de Matemática da Escola Politécnica. A partir de 1900 aí leccionou múltiplas cadeiras: Cálculo Infinitesimal, Álgebra Superior, Geometria Analítica, Trigonometria Esférica e Mecânica Racional.
Na Faculdade de Ciências, sucedânea da Escola Politécnica após 1911, regeu a cadeira de Física Matemática, e exerceu mais tarde as funções de Director.
Das numerosas funções não académicas que desempenhou, salientamos as de Presidente do Conselho Administrativo da Casa da Moeda, e as de actuário de várias empresas de seguros e previdência[1].
Das obras que publicou, salientamos: [6], [7], [8], [9] e [10].

2.3 Victor Hugo Lemos – Major Graduado de Artilharia (1894-1959)

Em 1915, com 21 anos de idade, no posto de 1^{o} cabo condutor cadete, ingressou na Escola de Guerra para o curso de Artilharia a Pé e Engenharia Militar.
Concluiu a sua licenciatura em Ciências Matemáticas em 1918 [16, pp. 52], tendo-se doutorado em 1923, pela Universidade de Lisboa, com uma tese sobre Cálculo Tensorial [12].
Cedo abraçou a carreira docente universitária, sendo logo em 1918 professor auxiliar na Escola de Guerra, e depois, sucessivamente, no Instituto Superior de Agronomia, na Escola Militar e na Faculdade de Ciências, onde tomou posse como professor catedrático da Secção de Matemática em 1931.
Foi Director da Faculdade de Ciências de 1932 a 1944, e foi, posteriormente, um dos três "reitores cientistas do Estado Novo" [16, pp. 51], designação atribuída aos Reitores da Universidade de Lisboa provenientes da Faculdade de Ciências.
Ao longo da sua vida, foi chamado a desempenhar variadas funções além da docência universitária, em múltiplos sectores, no País e no estrangeiro. Salientamos apenas as de Chefe de Gabinete e depois Ministro da Instrução Pública, membro da 1^{a} Direcção da Sociedade Portuguesa de Matemática (como Vice-Presidente), e membro da Comissão de Gravimetria da Associação Geodésica Internacional.
Da sua vasta obra publicada, salientamos: [11], [12], [13], [14] e [15].

[1] Segundo Victor Hugo de Lemos, "A obra que realizou como actuário, notável pela qualidade e pela quantidade, fez considerá-lo, justamente, como o primeiro valor do actuariado português".

Fontes

- Academia das Ciências de Lisboa
- Academia Militar (Biblioteca da Sede, Lisboa)
- Arquivo Histórico Militar
- Arquivo do Museu de Ciência da Universidade de Lisboa
- Biblioteca do Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra
- Biblioteca do Exército
- Biblioteca da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa
- Biblioteca do Instituto Superior de Agronomia
- Imprensa Nacional Casa da Moeda

Bibliografia (principal)

[1] *"Estudo sobre o deslocamento d'um solido invariavel no espaço"*, Typographia da Academia Real das Sciencias, Lisboa, 1881

[2] *"Curso de geometria descriptiva da escola polytechnica"* - 2 vol., Typographia da Academia Real das Sciencias, Lisboa, 1899

[3] *"Tratado Elementar de Arithmetica"*, 4ª Ed. Typographia da Academia Real das Sciencias, Lisboa, 1886

[4] *"O logar geometrico dos pontos que distam egualmente de duas rectas dadas é um "paraboloide hyperbolico isosceles"*, Typographia da Academia Real das Sciencias, Lisboa, 1866

[5] *"Theoria geral das combinações com repetição"*, Typographia da Academia Real das Sciencias, Lisboa, 1882

[6] *"Transformações de Contacto"*, Tese de doutoramento em Matemática, Universidade de Coimbra, Coimbra, 1895

[7] *"A Determinação da Figura da Terra pelas Observações da Gravidade e da Lua"*, Dissertação de concurso para a Escola Politécnica, Porto, 1899

[8] *"Lições de Álgebra Superior (1ª cadeira)"*, Escola Polytechnica, Lisboa, 1904 (co-autoria com Pedro José da Cunha)

[9] *"Lições Sobre a Teoria da Relatividade"*, Faculdade de Ciências, 1922

[10] *"Curso de Física-Matemática, Lições do Sr. Dr. António dos Santos Lucas"*, Faculdade de Ciências, 1928-29

[11] *"Folhas de Geometria Analítica (da cadeira de Matemáticas Gerais) – Segundo as Lições do Exmo Snr. Prof. Doutor Victor Hugo de Lemos"*, Instituto Superior de Agronomia, Lisboa, 1921-1922

[12] *"Cálculo Tensorial"*, Tese de Doutoramento em Matemática na Universidade de Lisboa, Separata do Arquivo da Universidade de Lisboa, Vol. X, Oficinas Gráficas da Biblioteca Nacional, Lisboa, 1925

[13] *"Teoria da Relatividade: Curso de Física Matemática"*, 1931-32

[14] *"Lições de Geometria Analítica, (1ª cadeira)"*, Instituto Superior de Agronomia, Lisboa, 1933-34

[15] *"Mecânica Racional"*, 4 vol., Faculdade de Ciências de Lisboa, 1945 e 1955

[16] Simões, A., Carneiro, A., Diogo, M. P., Carolino, L. M., Mota, T. S., *Uma História da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa (1911-1974)*, FCUL, Lisboa, 2013

Formação e carreira dos engenheiros militares no século XVIII: Azevedo Fortes e o ensino de Matemática

Dulcyene Maria Ribeiro
Universidade Estadual do Oeste do Paraná
UNIOESTE, Brasil
e-mail: `dulcyenemr@yahoo.com.br`

Nesse trabalho temos por objetivo destacar aspectos da formação dos engenheiros militares na primeira metade do século XVIII em Portugal e no Brasil. O material é fruto da investigação de doutoramento que desenvolvi entre 2006 e 2009, vinculado à Universidade de São Paulo – USP, Brasil. No período também realizei um estágio de doutoramento (Doutorado Sanduíche), vinculado à Universidade de Lisboa – UL, Portugal, sob a orientação do Prof, Dr. Luis Saraiva.

Durante a investigação em Portugal, foi fundamental a busca em arquivos, que permitiu o contato com mais de uma centena de documentos considerados fontes primárias para a investigação: documentos manuscritos da administração pública da coroa portuguesa e textos caracterizados como "notas de aula" ou "teóricos", ou seja, produção de alunos e professores, impressos ou manuscritos.

Considerando o campo econômico, político e cultural do reino português, no tempo estabelecido, nomeadamente no reinado de D. João V, estudou-se a atividade profissional de engenheiro militar, as condições de acesso à profissão e o seu enquadramento institucional, as aspirações de ascensão social e as relações com os superiores hierárquicos. Pode-se entender melhor as circunstâncias da formação do engenheiro militar, estudando o quadro dos alunos que frequentaram a Academia Militar de Lisboa e dos professores dessa instituição. Assim, foi possível perspectivar como se teriam dado as "Aulas" de formação dos engenheiros militares nas capitanias brasileiras, identificando-se os professores e alunos da época. Foram analisados também alguns textos que serviram à formação dos engenheiros militares desse tempo, especialmente à formação matemática, procurando entender como foram produzidos, as circunstâncias dos seus usos e os conteúdos neles veiculados. Pela brevidade necessária a este texto, tratarmos mais diretamente de aspectos da formação do engenheiro militar nesse período.

Suplemento do Boletim da SPM 76, Dezembro 2018, pp. 107-110

A instituição que formava os engenheiros militares na Corte teve denominações diferenciadas ao longo de sua existência. Criada em 1647, tinha como título “Aula de Fortificação e Arquitetura Militar”, estando sob a responsabilidade de Luís Serrão Pimentel (1613-1679). Funcionou, primeiramente, na Ribeira das Naus. Depois teve lugar em uma das salas do Paço da Ribeira. Podia frequentar a Aula quem se interessasse, mas pode-se dizer que havia preferência por alunos que fossem já militares.

Manoel de Azevedo Fortes (1660-1749), já na posição de engenheiro-mor, o que ocorreu em 1719, elaborou um documento que foi enviado à Junta dos Três Estados e ao Conselho de Guerra e que também foi publicado com o título: *Representação a Sua Majestade sobre a forma e direção que devem ter os engenheiros para melhor servirem neste reino e suas conquistas*, em 1720. Com ela esperava-se não só alterar a conjuntura vivida na Aula que formava os engenheiros militares na corte, como envolver o rei na questão. É neste documento, que pela primeira vez, aparece a denominação de Academia Militar.

Inexiste no período estudado e na documentação consultada, o termo “engenharia militar”. A profissão do engenheiro estava atrelada à Arquitetura. Em Portugal, a melhor descrição do perfil profissional do engenheiro militar está mesmo nos textos de Manoel de Azevedo Fortes. No texto da *Representação* ele formula algumas definições de engenheiro militar, que depois são repetidas no livro *O Engenheiro Português*, publicado em 1728. Para Fortes,

> Hum bom Engenheyro ha de ser um bom Soldado com disposiçaõ valerosa, creado com a doutrina, & exercicio Militar; & além disso ha de ter sciencia para obrar em todas as funçoens da guerra [...]: finalmente esta palavra Engenheyro, quer dizer hu Soldado propto para todas as funçoens da guerra, ou seja ataque & defeça das Praças obras de Fortificação, alojamentos ou entrincheyramento dos Exercitos; ou seja para os aproches, ataques gerais ou particulares, &c. porque nelle se deve achar disposição, estudo, sciencia, & pratica de todas estas cousas; & sem estas partes se lhe não pòde dar o nome de bom Engenheyro
>
> (FORTES, 1720, p. 7-8)[1].

Além da formação do engenheiro militar, Fortes estava atento às condições do campo profissional dos engenheiros. Buscou organizar um corpo próprio para os engenheiros inserido na estrutura do Exército. Além do

[1] Texto como no original.

engenheiro-mor, havia em cada província o cargo de engenheiro diretor da província e de engenheiro chefe da praça, que eram, na maioria das vezes, ocupados por um mesmo engenheiro, o que aconteceu principalmente nas capitanias do Ultramar. Em algumas praças, também havia os ajudantes-engenheiros, que eram os engenheiros recém-formados.

Tornou-se corrente divulgar que todos os engenheiros-mores eram os professores da Academia. Mas, apesar de serem responsáveis pela instituição, nem todos eles deram aulas. E nos períodos em que não havia engenheiro-mor nomeado, era comum que o professor da Academia Militar respondesse e assinasse documentos sobre a maioria das decisões tomadas em relação às fortificações e aos engenheiros militares.

Fortes (1729, p. 428) definiu os assuntos que considerava indispensáveis para uma boa formação do engenheiro militar. Entre os conteúdos de Matemática estão: Aritmética, Geometria Euclidiana, o que chama de Geometria Prática e a Trigonometria, além das atividades de desenho, do uso dos instrumentos matemáticos, das atividades na prática das marcações e medições no terreno e da Artilharia. Excetuando-se as lições sobre Artilharia, todas as outras estão organizadas nos dois volumes do *O Engenheiro Português*.

Sabe-se também, que era estudado um *Tratado da Álgebra*, que demorava em torno de dois anos para se ditado, conhecido por causa de um manuscrito de um discípulo que chegou aos dias de hoje, no qual se explicita que foi ditado entre 1732 e 1734. Também em um parecer a respeito de um discípulo que deveria voltar para o Algarve, emitido pelo engenheiro-mor, o próprio Fortes, há o seguinte: "É lástima que deixe de completar o seu estudo, sendo o que lhe falta o mais importante, como é o exercício do Campo a que se tem dado princípio e vai continuando, a acabar o tratado da Álgebra, que se há de continuar de outubro por diante [. . .] se poderá acabar até fim de Abril do ano próximo futuro" (ANTT, Consultas do Conselho de Guerra, de 7 de julho de 1739, Maço 98). Os estudos mostraram que Azevedo Fortes, influenciado pelos textos de matemáticos europeus, especialmente, pelos do padre francês Bernardo Lamy (1640-1715), teve papel decisivo para que a Álgebra fosse ensinada na Academia Militar.

Além da Álgebra e das lições ligadas à Matemática existentes no *O Engenheiro Português*, os alunos tinham aulas de desenho, de artilharia e mesmo de pirotecnia e, ainda, uma formação prática, obtida nas grandes obras arquitetônicas ou mesmo acompanhando o engenheiro-mor em visitas às praças fortificadas do reino para fazer reparos. O envolvimento de Azevedo Fortes na confecção das cartas geográficas de Lisboa e região na década de

1720 também garantiu um campo profícuo para a aprendizagem prática dos alunos da Academia.

Como nem todos que frequentaram a Academia Militar destinavam a engenheiros, eles ainda aprendiam a realizar evoluções militares, a formar esquadrões e outros assuntos destinados à formação de um soldado qualquer.

Referências Bibliográficas

FORTES, M. A., **O engenheiro português**. Lisboa: Oficina de Manoel Fernandes da Costa, 1728/29.

RIBEIRO, D. M., **A formação dos engenheiros militares**: Azevedo Fortes, Matemática e ensino da Engenharia Militar no século XVIII em Portugal e no Brasil. 2009. 213p. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo. São Paulo, 2009.

A Matemática nas Ciências Geoespaciais

Rui F. S. Teodoro
Centro de Informação Geoespacial do Exército

A relação entre os Militares e a matemática não pode e não deve ser uma relação de amor – ódio, ou só de ódio ou só de amor. Como em praticamente todos os atos da nossa vida, o equilíbrio é sempre a solução mais ajustada, sem radicalismos ou posições extremadas até porque a matemática está presente no nosso dia-a-dia, nas suas mais diversas facetas e graus de complexidade. Não podendo descartar a sua utilização devemos encará-la de frente e usá-la, da melhor forma possível, de maneira a que nos possa ajudar a cumprir a nossa missão, enquadrada na missão mais vasta da instituição que servimos, transformando-a assim de problema em vantagem.

Durante a investigação em Portugal, foi fundamental a busca em arquivos, que permitiu o contato com mais de uma centena de documentos considerados fontes primárias para a investigação: documentos manuscritos da administração pública da coroa portuguesa e textos caracterizados como "notas de aula" ou "teóricos", ou seja, produção de alunos e professores, impressos ou manuscritos.

Neste trabalho e na área específica das ciências geoespaciais serão referidas algumas disciplinas como a Geodesia, nas suas variantes Física e Espacial, a Cartografia e a Topografia, de entre outras, que servirão de modelo de estudo.

Numa abordagem clássica, a Geodesia tinha por objetivos o estudo da forma e dimensões do planeta e dos seus fatores influenciadores, como por exemplo o seu campo gravítico, neste caso responsabilidade da Geodesia Física. Esta abordagem remonta a tempos tão antigos quanto os da antiga Grécia com Homero. Este poeta épico escreve, na sua obra Ilíada, que a Terra é um disco plano, uma ilha cercada por mar. Pitágoras foi o primeiro a conceber a ideia de uma Terra esférica, ideia que mais tarde foi secundada por Aristóteles. Segundo este, todo o universo estava circunscrito a uma esfera. A Terra ocupava o centro desta esfera e todo o firmamento e o que nele existe estava "agarrado" à parede interior da esfera.

Mais tarde, Eratóstenes (276 a.C.–195 a.C.) conseguiu, com a tecnologia disponível à época, calcular o perímetro de um meridiano com aproximadamente 3% de erro em relação às medições mais recentes. Através da observação e da medição de um ângulo (de inclinação dos raios solares) e de uma

Suplemento do Boletim da SPM 76, Dezembro 2018, pp. 111-114

distância, chegou a um valor de 41.142 km. O valor atual é de 40.007,86 km, determinado com base em técnicas de interferometria de base muito longa, observações oriundas dos sistemas de navegação e posicionamento por satélite e de técnicas de posicionamento utilizando raios *laser*, com recurso a ajustamentos por mínimos quadrados.

Hoje em dia o campo de ação da geodesia é muito mais abrangente e inclui a monitorização dos movimentos das massas terrestres, do comportamento das massas aquáticas e de gelo, a variação da posição do eixo de rotação terrestre, o estudo das variações temporais do campo gravítico terrestre e a determinação das posições de satélites artificiais que orbitam o planeta, neste último caso da responsabilidade da Geodesia Espacial, último ramo da Geodesia a surgir como consequência do aparecimento das constelações de navegação e posicionamento baseado em satélites.

Também na Cartografia a matemática se constitui como um pilar fundamental. Desde Gerhard Kremer, mais conhecido por Mercator, pela importância que as suas descobertas tiveram na navegação marítima e, por consequência, no comércio mundial, que se opera uma espécie de "milagre" passando a representar num plano, o cartográfico, aquilo que é curvo, a superfície terrestre, minimizando as distorções inerentes a este processo e em função da finalidade pretendida.

Mercator foi aliás o Pai da cartografia moderna, através da implementação da sua projeção cilíndrica. Nesta projeção os meridianos são projetados no plano através de linhas retas paralelas e equidistantes. O mesmo não se passa com os paralelos. Continuam a ser representados por retas paralelas, mas a distância entre estas retas vai aumentando à medida que vai aumentando a sua distância ao equador. Como consequência, esta projeção não é adequada para representações cartográficas de locais com latitudes muito elevadas, representando assim a realidade mas com distorções muito significativas. Mas esta projeção deu realce a duas grandezas que já antes tinham sido estudadas: a Ortodrómica e a Loxodrómica. Efetivamente, o "nosso" Pedro Nunes foi quem primeiro referiu estas noções na sua obra "Tratado em Defesa da Carta de Marear":

– "(...) [Na arte de navegar] há dois modos: o primeiro é ir por uma mesma rota, sem fazer mudança (...). O segundo modo seria ir por círculos maiores (...).";

– "(...) ir por círculo maior (...) é andar menos caminho. (...)";

– "(...) os rumos [não são] círculos, mas linhas curvas irregulares, que vão fazendo com todos os meridianos que passamos ângulos iguais (...).";

– "(. . .) A linha curva é diferente [de um círculo máximo] e é semelhante a uma hélice. (. . .)".

A ortodrómica é uma linha inscrita sobre uma superfície curva que representa a menor distância entre dois pontos sobre aquela superfície, sendo portanto adequada para a navegação, principalmente aérea. Justifica-se assim que um avião que efetue um voo de um ponto para outro ponto, com igual latitude, no mesmo meridiano mas em posições diametralmente opostas siga uma trajetória polar e não ao longo do paralelo de latitude ou outro curso. Por provocar trajetórias em latitudes muito elevadas não é adequada para navegação marítima pelo perigo da existência de massas de gelo. Para seguir esta linha é necessário efetuar constantes correções no rumo que a aeronave ou barco segue. Quando projetada no plano cartográfico esta linha passa a ser representada por uma linha curva.

A loxodrómica é uma linha que cruza todos os meridianos segundo o mesmo ângulo. Quando projetada no plano passa a ser representada por uma linha reta. Esta propriedade foi decisiva no século XV, aquando das descobertas. Os navegadores sabiam que, saindo do ponto A deveriam seguir um determinado rumo constante para chegar ao ponto B, navegando assim ao longo de uma linha reta, embora não sendo o caminho mais curto. Se, por hipótese, fosse possível navegar com um barco sempre ao longo de uma loxodrómica, este seguiria uma rota que se aproximaria sucessivamente dos polos, só o atingindo após um número infinito de voltas. Mas a loxodrómica possui uma outra propriedade fascinante: se utilizarmos uma projeção polar estereográfica, a projeção da loxodrómica no plano cartográfico será uma espiral logarítmica, cortando todas as retas radiais segundo um mesmo ângulo. Inicialmente estudada por René Descartes (1596-1650), teve estes estudos iniciais aprofundados por Jacob Bernoulli (1654-1705) que, impressionado com as suas propriedades matemáticas, a designou por Spira Mirabilis (espiral maravilhosa). Já antes Fibonacci, através da tradução geométrica da sua sequência, tinha trabalhado nesta questão da espiral maravilhosa que hoje em dia é utilizada para justificar matemáticamente alguns fenómenos da natureza como por exemplo a distribuição dos braços de uma galáxia em espiral.

Finalmente a Topografia, como ciência que "descreve um lugar", aquela que é mais familiar ao Exército, porque está intimamente ligada ao terreno, onde os seus Oficiais, das diversas armas e serviços, escolhem as sua posições, implantam os seus órgãos e manobram as suas unidades tentando sempre tirar o máximo partido desse terreno nas suas operações. E se do antecedente as medições dos ângulos, horizontais e verticais, e das distâncias eram efetuadas recorrendo a teodolitos, verdadeiras obras-primas da engenharia mecânica, hoje em dia é possível medir as coordenadas de um ponto à superfície terrestre em poucos segundos com precisões que, em muitos casos, podem ser sub-centimétricas e com exatidões válidas para a grande maioria das aplicações militares. Recorrendo às constelações de satélites (do GPS Americano e do GLONASS Russo) e à técnica da trilateração, em que apenas são determinadas distâncias entre vários satélites e um recetor, é possível medir as coordenadas de pontos à superfície terrestre. Esta parte, como facilmente se pode concluir, não apresenta grande complexidade matemática, sendo até facilmente explicável através de simples geometria. O mesmo não se passa na forma como o sistema determina a distância, esta sim, plena de complexos cálculos matemáticos mas que, com a evolução da tecnologia e do conhecimento científico, com novos algoritmos e soluções inovadoras, se tornam cada vez mais rápidos e amigáveis, facilitando assim a tarefa do utilizador.

Estas são portanto algumas das ciências geoespaciais que, assentando numa forte matriz matemática, foram abordadas neste trabalho, conjuntamente com alguns aspetos particulares com elas relacionadas, que ilustram de forma breve mas consistente, a relação que existe entre os militares e a matemática.

Bibliografia

Torge, W., 2001, Geodesy, Walter de Gruyter, Berlin.

Gaspar, J. A., 2000, Cartas e Projecções Cartográficas, 2ª Edição, Lidel.

Casaca, J., Matos, J., Baio, M., 2000, Topografia Geral, Lidel.

Identidade Digital

Paulo Jorge Fernando Gonçalves Balsinhas
Gabinete Nacional de Segurança

Desde a antiguidade, o homem tem procurado proteger a informação que considera importante e fundamental para a obtenção dos seus objetivos.

As técnicas e metodologias utilizadas para o efeito, foram variando ao longo dos tempos, na direta medida em que as mesmas eram descobertas e deixavam de garantir o efeito para as quais tinham sido criadas, proteger de forma segura, autentica e em tempo útil a informação relevante.

Durante séculos os sistemas foram evoluindo na sua complexidade, mas baseavam-se no mesmo princípio, um algoritmo e uma chave. A segurança destes sistemas era tanto maior, quando maior fosse a complexidade do algoritmo e a capacidade de manter segura a chave entre os interveniente, pois esta era utilizada tanto para obscurecer a informação como para a tornar legível.

Em meados da década de setenta do século passado, o paradigma dos sistemas de segurança alterou-se, aparecendo um novo conceito, o da criptografia assimétrica. Este novo conceito, assente em problemas matemáticos insolúveis e materializado em diversos algoritmos, continua a ser utilizados nos dias de hoje, possibilitando a utilização de ferramentas indispensáveis no nosso dia-a-dia, entre as quais se destacam os sistemas de identidade e autenticação digital, como é o caso da banca *"online"*.

Bibliografia

Menezes A., van Oorschot, P., Vanstone, S., *Handbook of Applied Cryptography*, 1996

Schneier, B., *Applied Cryptography*, 1995

Singh, S., *THE CODE BOOK*, 2006

Bento de Jesus Caraça e a sua atuação na Atuária

João Tomas do Amaral
Faculdade de Educação
Universidade de São Paulo
Brasil
e-mail: `jamaral.cosin@uol.com.br`

Bento de Jesus Caraça (1901–1948) desenvolveu intensa e, destacada atividade como atuário junto a várias empresas – públicas e privadas –, no período de 31 de dezembro de 1927 a 25 de julho de 1947, tendo em vista os relatórios da área encontrados em seu espólio intelectual e cultural. É desse período que encontramos trabalhos de análise, pareceres, relatórios anuais, estudos e modelos matemáticos. Esses documentos, em geral, estão consolidados na forma de relatórios com a sua assinatura e devidamente identificada como Atuário. Entre os organismos e empresas para os quais desenvolveu trabalhos nessa área encontramos: Caixa de Previdência e Assistência dos Oficiais, Tripulantes da Marinha Mercante Nacional; Caixa de Pensões e Reformas "28 de Maio" da Câmara Municipal do Porto; Subsecretaria de Estado das Corporações e Previdência Social; Junta Nacional do Vinho; Associação dos Socorros Mútuos da Cooperativa dos Empregados do Banco Nacional Ultramarino; Associação dos Funcionários da Colônia da Guiné; O Legado do Operário d'Évora e Banco de Portugal.

Manteve contato próximo e conversações, por correspondência, com alguns dos atuários espanhóis, bem como participou, provavelmente desde os anos de 1930, dos iniciais trabalhos para rearticulação do Instituto dos Actuários Portugueses – IAP. Esse Instituto de forma reconhecida e veemente toma posição em 31 de outubro de 1946, ao lavrar em sua ata de número 10, como resultado da Assembleia Geral, ocorrida na sede do Banco de Português do Continente e das Ilhas, localizado na Rua dos Sapateiros, 55, em Lisboa, a decisão sobre a elaboração e a expedição de carta de repudio à:

> *[...] demissão, mediante processo disciplinar, do lugar de professor catedrático do Instituto Superior de Ciências Econômicas e Financeiras do doutor Bento de Jesus Caraça que honra o Instituto dos Actuários Portugueses como sócio fundador e actuário de primeiro plano.*

Ressaltamos, também, que seu primeiro livro didático "Interpolação e Integração Numérica", publicado em 1933, é uma obra dedicada a algumas aplicações da atividade atuarial, resultado da consolidação de uma série de artigos publicados na Revista de Economia, do Instituto Superior de Ciências Econômicas e Financeiras (ISCEF), da Universidade Técnica de Lisboa. A publicação dessa obra constituiu-se num fato inédito e significativo para a época, sendo recebida de maneira muito apreciada e elogiosa pelos profissionais com atuação no ramo de seguros de vida e pela imprensa especializada. No tocante à imprensa especializada, destacam-se significativos comentários de vários setores, mas distinguiremos, especificamente, o artigo de Fernando Berderode, um dos mais importantes profissionais da área atuarial, desse período, que manteve uma coluna na Revista Portuguesa de Seguros durante vários anos. Nesse artigo, Brederode destaca a relevância do livro por não se destinar aos leigos, mas por suprir as necessidades dos profissionais do setor de seguros de vida, colocando em destaque algumas das aplicações desenvolvidas – interpolação numa tábua de mortalidade, cálculo da taxa instantânea de mortalidade, fórmula de Gregory aplicada aos seguros de vida, cálculo de uma anuidade vitalícia contínua ou fracionada e sobre os coeficientes da fórmula de Lubbbock –, e, também, enaltece as qualidades, intelectual e profissional, de Bento de Jesus Caraça, embora, ainda, com pouca idade. Neste artigo, breve e pontual, Fernando Brederode, em 1933, apresenta aos especialistas da área de seguros de vida um:

> Livro [**Interpolação e Integração**] que não é para profanos, onde o sábio e talentoso professor trata um problema dos mais necessários ao técnico de seguros de vida duma profissão que se designa pela quase desconhecida palavra: **Actuário**.
>
> Entre as várias aplicações e exemplos que o Sr. Dr. Caraça [Bento] magistralmente resolve no seu livro, encontra-se a interpolação numa tábua de mortalidade em que idades são representadas por números inteiros (página 50), o cálculo da taxa instantânea de mortalidade (página 115), a aplicação aos seguros de vida da velha fórmula de Gregory (página 149), o cálculo de uma anuidade vitalícia contínua (página 153) ou fracionada (página 171), a referência a valores numéricos dos coeficientes da fórmula de Lubbock publicados no Text-book de King (página 177).
>
> Já vêm, pois, **todos aqueles a quem interesse por obrigação ou por devoção os problemas dos seguros de vida** que o livro [**Interpolação e Integração Numérica**] do Sr. Dr. Caraça [Bento de Jesus] **encontrarão farta matéria aproveitável apresentada com aquela ciência e talento de que o ilustre professor, apesar de novo, tem dado tão numerosas provas**. (BREDERODE, 1933, pp. 5–6, grifo e acréscimo nosso).

Ainda, nesta área, temos o livro "Bento de Jesus Caraça – Inéditos de Economia Matemática", sua décima primeira obra, editada em junho de 2010, em primeira edição, no âmbito da coleção "Temas de Matemática"; um projeto entre a SPM – Sociedade Portuguesa de Matemática – e a Editora Gradiva. Uma obra póstuma de Bento Caraça, como resultado da investigação e organização cuidadosa de Carlos Bastien, professor do Instituto Superior de Economia e Gestão (ISEG), da Universidade de Lisboa, bem como pesquisador sobre a história do pensamento econômico português e das intervenções de Bento Caraça no âmbito da Economia. Essa obra possui uma expressiva introdução de autoria de Carlos Bastien, abordando de forma esclarecedora sobre a atuação de Bento Caraça pelos caminhos da Economia – a formação e os primeiros escritos econômicos, a possível investigação científica econômica, a criação e a direção do CEMAE – Centro de Estudos de Matemática Aplicada à Economia, a econometria, o cálculo atuarial e a segurança social, e, ainda, a Revista de Economia. Nessa obra estão presentes os artigos relativos aos temas econômicos publicados em revistas e escritos inéditos da área de econômica constantes de seu espólio intelectual e cultural.

O percurso de Bento de Jesus Caraça como Atuário está constatado e delimitado pela sua obra inicial "Interpolação e Integração Numérica" e a obra mais recente, póstuma, "Bento de Jesus Caraça – Inéditos de Economia Matemática". Certamente, constituem, ainda, essa trajetória os seus escritos e registros preservados, em seu espólio intelectual e cultural, de alguns de seus trabalhos na área por meio de relatórios. Assim, está devidamente evidenciada e confirmada uma das vertentes, pouco conhecida, da atuação profissional de Bento Caraça. Na época, essa atividade era compreendida como uma das possibilidades de atuação da área de Economia, embora não exclusiva, e designada pela, então, quase desconhecida palavra – Actuário. Essa intervenção de Caraça ocorreu tanto no âmbito acadêmico quanto como profissional liberal, bem como investiu esforços na organização da atividade classista ao participar do movimento de reorganização ou de fundação do IAP – Instituto dos Actuários Portugueses, em que permaneceu como sócio até o seu falecimento. Portanto, esta trajetória de Bento de Jesus Caraça como atuário constitui-se numa importante oportunidade de estudos de investigação para melhor compreendermos esse homem múltiplo, por seus pensamentos e ações, bem como por representar uma das vultosas e referenciais personalidades da história da cultura portuguesa.

Bibliografia

AMARAL, J. T., **Bento de Jesus Caraça – Uma Visão Sobre o Valor Humano e o Valor Social da Matemática e Suas Implicações no Ensino**. 2014. Tese de Doutorado. Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo – Brasil.

BASTIEN, C. (organização e introdução), **Bento de Jesus Caraça – Inéditos de Economia Matemática**. Lisboa: SPM/Gradiva Editora, 2010.

BREDERODE, F., **Interpolação e Integração Numérica**. Revista Portuguesa de Seguros, nº 17, Lisboa, 1933.

Paul Bernays (1888–1977)

Reinhard Kahle
CMA & DM, FCT, Universidade Nova de Lisboa
e-mail: kahle@mat.uc.pt

Paul Bernays (1888-1977) was a distinguished mathematical logician. In Portugal, he should be known as Ph.D. supervisor of Hugo Baptista Ribeiro, an important representative of the *Geração 40*.

The year 2017 marks the centenary of David Hilbert's seminal talk on *Axiomatisches Denken* [5], given in September 1917 in Zurich. At this opportunity, he hired Bernays as his assistant for foundational research. Having studied and worked in the mathematical center of the early 20th century, the University of Göttingen, Bernays was, due to his jewish faith, one of the first victims of the Nazi regime in 1933. After settling in Zurich, he still finished the two volume book *Grundlagen der Mathematik*, published under the joint authorship of Hilbert and Bernays in 1934 and 1939, [7]. Bernays was not only the philosophical mastermind behind Hilbert's foundational programme, he also laid down a philosophy of mathematics which can be considered as the most adequate one for the working mathematician–then and now.

Paul Bernays was born in 1888 in London, where his father was a businessman; the family moved soon to Paris and then further to Berlin where Bernays grew up. According to his own testimony [2] he had a happy family life during his childhood. Starting studying mathematics in Berlin he moved after two years, in 1909, to Göttingen where he received his PhD in analytic number theory under the supervision of Edmund Landau in 1912. Afterwards he was assistant of Ernst Zermelo in Zurich. In 1917 he returned to Göttingen to become Hilbert's main collaborator in the foundations of mathematics. In 1922 he obtained an associate professorship (without tenure) in Göttingen, but was dismissed as "non-aryan" when the Nazis came to power in 1933. Being of Swiss citizenship, he moved again to Zurich where he received first just term-based lectureships at the ETH; only in 1945 he got a position as 50% associate professor, which was raised to 100% in 1952. He retired in 1958 but remained scientifically active up to his death in 1977. In 1935/36 he was guest at the Institute of Advanced Studies in Princeton, and he was three times visiting professor in the 1950s and 60s at the University of Pennsylvania and on one occasion at the IAS. In 1976 he received a honorary Ph.D. from the University of Munich.

Bernays's research covers a wide range. Starting from analytic number theory in his dissertation–his supervisor Landau called him once "my second best number theory student"–it was centered in the foundations of mathematics. As Hilbert's assistant he was the mastermind behind the development of proof theory. At this time he contributed to the initials of recursion theory, when Rózsa Péter and Wilhelm Ackermann worked under his guidance in Göttingen. It is worth noting that he also identified the difference of *call-by-value* and *call-by-name* reduction strategies [3] which are today fundamental in functional programming. Later on, Bernays contributed significantly to set-theory, when he put von-Neumann's axiomatization in a standard form, now known as *von-Neumann–Bernays–Gödel set theory* [4]; he also introduced the *axiom of dependent choice* which solves, to some extent, the questions discussed concerning Zermelo's extensive use of the unrestricted axiom of choice. From the 5th edition on, he contributed substantially to Hilbert's re-editions of the *Grundlagen der Geometrie* [6]. Finally, being strongly influenced by Leonard Nelson in Göttingen and Ferdinand Gonseth in Zurich, he had a firm philosophical interest which was not restricted to philosophy of mathematics [1], but covered epistemology in its own.

References

[1] P. Bernays. *Abhandlungen zur Philosophie der Mathematik* Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1976.

[2] P. Bernays. "Kurze Biographie", *Sets and Classes*, North Holland, Amsterdam, 1976, Ed. G.H. Müller, pp. xiv–xvi.

[3] P. Bernays. "Review of Alonzo Church, J. B. Rosser. Some properties of conversion", Journal of Symbolic Logic, Vol. 2 (1936), pp. 74–75.

[4] P. Bernays and A.A. Fraenkel. *Axiomatic Set Theory*, North Holland, Amsterdam, 1958.

[5] D. Hilbert. "Axiomatisches Denken", Mathematische Annalen, Vol. 78 (1918), pp. 405–415.

[6] D. Hilbert. *Grundlagen der Geometrie*, Teubner, Leipzig, 5th ed., 1922.

[7] D. Hilbert and P. Bernays. *Grundlagen der Mathematik*, Volume 1 and 2. Springer, Berlin, 1934, 1939; 2nd edition, 1968, 1970.

Investigação apoiada pelo projecto *Hilbert's 24th Problem*, PTDC/MHC-FIL/2583/2014, e o *Centro de Matemática e Aplicações*, UID/MAT/00297/2013, financiados pela Fundação para a Ciência e a Tecnologia, e pela *Swiss National Science Foundation (SNSF)* no âmbito de uma *International short research visit* na ETH Zurique com o título *Paul Bernays' Philosophy of Mathematics* (175054).

Alguns cometas dos séculos XVI e XVII

Carlota Simões
Centro de Física da Universidade de Coimbra
Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra
e-mail: `carlota@mat.uc.pt`

1 O Grande Cometa de 1577

Quanto em Novembro de 1577 se tornou visível um cometa com um brilho de magnitude -7 (Stoyan, 2015), mais brilhante que o planeta Vénus, D. Sebastião preparava a cruzada contra o sultão de Marrocos. A aparição de um cometa naquele momento foi logo considerada um mau presságio.

Na verdade, o Grande Cometa de 1577 foi visto por toda a Europa: John Dee observou-o em Inglaterra, Tycho Brahe observou-o na Dinamarca. Johannes Kepler viu-o aos seis anos de idade e mais tarde pôde estudá-lo a partir das notas de Brahe. Em Portugal, o cometa foi visto entre 7 de novembro de 1577 e 12 de janeiro de 1578 (Sousa, 1730), (Bayão, 1737). Autores do século XVI relacionaram o cometa de 1577 com a morte do rei Sebastião (Zamorano, 1594). Na Biblioteca Nacional de Portugal existe uma pasta cheia de lendas, profecias e mitos sobre o rei Sebastião, com várias referências a este cometa (Codex 400, BNP). O Padre José Pereira Bayão (1737) refere uma carta enviada pelo Papa Gregório XIII ao Rei D. Sebastião com um vaticínio baseado no cometa (Rovere, 1577).

Como astrónomo, Pedro Nunes terá observado o cometa; como Cosmógrafo Real do Reino, terá tido acesso à carta do Papa referida por Bayão, apesar de nenhuma referência a tal existir. Podemos também argumentar que Nunes estava muito velho e doente para ser contactado para estes assuntos, pois em 1577 foi consultado pelo Papa Gregório XIII acerca do projeto de reforma do calendário, mas já não deu resposta.

2 D. Catarina e D. Sebastião

Tanto a Rainha D. Catarina como o seu neto, o Rei D. Sebastião, nasceram órfãos de pai. Os pais de Catarina eram o Príncipe Filipe I (1478-1506) e a Rainha Joana de Castela (1479-1555). Filipe I morreu a 25 de setembro de 1506 e Catarina nasceu vários meses depois, a 14 de janeiro de 1507. Sebastião era filho do Príncipe João Manuel (1537 -1554) e da sua prima Joana da Áustria (1535-1573). João Manuel morreu a 2 de janeiro de 1554 e Sebastião nasceu algumas semanas depois, a 20 de janeiro de 1554.

Suplemento do Boletim da SPM 76, Dezembro 2018, pp. 123-125

Um cometa foi visto durante o Verão de 1506, algumas semanas antes da morte de Filipe I, parecendo anunciá-la (Salmeron,1646). Quando outro cometa se tornou visível a 7 de novembro de 1577, foi visto como sinal de mau agoiro. A 5 de fevereiro de 1578 D. Catarina foi informada da decisão de seu neto: não só estava certa a cruzada em África, como o próprio Rei iria fazer parte dela. A Rainha adoeceu logo a seguir. No dia 10 de fevereiro, já muito doente, deitada na cama, pedia que aconselhassem o neto não ir a África (Bayão, 1737). O neto foi visitá-la a 11 de fevereiro mas ela já não falava e morreu algumas horas depois. Afinal, para Catarina, o cometa de 1506 anunciara o seu nascimento e o cometa de 1578 anunciava a sua morte.

O Rei Sebastião prosseguiu com os seus planos: a batalha de Alcácer-Quibir ocorreu a 4 de agosto de 1578 e ali morreu o Rei. Pedro Nunes morreu uma semana após a batalha, a 11 de agosto de 1578, no dia em que os regentes do Reino de Portugal receberam informações oficiais sobre a morte do Rei (Veiga, 2008). Não há forma de saber se Pedro Nunes soube dos resultados catastróficos da batalha e da morte do Rei. Não conhecemos sequer a sua condição de saúde na época. E certamente não houve cerimónias em honra do Cosmógrafo Real, já que o reino estava de luto pelo seu Rei. O Rei estava morto, o seu corpo tinha que ser recuperado, milhares de nobres tinham morrido na batalha e muitos outros precisavam ser resgatados.

3 O Cometa Halley

As observações que diversos astrónomos fizeram do Grande Cometa de 1577 (C/1577 V1) permitem hoje reconstruir com algum rigor a sua trajectória, que é parabólica (Stoyan, 2015). Também o cometa de 1506 (C/1506 O1) tem trajectória parabólica (Stoyan, 2015) e nenhum deles irá regressar.

Cristovão Borri dedicou uma parte da sua *Collecta Astronomica* (1631) ao estudo dos cometas: ali se encontram comentários às observações do cometa de 1577 por Tycho Brahe, mas também observações do cometa de 1618, que o próprio Borri observou na Cochinchina. Johannes Kepler viu o cometa de 1577 quando criança e pôde estudá-lo a partir das notas de Brahe; mais tarde pôde observar e estudar com rigor o cometa de 1607.

Quando Edmond Halley (1656-1742) observou um cometa em 1682, tinha acesso a estudos e observações de cometas do passado. Particulamente importantes foram o cometa de 1607, observado por Kepler, e o de 1531, observado por Petrus Apianus. As anotações rigorosas de Kepler de 1607, juntamente com as suas observações de 1682, levaram-no a deduzir que os cometas de 1531, 1607 e 1682 eram afinal um só, com uma órbita elíptica e um período de $75,3$ anos, e que regressaria em 1759, o que de facto aconteceu, ficando o cometa com o seu nome.

Parte da motivação para o estudo e a observação dos cometas durante os séculos XVI e XVII era a produção de vaticínios (Lanuza-Navarro, Navarro, 2013), mas a recolha rigorosa de dados astronómicos permitiu a Edmond Halley prever o retorno do cometa que ficou com o seu nome, e permite, nos nossos dias, reconstruir as órbitas de cometas não periódicos que nos visitaram uma única vez, como aconteceu com o Grande Cometa de 1577.

Referências

[1] Bayão, Padre José Pereira, *Portugal Cuidadoso e Lastimado com a vida e perda do Senhor Rey Dom Sebastião*, Lisboa Occidental, Lisboa, 1737.

[2] Borri, Christophoro, *Collecta Astronomica*, Matthiam Rodrigues, Lisboa, 1631.

[3] Codex 400, *Profecias Sebastianistas*, Biblioteca Nacional de Portugal.

[4] Lanuza-Navarro, Tayra; Navarro Brotons, M.C. Victor, 'Prophecy and Politics in Spain: Celestial Novelties and the Science of the Stars, 1572-1630'. *Estratto da Celestial Novelties on the Eve of the Scientific Revolution 1540-1630.* ed. Tessicini, Boner. Firenze, 2013, pp. 33-56.

[5] Rovere, M. Hercule, *Vaticinio, General Discorso di M. H. d. Rovere Astrologo Bolognese.*, Appresso Giorgio Marscotti, Fiorenza, 1577.

[6] Sousa, Manuel de Faria e, *Epitome de las Historias Portuguesas*, Francisco Martinez, Madrid, 1628.

[7] Sousa, Manuel de Faria e, *Epitome de las Historias Portuguesas*, Francisco Foppens, Bruxelas, 1730.

[8] Veiga, Carlos Margaça, *A Perda da Independência, de Alcácer Quibir aos Açores 1578-1583*, Academia Portuguesa de História (Lisboa: QUIDNOVI, 2008).

[9] Salmeron, Marcos, *Recuerdos históricos y políticos*, Bernardo Nogues, Valencia, 1646.

[10] Stoyan, Ronald, *Atlas of Great Comets*, Cambridge University Press, Cambridge, 2015.

[11] Zamorano, Rodrigo, *Cronologia y repertorio dela razon de los tempos*, Rodrigo de Cabrera, Sevilla, 1594.

280 Anos de Teoria de Grafos

Teresa Sousa
Escola Naval & CINAV-Centro de Investigação Naval
Escola Naval - Alfeite
Centro de Matemática e Aplicações da UNL
e-mail: `teresa.maria.sousa@marinha.pt`

> The origins of graph theory are humble, even frivolous. Whereas many branches of mathematics were motivated by fundamental problems of calculation, motion, and measurement, the problems which led to the development of graph theory were often little more than puzzles, designed to test the ingenuity rather than to stimulate the imagination. But despite the apparent triviality of such puzzles, they captured the interest of mathematicians, with the result that graph theory has become a subject rich in theoretical results of a surprising variety and depth. [1]

A 25 de Agosto de 1735, Leonard Euler apresentou um artigo à Academia da Ciências de São Petersburgo no qual descrevia a solução de "um problema relacionado com a geometria de posição". O problema em causa era conhecido como o problema das pontes de Könisberg. *É possível encontrar um caminho que atravesse as 7 pontes de Könisberg exactamente uma vez?* Euler prova que tal caminho não existe e descreve um método geral para a resolução deste e de outros problemas do mesmo tipo. A sua demonstração envolve referências à disposição real das pontes, mas na essência, Euler prova o primeiro teorema em teoria de grafos, caracterizando um importante conjunto de grafos que, mais tarde, ficaram conhecidos como grafos Eulerianos.

Um grafo é constituído por um conjunto de vértices e arestas (ou linhas) que unem os vértices. Um caminho num grafo é uma sequência alternada de vértices e arestas, enquanto que um ciclo é um caminho com início e término no mesmo vértice.

Em 1857, William Hamilton inventou um jogo (The Icosian Game) cujo objetivo era encontrar ciclos ou caminhos no grafo do dodecaedro que percorressem todos os vértices uma e uma só vez. Este jogo deu origem ao estudo do que mais tarde viria a ser designado por caminhos e ciclos Hamiltonianos. Nasce, assim, o estudo dos grafos Hamiltonianos. Infelizmente, estes grafos são mais difíceis de caracterizar do que os grafos Eulerianos, sendo que, até à data, não existe nenhuma condição necessária e suficiente para que um grafo seja Hamiltoniano.

Uma árvore é um grafo que não tem ciclos. A primeira referência escrita do termo “árvore” surge em 1857, num artigo de Arthur Cayley intitulado *On the theory of the analytical forms called trees* e publicado na *Philosophical Magazine* [2], embora o conceito tenha sido usado, anos antes, pelo físico Gustav Kirchhoff nos seus estudos sobre redes eléctricas. Os resultados de Cayley, sobre árvores, tiveram implicações nos estudos sobre composições químicas que estavam a decorrer na época. O termo “grafo”, em particular, foi introduzido pela primeira vez por J. Sylvester, num artigo intitulado *Chemistry and Algebra*, publicado na revista *Nature*, em 1878. [4]

Outra classe importante de grafos é conhecida como grafos planares. Um grafo diz-se planar se pode ser desenhado no plano sem cruzamentos de arestas. O estudo de grafos planares teve a sua origem no seguinte puzzle. *Será possível ligar 5 cidades por estrada de modo a que as estradas não tenham cruzamentos?* As 5 cidades e as 10 estradas podem ser vistas como sendo os vértices e as arestas de um grafo completo com 5 vértices, denotado por K_5, e o problema em causa pergunta se é possível desenhar K_5 no plano sem cruzamentos de arestas. Bastarão, ao leitor, algumas tentativas para ficar convencido de que tal tarefa parece impossível. Outro puzzle sobre planaridade aparece em 1913, escrito por H. Dudeney na *Strand Magazine*. Neste puzzle quer-se mostrar que o grafo bipartido completo $K_{3,3}$ também não é planar. Em 1930, Kazimierz Kuratowski publica uma condição necessária e suficiente para que um grafo seja planar, demonstrando que *qualquer grafo não-planar contém um subgrafo homeomorfo a K_5 ou $K_{3,3}$*. Ou seja, os grafos K_5 e $K_{3,3}$ são o único obstáculo à planaridade.

Apesar dos desenvolvimentos na área, o primeiro livro didático sobre grafos surge em 1936, escrito por Dénes König, isto é, exactamente 200 anos após a publicação do primeiro artigo neste tópico, escrito por Leonard Euler. Pouco tempo depois, em 1969, Frank Harary publica o seu livro *Graph Theory*, o qual viria a ser uma referência mundial para quem quisesse estudar teoria e grafos.

Um dos problemas mais famosos e importantes em teoria de grafos é, sem dúvida, o problema das 4 cores. Em 1852 é colocada a questão de saber se 4 cores serão suficientes para colorir qualquer mapa plano, de modo a que regiões com fronteira comum não partilhem a mesma cor. Transformando mapas em grafos planares, o problema das 4 cores é equivalente a perguntar se todo o grafo planar admite uma coloração dos seus vértices, usando no máximo 4 cores, de modo a que vértices ligados por uma aresta tenham cores diferentes. A resolução deste problema permaneceu em aberto durante mais de um século, tendo sido demonstrado apenas em 1976. No entanto, os avanços e recuos que ocorreram entre a sua formulação, em 1852, e a sua demonstração, em 1976, não foram infrutíferos. Na realidade, a procura pela demonstração do problema das 4 cores durante mais de um século foi, sem dúvida, um dos maiores catalisadores do desenvolvimento e afirmação matemática da área de teoria de grafos.

Um grafo é, na verdade, uma ferramenta matemática versátil que permite a resolução de diversos problemas do mundo real. Nestes 280 anos, a Teoria de Grafos cresceu e desenvolveu-se com aplicações em diversas áreas. Por exemplo, na Ciência da Computação tem aplicações importantes no estudo de redes de comunicação e no desenvolvimento de algoritmos eficientes para a resolução de diversos problemas do mundo real. Em Química e Física os grafos são usados no estudo de moléculas e na física da matéria condensada. E não podemos esquecer a sua importância no estudo de redes eléctricas. A Teoria de Grafos é também muito usada na Sociologia, para estudar diversas propriedades de redes sociais. Finalmente, a Teoria de Grafos tem um papel de relevo em diversos ramos da matemática, incluindo teoria de grupos, teoria das matrizes, análise numérica, probabilidade, topologia e combinatória.

Referências

[1] N. L. Biggs, E. K. Lloyd, R. J. Wilson, *Graph Theory 1736-1936*, Oxford University Press, 1986.

[2] A. Cayley "On the theory of the analytical forms called trees", *Philosophical Magazine*, Vol.13, No.4 (1857), pp. 172-176.

[3] R. Diestel, *Graph Theory*, Springer Verlag, 2000.

[4] J. Sylvester "Chemistry and Algebra", *Nature*, Vol.17 (1877-8), pp. 284.

[5] Douglas B. West, *Introduction to Graph Theory*, Prentice Hall, 2001.

Cifras em correspondência numa conspiração contra a ditadura em 1932

Carlos Albuquerque
Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências
Universidade de Lisboa
e-mail: `cmalbuquerque@ciencias.ulisboa.pt`

O trabalho aqui descrito teve como objetivo descriptar as partes cifradas de cartas trocadas entre opositores à ditadura em 1932 publicadas em [3].

Em maio de 1932 encontravam-se deportados em Cabo Verde oficiais militares e civis que tinham estado ligados às revoltas contra a ditadura [3]. Entre os oficiais o mais graduado era o General Adalberto Gastão de Sousa Dias, que tinha comandado a revolta de fevereiro de 1927 e depois tinha aceitado comandar na Madeira a revolta das ilhas de abril de 1931 [9]. O General Sousa Dias e outros deportados constituíram seu representante, perante outros grupos de oposição à ditadura, o Primeiro-Tenente de Marinha Fernando Felner Arantes Pedroso. Em junho de 1932 Arantes Pedroso conseguiu fugir para Espanha e manteve-se em contato com os deportados [3].

Em 1975 Oliveira Marques publicou diversa correspondência trocada na sequência da fuga de Arantes Pedroso [3]. Entre esta correspondência encontram-se várias cartas com partes cifradas: duas cartas com cifras numéricas enviadas a Arantes Pedroso e cinco cartas trocadas entre Sousa Dias e Arantes Pedroso com cifras alfabéticas.

Uma das cartas com cifras numéricas apresenta anotações que aparentam ser o resultado do descriptamento das partes cifradas, o que facilitou a abordagem. Trata-se de uma cifra de substituição simples com inserção de algarismos aleatórios para dificultar o ataque. Esta cifra foi descriptada e foram obtidos os textos em claro.

Para o ataque às cifras alfabéticas foi escolhido o trecho mais extenso entre os que se encontravam nas cartas. Na cifra ocorrem 23 letras e começou-se por uma análise de frequências. Os gráficos não indicavam as diferenças esperadas numa cifra de substituição simples. Calculou-se de seguida o índice de coincidência [1], que sugeriu uma cifra polialfabética.

A primeira hipótese considerada foi a de se tratar de uma cifra de Vigenère [8]. Para o ataque foi usado o método de Kasiski para determinar o comprimento da chave, aplicando-se de seguida a análise de frequências. Foi assim possível descriptar o texto de que se partiu, confirmando-se que se tratava de uma cifra de Vigenère com uma chave de 4 letras. Constatou-se depois que em todas as cartas era usada a mesma cifra com a mesma chave.

O uso da cifra na comunicação entre Arantes Pedroso e outros elementos da oposição à ditadura justificava-se pois discutia-se o derrube da ditadura e planos de fuga dos deportados em Cabo Verde para Espanha. Em particular o General Sousa Dias estava detido em Cabo Verde, pelo que supomos que a troca de correspondência com partes cifradas seria feita através de portadores de confiança e não através da correspondência normal.

O uso das cifras permitiria não só ocultar as partes sensíveis da correspondência aos portadores como também manter o segredo no caso das cartas cairem nas mãos da polícia. Em carta de 12/10/1932, Sousa Dias dava conta a Arantes Pedroso das suas preocupações com a segurança: "Dei conhecimento da parte «reservada» (...) apenas aos que presumo possuirem os «sagrados oleos» para comungarem. E, evidentemente, só aos que se encontram por este «poizio» – , pois que aos dos outros nucleos, não desponho de meios seguros de os inteirar de tal." Sobre a censura à correspondência pela polícia, Arantes Pedroso escrevia a Sousa Dias em 19/11/1932: "Pensava que a minha carta de 28 d'Agosto tivesse caído nas mãos criminosas da policia (...)"

A utilização da cifra de Vigenère em 1932 em Portugal levanta algumas questões relativas à segurança real da cifra e à segurança percecionada pelos utilizadores. Desde 1863 estava publicado por Kasiski um método de descriptação desta cifra. Este método baseia-se na determinação do comprimento da chave a partir das distâncias entre repetições de sequências de letras cifradas. Ainda antes de Kasiski, Babbage tinha descriptado mensagens cifradas com a cifra de Vigenère, mas não publicou o método [8]. Em 1918 Langie publicou em Paris um livro que descrevia o método de ataque para a cifra de Vigenère. Este livro teve tradução em inglês publicada em Londres em 1922 [2]. Em 1944, Fernando de Almeida Ribeiro publica, em separata da «Coimbra Médica», um texto que descreve a solução pelo método de Kasiski e inclui na bibliografia o livro de Langie em francês de 1918. Verificamos assim que era plausível que em 1932 houvesse em Portugal pessoas com acesso à informação necessária para descriptar as cifras usadas por Sousa Dias e Arantes Pedroso.

Uma questão que se levanta é saber se a polícia política ou os militares teriam conhecimentos para descriptar esta cifra. Da descrição da evolução da polícia política de 1926 a 1945 de Ribeiro [5], não parece plausível que a polícia tivesse essa capacidade. Não sabemos que competências haveria nos serviços de comunicações do exército ou da marinha. Outra questão é se

Sousa Dias sabia que a cifra era vulnerável e, em caso afirmativo, se confiava na falta de capacidade da polícia ou dos militares fiéis ao regime.

É interessante notar que uma cifra de Vigenère com uma chave de quatro letras, usada nestas mensagens, parecia estar nos limites da capacidade de cifrar e decifrar dos correspondentes. As cifras transcritas em [3] apresentam vários erros e pelo menos alguns deles deveriam figurar já nas cartas originais, pois em 12/10/1932 Sousa Dias queixa-se expressamente: "Ciente de toda a matéria em cifra. Mas sempre tenho a dizer e solicitar-lhe – que se dê ao trabalho, depois de confecionada a «Obra», de a revêr e conferir. Esta agora, com a omissão e troca de letras, ia-me deixando a mioleira em pasta liquefeita e pronta a uma analise que me levaria – não resta duvida – ao meu internato num hospício de alienados!..."

Sobre a história da utilização das cifras pelo exército em Portugal, existem algumas referências em [6] e em [7] , mas não permitem esclarecer as questões acima.

Referências

[1] H. Campaigne, *The Index of Coincidence*, National Security Agency, Washington, 1955.

[2] A. Langie, *Cryptography*, Constable and Company, London, 1922.

[3] A. Marques (org.), *O General Sousa Dias e as Revoltas Contra a Ditadura 1926-1931*, Publicações D. Quixote, Lisboa, 1975.

[4] F. Ribeiro, *"Dois dedos" de criptografia*, Livraria Académica, Coimbra, 1944.

[5] M. Ribeiro, *A Polícia Política no Estado Novo 1926-1945*, Editorial Estampa, Lisboa, 2000.

[6] N. Santos, *A criptografia histórica*, Lisboa, 1982.

[7] J. Serrão, "Generalidades sobre criptografia", *Revista Militar*, Vol. 117, No. 8-9 (1965), pp. 462-484.

[8] S. Singh, *The Code Book*, Fourth Estate, London, 1999.

[9] A. Valente, "Em Memória do General Adalberto Gastão de Sousa Dias", *Revista Militar*, No. 2436 (2005), acedido em http://www.revistamilitar.pt/artigo/3, em maio de 2017.

Daniel Augusto da Silva e as Congruências Binómias

Miguel Martins
Departamento de Matemática
Faculdade de Ciências
Universidade de Lisboa
e-mail: miguelplmartins561@gmail.com

Esta comunicação tem como objectivo analisar a Memória de Daniel Augusto da Silva, *Propriedades Geraes e Resolução Directa das Congruencias Binomias*, apresentada na 1ª Classe da Academia Real das Sciencias de Lisboa, na sessão do dia 24 de Março de 1852. No meu trabalho, tratei a extensa e rigorosa procura de uma fórmula geral de resolução da congruência binomia geral $\Big(axs \equiv b(mod \cdot N)$, para quaisquer a, s, N inteiros$\Big)$ de Daniel da Silva, que infelizmente, teve que ser interrompida, por motivos de saúde do autor, muito próxima do seu fim.

Para encontrar tal fórmula, da Silva dedicou-se ao longo processo de descobrir outras para importantes casos particulares, complementando sempre o seu estudo com resultados de interesse geral no âmbito da Teoria dos Números (bons exemplos disto são o capítulo IV, totalmente dedicado à apresentação de um método de construção de um tabela de raízes primitivas de números primos, e a primeira parte do capítulo IX, onde são estudadas com certa rigorosidade as propriedades dos radicais modulares). São também apresentadas, no capítulo X (um dos capítulos incompletos), algumas aplicações destas fórmulas na resolução de determinados problemas, como por exemplo, na demonstração da generalização do Teorema de Wilson.

Bibliografia Essencial

DA SILVA, Daniel, *"Propriedades Geraes e Resolução Directa das Congruencias Binomias"*, Impr. Nacional, 1854.

DIONÍSIO, José Joaquim, "No Centenário de Daniel Augusto da Silva", *Memórias da Academia das Ciências de Lisboa*, Classe de Ciências, XXII, 1978/79, 167–188.

OLIVEIRA J. Silva, "Daniel Augusto da Silva", *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática*, 2, 1979, 3–15.

TEIXEIRA, Francisco Gomes, "Elogio Histórico de Daniel Augusto da Silva", in: *Panegíricos e Conferências.* Coimbra: Imprensa Universidade, 1925, pp. 155–193.

Seguros e Finanças – revista pioneira na divulgação e promoção do seguro Vida

Ana Patrícia Martins
Escola Superior de Educação de Viseu & CIUHCT
e-mail: `anapatmartins@gmail.com`

As primeiras companhias de seguros ramo Vida portuguesas foram fundadas na 1.ª metade do século XIX mas foi somente no século XX que os seguros Vida singraram em Portugal. A seguradora *A Nacional* iniciou essa nova fase.

Estabelecida em 1906, *A Nacional* teve como director, e actuário, Fernando Brederode (1867–1939), figura incontornável no desenvolvimento da indústria dos seguros em Portugal nas primeiras décadas do século XX. Nesta comunicação referimo-nos a uma das suas iniciativas – a criação da revista *Seguros e Finanças*, estabelecida com o intuito inicial de lançar essa companhia de seguros.

Seguros e Finanças foi publicada em duas séries. A primeira, de 1906 a 1911, desde cedo se tornou um veículo de moralização dos seguros Vida em Portugal. Contou com 19 números (15 dos quais até 1908) e 272 páginas (uma média de 14 páginas por número). O seu diretor declara a pretensão de "tornar o seguro popular" em Portugal, à semelhança do que já se observava em outros países europeus. Uma segunda série se publicou nos anos 1926 e 1927, como reação a uma crise "angustiante" na indústria dos seguros, com ameaça de descredibilização de companhias sérias. Totalizou 9 números (7 dos quais em 1926) e 88 páginas (uma média de 10 páginas por número).

Em *Seguros e Finanças* procura-se dar a conhecer o progresso da indústria dos seguros ramo Vida em Portugal. Notamo-lo pela referência quer a legislação nacional, a tentativas de organização desse ramo de seguros, por parte do Estado, (nomeadamente o Conselho de Seguros, entidade fiscalizadora criada em 1907), a bibliografia (jornais e teses de doutoramento em seguros) ou à actividade de companhias de seguros.

Surge numa época em que se regulamentam, pela primeira vez, os seguros, em particular do ramo Vida – o decreto-lei de 21 de outubro de 1907 estabelece a obrigatoriedade de constituição de reservas matemáticas por parte das seguradoras; regulamenta as sociedades estrangeiras, criando obrigatoriedade de constituição de reservas em Portugal (como forma de "restringir a emigração do ouro"); define a existência de fiscalização por parte do Estado; e torna obrigatória a autorização para exercício de actividade. Em 1929 regulamentam-se, de novo, os seguros (em particular, de Vida), reconhecendo-se que a lei de 1907, não se tinha aplicado, na sua maioria – o conteúdo da segunda série de *Seguros e Finanças* ilustra essa lacuna.

Para além do interesse em divulgar o panorama nacional, na revista *Seguros e Finanças* também se destaca a perspetiva internacional do desenvolvimento dos seguros ramo Vida. Notamo-lo pela referência a legislação estrangeira (na 1.ª série, 15 países são mencionados, com maior destaque para os 4 primeiros – Dinamarca, Suíça, Alemanha, Estados Unidos da América, México, Argentina, Noruega, Japão, França, Hungria, Áustria, Espanha, Uruguai e Itália; na 2.ª série, apenas se refere o Brasil), a bibliografia (na 1.ª série, 3 títulos provenientes da Alemanha, 3 da Espanha, 3 de França e 1 do Brasil; na 2.ª série, 8 títulos de França) e a sessões do Congresso Internacional de Actuários (tanto menção a assuntos tratados como a presença de portugueses).

Do conteúdo dessa revista destacamos, ainda, assuntos variados relativos ao seguro ramo Vida. Artigos técnicos, teóricos ou com o propósito de divulgar e/ou credibilizar essa modalidade de seguros. Notícias sobre companhias de seguros nacionais e estrangeiras, nomeadamente sobre a sua prosperidade, estatutos, falências ou relatórios anuais – especial atenção é dada às críticas a programas incorrectos lançados por algumas seguradoras nacionais, designadamente a *Portugal Previdente*, fundada em 1907. Notícias sobre a instrução em actuariado, nacional e estrangeira – ressalta a publicação de uma carta de Luciano Pereira da Silva (1864 - 1926), enviada de Berlim e dirigida a Brederode, informando-o, a seu pedido, sobre os cursos de actuários em funcionamento em Berlim, Munique, Göttingen, Viena de Áustria , Basileia e Berna; no panorama internacional, divulgam-se cursos de actuários em funcionamento na Alemanha, Áustria, França e Estados Unidos da América. Profissão de actuário em Portugal e no estrangeiro – distingue-se a publicação dos estatutos e lista de sócios fundadores da Associação dos Actuários Portugueses, fundada em 1926, tendo como secretário-geral Brederode.

A revista *Seguros e Finanças* revelou-se como uma revista pioneira na divulgação e promoção do seguro Vida em Portugal, nas primeiras décadas do século XX. Esse feito é da responsabilidade de Brederode. Para além da faceta de divulgador da indústria dos seguros, Brederode destacou-se: enquanto actuário; no seu envolvimento em organismos oficiais de fiscalização das seguradoras nacionais; na cooperação com outros actuários ou estudiosos de assuntos de seguros; na preocupação com a instrução em actuariado; ou na regulamentação da profissão de actuário. Por esses factos deve ser considerado como uma das figuras mais importantes no desenvolvimento dos seguros Vida em Portugal no século XX.

Bibliografia

Faria, Miguel Figueira de & Mendes, José Amado (coord.). 2014. *Dicionário de história empresarial portuguesa: séculos XIX e XX*, vol. II Seguradoras. Lisboa: Imprensa Nacional-Casa da Moeda, Universidade Autónoma de Lisboa.

Martins, Ana Patrícia Martins. "Curta passagem de Luciano Pereira da Silva pelo actuariado português", Actas/Anais do 7.º Encontro Luso-Brasileiro de História da Matemática, 15 a 19 de Outubro de 2014 (no prelo).

Seguros e Finanças (1906-1927).

31º Encontro do Seminário Nacional de História da Matemática

Escola Superior de Educação de Viseu

11 e 12 de Maio de 2018

31º Encontro do Seminário Nacional de História da Matemática

Escola Superior de Educação de Viseu[1]

11 e 12 de Maio de 2018

Teve lugar, na Escola Superior de Educação de Viseu, o 31º Encontro do SNHM. Nele tivemos um conjunto de 15 conferências, que envolveram temas da história da matemática desde o século XVII ao século XX. Celebrou-se com este Encontro os 30 anos do Seminário Nacional de História da Matemática, facto que foi o tema da mesa redonda final, com 3 partes distintas: uma intervenção em vídeo do Professor José Francisco Rodrigues, em conversa com Luis Saraiva, dois dos membros fundadores do Seminário, uma evocação dos primeiros tempos do Seminário, um diálogo entre Jaime Carvalho e Silva, outro dos fundadores do SNHM, e Luis Saraiva, em que o primeiro mostrou e comentou diversos items relativos aos começos do Seminário, tendo igualmente havido intervenções dos actuais membros da direção do Seminário, e finalmente uma intervenção do coordenador geral do SNHM, com um power point comentado de imagens de momentos importantes da vida do Seminário nestes 30 anos de existência.

Scott Walter, da Universidade de Nantes e do Centro François Viète, foi o nosso conferencista convidado. Na sua intervenção, *The Mathematization of Cosmology, from Kelvin to Einstein*, deu uma perspectiva da evolução da cosmologia, que começou por ser uma actividade meramente especulativa, realizada por um pequeno número de pessoas, para se vir a tornar um tema central das ciências astronómicas, que suscita enormes financiamentos para a obtenção de novos dados. Foi evidenciado que ainda antes da formulação da teoria da Relatividade Geral em 1915 já havia modelos matemáticos do Universo suficientemente bem formulados para mobilizar um grande número de cientistas debatendo temas de cosmologia.

O Encontro começou com uma evocação do Comandante Estácio dos Reis por António Canas, uma homenagem do Seminário e este distinto investigador. O Comandante Estácio, recentemente falecido, tinha participado em vários Encontros e actividades do Seminário, que o tinha homenageado no 26º Encontro do Seminário, realizado em Aveiro em Junho de 2013.

Seguiu-se-lhe uma intervenção de António Canas sobre uma das propostas apresentadas no século XVII para medir a longitude no mar pelo

[1] Neste texto não se utiliza a actual reforma ortográfica.

cosmógrafo flamengo Van Langren, e que se baseava na percentagem iluminada da Lua. O problema só seria adequadamente resolvido na 2ª metade do século XVIII, mas este método trouxe a mais valia de se elaborar o primeiro mapa lunar e o primeiro gráfico estatístico conhecido, para a diferença de longitudes entre Toledo e Roma apresentada por vários autores.

Tivemos quatro palestras sobre a história do ensino da matemática: Helena Melo (apresentadora) e Maria do Carmo Martins deram uma perspectiva histórica sobre os métodos de extração da raíz quadrada e do seu ensino; Carlos Tenreiro falou sobre a Aula de Geometria Descritiva da Faculdade de Matemática da Universidade de Coimbra e a sua coleção de modelos geométricos idealizados por Theodore Oliver; Andreia Ciani (apresentadora), Emerson Boldo e Dulcyene Ribeiro fizeram uma panorâmica da avaliação holandesa da chamada Matemática Moderna, baseando a sua exposição na perspectiva de Hans Freudenthal; os mesmos conferencistas, novamente com apresentação de Andrea Ciani, analisam o modo como o Teorema de Pitágoras era ensinado na Academia Militar nos inícios do século XVIII, baseando esse estudo em manuscritos existentes na Biblioteca Nacional e na Biblioteca Pública de Évora.

Três palestras houve que tiveram como tema alguns dos nossos mais importantes matemáticos de fins do século XVIII e inícios do século XIX: Ângela Lopes (apresentadora), António Leal e Elfrida Ralha analisaram aspectos do livro XVIII dos *Principios Mathematicos* de José Anastácio da Cunha, recorrendo também à investigação VII do livro XXI da mesma obra como complemento, utilizando um opúsculo de José Anastácio escrito nos anos 70 do século XVIII intitulado *Reducções geraes de humas integraes binomias e outras*; António Leal (apresentador) e Fernando Figueiredo revisitaram a polémica entre Anastácio da Cunha e José Monteiro da Rocha centrando a sua exposição sobre o caso do método da extração da raíz cúbica; e Fernando Figueiredo, antecipando as comemorações do bicentenário do falecimento de Monteiro da Rocha (será em 2019), apresentou uma panorâmica dos aspectos mais marcantes da actividade científica deste matemático, salientando o seu papel fundamental no processo de institucionalização em Portugal da ciência moderna, que a Reforma Pombalina da Universidade inicia em 1772.

Houve três conferências sobre os dois matemáticos portugueses mais importantes da segunda metade do século XIX: duas sobre Daniel da Silva, respectivamente por Ana Patrícia Martins (sobre o contributo deste matemático para uma tábua de mortalidade portuguesa) e Teresa Sousa (sobre o Princípio de Inclusão Exclusão num artigo de Daniel da Silva de 1854, comparando-o com as propostas apresentadas por De Moivre em 1718, e J. J. Sylvester em 1883), e uma sobre Francisco Gomes Teixeira por Pedro Freitas, que se centrou sobre o espólio epistolar de Gomes Teixeira existente no Arquivo da Universidade de Coimbra, evidenciando principalmente a sua correspondência com Charles Hermite.

Finalmente sobre o século XX matemático português tivemos duas conferências: Cecília Costa analisou a concepção de José Vicente Gonçalves sobre investigação matemática em Portugal entre 1930 e 1960, e Rui Santos apresentou o terceiro capítulo da tese de doutoramento de Pacheco d'Amorim, onde este autor propõe soluções, nem sempre correctas, para alguns problemas geométricos clássicos, de Buffon (1773) a Czuber (1902). Mostrou ainda que mesmo assim alguns dos seus conceitos teóricos correspondem à base de aplicações actuais da Probabilidade Geométrica

Como em anos anteriores, espera-se que a publicação destes resumos alargados possa ser útil aos seus leitores, e que os possa motivar a uma futura participação num dos Encontros do Seminário Nacional de História da Matemática, quer como conferencistas quer como participantes sem conferência. Voltamos a insistir que o Seminário precisa de todos para cumprir a sua dupla função de fórum da investigação feita em Portugal em História da Matemática e de divulgador de temas da História da Matemática, nacional e internacional.

Luís Saraiva
Coordenador Nacional
do Seminário Nacional de História da Matemática

Programa

11 de Maio

13.45 Entrega de pastas

14.00 Abertura do Encontro. Mesa constituída pelo Coordenador Geral do SNHM, Luis Saraiva, Adérito Araújo, em representação da Direção da SPM, Isabel Abrantes da Escola Superior de Educação de Viseu, e Ana Patrícia Martins, da Comissão local.

14.15 António Canas (Escola Naval/ CINAV/CH. U. Lisboa) – *Evocação do Comandante Estácio dos Reis*

14.30 António Canas (Escola Naval/ CINAV/CH. U. Lisboa) – *O primeiro gráfico estatístico conhecido e o primeiro mapa lunar*

15.20 *Intervalo para café*

15.40 Cecília Costa (UTAD/CIDTFF/CIDMA) – *A concepção de Vicente Gonçalves sobre a investigação matemática em Portugal no período de 1930 a 1960*

16.10 Helena Sousa Melo e Maria do Carmo Martins (Fac. de Ciências e Tecnologia/DME/CEHu, Universidade dos Açores) – *A extração da "raíz quadrada": uma breve perspectiva histórica e do seu ensino*

16.40 Carlos Tenreiro (CMUC/DM da Universidade de Coimbra) – *A Aula de Geometria Descritiva da Faculdade de Matemática e a sua coleção de "modelos de Oliver"*

17.10 Dulcyene Ribeiro, Andreia Ciani e Emerson Boldo (Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Brasil) – *Avaliação holandesa à Matemática Moderna*

18.00 Visita guiada ao centro histórico da cidade de Viseu

20.30 Jantar da conferência

Programa

12 de Maio

09.00 Scott Walter (Université de Nantes, Centre François Viète) – *The mathematization of cosmology from Kelvin to Einstein*

10.00 Ângela Lopes (ECUM), António Leal Duarte (CMUC e DMAT) e Elfrida Ralha (DMA) – *O Livro XVIII dos Principios Mathematicos de José Anastácio da Cunha explicado pelo próprio*

10.30 *Intervalo para café*

Programa

12 de Maio

(cont.)

11.00 Fernando B. Figueiredo (CITEUC/CMUC) – *José Monteiro da Rocha (1734-1819), um matemático ao serviço do Estado. Subsídios para a comemoração do bicentenário da sua morte (2019)*

11.30 António Leal Duarte (CMUC e DMat da Universidade de Coimbra) e e Fernando Figueiredo (CMUC/CITEUC) – *Revisitando a polémica entre Monteiro da Rocha e Anastácio da Cunha: o caso da raiz cúbica*

12.00 Ana Patrícia Martins (Escola Superior de Educação de Viseu / CIUHCT) – *Subsídios para uma tábua portuguesa de mortalidade: o contributo de Daniel Augusto da Silva*

12.30 Teresa Maria Sousa (Escola Naval e CINAV/Centro de Matemática e Aplicações UNL) – *Daniel Augusto da Silva e o Princípio de Inclusão Exclusão*

13.00 Almoço

14.30 Dulcyene Ribeiro, Andreia Ciani e Emerson Boldo (Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Brasil – *O teorema de Pitágoras ensinado na Academia Militar no princípio do século XVIII*

15.00 Pedro Freitas (CIUHCT) – *Correspondência entre Francisco Gomes Teixeira e Charles Hermite*

15.30 Rui Santos (Escola Superior de Tecnologia e Gestão, Instituto Politécnico de Leiria/ CEAUL) – *O "lançamento, à sorte, de figuras" de Pacheco d'Amorim*

16.00 *Intervalo para café*

16.30 Mesa Redonda – Os 30 anos do Seminário Nacional de História da Matemática: seus inícios e desenvolvimento

Com António Canas (Escola Naval/ CINAV/CH. U. Lisboa), Jaime Carvalho e Silva (DM da FCTUC), João Caramalho Domingues (CMAT, UM), José Francisco Rodrigues (CMAFCIO, UL) e Luís Saraiva (CIUHCT, UL).

Inclui video com entrevista a José Francisco Rodrigues, conduzida por Luis Saraiva; documentos dos inícios do SNHM mostrados e explicados por Jaime Carvalho e Silva; palestra "Os 30 anos do Seminário Nacional de História da Matemática (1988-2018)" por Luis Saraiva.

18.00 Encerramento do Encontro

Homenagem ao Comandante Estácio dos Reis

António Costa Canas
Escola Naval – CINAV & CHist-UL
e-mail: costacanas@gmail.com

Serendipidade aplica-se à faculdade de descobrir coisas agradáveis por acaso. A ciência está cheia de episódios de serendipidade e a vida do Comandante Estácio dos Reis também contava com vários casos de serendipidade. Daí que ele dissesse que esta era a sua palavra preferida e que tenha lutado pela sua difusão na língua portuguesa. O Comandante partiu da nossa companhia no passado dia 1 de março, mas a sua memória permanecerá para sempre viva entre nós. Tive o privilégio de conviver com o Comandante Estácio e de aprender muito com ele. Nos próximos parágrafos tentarei apresentar alguns dos aspetos mais relevantes da vida e obra do Comandante, ciente que muito mais haveria para dizer, de uma longa carreira recheada de momentos brilhantes.

Nascido em 1923, o Comandante Estácio dos Reis ingressou na Escola Naval em 1943. Terminado o curso, iniciou uma carreira de oficial de Marinha tendo prestado serviço em diversos territórios então sob soberania portuguesa e realizado várias comissões no estrangeiro. No Oriente esteve colocado em Macau e em Moçambique. Neste último território foi capitão do porto de Chinde e mais tarde do porto de Quelimane, na década de sessenta, tendo voltado lá na década de setenta, desempenhando funções no Comando Naval. Frequentou cursos relacionados com a guerra de minas e comandou três navios draga-minas. Desempenhou funções no Estado-Maior da Armada e foi juiz do Tribunal da Marinha. Representou Portugal na Missão Militar da NATO em Bruxelas e como Adido Naval em Paris.

Acima encontra-se resumida a carreira militar-naval do Comandante Estácio. No entanto, quando passou à Reserva iniciou uma «nova carreira», ligada à investigação e divulgação histórica. A sua passagem à reserva ocorreu em 1979, no final da sua comissão como Adido em Paris. Aí tinha conhecido François Bellec, oficial da Marinha francesa, que, tal como Estácio dos Reis, teve uma carreira operacional a bordo de navios, mas que também se notabilizou como pintor de Marinha. Em 1980 foi nomeado diretor do *Musée National de la Marine*, cargo que exerceu durante 18 anos. O Comandante Estácio conviveu com Bellec quando ele foi nomeado para dirigir aquele museu. Este convívio influenciou certamente a opção que o Comandante tomou para a sua carreira nos anos que se seguiram.

Regressado a Portugal em 1980 prestou serviço no Museu de Marinha, até 1986. Aí desenvolveu uma atividade bastante intensa procurando conseguir para o Museu peças emblemáticas da época áurea dos descobrimentos. Percebendo que o Museu de Marinha não dispunha de nenhum astrolábio náutico, levou a cabo diligências para conseguir incorporar instrumentos destes no seu acervo. Na década de 1980 já se conheciam várias dezenas de astrolábios náuticos, um pouco por todo o mundo. No entanto, em Portugal, país onde se desenvolveram os primeiros instrumentos deste tipo, conheciase apenas um, em Coimbra, o qual nunca terá navegado, tendo em conta as suas dimensões. O Comandante Estácio conseguiu ir à televisão, onde falou, por breves instantes, sobre astrolábios. Mostrou uma réplica pedindo que, no caso de alguém possuir um objeto semelhante, informasse o Museu de Marinha. Passado pouco tempo foi contactado, por António Sardinha, residente na Ericeira, informando que tinha um astrolábio em casa. O astrolábio *Ericeira* foi assim o primeiro incorporar a coleção do Museu.

No mesmo ano, 1983, em que o *Ericeira* passou a fazer parte do espólio do Museu de Marinha, foi incorporado um outro astrolábio náutico, o *Sacramento B*. Em 1668, o galeão *Santíssimo Sacramento* naufragou na Baía de Todos os Santos. Entre 1976 e 1978, arqueólogos recolheram parte significativa dos despojos do naufrágio, com apoio da Marinha brasileira. Entre as peças recolhidas encontravam-se dois astrolábios, tendo um deles sido oferecido à Marinha portuguesa. Tal só foi possível graças ao excelente relacionamento entre o Comandante Estácio e o então Comandante Max Justo Guedes, da Marinha irmã. Esta amizade ilustra uma outra faceta caraterística do Comandante Estácio, que foi a criação de uma rede de amigos, com quem partilhava conhecimentos e discutia ideias científicas.

O *Sacramento B* chegou a Portugal no ano da xvii Exposição Europeia de Arte Ciência e Cultura, tendo estado em exibição num dos polos desta exposição. Estácio dos Reis desempenhou um papel de relevo na organização deste evento, prova do reconhecimento do seu mérito enquanto especialista em história da náutica, com especial realce para os instrumentos. Pelo mesmo motivo integrou a Comissão Nacional para as Comemorações dos Descobrimentos Portugueses. A sua produção científica, nesta altura, foi extremamente profícua, com textos de divulgação na *Revista da Armada* e com inúmeras comunicações em colóquios, congressos ou eventos isolados.

O Comandante Estácio dos Reis foi alvo de inúmeras distinções, ainda em vida. Foi agraciado com diversas condecorações militares nacionais, assim como estrangeiras, nomeadamente do Brasil e de França. Mereceu ainda a atribuição do grau de Oficial da Ordem Militar de Avis, em 1960; e de Grande Oficial da mesma Ordem, em 1980. Esta distinção é atribuída a título excecional a militares que se tenham destacado no exercício das suas funções. Foi igualmente galardoado com o grau de Comendador da Ordem Militar de Santiago da Espada, destinada a premiar o mérito científico, literário ou artístico.

No dia em que completou 89 anos, o Almirante Chefe do Estado-Maior da Armada concedeu-lhe a medalha *Vasco da Gama*, numa cerimónia realizada no Pavilhão das Galeotas do «seu» Museu de Marinha. Nesta cerimónia foi lançado um livro de homenagem, organizado pelo seu amigo Jorge Semedo de Matos, também ele oficial da Marinha. Nesta cerimónia usaram da palavra o organizador do livro; o Almirante Vilas Boas Tavares, diretor da Comissão Cultural de Marinha, que promoveu o evento; e Nuno Crato, então exercendo funções governativas, mas que não quis deixar de estar presente na homenagem ao seu amigo, com quem partilhava diversos interesses comuns, no âmbito da história da ciência. No ano seguinte, foi homenageado no nosso Encontro do SNHM, que se realizou em Aveiro. Também a Universidade de Coimbra organizou, nesse mesmo ano, uma sessão de homenagem, por iniciativa da Carlota Simões. Ainda em 2013, o Comandante Estácio publicou um livro autobiográfico, no qual descreve inúmeros episódios que considerou relevantes, da sua longa vida.

A minha ligação ao Comandante desenvolveu-se pelo facto de ambos integrarmos a Comissão Científica responsável pela edição das *Obras* de Pedro Nunes, que incluía os professores Contente Domingues, Dias Agudo, Henrique Leitão e João Queiró, assim como Jorge Semedo de Matos. Nos últimos anos criamos a tradição de nos reunirmos num convívio no dia 27 de setembro, data do seu aniversário, juntando-se a nós o Nuno Crato. Não temos mais a sua companhia, mas a sua memória perdurará, graças à sua obra e às amizades que criou. Nesta homenagem procurei apresentar diversos episódios de uma vida dedicada à história da ciência assim como alguns aspetos da sua personalidade, sempre disposto a esclarecer dúvidas sobre os assuntos que dominava. E fazia-o de uma forma simples, sem vaidade, como só as mentes superiores sabem fazer.

Referências

[1] Matos, Jorge Semedo de, *António Estácio dos Reis: Marinheiro por Vocação e Historiador com Devoção. Estudos de Homenagem*, Lisboa, Comissão Cultural de Marinha, 2012.

[2] Reis, António Estácio dos, *À procura da arca perdida*, [Rio Tinto], [Edição do autor], 2013.

O primeiro gráfico estatístico conhecido e o primeiro mapa lunar

António Costa Canas
Escola Naval – CINAV & CHist-UL
e-mail: `costacanas@gmail.com`

A navegação marítima conheceu importantes desenvolvimentos, a partir de finais do século XV, com a determinação da latitude no mar, recorrendo a métodos astronómicos. Quanto à longitude, a sua obtenção era bastante mais complicada, pelo que só na segunda metade do século XVIII o problema foi resolvido, de forma satisfatória, com a invenção do cronómetro. Tal não significa que antes não tivessem sido avançadas diversas propostas para resolver o problema. Destas, várias surgiram graças a diversos prémios oferecidos, a partir de finais do século XVI nas principais potências marítimas europeias: Espanha, Holanda, França e mais tarde a Grã-Bretanha, sendo no contexto deste último que se desenvolveu o cronómetro.

Algumas das propostas apresentadas estavam teoricamente corretas, como era a sugestão de usar ampulhetas de areia, ou de água; ou de medir o ângulo entre a Lua e o Sol ou alguma estrela; ou ainda a proposta de Galileu de observar as emersões e imersões dos satélites de Júpiter. No entanto, estas propostas só tiveram uma aplicação efetiva quando foram ultrapassados diversos obstáculos técnicos e científicos, como a resolução de vários problemas de relojoaria, ou o cálculo de tabelas com efemérides rigorosas dos movimentos dos astros. Para este último desiderato muito contribuiu a construção de grandes observatórios astronómicos e a significativa evolução da mecânica celeste nos séculos XVI e XVII. No entanto, muitas outras propostas podem ser classificadas como «extravagantes» pois baseavam-se em princípios incorretos, mas que nalguns casos poderiam servir para minimizar os inconvenientes do desconhecimento da longitude. Entre estas merece destaque a ideia de que a longitude variava de modo proporcional à declinação magnética, a qual conheceu diversos defensores na Península Ibérica, e não só, durante mais de um século. Entre os estes encontram-se alguns dos candidatos aos prémios instituídos.

Uma das formas de determinar a diferença de longitude entre dois lugares distintos baseia-se na observação de algum fenómeno que seja visível em ambos os locais em simultâneo. Se o observador determinar a hora no local em que se encontra e tiver uma tabela com a hora de ocorrência do mesmo fenómeno num outro local, comparando essas duas horas (locais) obtém a diferença de longitude. A Lua aparece em inúmeras propostas para resolver a questão da longitude. Já na Antiguidade Clássica se sugeria a observação de eclipses lunares, em diferentes locais em que eles fossem visíveis, para conhecer as respetivas longitudes. Se o processo pode ser útil para representar rigorosamente os lugares na cartografia, não tem qualquer interesse para a determinação da longitude no mar, pela sua raridade.

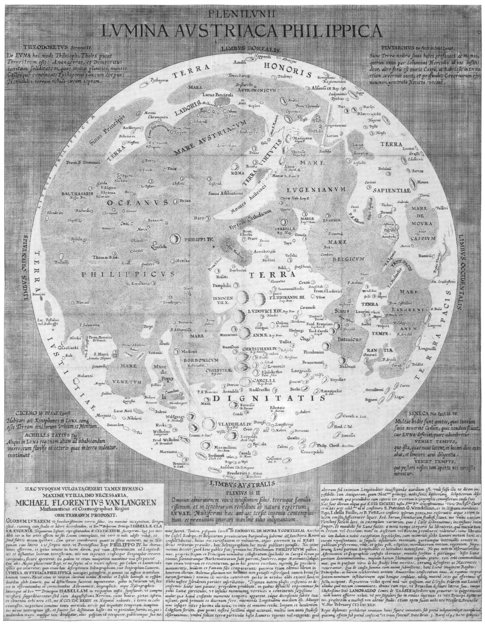


Figura 1: Primeiro mapa lunar.

O interesse pela Lua deriva do facto de este astro ter um movimento aparente diferente do dos restantes astros. Sendo o único astro que orbita em torno da Terra, descreve um movimento próprio sobre a esfera celeste, com a duração aproximada de um mês. Nesse seu movimento vai ocultando estrelas e planetas, ou seja vão ocorrendo «eclipses» com uma frequência muito maior do que aquela com que ocorrem os eclipses lunares. Então porquê esperar pelas ocultações de outros astros pela Lua? Se o ângulo entre a Lua e os outros astros vai variando com alguma velocidade, basta ter uma tabela com os ângulos entre a Lua e alguns astros selecionados, a determinadas horas, num local de referência, e depois observar no mar o ângulo entre a Lua e um dos astros da tabela. Pela comparação da hora da observação com a hora tabelada, obtém-se a longitude. Este método das distâncias lunares implica observações muito rigorosas dos ângulos e muito rigor nas efemérides dos astros, pois é necessário detetar variações muito pequenas nos ângulos medidos, inconvenientes que só foram ultrapassados no século XVIII ao mesmo tempo que foi desenvolvido o cronómetro.

No entanto, também foram apresentadas propostas extravagantes que se baseavam no movimento da Lua. Uma delas baseava-se no facto de a superfície da Lua passar de totalmente obscurecida (Lua Nova) para totalmente iluminada (Lua Cheia) num período de cerca de duas semanas. O cosmógrafo flamengo Michael Florent van Langren sugeriu, em 1621, que se usasse a «quantidade» iluminada da face da Lua, como um «relógio», pois esta varia em função do tempo. Para tal, apresentou o primeiro mapa com o relevo lunar representado de uma forma rigorosa, para se medir a quantidade de Lua iluminada. Em 1628, fez uma primeira versão manuscrita do mapa, mas em 1645 imprimiu uma versão mais completa do mapa, figura 1. Para justificar o interesse do seu processo elaborou o primeiro gráfico estatístico que se conhece, figura 2, onde representa os valores da diferença de longitude entre Roma e Toledo, de acordo com diversos autores, demonstrando o pouco rigor dos métodos usados para conhecer a longitude.

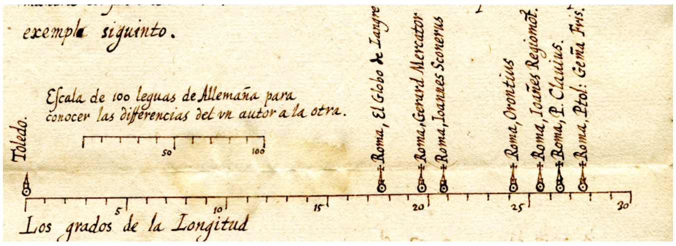


Figura 2: Primeiro gráfico estatístico conhecido.

Referências

[1] Michael Friendly e Pedro Valero-Mora e Joaquín Ibáñez Ulargui, "The First (Known) Statistical Graph: Michael Florent van Langren and the «Secret» of Longitude", *The American Statistician*, Vol. 64, No. 2 (2010), pp. 174–184.

[2] Peter van der Krogt & Ferjan Ormeling, "Michiel Florent van Langren and Lunar Naming", *Els noms en la vida quotidiana. Actes del XXIV Congrés Internacional d'ICOS sobre Ciències Onomàstiques*, AMS Proceedings, 2014, pp. 1851–1868.

A concepção de Vicente Gonçalves sobre a investigação matemática em Portugal no período de 1930 a 1960

Cecília Costa
Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro
CIDTFF–UTAD & CIDMA–UA
e-mail: mcosta@utad.pt

Durante cerca de meio século de atuação profissional, J. Vicente Gonçalves (1896-1985) teve um papel marcante no panorama matemático português, com contributos relevantes para a mudança do papel da investigação matemática no perfil do professor universitário (Costa, 2017).

A carta de Zaluar Nunes, de 16 de Maio de 1948, destinada a Vicente Gonçalves (existente no seu espólio, à guarda do Arquivo da Universidade de Coimbra) cujo assunto é o artigo *Espírito Utilitário* (Gonçalves, 1948), serve de mote para refletir sobre a concepção de Gonçalves do que deveria ser a investigação científica (matemática) em Portugal (Costa, 2001). Nesta carta, Zaluar Nunes começa por referir que este artigo o *(...) encantou não só pela beleza da forma literária como pela doutrina que nele se defende!*, com a qual concorda plenamente.

Que doutrina era essa? Nesse artigo, Vicente Gonçalves sublinhava que, já desde a altura em que foi aluno universitário (1913-1917), no estrangeiro as universidades eram apoiadas por institutos de investigação onde se produzia conhecimento novo que as universidades disseminavam de tal forma que não se limitavam a transmitir conhecimento do passado, considerando que isso traduzia a maioridade científica das nações e dos indivíduos. Lamentava que tal não acontecesse em Portugal e a ideia de que *o Estado quere servidores com ampla cultura geral, garantia da multiplicidade de aptidões* (Gonçalves, 1948), desvalorizando os especialistas nas diversas áreas do saber. Defendia a criação de cursos especializados que pudessem formar os jovens. Outras nações como a França colocavam *(...) ao alcance dos seus filhos imensas possibilidades de cultura superior, que totalmente faltavam entre nós* (Gonçalves, 1948). Esta postura, numa época em que o Estado Novo fez perseguições a muitos cientistas, intelectuais e professores universitários, afastando-os dos seus cargos, prendendo-os e forçando vários ao exílio, surpreendeu e impressionou Zaluar Nunes: *Agradou-me mesmo,* *por isso, ver o artigo assinado pelo Prof. Vicente Gonçalves que tanta autoridade e prestígio tem no nosso meio Universitário!*. Efectivamente, nesta altura assim era, no entanto, esta concepção de Vicente Gonçalves já se reconhece décadas mais cedo, designadamente, em 1930, no seu artigo *Males do Ensino Superior*, o único texto que se conhece deste Matemático escrito para o público em geral. Em 1930, Vicente Gonçalves tinha 34 anos era Professor Catedrático da Faculdade de Ciências da Universidade de Coimbra há cerca de 3 anos, tinha acabado de publicar as "Lições de Cálculo e Geometria", o primeiro dos seus textos para o ensino superior, dos cerca de 100 artigos que publicou, à data, tinha publicado 5. . . ou seja, estava em início de carreira. . . (jubilou-se em 1967) e o aparecimento do Estado Novo já estava a germinar . . .

Reconhece-se neste texto várias das ideias veiculadas no *Espírito Utilitário*, por exemplo: i) a questão de o papel da universidade entre nós se reduzir à transmissão de ciência do passado ou de outros países: *(. . .) infelizmente anda muito generalizada a ideia de que ás universidades incumbe sobretudo a divulgação da sciencia feita (lá fóra já se vê. . .). É preciso reformar esta mentalidade!* (Gonçalves, 1930); ii) ao entendimento do papel de professor universitário como mero transmissor de conhecimentos, mais uma vez, já feitos. . . por outros: *Quando não dê aos seus alunos bons exemplos de civismo e de trabalho, e se limite, sem qualquer originalidade ou relêvo intelectual, a ensinar as mesmas coisas durante trinta ou quarenta anos, – é um mau professor, é um péssimo educador* (Gonçalves, 1930).

Neste artigo, Vicente Gonçalves critica de forma acutilante o estado do ensino superior em Portugal, aponta as falhas e propõe sugestões de melhoramento (Costa, 2007). Afirma que *não faltam explicações para a insuficiência da nossa produção scientífica (. . .). Fracas razões.* Elencando aquelas que segundo ele são as verdadeiras razões: *(. . .) o ritmo da nossa vida scientifica é o ritmo do trabalho de meia dúzia de devotos, de desinteressados (. . .); O que nos falta, em geral, é uma ampla e nítida compreensão dos nossos deveres profissionais (. . .);(. . .) o desdobramento de quaisquer universidades ou escolas (. . .).*

A análise da actuação profissional de Vicente Gonçalves permite-nos afirmar que durante toda a vida este Professor e Matemático procurou reformar a *tal mentalidade* com a qual não concordava e reger-se pelos princípios que defendia. Como professor actualizava as suas aulas, inclui-a nelas e nos manuais que escrevia resultados recentes de investigação; e inspirando-se nos temas que leccionava dedicava-se também à investigação, aspecto que considerava indissociável da função de professor universitário (Costa, 2001). Criou a 2ª série A da Revista da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, que se constituiu como um palco privilegiado para a divulgação da investigação matemática portuguesa no estrangeiro.

A terminar e quase em jeito de conclusão, referimos um outro escrito, *Confirmando*, de 1957/58, ou seja, da última década da sua actuação profissional, onde como o próprio título anuncia, Vicente Gonçalves reafirma a sua doutrina que o acompanhou (pelo menos) desde 1930: i) recolher informação actualizada (*(...) cumpre prover-se de segura e actualizada informação daquelas actividades em que ambiciona cooperar*); ii) fazer trabalho original (*há-de ser nossa a selecção dos factos e de nossa indústria a sua composição*); iii) investigar (*(...) temos de investigar.*).

Vicente Gonçalves fecha este texto afirmando: *Assim pensam os estudiosos que (...) escreveram este livro (...). Assim pensam e assim fazem* (Gonçalves, 1957/58). Que assim pensa(va) Vicente Gonçalves foi o que procuramos mostrar neste estudo, que assim fazia, os estudos conhecidos sobre este Professor e Matemático já o provaram.

Referências

Costa, C. (2001). *José Vicente Gonçalves: Matemático... porque Professor!*, (Colecção Memórias n.º 37). Funchal: Centro de Estudos de História do Atlântico, Secretaria Regional do Turismo e Cultura.

Costa, C. (2007). Males do Ensino Superior: a opinião de J. Vicente Gonçalves em 1930. *Revista Brasileira de História da Matemática*, 7(14): 155-162.

Costa, C. (2017). O professor universitário português do início do século xx: o caso paradigmático de Vicente Gonçalves. *Revista Brasileira de História da Matemática*, 16(32), 33-39.

Gonçalves, J.V. (1930). Males do ensino superior. *Jornal "O Primeiro de Janeiro"*, 14 de Maio.

Gonçalves, J.V. (1948). Espírito utilitário. *Ciência (Rev. da A.E.F.C.L.)*, 1(1), 9-11.

Gonçalves, J.V. (1957/58). Confirmando. In *Estudos de Matemática, Estatística e Econometria* (Prefácio), Vol. II. Lisboa: ISCEF.

A extração da "raiz quadrada": uma breve perspetiva da sua história e do seu ensino

Helena Sousa Melo, *Maria do Carmo Martins*
Departamento de Matemática e Estatística
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Centro de Estudos Humanísticos – CEHu/UAc
Universidade dos Açores
e-mail: `helena.fs.melo@uac.pt`
`maria.cc.martins@uac.pt`

Numa breve perspetiva da história da raiz quadrada, começamos no Antigo Egito onde já encontramos vestígios do conhecimento da raiz quadrada. No papiro de Berlim datado de 1800 a.C., comprado por Rhind em 1850, aparece pela 1.ª vez a solução da equação de 2.º grau. Desconhece-se o processo utilizado, pois neste papiro aparece apenas o resultado da raiz quadrada de $1 + 1/2 + 1/16$ que, de acordo com a escrita numérica egípcia,e é igual $1 + 1/4$. Segundo Cajori [2], os egípcios utilizavam como representação da raiz quadrada um símbolo semelhante a um ângulo reto $\ulcorner$

Na Babilónia, a raiz quadrada era calculada por aproximação e recorrência. Para a determinação da raiz quadrada de k ([1]) primeiramente consideravam uma aproximação para a raiz quadrada, a_1. Depois calculavam um valor b_1 pelo cálculo de k dividido por a_1. Se o quociente b_1 fosse igual a a_1, a raiz quadrada estava encontrada. Caso contrário, faziam uma segunda aproximação a_2, correspondente à média aritmética entre a_1 e b_1 e calculavam b_2, calculando o quociente de k dividido por a_2. Terminavam o processo quando o quociente b_n fosse igual a a_n.

Na Grécia havia alguns processos distintos, uns por recorrência e outros por aplicação dos conhecimentos de geometria. O algoritmo de Hierão de Alexandria (10–70) baseava-se na média aritmética e na média geométrica, através de uma construção geométrica [3].

Já o método de Theon de Smirna (140–?) era definido por recorrência e podia ser estendido a qualquer valor, fazendo-se $x_n = x_{n-1} + y_{n-1}$ e $y_n = x_n + (k-1)x_n - 1$, sendo k o radicando. No exemplo apresentado na Tabela 1, $k = 5$.

Na India, nos textos religiosos *"Sulbasutras"*, por volta de 800 a 600 a.C., encontra-se um método para o cálculo da raiz quadrada de dois que

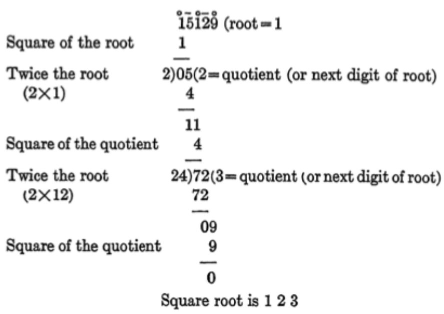
índice n	x_n	$(5-1)x_{n-1}$	y_n	r_n
1	1	—	1	$1/1 = 1$
2	2	4	6	$6/2 = 3$
3	8	8	16	$16/8 = 2$
4	24	32	56	$56/24 = 2,(3)$
5	80	96	176	$176/80 = 2,2$
6	256	320	576	$576/256 = 2,25$
7	832	1024	1856	$1856/832 = 2,(230769)$

Tabela 1

diz: "aumente o comprimento de um terço, e este terço de seu próprio quarto menos a trigésima-quarta parte deste quarto." [5] ou seja,

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{3 \times 4 \times 34}$$

Mais tarde, Aryabhata I (476–550), no capítulo 2 do seu livro *Aryabhatyia*, apresenta um método para a extração da raiz quadrada, utilizando os algarismos de ordem par *"varga"* (º) e os de ordem ímpar *"avarga"* (-). A imagem abaixo, retirada da página 22 da transcrição inglesa, exemplifica o método.



O algoritmo para extração da raiz quadrada, ensinado antigamente nas nossas escolas, já era conhecido na China. Encontramo-lo no manuscrito "Nove capítulos sobre a arte matemática", escrito na dinastia Han (206–220). Semelhante ao Egito e à Babilónia, o manuscrito apresenta resultados breves, com os procedimentos necessários para a resolução de problemas. Os comentários de Liu Hui (220–295), em cerca de 263, dão-nos uma explicação geométrica clara do método, que semelhantemente aos babilónios e aos hindus, interpreta a extração da raiz quadrada como encontrar o lado de um quadrado cuja área é conhecida.

O símbolo da raiz quadrada também tem a sua história. Abū al-**H**asan ibn Alī ibn Mu**H**ammad ibn Alī al-Qalaşādī (1412–1486) foi um matemático árabe que introduziu muitos símbolos matemáticos, entre eles o símbolo da raiz quadrada, ﺟ inicial do termo árabe para "raiz quadrada" [2]. Também no século XV, o matemático alemão Johannes Muller von Konigsberg (1436–1476), conhecido como Regiomontanus, propõe como símbolo da raiz quadrada a letra **R** com a segunda perna cortada. O símbolo do radical $\sqrt{\ }$, alongamento da letra r, está associado à palavra "radix" que significa "raiz, base, fundamento". Este aparece pela primeira vez em 1525 no livro de álgebra intitulado Die Coss do matemático alemão Christoff Rudolff (1499–1543). Os matemáticos da época não aceitaram o símbolo de Rudolff, mas no início do século XVII já estava sendo bastante usado. O traço acrescentado junto ao símbolo surge em 1637, atribuído a o matemático francês René Descartes (1596–1650), em seu livro *La Geometrie*.

Outros métodos e outras formas de apresentar a raiz quadrada surgiram no decorrer dos séculos. No livro de Samuel Jeake, intitulado Body of Arithmetick, datado de 1701, numa impressão inglesa, podemos observar alguns desses métodos [4].

Temos referência do ensino da raiz quadrada de números inteiros em vários livros e decretos-leis dos séculos XIX e XX. Relatamos, por exemplo, *Elementos de Arithmetica* de Augusto José da Cunha, datado de 1899, composto por quatro livros, onde no livro III, capítulo 1, parágrafo 2 e o *Compêndio de Aritmética Comercial* e *Geometria Elementar* de Manuel de Almeida, de 1941, capítulo 3, onde podemos encontrar o algoritmo da raiz quadrada. O último livro estava de acordo com o programa de 19 de abril de 1932 para as Escolas Comerciais.

Assim, os decretos-leis de 9 de março de 1926 [6], 19 de abril de 1932 [7] e a portaria de 12 de janeiro de 1952 [8], legislam o programa que contém a extração da raiz quadrada para os cursos das escolas comerciais. Já na portaria de 9 de setembro de 1968 [9] onde foram aprovados os programas do ciclo preparatório do ensino secundário, este apenas refere a existência de processos que permitem calcular a raiz quadrada.

Em outras partes do mundo, a extração da raiz quadrada tem algumas semelhanças e diferenças. Os métodos reportam-se, de modo geral, ao conhecimento desenvolvido na Índia e na China, com algumas variantes.

Referências Bibliográficas

[1] Boyer, C. (1974), *História da Matemática*, Tradução de Elza F. Gomide, Editora Edgar Blucher Ltda. Impresso no Brasil

[2] Cajori, F. (1928-1929), *A History of Mathematical Notation*, Volume I: Notations in Elementary Mathematics, Volume II: Notations Mainly in Higher Mathematics, Dover Ed.

[3] Carvalho, J.P.B, (2010), *A raiz quadrada ao longo dos séculos*, V Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática.

[4] Jeake, S. (1701), Body of Arithmetick in four books, London.

[5] Estrada, M.F.; Sá, C.C.; Queiró, J.F.; Silva, M.C. & Costa, M.J. (2000), *História da Matemática*, Universidade Aberta.

[6] Ministério do Comércio e Comunicação, Decreto 11.490 de 9 de Março de 1926.

[7] Ministério da Instrução Pública, Iª Série, nº 92, Decreto 21.126 de 19 de Abril de 1932.

[8] Ministério da Educação Nacional, Iª Série, nº 8, Portaria 13.800 de 12 de Janeiro de 1952.

[9] Ministério da Educação Nacional, Iª Série, nº 213, Portaria 23.601 de 9 de Setembro de 1968.

A aula de Geometria Descritiva da Faculdade de Matemática e a sua colecção de modelos de Olivier

Carlos Tenreiro[1]
CMUC & DMUC, Universidade de Coimbra
e-mail: tenreiro@mat.uc.pt

No Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra podemos observar uma colecção de cinco modelos geométricos articulados, construídos com fios de seda e braços metálicos montados sobre caixas ou suportes de madeira, em tudo análogos aos idealizados por Théodore Olivier (1793-1853) para expor alguns dos conteúdos da geometria descritiva. Antigo aluno da École Polytechnique, onde teve Jean Nicolas Pierre Hachette (1769-1834) como professor, Théodore Olivier foi um dos fundadores, em 1829, da École centrale des Arts et Manufactures de Paris, onde ficará responsável pela cadeira de Geometria Descritiva. Um conjunto vasto de tais modelos foi construído pela firma *Pixii père et fils*, fabricantes de instrumentos científicos de Paris, a partir dos desenhos de Théodore Olivier e sob a sua orientação. O catálogo de 1851 das colecções do Conservatoire des Arts et Métiers de Paris, instituição onde Théodore Olivier era também, desde 1839, professor de geometria descritiva, inclui cerca de meia centena desses modelos.

Após a morte de Théodore Olivier, cópias dos modelos de geometria descritiva do Conservatoire des Arts et Métiers são adquiridas por diversas instituições de ensino superior na Europa e na América do Norte. Como descrevemos em [2], tal seria o caso da Faculdade de Matemática da Universidade de Coimbra que, em 1872, adquire o referido conjunto de modelos para a aula de Geometria Descritiva, por iniciativa do lente da cadeira Florêncio Mago Barreto Feio (1819-1891). Os modelos de Coimbra são de fabrico nacional, tendo sido construídos na Oficina de Instrumentos de Precisão do Instituto Industrial e Comercial de Lisboa.

Na altura em que os modelos de Coimbra foram fabricados era pouco verosímel que a construção de modelos de Olivier pudesse ser feita sem ser por cópia de modelos pré-existentes. Havendo no país duas colecções de modelos

[1]Trabalho parcialmente financiado pelo CMUC.

de Olivier, uma na Escola Politécnica de Lisboa, adquirida no início da década de 1860 — que apenas inclui um dos modelos da colecção de Coimbra —, e outra, adquirida no final da mesma década, no Instituto Industrial do Porto — que inclui todos os modelos da colecção de Coimbra, com excepção de um —, ficavam algumas dúvidas sobre a colecção que havia servido para a construção dos modelos de Coimbra. O ofício que a seguir damos a conhecer, que faz parte do processo individual de Barreto Feio à guarda do Arquivo da Universidade de Coimbra, e o facto, recentemente revelado, de que a colecção original de modelos de geometria descritiva da Escola Politécnica era mais vasta que a actualmente existente [1] (pp. 159–161), não deixam dúvidas sobre terem sido os modelos de Coimbra executados a partir dos da Escola Politécnica de Lisboa.

A construção dos modelos de Olivier de Coimbra

A introdução na aula de Geometria Descritiva duma componente mais prática que permitisse complementar as tradicionais prelecções orais do professor com a execução, por parte dos alunos, das construções da geometria descritiva, será uma preocupação constante de Barreto Feio desde o final do ano lectivo de 1861-62, primeiro ano em que uma cadeira exclusivamente dedicada ao estudo da geometria descritiva passa a funcionar na Universidade de Coimbra. Depois de na sessão do Conselho da Faculdade de Matemática de 9 de Março de 1871 ter renovado a proposta de se obter para a aula de Geometria Descritiva «uma colecção de modelos em relevo, como os que possuía a Escola Politécnica de Lisboa», Barreto Feio dirige-se ao reitor em 19 de Maio de 1871 dando-lhe conta, em particular, que tais modelos deveriam ser executados no Instituto Industrial e Comercial de Lisboa conforme a colecção que possuía a Escola Politécnica:

> «Tendo de executar-se em Lisboa os modelos em relevo para a aula de Geometria Descritiva da Universidade, conforme a colecção que possui ali a Escola Politécnica, e devendo a encomenda realizar-se, não toda de uma vez, mas em diferentes porções até completar-se, cumpre-me levar ao conhecimento de V.Ex.ª, que conviria de preferência executarem-se desde já os modelos que têm um maquinismo próprio para dar movimento às geratrizes das superfícies, e assim mostrar aos olhos a sua geração, e depois os modelos relativos às abobadas para as aplicações da Estereotomia, e os do aparelho helicoidal, adoptado em certas construções; e que talvez possa prescindir-se de alguns modelos restantes e mais compreensíveis, como poderei indicar, depois de examinar mais

> detidamente aquela colecção da Escola, o que tenciono fazer nas próximas férias.»

Acreditamos que a construção dos modelos tenha sido iniciada por volta de meados de Janeiro de 1872, como indicia a resposta do director interino da Escola Politécnica, a um ofício, datado de 18 de Janeiro de 1872, que lhe havia sido dirigido pelo director do Instituto Industrial e Comercial de Lisboa, confirmando a deslocação do conservador do gabinete de geometria descritiva da Escola Politécnica às instalações do Instituto Industrial e Comercial (IICL, *Correspondência recebida avulsa*, 1861-1885).

Dois meses depois, a construção dos modelos de Olivier de Coimbra estaria provavelmente bem encaminhada, o que levará Barreto Feio a propor, na congregação da Faculdade de Matemática de 12 de Março de 1872, que ficasse registado em acta um agradecimento ao lente da cadeira de Geometria Descritiva da Escola Politécnica de Lisboa, Luís Porfírio da Mota Pegado (1831-1903), «pela obsequiosa cooperação e bom serviço que se dignou prestar à Universidade, em relação aos melhoramentos realizados na aula de Geometria, no ensino prático da mesma aula». Apesar da construção dos modelos de geometria descritiva não ser explicitamente mencionada, este agradecimento associa, de forma inequívoca, o lente de geometria descritiva da Escola Politécnica à construção dos modelos de Olivier de Coimbra. Mota Pegado terá acolhido o pedido que lhe chegava do lente de geometria descritiva de Coimbra, tendo sido favorável à execução de réplicas dos modelos de Olivier da Escola Politécnica — que por sua iniciativa haviam sido adquiridos, anos antes, à casa de Fabre de Lagrange em Paris —, tendo promovido, e possivelmente acompanhado, a construção dos cinco modelos de superfícies regradas de Coimbra junto da Oficina de Instrumentos de Precisão do Instituto Industrial e Comercial de Lisboa.

Como podemos confirmar pela documentação de despesa da Universidade de Coimbra, em Junho, ou ainda no final de Maio, de 1872, chegam a Coimbra os modelos de Olivier construídos na Oficina de Instrumentos de Precisão do Instituto Industrial e Comercial de Lisboa. Com quase século e meio de existência, são o mais antigo dos núcleos de modelos matemáticos de apoio ao ensino à guarda do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra.

Referências

[1] Palaré, Odete Rodrigues. *Geometria Descritiva. História e didática – novas perspectivas.* Tese de doutoramento. Faculdade de Belas Artes da Universidade de Lisboa. Lisboa: Universidade de Lisboa, 2013.

[2] Tenreiro, Carlos. Os "modelos de Olivier" do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra. *Gazeta de Matemática*, 176, 2015, pp. 32–38.

Reação holandesa à Matemática Moderna

Andréia Büttner Ciani, *Dulcyene Maria Ribeiro*, *Emerson Mario Boldo*
Universidade Estadual do Oeste do Paraná
UNIOESTE, Brasil
e-mail: `dulcyenemr@yahoo.com.br`

Este trabalho busca elementos da avaliação e ações tomadas, por matemáticos preocupados com o ensino da Matemática, em relação à reforma, ou movimento, no ensino e aprendizagem da Matemática, denominada (o) Matemática Moderna.

O movimento já viera em forma de contraproposta ao ensino vigente nas décadas de 50, baseado no modelo euclidiano, sob uma visão platônica como concepção de sistematização do conhecimento matemático. Iniciado por volta de 1960, o movimento inscreveu-se numa política de formação a serviço da modernização econômica. O avanço tecnológico era desejo das elites ocidentais frente ao desenvolvimento do programa espacial soviético. A Matemática era vista como a chave para esse avanço. Resumidamente, o movimento preconizava o estudo dos conjuntos e funções; concebia uma matemática prioritariamente algébrica e lógica, na qual se estudava estruturas e sistemas de símbolos, com ênfase nas definições, generalidade e abstração máxima.

Uma avaliação crítica a este movimento gerou, em 1962, o documento intitulado *The Mathematics Curriculum Of The High School*, no periódico *The Mathematics Teacher*, um memorando assinado por 75 matemáticos de destaque na época. Treffers (1987) afirma que este documento traz o cerne de um movimento contrário à Matemática Moderna que se consolidaria nos anos seguintes, principalmente na Holanda. Resumidamente, o memorando defende que o currículo matemático do ensino secundário (equivalente ao Ensino Médio atual no Brasil) deveria: atender às necessidades de todos os alunos e não, exclusivamente, a possíveis futuros matemáticos; levar em conta o princípio de que conhecer matemática significa saber fazer e aplicar, em detrimento de apenas reter informação; levar em conta que a Matemática está interligada às outras Ciências; levar em conta o pensamento indutivo e não exclusivamente o dedutivo; destacar o origem dos conceitos, a formação histórica da ideia; ter cuidado com o não abandono dos conteúdos fundamentais em nome de uma modernização; não apresentar a matemática como um conjunto de truques isolados e desconectados, que não fornece informações sobre a origem e o propósito das manipulações; buscar conceitos unificadores, a fim de se combater uma simples repetição de terminologia memorizada. (AHLFORS, 1962).

Em meados de 1960, educadores holandeses consonantes com as concepções expressas no memorando de 1962 e fortemente respaldados pelas explanações, em forma de artigos científicos, de Hans Freudenthal, se organizaram a elaborar uma proposta curricular que modernizasse o ensino de Matemática do país, com uma perspectiva de reforma educacional firmemente em contraposição ao movimento da Matemática Moderna.

Dentre estes artigos, destaca-se o intitulado *O que é Axiomático e que valor educacional isso pode ter?*[1], de 1963. O matemático Erich Wittmann, na década de sessenta, interessado na literatura recente e crescente sobre o ensino de Matemática, nutrira uma "aversão" ao movimento da Matemática Moderna e encontrou no referido artigo de Hans Freudenthal uma consistente contraposição a este movimento. Freudenthal (1963) apud Wittmann (2005) apresenta neste artigo uma forte contestação à arquitetura da matemática de Bourbaki como base para o ensino da Matemática. Wittmann (2005) considera que o ponto mais importante foi que o artigo descreve aprender como um processo que passa por diferentes estágios, cada um necessário para o seguinte e a atividade matemática como o elemento crucial da aprendizagem.

Outro ponto que merece destaque no documento de 1963 refere-se ao fato de que a preocupação principal não deveria ser modernizar o conteúdo, mas sim modernizar o ensino, subordiná-lo a um objetivo educacional, e não a um cumprimento de metas escolares ou cumprir um programa de conteúdo. Esclarece que esse objetivo (educacional) deveria ser considerar Matemática como uma atividade e não como um produto acabado. A fim de atingir este objetivo educacional, Freudenthal (1963) indica que o aluno tem de reinventar a Matemática pois, ao fazê-lo, a compreensão estará implícita. Afirma que neste processo, o professor não deve exercer um controle muito rígido sobre o aluno, mas apenas guiá-lo, alertando para não o proteger excessivamente dos erros e becos sem saída, nos quais ele inevitavelmente cairá se for privado cedo demais e de maneira dogmática. (FREUDENTHAL, 1963, p. 22). Posteriormente, Freudenthal (1973, p. 109) explica que, de acordo com o processo de reinvenção guiada, o aluno seria chamado e guiado a percorrer

[1]Tradução nossa de "Was ist Axiomatik, und welchen Bildungswert kann sie haben?".

um caminho de experiências mentais que o conduziriam ao que se espera que ele aprenda. Esclarece que os guias desse caminho seriam os próprios passos originais na descoberta, ou da construção do conceito, ao contrário de seguir a organização, por exemplo, expressa em um livro da demonstração de um teorema.

O movimento de reforma curricular na Holanda ganhou maior impulso a partir de 1968, com o projeto Wiskobas que teve como fundadores Fred Goffree e Edu Wijdeveld. O Wiskobas foi um projeto do Mathematics Curriculum Modernization Committee (CMLW) que foi criado, em 1961, para modernizar o ensino da Matemática nas escolas secundárias. Em 1971 foi criado o Institute for the Development of Mathematical Education (IOWO), em Utrecht, fundado por Hans Freudenthal e que forneceu total apoio ao desenvolvimento do projeto Wiskobas. (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2000). Neste Instituto, segundo Wittmann (2005) ele juntou um grupo de matemáticos preocupados com o ensino altamente criativos, dentre eles Jan de Lange, Leen Streefland, e Adri Treffers. Esta crítica à Matemática Moderna produziu uma contraproposta, que ganhou um viés teórico, denominada Educação Matemática Realística, cuja concepção filosófica sustenta um conjunto de propostas de ensino de Matemática. Ela enfatiza a ideia de que a matemática é uma atividade humana e que deve ser conectada ao imaginável para do aluno, utilizar o contexto como uma fonte de desenvolvimento de conceitos e como uma área de aplicação, por meio da reinvenção guiada.

Referências Bibliográficas

AHLFORS, Lars Valerian et al. On the Mathematics Curriculum of the High School. Mathematics Teacher, **Mathematical Association of America**, n. 3, v. 69, p. 189–193, 1962.

FREUDENTHAL, Hans. Was ist Axiomatik, und welchen Bildungswert kann sie haben? In: **Der Mathematikunterricht 9**, Heft 4, 5–19, 1963.

FREUDENTHAL, Hans. **Mathematics as an educational task**. Dordrecht: Reidel. 1973.

TREFFERS, Adrian. **Three Dimensions**: a Model of Goal and Theory Description in Mathematics Instruction, The Wiskobas Project. Dordrecht: Reidel, 1987.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, Marja. Mathematics education in the Netherlands: a guided tour. **Freudenthal Institute Cd-room for ICME9**. Utrecht: Utrecht University, 2000.

WITTMANN, Erich Christian. Realistic Mathematiscs Education, past and present, **Nieuw Archief voor Wiskunde**, pp. 294–296, 2005.

The mathematization of cosmology from Kelvin to Einstein

Scott A. Walter
Centre François Viète, Université de Nantes
e-mail: scott.walter@univ-nantes.fr

At the turn of the 20th century, William Thomson (Lord Kelvin) [1], observed that by assimilating the stars in the sky to monatomic gas molecules, from kinetic gas theory one could calculate the dimensions of the universe, given stellar velocities in the vicinity of the Solar System and an estimate of average matter density. Thomson's insight gave rise to "stargas" models of star clusters, and of the observable universe, that were pursued until the early 1920s by mathematical astronomers J. C. Kapteyn, Henri Poincaré, Arthur S. Eddington, Karl Schwarzschild, James Jeans, C. V. L. Charlier, and the theoretical physicist Albert Einstein.

Thomson's suggestion arrived in a unique scientific context. From the 1860s to the turn of the twentieth century, position and apparent magnitude were cataloged for hundreds of thousands of stars. The directory of the Munich Observatory, Hugo von Seeliger sought to exploit this data by deriving a density law [2] for stars of a given magnitude in a solid angle. Concurrent progress in the theory of integral equations offered hope that Seeliger's law would become more tractable, while further impetus to his statistical program was provided by Kapteyn's announcement [3] at the Congress of Science and Arts during the World's Fair in Saint Louis (1904) of his discovery of two star-streams. In Kapteyn's audience was Henri Poincaré, who quickly seized on Thomson's idea of using kinetic gas theory for modeling astronomical and cosmological phenomena.

Others soon followed, including A. S. Eddington and Karl Schwarzschild, who proposed dualist and unitary models, respectively, of the observed distribution of stellar velocities. Eddington [4] affirmed Kapteyn's two-stream hypothesis on the basis of his analysis of the Groombridge stars, and claimed the streams were characterized by Maxwellian distributions with different constants. Shortly thereafter, Schwarzschild [5], on the basis of a different dataset, affirmed that there were not two star-streams but rather an ellipsoidal velocity distribution. The two models were judged at first to represent the data equally well, and further efforts were called for to determine which was best.

Suplemento do Boletim da SPM 76, Dezembro 2018, pp. 171-173

What Eddington and Schwarzschild provided in 1906–1907 were data models, and neither one of them investigated the underlying dynamics. Early on, Poincaré suggested that the Milky Way was undergoing a rotation [6]; he developed this bold conjecture in the course of his Sorbonne lectures of 1910–1911 [7], the publication of which constituted the first theoretical treatise on cosmology. Notably, Poincaré derived the virial for a gaseous mass with Newtonian attraction, and took up the mixing problem. Like Poincaré, James Jeans challenged belief in the stationary state of the universe, based on his calculation of the angle of deflection of colliding stars [8]. A stargas model of globular nebulæ was investigated by Einstein in 1921 using Poincaré's virial, as a means of fixing the value of the cosmological constant he had introduced in 1917 to the field equations of general relativity [9], and to obtain thereby an estimate of the size of the universe [10].

Ultimately, stargas models of the universe did not stand up well against the data obtained from the powerful new telescopes at the Mount Wilson and Lowell observatories, as E. R. Paul pointed out [11]. Following the upheaval in knowledge of the structure of the Milky Way in the 1920s, stargas models continued to find employment in the sub-realms of galaxy and star clusters. The theorems and methods introduced in this context thus served as the foundation for research in stellar dynamics in later decades.

References

[1] W. Thomson, "On the clustering of gravitational matter in any part of the universe", *Philosophical Magazine*, vol. 3, no. 13 (1902), pp. 1–9.

[2] H. v. Seeliger, "Betrachtungen über die räumliche Verteilung der Fixsterne", *Abhandlungen der K. bayer. Akademie der Wiss. Klasse II*, vol. 19 (1898).

[3] J. C. Kapteyn, "Statistical methods of stellar astronomy", in *Congress of Arts and Science: Universal Exposition, St. Louis, 1904, Volume 4*, 1906, H. J. Rogers, ed., pp. 369–425.

[4] A. S. Eddington, "The systematic motions of the stars", *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 67 (1906), pp. 34–63.

[5] K. Schwarzschild, "Ueber die Eigenbewegung der Fixsterne", *Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse*, 1907, pp. 614–632.

[6] H. Poincaré, “La Voie lactée et la théorie des gaz”, *Bulletin de la Société astronomique de France*, vol. 20 (1906), pp. 153–165.

[7] H. Poincaré, *Leçons sur les hypothèses cosmogoniques.* Paris: Hermann, 1911.

[8] J. H. Jeans, “On the ‘kinetic theory’ of star-clusters”, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 74, no. 12 (1913), pp. 109–112.

[9] A. Einstein, “Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie”, *Sitzungsberichte der königliche preußischen Akademie der Wissenschaften*, 1917, pp. 142–152.

[10] A. Einstein, “Eine einfache Anwendung des Newtonschen Gravitationsgesetzes auf die kugelförmigen Sternhaufen”, in *Festschrift der Kaiser-Wilhelm-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften zu ihrem zehnjährigen Jubiläum dargebracht von ihren Instituten*, pp. 50–52, Berlin: Springer, 1921.

[11] E. R. Paul, *The Milky Way Galaxy and Statistical Cosmology 1890–1924.* Cambridge: Cambridge University Press, 1993.

O Livro XVIII dos "Principios Mathematicos" de José Anastácio da Cunha explicado pelo próprio[1]

Ângela Lopes
EC – Universidade do Minho
e-mail: angelacerdeiralopes@gmail.com

António Leal Duarte
CMUC & DMAT – Universidade de Coimbra
e-mail: leal@mat.uc.pt

Maria Elfrida Ralha
DMA – Universidade do Minho
e-mail: eralha@math.uminho.pt

Os *Principios Mathematicos* de José Anastácio da Cunha têm vindo, particularmente nas últimas décadas, a merecer um justíssimo reconhecimento resultante da análise de alguns dos seus mais notáveis Livros (IX e XV, em particular).

Com o objetivo de irmos construindo uma visão cada vez mais completa e mais rigorosa do percurso/pensamento matemático do nosso autor setecentista, debruçamo-nos sobre o Livro XVIII, complementando-o com a investigação VII do Livro XXI e concluimos que resultaram de um opúsculo – inédito, até agora – que Anastácio da Cunha compôs em 1775 e reconstituiu em 1779 e ao qual chamou "Reducçoes geraes de humas integraes binomias a outras".

Sobre este Livro XVIII se escrevera, na recensão de 1812 feita para *The Edinburgh Review*, que "the method of finding fluents is delivered in the 18th, and a number of curious theorems are laid down".

Apresentamos o manuscrito autógrafo que data de 1779 (juntamente com um outro subordinado à mesma temática), com Anastácio da Cunha nele a explicar, na primeira pessoa, quer o motivo específico para redigir aquele texto, quer as preocupações pedagógicas associadas. Estabelecemos

[1]O presente trabalho foi desenvolvido no âmbito do projeto MAT^2: José Anastácio da Cunha e a MATemática nos Fundos Setecentistas do Arquivo da Casa de MATeus.

a correspondência entre título e descrição de um e outro manuscritos com os que constam de uma listagem elaborada por João Manuel de Abreu, para conjeturar serem estes dois dos textos que este discípulo pretendia incorporar nos chamados "Escriptos Posthumos de José Anastácio da Cunha".

Em "Reducçoes geraes de humas integraes binomias a outras", José Anastácio da Cunha pretende repor a sua produção científica abruptamente interrompida e descontinuada pelo Processo Inquisitorial que o levara à condenação e ao exílio na Congregação do Oratório, em Lisboa. Vai, então, mais além comparando o seu opúsculo com textos que já conhecia e/ou aos quais entretanto acedeu. Analisamos as asserções do nosso matemático, conferindo pelos textos originais dos autores que refere: Bezout, La Caille, Abbé Marie, Simpson, Sauri, Wallis e Euler.

Neste contexto dos integrais binomiais, o destaque dedicado, por José Anastácio da Cunha, às séries levou os autores da presente investigação a reevocar a caracterização de precursor que dele fez José Vicente Gonçalves quando, em 1940, escreveu: "criador nas séries, reformador nas potências, em umas e outras levou Cunha boa dianteira às maiores figuras do tempo".

O assunto desta comunicação será devidamente estendido num artigo científico que os autores submeterão, em breve, a uma revista internacional da especialidade.

Referências

[1] J. M. d'Abreu, *Escriptos Posthumos de José Anastácio da Cunha, ordenados aos sistemas dos seus Principios Mathematicos, e offerecidos a S. A. R. o S. D. João VI, Príncipe Regente de Portugal, por J. M. D'Abreu.* Cod. 8998–fls. 84 a 87. Biblioteca Nacional de Lisboa.

[2] E. Bezout, *Elementos de Analisi Mathematica*, 2 vols., Coimbra, 1774.

[3] J. A. da Cunha, *Princípios Mathematicos*, Lisboa, 1790. Reprodução fac-simile em Coimbra, Departamento de Matemática, Universidade de Coimbra, 1987.

[4] L. Euler, *Institutionum calculi integralis*, Volumen Primum, Impensis Academia Imperialis Scientiarum, Petropoli, 1768.

[5] J. V. Gonçalves, "Análise do Livro VIIII dos Principios Mathematicos de José Anastácio da Cunha", *Congresso do Mundo Português*, vol. I, 1940, pp. 123-140.

[6] N. L. La Caille, *Leçons élémentaires de mathématiques*, Nouvelle édition, avec de nouveaux Eléments (...) par M. l'Abbé Marie, Chez la Veuve Desaint, Paris, 1784.

[7] J. F. Marie, *Tratado de Mechanica por M. Maria*, Real Officina da Universidade, Coimbra, 1775. Vd. também versão original.

[8] J. Playfair, "Principes Mathématiques de feu Joseph-Anastase da Cunha traduits litteralement du portugais par J. M. d'Abreu"(recensão), *The Edinburg Review*, n.º XL, Novembro de 1812, pp.425 − 433. Original reproduzido em Anastácio da Cunha 1774 − 1787, o Matemático e o Poeta, Lisboa, Imprensa Nacional - Casa da Moeda, 1990, pp. 415 − 423.

[9] J. Sauri, *Cours complet de mathématiques*, Tomo IV, Chez Jean-François Bastien, Paris, 1778.

[10] T. Simpson, *A new treatise of fluxions*, Printed by Tho. Gardner, London, 1737.

José Monteiro da Rocha (1734-1819), um Matemático ao serviço do Estado. Subsídios para a comemoração do bicentenário da sua morte (2019)

Fernando B. Figueiredo
CITEUC/CMUC
e-mail: fernandobfigueiredo@gmail.com

2019 é o ano do bicentenário da morte de uma das figuras marcantes da cultura e da ciência portuguesa dos finais do século XVIII e primeiras décadas do século XIX.

É do conhecimento geral, na historiografia da cultura e da ciência portuguesa, a importância de José Monteiro da Rocha (1734-1819) em todo o processo de institucionalização da ciência moderna, iniciada em Portugal pela Reforma Pombalina da Universidade de Coimbra (1770-72). O reconhecimento dos papéis cruciais que Monteiro da Rocha desempenhou ao longo de quatro décadas na vida da Universidade e da sociedade portuguesa, como cientista, académico, administrador e legislador, é facto determinante que não deve ser esquecido.

As Reformas Pombalinas, em geral, e as reformas da educação, em particular, tinham o propósito de recuperar o atraso de Portugal em relação aos países considerados mais avançados e cultos da Europa. A Reforma da Universidade de Coimbra foi pensada com a finalidade de ajustar Portugal às ideias iluminadas da Europa, no sentido do conhecimento científico e do desenvolvimento. O objectivo estruturante da Reforma foi a formação de quadros para os vários sectores do funcionalismo público dando suporte aos interesses económico-políticos do país e das suas inúmeras colónias, em particular o Brasil.

No que concerne à elaboração da Reforma Pombalina da Universidade de Coimbra, Monteiro da Rocha foi um dos principais responsáveis pela concepção de um programa curricular moderno para o ensino da matemática e da astronomia e das ciências naturais e experimentais, programa que marcará profundamente a vida da instituição até 1911.

Em toda a subsequente actividade lectiva, científica e administrativa da Universidade, Monteiro da Rocha desempenhou um papel de relevo, particularmente, na fundação e instituição da Faculdade de Matemática e do

Observatório Astronómico. Enquanto professor das cadeiras de Foronomia (1772-83) e de Astronomia (1783-1804), foi um dos directos e principais responsáveis pela formação dos matemáticos e astrónomos em Portugal, no final do antigo regime. A sua influência estende-se, indirectamente, aos quadros formados pelas novas instituições de ensino militar (Academias da Marinha e do Exército), uma vez que grande parte dos seus professores foram formados na Universidade de Coimbra.

No campo administrativo-político e enquanto vice-reitor, Monteiro da Rocha tem um papel muito activo em defesa do ideal pombalino, plasmado nos Estatutos da Universidade (1772), que subjaz e orienta todo o programa universitário deste período. A Universidade Reformada, ou Pombalina, não se limita apenas ao período 1772-77, como reflecte Reis Torgal. Prolonga-se pelas décadas seguintes com reformas dos planos de estudos das várias faculdades e com o aprofundamento da legislação e regulamentação universitárias. Durante estas fases de construção, institucionalização e aprofundamento da Reforma, pode-se mesmo considerar que Monteiro da Rocha foi o principal eixo, em torno do qual girou toda a dinâmica científica e pedagógica da Universidade.

A sua contribuição no que diz respeito à astronomia foi fundamental para a futura actividade científica do Observatório Astronómico até meados do século XIX. A ideia de criar um observatório astronómico surge nos Estatutos a propósito da cadeira de Astronomia, tendo dois objectivos distintos: primeiro, a leccionação e a prática da astronomia universitária e, segundo, o desenvolvimento da própria ciência astronómica. A criação e planificação do Observatório Astronómico de Coimbra – o primeiro Observatório ligado à Universidade, mas com profundas características de um Observatório Nacional – envolveu questões ligadas aos problemas de navegação, geodesia e cartografia, determinação de órbitas de planetas e cometas e medições astrométricas, à semelhança de outros observatórios europeus. O Observatório Astronómico constituiu, em conjunto com o Laboratório Químico da Universidade, um dos principais centros de investigação do país, publicando periodicamente as Efemérides Astronómicas, obra reconhecida na Europa pelo seu carácter inovador.

A actividade e influência de Monteiro da Rocha não se circunscreveram à Universidade. Monteiro da Rocha teve um papel fundamental na fundação da Academia das Ciências (1779), nomeadamente na definição da sua orgânica interna, instituição que representa, como diz Óscar Lopes, a "articulação necessária entre a Universidade pombalina e as exigências da investigação e do fomento económico". O seu papel foi igualmente decisivo na preparação das bases para a construção da Carta Geográfica do Reino, cujos trabalhos geodésicos foram dirigidos, a partir de 1790, por um dos seus mais brilhantes discípulos: Francisco António Ciera. Foi, ainda, um actor político, fazendo chegar ao príncipe regente D. João (futuro rei D. João VI), através do reitor D. Francisco de Lemos, a sua visão da política interna e externa portuguesa.

O facto de Monteiro da Rocha ter abandonado a Companhia de Jesus e, por essa razão, ter sido considerado um "trânsfuga" (Monteiro foi jesuíta e deixou a Ordem aquando da sua expulsão pelo Marquês de Pombal em 1759), trouxe razões de sobra para que, no contexto da historiografia jesuítica, fosse considerado figura não grata, sendo por isso pouco estudada e, consequentemente, toda a herança formativa, obtida nos inacianos, fosse negligenciada. Monteiro da Rocha é visto na história da cultura e da ciência como um homem de outro tempo; um dos responsáveis pela introdução e institucionalização da filosofia e da ciência moderna no sistema de ensino português ao mais alto nível. Porém, sabemos hoje, com toda a certeza, que Monteiro da Rocha fazia parte do grupo que, no seio da Companhia de Jesus, abraçava uma linha inovadora e moderna na Assistência Portuguesa da Companhia de Jesus, antes das reformas de Pombal.

Já nos seus trabalhos de juventude (década de 1760), Monteiro da Rocha mostra estar a par dos avançados progressos científicos do seu tempo e vê a ciência e a matemática não só como instrumentos para a resolução de problemas mas, sobretudo, como saberes fundamentais para a edificação de um conhecimento útil e necessário. A visão utilitária da ciência que Monteiro da Rocha abraça durante toda a sua futura vida científica e académica, direcciona toda a dimensão reformista da Universidade de Coimbra para a contemporaneidade, da qual ele é um dos principais responsáveis.

Pertinência

É pertinente distinguir a importância do longo magistério de Monteiro da Rocha. A sua actuação representa a mudança do ensino moderno em direcção à contemporaneidade.

Apesar do significado maior da produção intelectual deste professor e cientista, o reconhecimento da sua obra está por fazer, tanto pela Universidade de Coimbra e pelo país, como pela comunidade científica internacional. Comemorando o bicentenário da morte de Monteiro da Rocha, ocorrida a 11 de

Dezembro de 1819, cabe olhar para esta personalidade e para o seu legado e, através desta herança, pensar a Universidade, as Instituições, a Ciência e a Sociedade de ontem e hoje.

Objectivo

O principal objectivo da nossa comunicação no 31º SNHM foi sensibilizar os colegas para uma efeméride que não deve passar despercebida. Uma efeméride que poderá ser assinalada com a organização de um amplo colóquio que, centrado na vida pública/académica e actividade científica de Monteiro da Rocha, chame à discussão científica e à partilha colectiva a história da ciência portuguesa. Espero assim que os colegas se sintam entusiasmados, e entusiasmem outros, para que em 2019 assinalemos a data.

(Este texto é adaptado de um outro texto que com os colegas António Leal Duarte e Carlos Martins escrevemos há já algum tempo alertando a comunidade académica coimbrã para a efeméride que se aproxima).

Revisitando a polémica entre Monteiro da Rocha e Anastácio da Cunha: o caso da raiz cúbica

António Leal Duarte[a], *Fernando B. Figueiredo*[a,b]
[a] CMUC, [a,b] CITEUC/CMUC
e-mail: leal@mat.uc.pt
fernandobfigueiredo@gmail.com

A famosa polémica travada, na década de 1780, entre José Monteiro da Rocha (1734-1819) e José Anastácio da Cunha (1744-1787), embora centrada no problema das quadraturas (integração) do matemático francês Alexis Fontaine (1704-1771) vai muito para além desta questão, estendendo-se a outras matérias científicas e, envolvendo, embora de forma lateral, o caso da raiz cúbica. Passados cerca de 230 anos esta questão ainda continua a suscitar interesse científico e historiográfico. Devemos notar que embora, na década de 1780 as relações entre os dois homens fossem péssimas, há indícios de que no período em que Anastácio foi professor em Coimbra (1773-78) os dois professores mantiveram relações cordiais, com empréstimos de livros, troca de informações biográficas, consultas sobre questões matemáticas. O poema de Anastácio da Cunha, Contra os Vícios que impedem o Progresso das Sciencias (Cunha 1839, 90-96), parece-nos retratar a relação cordial nesses tempos.

A polémica inicia-se com um parecer negativo e crítico de Anastácio da Cunha (de 9 de maio de 1785) ao trabalho do professor da Fac. de Matemática da Univ. de Coimbra, Manuel Joaquim Coelho da Maia (1750-1817), vencedor do concurso de 1782 da Academia das Ciências de Lisboa[1]. E amplia-se com a carta (de 3 de junho de 1785) que Anastácio escreve ao seu amigo e discípulo João Manuel de Abreu (1757-1815) e que a se torna pública. Em ambos os documentos Anastácio critica não só o trabalho de Maia mas também os professores da Fac. de Matemática e especialmente Monteiro da Rocha, incluindo acusações pessoais. Monteiro da Rocha replica o que provoca uma resposta de Anastácio. Esta troca de acusações mútuas envolve acusações pessoais, mas também discussões de sobre matemática. Na

[1] O concurso proposto pela Classe de Cálculo, em 1782 para o ano de 1785, tinha por tema: «Demonstrar a regra de aproximação, que Mr. Fontaine ensina nas suas memórias, para integrar $\int y dx$, sendo y função de x; e determinar os casos em que a dita aproximação é mais convergente», Gazeta de Lisboa 1782, 2º Sup. n. XLVI.

referida carta a J. M. de Abreu, Anastácio escreve, referindo-se a Monteiro: "Roubou-me a minha extracção da raiz cúbica; não fiz caso".

Monteiro da Rocha nos *Elementos de Arithmetica* (1773), tradução do Eléments d'Arithmétique (1764) de Bezout, havia proposto um método alternativo ao do autor francês para o cálculo da raiz cúbica (Elementos de Arithmetica 1784, §.156, pp. 152 e seg.)

Monteiro rejeita veementemente tal acusação:

> *«Que eu lhe roubei a sua extracção da raiz cúbica. Sua! E porque títulos? Roubei! E como? Nunca o tinha visto, nem tratado, nem conhecido a ele, quando publiquei aquela extracção, sem contudo lhe juntar data, nem lhe por o meu nome, receando que uma coisa tão fácil andasse já em algum livro que eu não tivesse visto. Agora depois de serem passados tantos anos é que apareceu José Anastácio da Cunha a declarar a sua curta esfera nas invejosas pretensões à invenção de uma bagatela, que uma criança (como eu era quando a achei[2]) pode achar sem dificuldade...» (Teixeira 1890–92, p. 518).*

A isto Anastácio responde:

> *«Minha; porque a achei três, ou quatro anos antes da reforma da Universidade, como sabem muitas pessoas do meu regimento, e fora dela. Roubou-ma porque a teve em seu poder também antes da reforma, em papéis meus que lhe comunicou o governador João Batista Vieira Godinho» (Teixeira 1890–92, p. 658).*

Sabemos, que, por volta de 1772, Monteiro da Rocha tivera conhecimento de uma "Arithmetica Universal" de Anastácio (Ferro 1987, 80). Este vinha já desde os tempos de Valença (década de 1760) escrevendo uma obra de matemática que segundo as suas próprias palavras seria, «a base de toda a Matemática» (Ferro 1987, 139) Provavelmente nessa Arithmetica Universal Anastácio trataria do problema da raiz cúbica, tal qual o faz nos seus Principios Mathematicos (1790) (Cunha 1790, 54-58); aliás o mesmo sucedia, em geral, nas várias Aritmeticas que se foram publicando pela Europa, pelo menos a partir da Arithmetica Universalis (1707), de Newton.

Porém, os métodos propostos tanto por Bézout, como por Monteiro da Rocha na sua tradução ou Anastácio da Cunha nos Principios Mathematicos, apresentam variantes mas baseiam-se igualmente no mesmo princípio da decomposição do caso notável $(a+b)^3$. Uma decomposição que era base dos

[2]Monteiro da Rocha estará provavelmente a referir-se aos seus Elementos de Mathematica. Texto inédito, existente na Academia das Ciências (Ms. Azul 371), sem data mas escrito possivelmente da década de 1760, onde Monteiro aborda a questão da raiz cúbica (Figueiredo 2011, 201-216).

vários métodos e variantes que à época circulavam. Se considerarmos a raiz cúbica de um número x como sendo composto de dezenas e unidades, isto é $\sqrt[3]{x} = y = 10a + b$, logo $x = y^3 = (10a + b)^3 = 1000a^3 + 300a^2b + 30ab^2 + b^3$. Assim calculando o primeiro algarismo a da raiz do número x como o menor inteiro da raiz cúbica de $x/1000$ é possível calcular os seguintes algarismos.

Nas edições dos Elementos de Arithmetica que vimos, o referido método aparece no meio do §56, no mesmo tipo de letra e introduzido pela frase ”para facilitar pois esta operação, ajuntaremos aqui um método particular ... ”, não sendo claro qual o sujeito de “ajuntaremos” (o autor Bezout? ou o tradutor?).

Há uma longa tradição (começando com Anastácio) que atribui aquele “ajuntamento” (ou aditamento) a Monteiro da Rocha. Inocêncio da Silva escreve mesmo que este método ficou conhecido por ‘Método de Monteiro’ (o mesmo escreve Freire 1782 e Teixeira 1890-92). Não conhecemos outras referências a esta atribuição, mas ela poderia fazer parte de uma tradição oral. Tanto Inocêncio (na Academia da Marinha de Lisboa) e Castro Freire (na Universidade de Coimbra) estudaram num período em que a Aritmética de Bezout era ainda utilizada.

Coloca-se então a seguinte questão: se os métodos apresentam variantes, se são baseados na mesma ideia, e se este tipo processos circulavam nos vários livros de aritmética da época, que sentido terá Anastácio acusar Monteiro de lhe ter roubado “a sua extração da raiz cúbica”? Uma possível explicação estará na tradição oral, cuja possibilidade referimos, da atribuição do nome de Monteiro ao respectivo método. Quando terá começado esta tradição? É bem possível que tenha começado logo após a saída de Anastácio de Coimbra (1778). A ser assim a acusação de Anastácio não se referiria a um plágio (que como vimos não faria sentido) mas sim na apropriação do nome de Monteiro para um método semelhante ao de Anastácio. Notemos também (como o próprio Monteiro diz) que tal apropriação não tem grande razão de ser.

Bibliografia

Bézout E (1764). Eléments d’Arithmétique, Cours de Mathématiques à l’usage des Gardes du Pavillon et de la Marine, v.1. Paris

Bézout E (1770). Arithmétique, Géométrie et Trigonométrie rectiligne, Cours de Mathématiques à l’usage du Corps Royal de l’Artillerie, v.1. Paris

Bézout E (1773). Elementos de Arithmetica por M. Bezout, Traduzidos do Francez. Coimbra

Cunha JA (1790). Principios Mathematicos. Lisboa

Cunha JA (1839). Composições Poéticas do Doctor Joseph Anastasio da Cunha. Lisboa

Ferro JP (1987). O Processo de José Anastácio da Cunha na Inquisição de Coimbra. Lisboa

Figueiredo FB (2011). José Monteiro da Rocha e a actividade científica da 'Faculdade de Mathematica' e do 'Real Observatório da Universidade de Coimbra': 1772-1820. Tese de Doutoramento, Universidade de Coimbra

Freire FC (1872). Memoria Histórica da Faculdade de Mathematica nos cem annos decorridos desde a Reforma da Universidade em 1772 até o presente. Coimbra

Gonçalves JV (1976-77) "Relações entre Anastácio da Cunha e Monteiro da Rocha, 1773-1786", Memórias da Academia das Ciências de Lisboa, v.21, pp.37-60

Inocencio da Silva F (1860) "José Monteiro da Rocha", in Diccionario Bibliographico Português, V, 75-77. Sousa JMS (2013). Anecdotas de J. A. d. C. (ed. M. E. Ralha & al.). Vila Nova de Famalicão

Teixeira AJ (1890-92) "Questão entre José Anastasio da Cunha e José Monteiro da Rocha", O Instituto: jornal scientifico e litterario, v.38 (1890-1891), pp.20-27, pp.119-131, pp.187-202, pp.268-279, pp.350-357, pp.431-442, pp.512-521, pp.573-576, pp.653-662, pp.739-746, pp.816-820; v.39 (1891-1892), pp.490-497

Teixeira FG (1934). História das Matemáticas em Portugal. Lisboa

Subsídios para uma tábua portuguesa de mortalidade – o contributo de Daniel Augusto da Silva

Ana Patrícia Martins
Escola Superior de Educação de Viseu & CIUHCT
e-mail: anapatmartins@gmail.com

Tábuas de mortalidade são uma ferramenta fundamental nas práticas actuariais – a sua adequação à população visada torna-se crucial para a elaboração de planos de pensões de sobrevivência ou de seguros vida e, portanto, para a viabilidade financeira da instituição.

A primeira tábua de mortalidade (1662) com bases científicas foi elaborada pelo demógrafo John Graunt, com base em *Bills of mortality* da cidade de Londres. Seguiu-se a tábua de Edmund Halley (1693), construída a partir de estatísticas da cidade de Breslau. É considerada um marco na criação da Ciência Actuarial, pela aplicação proposta à determinação de anuidades vida. Os inconvenientes destas tábuas residiam no facto de se basearem apenas em estatísticas de mortalidade; não havia registos do número de vivos, uma vez que não se efectuavam, à data, censos populacionais.

Na Europa Continental, a insatisfação com tais tábuas levou estudiosos de França e Holanda a usar dados estatísticos provenientes de outro tipo de fontes – grupos de subscritores de anuidades vida vendidas pelo Estado. Surgem, assim, as reconhecidas tábuas de Déparcieux, Duvillard, Struick e Kersseboom. Mas também estas acarretavam imprecisões, decorrentes da caracterização de uma população estacionária e, por exemplo, de avanços médicos e melhoramento das condições sanitárias nas cidades. Maior precisão se alcançou com a realização de censos populacionais, sendo pioneiras as tábuas do astrónomo e demógrafo sueco Pehr Wargentin.

No Reino Unido, companhias de seguros vida e *friendly societies* são fundadas a partir de meados do século XVIII e as primeiras tábuas estatísticas oficiais são publicadas em 1845. No caso dos *widows' funds*, criados a partir de finais do século XVII, tal aconteceu em 1868. Entretanto, são frequentes os testemunhos de dificuldades sentidas na elaboração de planos de assistência para essas sociedades, pela inexistência de estatísticas adequadas e inobservância dos princípios da Ciência Actuarial. Em França, registam-se contratempos semelhantes, sendo de 1894 as primeiras tábuas elaboradas para sociedades de socorros mútuos e seguradoras vida.

No contexto português, os montepios de sobrevivência remontam aos finais do século XVIII e seguradoras vida surgem a partir da década de 1830. Apenas no século XX foram usados princípios da Ciência Actuarial nas fundamentações de ambas as instituições. Claúdio Adriano da Costa (1795–1866) esteve ligado às primeiras seguradoras, a *Fidelidade* e a *Providência* e, reconhecendo a importância das estatísticas de mortalidade para as bases dos seus planos, analisou recolhas estatísticas oficiais – (Costa, 1840) – e empreendeu estudos sobre grupos específicos da população – (Costa, 1851).

Estatísticas fidedignas da população portuguesa são elaboradas a partir da década de 1860, seguindo as orientações do Congresso Internacional de Estatística, e o primeiro estudo comparativo da população portuguesa com as de países europeus é da autoria do matemático Daniel Augusto da Silva (1814-1868), (Silva, 1870). O maior desenvolvimento que dá ao tema mortalidade, esclarece o seu propósito principal – "colligir subsidios para uma taboa portugueza de mortalidade". Estudou, nas décadas de 1860 e 1870, planos de pensões de montepios de sobrevivência portugueses e a dificuldade em escolher a tábua de mortalidade estrangeira mais adequada para ser usada na elaboração desses planos motivou-o a empreender este estudo. Baseia-se em estatísticas oficiais portuguesas e de dois montepios de que era sócio, e onde a recolha estatística era feita metodicamente, o Montepio Geral (MG) e o Montepio Geral de Marinha (MGM); recorre a estatísticas oficiais espanholas e a autores europeus estudiosos da temática, Block, Hubbard, Guillard e Vuhrer; efectua comparações com tábuas de mortalidade europeias – Hubbard, Déparcieux, Quételet, Duvillard, Montferrand, Kersseboom, Süssmilch, Wargentin, Muret, Halley, Farr, Milne e Finlaison.

Este contributo de Daniel da Silva tem relevância no campo da Ciência Actuarial, na medida em que permite a escolha de tábuas adequadas para as práticas actuariais; no campo da Demografia, pela referência a diversas estatísticas da população portuguesa (idades, legitimidade de nascimentos, sexo, casamentos, estado civil, mortalidade, ...); mas também na área da Estatística, pelas recomendações ao nível de procedimentos. Em termos de repercussão, apenas podemos precisar o uso feito pelo matemático numa avaliação actuarial ao plano de pensões do MG na década de 1870. A inexistência de estatísticas credíveis na generalidade dos montepios de sobrevivência impossibilitava a comparação com as tábuas apresentadas; às sociedades que se assemelhassem ao MG e MGM, *bastaria* guiarem-se pelas recomendações sugeridas para esses montepios.

Estudos para a elaboração de tábuas de mortalidade portuguesas aparecem a partir de meados do século XX, sendo prova disso os diversos artigos publicados no *Boletim do Instituto dos Actuários Portugueses*, logo quando foi criado em 1945.

O panorama traçado para a evolução das sociedades portuguesas que lidassem com contingências vida tem semelhanças com o que se verificou no estrangeiro, nomeadamente Reino Unido e França. Quer ao nível, mais genérico, da falta de princípios científicos aquando da fundação das primeiras sociedades, quer, mais especificamente, pela inexistência de estatísticas fidedignas das sociedades e morosidade em as coligir.

Bibliografia

Boletim do Instituto dos Actuários Portugueses.

Costa, Claúdio Adriano da. 1840. *Revisão do recenseamento da população em Portugal em 1838.* Lisboa: Typographia de José Baptista Morando.

Costa, Claúdio Adriano. 1851. *Conversão das Classes Inactivas.* Lisboa: Imprensa Nacional.

Forfar, David O. 2004. "Early mortality tables", in: Teugels, J. L.; Sundt, B. (eds.). 2004. *Encyclopedia of actuarial science*, vol. II (New Jersey: John Wiley & Sons), pp. 594–601.

Lewin, Chris, & De Valois, Margaret. (2003). "History of actuarial tables" in Campbell-Kelly, M. [et al.] (eds). *The History of Mathematical tables* (Oxford: University Press), pp. 79–104.

Silva, Daniel Augusto da. 1870. "Contribuições para o estudo comparativo do movimento da população em Portugal". *Jornal de Sciencias Mathematicas, Physicas e Naturaes*, tomo II, VIII (Dezembro de 1869), pp. 255–306.

Daniel Augusto da Silva e o Princípio de Inclusão-Exclusão

Teresa Sousa
Escola Naval & CINAV-Centro de Investigação Naval
Escola Naval - Alfeite
Centro de Matemática e Aplicações da UNL
e-mail: teresa.maria.sousa@marinha.pt

O Princípio de Inclusão-Exclusão é um resultado extremamente simples e natural. De facto, recorrendo a um diagrama de Venn é trivial verificar que dados dois conjuntos finitos A e B se tem $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$. Para três conjuntos, A, B, C não é difícil verificar que

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Parece claro que estes resultados podem ser generalizados para um número finito de conjuntos. Enunciamos de seguida duas versões do Princípio de Inclusão-Exclusão que serão relevantes ao leitor para uma melhor compreensão do resto do texto.

Teorema 1 *Sejam $A_1, \cdots, A_n$ conjuntos finitos arbitrários. Tem-se*

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap \cdots \cap A_n|$$

Teorema 2 *Sejam $A_1, \cdots, A_n$ subconjuntos de um conjuntos S. Tem-se*

$$\left|\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A}_i\right| = |S| - \sum_{i=1}^{n} |A_i| + \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| - \cdots + (-1)^{n} |A_1 \cap \cdots \cap A_n|$$

A questão que pretendemos abordar neste texto é a de saber a quem se deve a autoria do Princípio de Inclusão-Exclusão, ou seja, qual foi o primeiro autor a publicar este resultado.

O conceito de inclusão-exclusão foi usado pela primeira vez, em 1711, por Abraham de Moivre, na resolução de um problema publicado em *De Mensura Sortis* [1]. O princípio de inclusão-exclusão surge escrito pela primeira vez em 1854, por Daniel Augusto da Silva [3]. Em [3] Daniel da Silva publica uma fórmula "que pode vantajosamente servir noutros casos". Vejamos então o que da Silva escreve na sua memória.

Suplemento do Boletim da SPM 76, Dezembro 2018, pp. 191-193

"Suponhamos que n'uma serie S qualquer de numeros (que consideramos *reunidos* e não *sommados*, pois que mesmo alguns delles podem ser negativos, sem que dai resulte *reducção* alguma) e se pede quaes são aquelles que gosam de certa propriedade a;designaremos por S_a a *reunião* desses números; similhantemente serão S_b, $S_{b,c}$, $S_{a,b,c}$ etc. a reunião dos termos de S dotados da propriedade b, ou dotados simultâneaamente das propriedades b, c etc. É fácil de ver que será vg.

$$S_{a_b} = S_{a,b}; S_{a-b_c} = S_{a,b,c}; \quad etc."$$

Analogamente, Daniel Augusto da Silva representa por ${}^aS$, ${}^{a,b}S$, ${}^{b^a}S$ a reunião dos termos de S privados da propriedade a, ou das propriedades a e b, ou a reunião dos termos de ${}^aS$ privados da propriedade b, etc.

"Suppostas estas noções teremos

$${}^aS = S - S_a = S[1-_a],$$

entendendo-se pela ultima notação symbolica, que a letra a na multiplicação passa para indice." De modo análogo concluí-se que

$${}^{b,a}S = S[1-_a][1-_b]$$

isto é em geral

$${}^{\cdots c,b,a}S = S[1-_a][1-_b][1-_c]\cdots$$

"A mesma formula dá-nos também immediatamente o numero dos numeros contidos em ${}^{\cdots c,b,a}S$; por quanto se designarmos esse numero por $\psi^{\cdots c,b,a}S$, e se a caracteristica ψ tiver uma significação analoga, [...], é claro que teremos

$$\psi^{\cdots c,b,a}S = \psi S[1-_a][1-_b][1-_c]\cdots" \tag{1}$$

Note-se que a fórmula (1) de Daniel da Silva corresponde exactamente ao resultado enunciado no Teorema 2.

Mais tarde, em 1883, e de forma independente, o Princípio de Inclusão-Exclusão na versão enunciada no Teorema 1 aparece num artigo de Sylvester [4], neste caso os resultados apresentados inserem-se no contexto da Teoria da Medida. Transcrevemos de seguida o texto do original.

" [...] si $A, B, C, \ldots$ sont des corps avec la faculté de s'entrecouper, contenus dans un vase d'eau, et si $a, ab, bd, \ldots$ représentent symboliquement les volumes de A, de la partie commune à A et à la B, de la partie commune à $A, B, C, \ldots$ alors le volume du liquide déplacé par la totalité des corps sera

$$\sum a - \sum ab + \sum abc - \ldots"$$

No entanto as publicações independentes deste resultado não se esgotam nos textos de da Silva ou de Sylvester. Em 1896, Henry Poincaré publica [2] uma versão do Princípio de Inclusão-Exclusão aplicada ao contexto das probabilidades.

Um certo número de eventos $A_1, A_2, \ldots, A_q$ são possíveis: a probabilidade de A_i ocorrer é p_i; a probabilidade de A_i e A_k ocorrerem é p_{ik}; a probabilidade de A_i, A_j e A_k ocorrerem é p_{ijk}; A probablidade de que pelo menos um dos eventos ocorra é

$$\sum p_i - \sum p_{ik} + \sum p_{ijk} - \cdots$$

Para concluir, o princípio de Inclusão-Exclusão é publicado de forma independente e em contextos claramente distintos por Daniel Augusto da Silva (1854), J. J Sylvester (1883) e Henry Poincaré (1896), sendo que o conceito de inclusão-exclusão já havia sido utilizado antes por De Moivre (1711) na resolução de um problema de cálculo de probabilidades. No entanto, a primeira publicação da fórmula, tal como a conhecemos hoje para conjuntos, é claramente da autoria de Daniel Augusto da Silva (1814-1878).

Referências

[1] A. de Moivre, "De Mensura Sortis", *Philosophical Transactions*, No. 329 (1711).

[2] H. Poincaré, *Calcul des Probabilités*, Gauthier-Villars, 1896.

[3] D. da Silva, *Propriedades geraes e resolução directa das congruências binómias: introducção ao estudo da theoria dos numero*, Imprensa Nacional Lisboa, 1854.

[4] J. Sylvester, "Note sur le théorème de Legendre cité dans une note insérée dans les Comptes Rendus", *C. R. Acad. Sci. Paris*, Vol. 96 (1883), pp. 463–465.

O teorema de Pitágoras ensinado na Academia Militar no princípio do século XVIII

Dulcyene Maria Ribeiro, Andréia Büttner Ciani
Universidade Estadual do Oeste do Paraná
UNIOESTE, Brasil
e-mail: `dulcyenemr@yahoo.com.br`

Conhecido como Teorema de Pitágoras, a proposição 47 do livro I de *Os Elementos* de Euclides, enunciado como *"nos triângulos retângulos, a soma das áreas dos quadrados tomados sobre os catetos é igual à área do quadrado tomado sobre a hipotenusa"*, é um dos resultados mais "populares" da matemática escolar. Neste texto apresenta-se como o teorema foi abordado em aulas de Matemática que ocorreram na Academia Militar no princípio do século XVIII. Destaca-se que o resultado válido para quadrados foi estendido para outras figuras.

O manuscrito da Biblioteca Nacional de Portugal (BNP), intitulado *Elementos de Euclides* ou *Tratado de Geometria Elementar*[1], de autoria atribuída a José Sanches da Silva são as notas de aulas tomadas por este enquanto aluno que frequentou a Academia Militar da Corte portuguesa. Este manuscrito evidencia a forma como o Teorema de Pitágoras foi tratado e ensinado nesta instituição, pelo menos na década de vinte do século XVIII, já que o manuscrito é datado como de 1722. Mais especificamente, o manuscrito é uma releitura dos seis primeiros, mais o 11º e 12º livros de *Os Elementos*. Além do enunciado das proposições e de suas demonstrações, no manuscrito fica indicado, em cada uma dessas proposições, uma maneira de utilização, seja para a demonstração de outras proposições ou para uso prático dos engenheiros. Há um manuscrito atribuído a Manoel de Azevedo Fortes, na Biblioteca Pública de Évora (BPE)[2], cujo conteúdo é considerado idêntico a esse manuscrito da BNP. Segundo Ferreira (2013), o texto de Fortes é considerado uma tradução da versão de *Os Elementos* de Euclides, do francês Jacques Ozanam.

No caso da proposição 47, Livro I, depois de apresentar a demonstração que foi feita por Euclides, nos três materiais mencionados (manuscritos de

[1] BNP, Cod. 5194/2.
[2] BPE, Códice Manizola, Nº 258.

Sanches e de Fortes e livro de Ozanam) propõe-se usos e métodos de demonstração: "[...] aqui daremos o uso desta prop. p.^{a} somar quadr.^{os} ou outras quaisq.^{r} fig.^{as} regulares, cujos lados, e ang.^{os} são todos ig.^{s}, e também p.^{a} somar os circ.^{os}, isto he, p.^{a} fazer hu circ.^{o} ig.^{l} am.^{bos}." (SILVA, 1722, p. 421). São destacados os exemplos utilizando quadrados, triângulos e círculos, incluindo as imagens ilustrativas para esses casos. As imagens seguintes são do manuscrito de José Sanches.

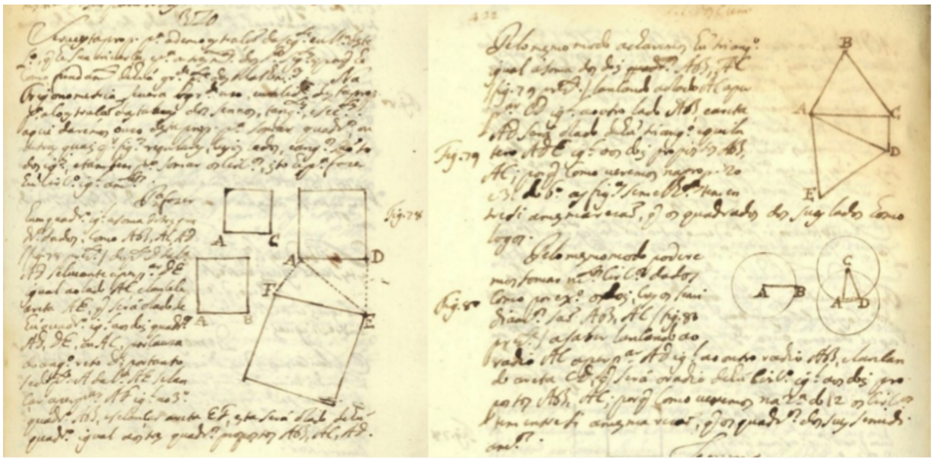


Figura 1: Páginas 421 e 422 do manuscrito de José Sanches da Silva.
Fonte: BNP, Códice 5194/2

Ao analisar o trecho descrito nas imagens, verifica-se que o resultado que garante a validade do teorema para outras figuras semelhantes, além do quadrado, foi mencionado, mas não demonstrado, o que realmente só foi feito na proposição 31 do Livro 6, proposição que em *Os Elementos* apresenta uma generalização do teorema de Pitágoras que o estende ao caso de figuras semelhantes de qualquer espécie. Nos materiais mencionados essa propriedade é apresentada da seguinte maneira: "Se sobre os três lados de um triângulo retângulo se descrevem três retilíneos semelhantes, o que for descrito sobre a hipotenusa será igual à soma dos outros dois." (SILVA, 1722, p. 582).

A associação a outras figuras, além do quadrado, não é comumente vista nos dias de hoje, sendo que, de modo geral, não figura nos livros didáticos utilizados no Brasil e, nos portugueses, quando figura, está em seções especiais no final dos capítulos, conforme uma breve pesquisa realizada em materiais didáticos dos dois países. No Brasil há menções e estudos sobre a associação a outras figuras apenas em trabalhos de pós-graduação e em material didático específico, como a apostila produzida pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), iniciativa de preparação para a Olimpíada Brasileira de Matemática das escolas Públicas (OBMEP). Além disso, são poucos os professores, nos dois países, que a conhecem. Por isso, torna relevante destacar o que foi ensinado na época aos alunos da Academia Militar, já que ainda hoje esse resultado é quase desconhecido.

Em nenhum dos materiais, portugueses ou brasileiros, é mencionado que esse resultado é uma proposição do livro *Os Elementos* de Euclides. Acreditamos que, de modo geral, os professores não conhecem as ideias gerais do livro *Os Elementos*, muito menos algumas propriedades específicas, como as mencionadas, e acabam por desconhecer completamente alguns resultados ligados aos conhecimentos que ensinam.

Referências Bibliográficas

FERREIRA, Maria Elisabete Barbosa. **Teoria(s) de Proporções em Portugal na Primeira Metade do Século XVIII**. 2013. 154 p. Dissertação (Mestrado em Ciências) – Formação Contínua de Professores. Área de Especialização em Matemática, Universidade do Minho, Braga, 2013.

FORTES, Manoel de Azevedo. **Geometria especulativa, trigonometria esférica, modo de riscar e dar aguadas nas plantas militares**. 1724. Biblioteca Pública de Évora, Cod. Manizola 258. (manuscrito)

OZANAM, Jacques. **Curs de Mathematique**: qui comprend toutes les parties de cette science les plus utiles & les plus necessaires à un homme de guerre... Paris: Impresso por chez Jean Jombert, 1693.

SILVA, João Evangelista Brito da. **Teorema de Pitágoras**: algumas extensões/generalizações e atividades com o Software GeoGebra. 2014. 152 p. Dissertação (Mestrado profissional) – Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", São José do Rio Preto, 2014.

SILVA, José Sanches da. **Elementos de Euclides ou Tratado de Geometria Elementar**. 1722. Biblioteca Nacional de Portugal, Cod 5194/2. (manuscrito)

WAGNER, Eduardo. **Teorema de Pitágoras e Áreas.** Rio de janeiro, IMPA, 2015. 86 p.

Correspondência entre Francisco Gomes Teixeira e Charles Hermite

Pedro Freitas
DHFC – FCUL & CIUHCT
e-mail: pjfreitas@gmail.com

Francisco Gomes Teixeira (1851–1933) foi um notável matemático português, um dos maiores dos séculos XIX e XX e certamente o mais prolífico do seu tempo. O seu trabalho recebeu vários prémios internacionais – recebeu dois prémios da Academia Real das Ciências de Madrid, sendo o segundo para o *Tratado de las curvas especiales notables, tanto planas como alabeadas*, em 1897, que foi posteriormente traduzido para francês, numa edição aumentada, e mais tarde premiado pela Academia Francesa das Ciências em 1917 (o livro teve mais duas reedições: em 1971, nos Estados Unidos, e em 1995, em França).

Ao longo da sua vida, criou duas revistas científicas, o *Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas* (de 1877 a 1904) e os *Anais científicos da Academia Politécnica do Porto* (a partir de 1905, sucedendo-se ao *Jornal*). Para um estudo biográfico mais detalhado, veja-se [1].

Estas notas ilustram uma das características centrais, e inovadoras, da atividade científica de Gomes Teixeira: o seu interesse pela internacionalização da atividade matemática em Portugal, depois de um período de maior isolamento. Desde cedo, como veremos, tentou manter contactos com matemáticos de renome internacional, quer pondo-os em contacto com trabalhos feitos em Portugal, quer publicando, no seu *Jornal*, artigos enviados por estes matemáticos. Para mais informação sobre os artigos publicados no Jornal, veja-se [2]. O próprio Gomes Teixeira publicou artigos em várias revistas europeias (veja-se [3], por exemplo).

Para além destas publicações, Gomes Teixeira manteve correspondência regular e intensa com os maiores matemáticos do seu tempo, podendo ser justamente considerado como responsável pela internacionalização da matemática portuguesa depois de um período de maior isolamento. O próprio organizou e catalogou um arquivo das cartas por si recebidas, que atestam esta intensa atividade de contactos científicos. Esta correspondência encontra-se no Arquivo da Universidade de Coimbra, em excelente estado de organização e preservação, e compreende mais de 2000 cartas recebidas. Entre os remetentes encontram-se nomes como Cesàro, Levi-Civita, Hermite ou Mittag-Leffler. Esta correspondência encontra-se catalogada (em grande parte) e brevemente descrita em [3]. Destas cartas, cerca de 200 têm conteúdo científico (artigos para publicação no *Jornal*, comentários a resultados, etc.). O arquivo encontra-se organizado por países: França, Itália, Alemanha, Inglaterra, Suécia, Noruega, Estados Unidos, Brasil, Portugal, etc.

Recentemente, teve início um projeto de estudo deste espólio de correspondência, em colaboração com Henrique Leitão, João Queiró e António Leal Duarte, que pretende, numa primeira fase, fazer um estudo temático deste espólio. Dois dos primeiros temas a serem abordados serão a correspondência com Charles Hermite e Ernesto Cesàro, por serem das figuras mais proeminentes da matemática europeia.

Em particular, sobre a relação entre Gomes Teixeira e Hermite, Henrique Vilhena afirma em [2, p 54]: "Ao lado dessa influência e da de Daniel [Augusto da Silva], há que mencionar a do grande Carlos Hermite, com quem, pondera o sr. Duarte Leite, Gomes Teixeira «teve mais de um ponto de contacto», e a quem alude Gino Loria, no caso, pretendendo Gomes Teixeira «um estudioso assíduo dos escritos de Hermite, do qual pode bem ser dito – continua – um dos discípulos mais eminentes»."

Como início deste estudo, apresentamos aqui brevemente o conteúdo de quatro cartas de Hermite para Gomes Teixeira. Os números aqui mencionados são os da lista descritiva que Henrique Vilhena apresenta em [3].

Na carta no. 140, Hermite agradece o envio da dissertação inaugural de Gomes Teixeira (1875). Note-se que este é o ano de doutoramento de Gomes Teixeira, o que mostra o seu empenho em estabelecer contactos internacionais. Diz na carta: "Je viens de parcourir la thèse inaugurale que vous m'avez fait l'honneur de m'addresser et quoique le sujet important et difficile que vous avez traité ne reste point dans le cercle habituel de mes études, j'ai acquis l'assurance que vous avez fait um travail très serieux et approfondi."

Hermite aproveita para enviar alguns artigos seus.

A carta no. 765 tem um desafio escolar, que Hermite tinha proposto aos seus alunos: a dedução de uma expressão da derivada de ordem n de uma série relacionada com a exponencial. Na carta 771 Hermite faz um comentário a um resultado que Gomes Teixeira lhe havia enviado, sobre o cálculo de um integral complexo, afirmando que o incluirá nas suas aulas.

As duas cartas seguintes contêm artigos científicos. Na carta 766, Hermite envia um artigo para o *Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas* e na carta 773, Hermite agradece a Gomes Teixeira o envio de uma nota sobre uma desigualdade com integrais duplos, e propõe a sua publicação no *Bulletin des Sciences Mathématiques*, o que veio a acontecer.

Em conclusão, parece-nos que este espólio encerra uma grande riqueza para a história da matemática em Portugal, e esperamos que venha a despertar o interesse de potenciais colaboradores neste projeto.

Bibliografia

[1] Alves, Maria da Graça. *Francisco Gomes Teixeira: o homem, o cientista, o pedagogo*, Tese de Doutoramento, Universidade do Minho, 2004.

[2] Saraiva, Luís. A decisive journal in Portuguese mathematics: Gomes Teixeira's Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas, *L'émergence de la presse mathématique en Europe au 19ème siècle*, Editors C. Gerini e N. Verdier, 2014.

[3] Vilhena, Henrique. *O prof Doutor Francisco Gomes Teixeira (elogio, notas, notas de biografia, bibliografia, documentos)*, Lisboa, 1936.

O "lançamento, à sorte, de figuras" de Diogo Pacheco d'Amorim

Rui Santos[1]
Escola Superior de Tecnologia e Gestão
Instituto Politécnico de Leiria
CEAUL – Centro de Estatística e Aplicações
e-mail: `rui.santos@ipleiria.pt`

Diogo Pacheco d'Amorim defendeu a sua tese de doutoramento em 1914 na Universidade de Coimbra. Apesar dos conceitos basilares do Cálculo de Probabilidades serem considerados ambíguos pelos principais autores da escola francesa seu contemporâneos, cf. [1, 3, 4, 5, 8, 11, 13] entre outros, Pacheco d'Amorim fundamenta o Cálculo das Probabilidades no conceito de escolha "à sorte", considerando que partindo deste conceito "a teoria das probabilidades pode reduzir-se a uma sucessão de proposições e definições, como qualquer outro ramo das Matemáticas Puras" [12].

Deste modo, Pacheco d'Amorim cria o *fenómeno padrão* para acabar com qualquer ambiguidade no conceito escolha aleatória bem como com o recurso ao polémico *princípio da razão insuficiente* de J. Bernoulli e Laplace, considerando que somos nós os agentes da escolha (garantindo, deste modo, a sua aleatoriedade) e que temos total conhecimento sobre o espaço amostra. Sob estas condições, Pacheco d'Amorim alicerça o Cálculo das Probabilidades em *tiragens, à sorte, de elementos de classes finitas* no caso discreto e, no caso contínuo, em *lançamentos, à sorte, de pontos em regiões limitadas.* O terceiro capítulo da sua tese pretende acabar com os paradoxos que surgiram no final do século XIX em problemas de probabilidade geométrica [14, 15, 16] através da conceção de definições precisas de escolha aleatória de cada figura geométrica, considerando que, através destas definições, só existe uma única solução válida para cada problema e, consequentemente, os paradoxos ficam resolvidos.

Apresenta, neste capítulo, uma sequência de definições de escolha aleatória de alguns conceitos geométricos ("lançamento, à sorte, de figuras"), tais como segmentos, retas, polígonos, entre outros, reduzindo estes conceitos a lançamentos aleatórios de pontos em regiões. Deste modo, define a escolha

[1] Este trabalho foi financiado por Fundos Nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e a Tecnologia, no âmbito do projeto UID/MAT/00006/2013.

de um sentido num espaço a n dimensões, o lançamento de um segmento sobre outro, de uma reta numa região plana, de uma região plana dentro de outra região plana, de uma figura plana numa região definida num espaço a n dimensões ($n \geq 3$) e assim sucessivamente. Com base nestes conceitos propõe resoluções, nem sempre corretas, para alguns dos problemas geométricos propostos por Buffon [6, 7], Laplace [10], Bertrand [3], Poincaré [13] e Czuber [9], uma vez que nem sempre há uma relação biunívoca entre o(s) ponto(s) escolhidos aleatoriamente e o(s) objeto(s) geométricos lançados à sorte, razão pela qual estes lançamento não podem ser considerados aleatórios. Esta situação ocorre, por exemplo, na sua resolução do paradoxo de Bertrand, apesar de diversos autores da sua época, por exemplo [1, 4], já terem a intuição de que o paradoxo surge da falta de clareza do enunciado, o qual permite distintas interpretações legítimas de escolha aleatória. Assim, para resolver este paradoxo não é necessário criar novas definições de lançamentos de figuras, mas tão somente complementar o enunciado explicitando a forma pela qual a corda é escolhida à sorte. Assim sendo, Pacheco d'Amorim não atinge o seu objetivo de obter uma construção que consiga tornear os paradoxos que assombravam a probabilidade geométrica na época.

Como epílogo, o autor analisa à luz das leis limites, em particular nos teoremas de convergência de Bernoulli [2] e Teorema Limite Central (ainda restrito à convergência da distribuição binomial para a gaussiana), os casos onde não somos nós os agentes e/ou não temos total informação do espaço amostra, expondo a sua visão sobre as aplicações da Probabilidade, isto é, a sua conceção de Estatística. Enquanto no Cálculo das Probabilidades temos total conhecimento do fenómeno em estudo, porque estará nas condições inerentes ao *fenómeno padrão* e, como tal, conhecemos a sua distribuição, na Estatística temos que inferir, através da observação repetida do fenómeno, a sua lei de possibilidade (probabilidade). Assim, neste capítulo, Pacheco d'Amorim analisa a metodologia de investigação de um fenómeno que não se enquadre no *fenómeno padrão*, considerando que podemos obter valores aproximados e prováveis (estimativas) com base nas Leis de Bernoulli e análogas, uma vez que fixamos o erro máximo para a aproximação (estimação) com uma probabilidade tão próxima da unidade quanto seja pretendido. Esta sua abordagem filosófica à construção da Probabilidade e à sua ligação com a Estatística é, apesar de não conter a formalização matemática necessária para se efetuar as estimações e testes que indica, em muitos aspetos semelhante à que atualmente utilizamos.

Em suma, Pacheco d'Amorim dedica um capítulo da sua tese [12] à explicação do "lançamento, à sorte, de figuras", mas alguns dos seus "lançamentos" não podem ser considerados como uma escolha aleatória. Contudo, as suas ideias de estimativa de probabilidade, baseadas em lançamentos "à sorte" e nos teoremas de convergência de Bernoulli, correspondem, de facto, as bases de muitas aplicações (atuais) de probabilidade geométrica.

Referências

[1] L. Bachelier, *Calcul des Probabilités*, Gauthier-Villars, Paris, 1912.

[2] J. Bernoulli, *Ars Conjectandi*, Basle, 1713.

[3] J. Bertrand, *Calcul des Probabilités*, Gauthier-Villars, Paris, 1888.

[4] É. Borel, *Éléments de la Théorie des Probabilités*, Albin Michel, Paris, 1909.

[5] É. Borel, *Le Hasard*, Librairie Félix Alcan, Paris, 1914.

[6] G. Buffon, "Geometrie", *Histoire de L'Académie Royale des Sciences*, 1733, pp. 43-45.

[7] G. Buffon, "Essai d'Arithmétique Morale", *Suppléments à l'Histoire Naturelle Générale et Particulière*, Vol. 4, 1777, pp. 46-123.

[8] E. Carvallo, *Le Calcul des Probabilités et ses Applications*, Gauthier-Villars, Paris, 1912.

[9] E. Czuber, *Probabilités et Moyennes Géométriques*, Librairie Scientifique A. Hermann, Paris, 1902.

[10] P. Laplace, *Théorie Analytique des Probabilités*, Courcier, Paris, 1812.

[11] R. Montessus de Ballore, *Leçons Élémentaires sur le Calcul des Probabilités*, Gauthier-Villars, Paris, 1908.

[12] D. Pacheco d'Amorim, "Elementos de Cálculo das Probabilidades", Tese de Doutoramento, Universidade de Coimbra, 1914.

[13] H. Poincaré, *Calcul des Probabilités*, Gauthier-Villars, Paris, 1896.

[14] R. Santos, “Probabilidade Circa 1914 e a Construção de Diogo Pacheco d’Amorim”, Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa, 2008.

[15] E. Seneta, K. Parshall, F Jongmans, “Nineteenth-Century Developments in Geometric Probability: J. J. Sylvester, M. W. Crofton, J.-É. Barbier, and J. Bertrand”, *Archive History Exact Sciences* **55**, 2001, pp. 501–524.

[16] G.J. Székely, *Paradoxes in Probability Theory and Mathematical Statistics*, D. Reidel Publishing Company, Budapest, 1986.

30 anos do Seminário Nacional de História da Matemática (1988–2018)

Luís Saraiva
CIUHCT
Universidade de Lisboa
e-mail: lmsaraiva@fc.ul.pt

Nesta comunicação pretendeu-se dar conta da origem, evolução e principais linhas de desenvolvimento da actividade do SNHM nos 30 anos da sua actividade.

O Seminário foi criado a partir da consciencialização por parte de um grupo de matemáticos de várias universidades portuguesas da necessidade de preencher um vácuo que existia na área de história da matemática em Portugal, de construir algo que até então era inexistente no nosso país, uma unidade estruturada de pesquisadores cujo objectivo era a investigação em história da matemática e a sua divulgação, e muito em particular em relação à matemática portuguesa, onde desde logo notámos grandes insuficiências e hiatos.

Com o evoluir do Seminário, este passou a ter também entre os seus temas de investigação e divulgação a história do ensino da matemática.

O momento chave para esta tomada de consciência da ausência estruturada de estudos em história da matemática no nosso país e para a formação do SNHM foi a comemoração dos 200 anos do falecimento do matemático português José Anastácio da Cunha, em 1987, e que originou três reuniões científicas, em Coimbra, Évora, e em Lisboa, esta última a mais extensa e importante, e que teve as características de um Encontro Internacional. O evento de Lisboa foi acompanhado de uma exposição na Biblioteca Nacional sobre Anastácio da Cunha.

No fim deste Encontro alguns dos elementos que viriam a fundar o Seminário reuniram-se com Ivor Grattan-Guinness, um dos oradores do Encontro de Lisboa, e um dos mais consagrados pesquisadores mundiais em história da matemática, e com a sua ajuda e experiência delinearam as linhas gerais do que viria a ser o Seminário. Este foi criado em Janeiro de 1988, numa reunião realizada no Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra, e teve o seu primeiro encontro em Abril desse mesmo ano em

Suplemento do Boletim da SPM 76, Dezembro 2018, pp. 207-210

Braga, tendo por conferencista convidado o Prof Ubiratan D'Ambrósio, outro dos participantes do Congresso internacional de Lisboa no ano anterior.

A partir daí realizaram-se regularmente os Encontros do SNHM, havendo 31 Encontros organizados desde 1988. Conforme imposição estatutária, temos tido sempre pelo menos um conferencista estrangeiro em cada Encontro. Nalguns deles conseguimos fazer coincidir a realização do nosso Encontro com uma importante realização em Portugal de um Encontro que envolvia história da matemática, e nesses casos tivemos vários conferencistas estrangeiros sem que isso significasse um aumento grande de encargos financeiros. Foi o que se passou no 15º Encontro em Coimbra, em Novembro de 2002, que foi integrado na Conferência Internacional *"Pedro Nunes e a Ciência do seu Tempo"*, e deste modo teve cinco oradores estrangeiros; ou o 22º Encontro, em Lisboa, em Setembro de 2009, coincidindo com a conferência internacional *"History of Astronomy in Portugal: Theories, Institutions and Practices"* e em que tivemos oito oradores estrangeiros.

O Seminário passou a secção autónoma da SPM nos anos 90, e decorridos alguns anos foi-lhe atribuída uma pequena verba anual fixa que permite pagar em cada ano as despesas de um conferencista convidado, nomeadamente uma passagem aérea da Europa e o alojamento em hotel por 2 ou 3 dias. Antes apoiávamo-nos nos departamentos de matemática das Universidades onde tinha lugar o Encontro, que para além de nos cederem graciosamente a sala onde tinha lugar o Encontro, pagavam as despesas com o conferencista estrangeiro, fazendo este uma conferência no Departamento em causa para justificar a despesa. Noutros casos aproveitávamos a vinda a Portugal de conferencistas para outras reuniões, e então só tínhamos a pagar o alojamento e as viagens dentro do país (comboio ou camioneta).

Um acontecimento importante nos inícios do SNHM foi a escola de Verão de História da Matemática organizada por alguns elementos do Seminário em Évora, em Julho de 1990. Tivemos um grupo de conferencistas estrangeiros de elevado nível: Jean Dhombres, Enrico Giusti, Giorgio Israel e Ahmed Djebbar, que trouxeram não só abundante material de pesquisa mas igualmente vieram acompanhados de alguns dos seus alunos de doutoramento, que também apresentaram comunicações. Este Encontro permitiu-nos um contacto muito profícuo com a prática da investigação em História da Matemática. Esta realização foi importante por outro motivo: um dos participantes no Encontro foi Sérgio Nobre, nessa altura a fazer o seu doutoramento na Universidade de Leipzig, e que veio ao Encontro de Évora por indicação do prof Ubiratan d'Ambrósio, que o alertou para a qualidade dos oradores estrangeiros nesta escola. Foi o início de uma relação pessoal e profissional com os investigadores portugueses e com o SNHM, que perdura até hoje. Sérgio Nobre tornou-se a principal personalidade dinamizadora da história da matemática no Brasil, o impulsionador da criação do *Seminário Brasileiro de História da Matemática*, que se transformou na *Sociedade Brasileira de História da Matemática*, um dos fundadores da *Revista Brasileira de História da Matemática*. Com a sua acção foram começados os *Encontros Luso Brasileiros de História da Matemática*, tendo o primeiro sido realizado em Coimbra em 1993. Desde então têm-se realizado periodicamente, alternadamente no Brasil e em Portugal, o oitavo vai ser realizado em Agosto deste ano no Brasil, na Unioeste, estado do Paraná. Todos estes Encontros foram sempre largamente participados, sempre com mais de 100 participantes. Para o Encontro de Agosto há mais de 150 inscrições. As Actas destes Encontros, com a excepção do 3º Encontro (Coimbra, 2000), estão todas publicadas (as do 7º Encontro, realizado em Óbidos em 2014, estão já com a gráfica que as vai publicar). Em relação às do 3º Encontro ainda não se perdeu a esperança que elas sejam publicadas pela Comissão Local, dirigida pelo prof Jaime Carvalho e Silva, uma vez que têm os textos de muitos dos participantes. As Actas desde o 5º Encontro (Castelo Branco, 2007) têm tido um sistema de arbitragem que tem garantido a qualidade dos artigos incluídos.

Desde o 23º Encontro do SNHM (Évora, Junho de 2010) o Seminário tem publicado um *Suplemento ao Boletim* da SPM com resumos alargados das comunicações dos seus Encontros. Estes volumes têm oscilado entre cerca de 60 e 80 páginas cada.

Os elementos do Seminário têm igualmente garantido a organização das sessões de história da matemática nos Encontros Nacionais da SPM. Ainda têm participado decisivamente na organização de Encontros internacionais de homenagem a matemáticos portugueses: Ruy Luis Gomes, António Aniceto Monteiro e Aureliano da Mira Fernandes, com a edição de números especiais do *Boletim* da SPM com as Actas desses Encontros.

No seguimento da celebração dos 100 anos da *Real Sociedade Matemática Espanhola* em Ávila em 2011, pesquisadores espanhóis e portugueses acertaram o começo de *Encontros Ibéricos de História da Matemática*, a serem realizados de três em três anos alternadamente em Espanha e em Portugal. O primeiro teve lugar em Santiago de Compostela em 2013, o segundo em Coimbra em 2016, o terceiro será em Espanha em 2019, em local e data ainda a acertar. Ao contrário dos Encontros Luso Brasileiros, não tem havido Actas publicadas destes encontros.

Algumas das realizações organizadas por membros do Seminário:

Em Coimbra, durante alguns anos (fins dos anos 80 e início dos anos 90 do século XX) a cadeira *História do Pensamento Matemático* teve vários elementos do SNHM que leccionaram algumas das suas unidades;

Em 1992 integrado num mestrado na Universidade do Minho funcionou com muito êxito uma disciplina de história da matemática portuguesa leccionada em unidades por elementos do SNHM, um exemplo de realização a seguir;

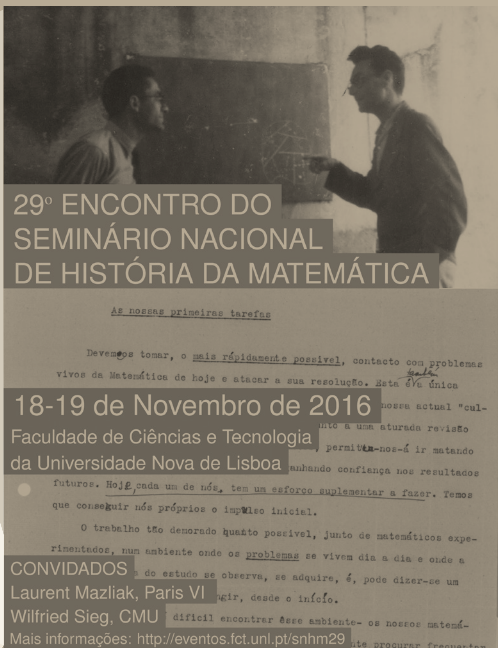
Em 1995 teve lugar o primeiro Encontro "History of Mathematical Sciences: Portugal and East Asia", realizado no Convento da Arrábida e com a patrocínio e organização da Fundação Oriente e na qual intervieram na sua organização dois elementos do SNHM. O seu objectivo central era analisar o papel de Portugal como transmissor da cultura científica portuguesa na Ásia Oriental e a sua contribuição para que na Europa se conhecesse a ciência asiática. Houve uma importante participação de especialistas estrangeiros neste Encontro e as sua Actas foram publicadas pela Fundação Oriente. A partir daí tiveram lugar mais quatro Encontros desta série, organizados sempre em territórios que tiveram a ver com a presença portuguesa na Ásia: foram sucessivamente em Macau, Tóquio, Beijing e Hinschu, Taiwan. Como consequência formou-se um grupo de destacados pesquisadores, ocidentais e asiáticos, que se têm dedicado a este tema. As Actas destes quatro Encontros foram publicadas pela prestigiada editora World Scientific. O próximo Encontro está planeado para Seoul em 2020;

Na Universidade do Minho, no seguimento de descoberta de manuscritos inéditos de José Anastácio da Cunha por Maria do Céu Silva e Elfrida Ralha, formaram-se grupos de trabalho com os elementos do Seminário, a que se agregaram outros pesquisadores, dividiram-se em grupos de estudo, analisaram os documentos descobertos e os resultados, com outros estudos globalizantes, vieram publicados em 2006 em dois volumes numa parceria entre o Arquivo Distrital de Braga, a Universidade do Minho e os Centros de Matemática das Universidades do Porto e do Minho, com os títulos *José Anastácio da Cunha: o tempo, as ideias, a obra...* e *Os inéditos*; em Dezembro desse ano realizou-se em Braga o colóquio *José Anastácio da Cunha*, em que se expuseram os principais resultados obtidos na pesquisa feita;

Na Universidade dos Açores, Ponta Delgada, Helena Sousa Melo e Maria do Carmo Martins têm organizado os *Encontros de História da Matemática e das Ciências*. A primeira edição foi em 2011, a 2ª em 2012, a 3ª em 2014 e a 4º vai ser realizada este ano.

ISSN 0872–3672

SUMÁRIO



Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática

SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

Fundação para a Ciência e a Tecnologia
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA