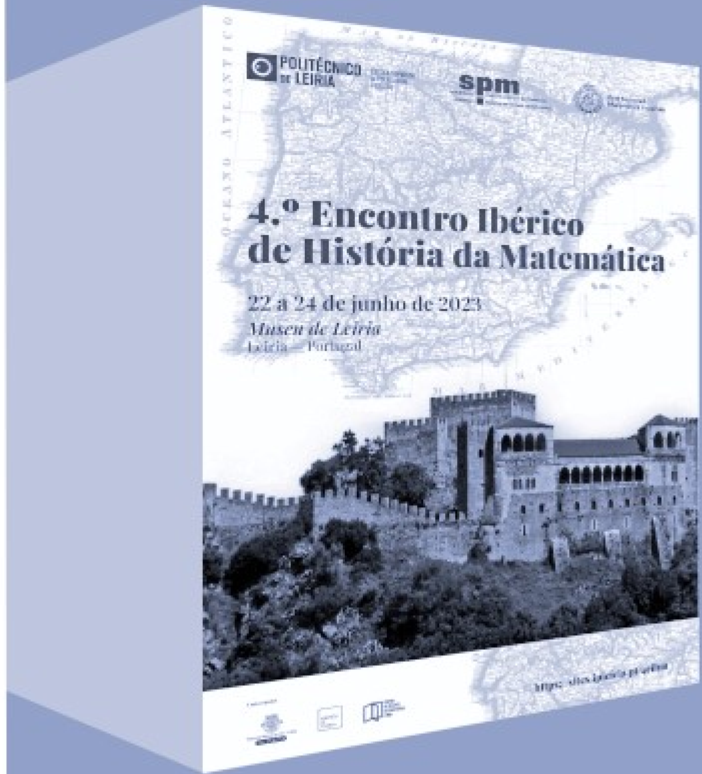
βoletim

da Sociedade Portuguesa de Matemática



81
Número
DEZEMBRO 2023

4 euros
[anual]

Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática
81

Nota Prévia

Todo o trabalho de edição deste número, dedicado ao "4^o Encontro Ibérico de História da Matemática", obedecendo ao formato adoptado pelo Boletim, foi levado a cabo pelo colega João Caramalho Domingues, a quem deixo aqui um agradecimento especial pelo seu empenho nesta tarefa e pelo entusiasmo que tem colocado na História da Matemática.

Helena Reis

Dezembro 2023

Boletim
da Sociedade Portuguesa de Matemática

Propriedade, Sede de Redacção e Edição
Sociedade Portuguesa de Matemática, Av. da República, 45–3º E, 1050–187 Lisboa
☎ 217939785 FAX 217952349
Internet: http://www.spm.pt
Número de registo na ERC 106 437
NIPC 501 065 792

Informações aos autores

O Boletim da SPM é uma publicação da Sociedade Portuguesa de Matemática, com periodicidade anual.
O Boletim constitui um espaço diversificado de informação, promove a circulação de ideias e de opiniões, bem como troca de experiências entre os que ensinam, investigam ou aplicam a Matemática.
O Boletim não publica artigos de investigação especializada. Estes trabalhos poderão ser submetidos à Portugaliæ Mathematica, revista de prestígio internacional, também propriedade da SPM e editada pela European Mathematical Society.
Os artigos dedicados a assuntos de natureza pré-universitária deverão, de preferência, ser submetidos à Gazeta de Matemática.
As actividades da SPM, nomeadamente das suas Delegações Regionais e Secções, são noticiadas com regularidade no Boletim.
As opiniões expressas pelos autores dos artigos publicados no Boletim não representam necessariamente posições da SPM.
Os Editores das Secções são os únicos responsáveis pela aceitação de artigos nas Secções que dirigem. A Secção Opinião — Cartas ao Director é da exclusiva responsabilidade da Directora do Boletim. Todos os outros trabalhos serão enviados pelos editores a *Referees* especializados para aconselharem sobre a respectiva publicação (com eventuais alterações).
Os manuscritos devem ser submetidos em `http://revistas.rcaap.pt/BoletimSPM` ou enviados por correio electrónico para um dos editores. Agradece-se o envio da versão PDF do texto. Os autores devem indicar as respectivas instituições, bem como os seus endereços de correio electrónico. Os trabalhos submetidos devem incluir um sumário em português e em inglês, e uma lista de palavras-chave nestas duas línguas. Recomenda-se vivamente que os trabalhos sejam preparados em LaTeX. A bibliografia deve seguir o padrão habitual no LaTeX.

Endereço para correspondência:

Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática
Av. da República, 45–3º E, 1050–187 Lisboa
Número de registo na ERC 106 437
NIPC 501 065 792

ISSN 0872–3672

SUMÁRIO

4.º Encontro Ibérico de História da Matemática /
4.º Encuentro Ibérico de Historia de las Matemáticas

(continua no verso)

SUMÁRIO (continuação)

SUMÁRIO (continuação)

4.º Encontro Ibérico de História da Matemática

4.º Encuentro Ibérico de Historia de las Matemáticas

Museu de Leiria

22 a 24 de Junho de 2023

Introdução

Luís Saraiva[1]
Coordenador Nacional do SNHM, CIUHCT, DM da FCUL

Com este suplemento, iniciamos a publicação do caderno de resumos alargados dos *Encontros Ibéricos de História da Matemática*. Esta prática já há bastantes anos é seguida em relação aos *Encontros do Seminário Nacional de História da Matemática*, mas ainda não o tínhamos feito em relação aos Encontros Ibéricos. Deste modo queremos suprir uma falha no que deve ser a preservação da memória histórica nesta área tão importante da identidade científica dos países.

Os *Encontros Ibéricos de História da Matemática* iniciaram-se em 2013, em Santiago de Compostela, tendo-se definido então que se deveriam realizar de 3 em 3 anos. Assim fizemos nos dois encontros seguintes, em Coimbra em 2016 e em Sevilha em 2019. Devido à pandemia, e por não querermos realizar um encontro online, com todas as limitações que o formato implicava, decidimos adiar o Encontro de um ano, e em 2023, realizámo-lo presencialmente no *Museu de Leiria*.

A pandemia de Covid-19, que foi detectada em Wuhan, na China em Dezembro de 2019, espalhou-se pelo mundo, até meio de 2023 com mais de 760 milhões de casos detectados e cerca de 7 milhões de mortes, e foi uma das pandemias mais mortíferas da história da humanidade. Graças à ação combinada da *Organização Mundial de Saúde*, do trabalho de investigação realizado pelos cientistas em muitos países na busca de vacinas e tratamento para a doença, e da maioria dos governos dos países (embora não todos), temos hoje uma situação controlada no seu essencial e com uma perspetiva positiva para o futuro.

Igualmente em Fevereiro de 2022 novo problema global surgiu, com a invasão da Ucrânia pela Rússia, culminando uma situação de tensão existente entre estes dois países desde a anexação pela Rússia da peninsula da Crimeia em 2014. É um problema que ainda está longe de estar resolvido. Hoje temos mais um grave problema com a Guerra entre Israel e o Hamas na faixa de Gaza. Independentemente das opiniões que possamos ter sobre este conflito, ele teve como uma das suas consequências uma alta generalizada dos bens de consumo, e portanto uma alta do custo de vida.

Foi neste pano de fundo que realizámos o 4.º Encontro Ibérico de História da Matemática, o que não foi impeditivo da enorme satisfação que tivemos

[1] Agradecimentos institucionais são devidos à *Fundação para a Ciência e a Tecnologia* de Portugal no âmbito do projeto UIBD/00286/2020.

na sua realização presencial, foi a prova que podemos ultrapassar situações difíceis e que temos sempre a capacidade de voltar a uma normalidade de vida e de convívio. Os Encontros online são uma solução de emergência, foram eles que possibilitaram a continuação dos Encontros científicos no período mais difícil da pandemia, mas obviamente não têm as possibilidades que trazem os Encontros presenciais. Nestes, o convívio dos participantes durante vários dias, as conversas fora da sala de conferências, a descoberta dos valores culturais da região onde se realiza o Encontro, tudo isso forja em cada um uma memória viva do Encontro e do local da sua realização, algo que um Encontro online, por dfinição, não pode dar.

Não esquecemos que foi necessário o apoio de diversas individualidades e instituições para o bom funcionamento do Encontro, pelo que então agradecemos:

Ao *Politécnico de Leiria* e ao *Museu de Leiria*, pela cedência das instalações para a realização do Encontro, e por todo o apoio dado para que o Encontro corresse da melhor maneira;

À *Comissão Organizadora local,* em particular ao seu orientador, o Professor Rui Santos, que estabeleceram o diálogo entre os organizadores do Encontro e as entidades locais, tendo acompanhado todos os passos deste processo;

À *Sociedade Portuguesa de Matemática,* que tem, desde que o SNHM se tornou sua secção autónoma, constantemente apoiado as nossas actividades, contribuindo assim para estimular a divulgação e a investigação da História da Matemática em Portugal; em particular agradecemos ao seu actual Presidente, Professor José Carlos Santos, o apoio dado; e igualmente a Ana Rita Ferrer, que desde a sua entrada como funcionária da SPM em 2009 nos tem dado uma colaboração inestimável na organização técnica dos nossos Encontros;

Ao *Grupo de Historia de las Matemáticas de la Real Sociedad Matemática Española* (GHM/RSME), e em particular a Luis Español González, José Ferreirós, Maria Rosa Massa e Eduardo Dorrego pela sua colaboração na organização do programa do Encontro; muito em especial agradeço a Luis Español González, que esteve na origem dos Encontros Ibéricos, e que os tem acompanhado activamente desde o 1.º, realizado em Santiago de Compostela em 2013;

A todos os participantes no Encontro, eles são a razão da sua realização, das suas intervenções e dos seus diálogos resultam as mais valias que todos esperamos obter;

Por último aos meus colegas do Secretariado do *SNHM*, João Caramalho

Domingues e Fernando Figueiredo, pelo seu importante papel neste processo, em particular na elaboração do Programa do Encontro.

Encontros Ibéricos de História da Matemática

1.º Encontro: Santiago de Compostela, 21 a 23 de Janeiro de 2013.

2.º Encontro: Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra, 14 a 16 de Julho de 2016.

3.º Encontro: Faculdade de Matemática da Universidade de Sevilha, 26 a 28 de Setembro de 2019.

4.º Encontro: Museu de Leiria, de 22 a 24 de Junho de 2023.

Grupo de Historia de las Matemáticas de la Real Sociedad Matemática Española (GHM/RSME)

Luis Español González
Responsable del GHM de la RSME

En el marco de la Sesión Especial de Historia de las Matemáticas del Congreso del Centenario de la RSME, celebrado en Ávila en febrero de 2011, un grupo de participantes se propuso impulsar la especialidad en el seno de la RSME, que preparaba el Reglamento sobre Grupos especializados aprobado en noviembre de 2011. La gestación del GHM/RSME se fue produciendo a lo largo de actividades anteriores a su constitución formal, como la Sesión Especial de Historia de las Matemáticas del Segundo Encuentro Conjunto RSME–SMM (Sociedad Matemática Mexicana), celebrado en Torremolinos (Málaga) en enero de 2012, y la análoga en el Congreso Bienal RSME de Santiago de Compostela un año después.

El grupo promotor organizó una Reunión de Historia de las Matemáticas en Sevilla (Instituto Universitario de Investigación de Matemáticas de la Universidad de Sevilla (IMUS), 13 y 14 de abril de 2015; véase *Boletín de la RSME* n.º 443), en la cual se concretó la propuesta GHM/RSME que fue aprobada el día 2 de julio de 2015, con la finalidad primordial de «fomentar el desarrollo de la investigación, la enseñanza y la divulgación de la historia de las matemáticas en España, potenciando la incorporación de jóvenes a estas tareas.» La presentación del GHM/RSME tuvo lugar en un acto público recogido en *La Gaceta de la RSME* 18 (2015), pp. 483–491.

Los fines del grupo, algunos muy ambiciosos y difíciles de lograr, se persiguen a través de los proyectos y actividades personales de sus miembros, pero también con algunas actuaciones más institucionales. El GHM/RSME ha apoyado o auspiciado reuniones científicas como el Congreso Internacional 300 aniversario de Leibniz en Barcelona 2016 y el *Novembertagung* de jóvenes investigadores (europeos, de Israel y de EEUU) en Sevilla 2018. Ha organizado Sesiones Especiales de Historia de las Matemáticas como la del Congreso Hispano-Francés en Zaragoza 2017 y la del Congreso Bienal RSME en Santander 2019. Con la RSME ha participado en la promoción de biografías de matemáticos españoles en Divulgamat y en la presencia de los presidentes de la sociedad en su página web, pero sobre todo mantiene en las revistas de la RSME la Sección de Historia de *La Gaceta* y desde 2018 el apartado Mat-Historia del *Boletín* semanal. En septiembre de 2021 se inició el Seminario de Historia de las Matemáticas *on line*, con sede en Sevilla (IMUS), que continúa con cinco conferencias anuales.

En colaboración con el Seminário Nacional de História da Matemática de la Sociedade Portuguesa de Matemática (SPM), el GHM/RSME organiza los Encuentros Ibéricos de Historia de las Matemáticas / Encontros Ibéricos de História da Matemática, desde el primero ya mencionado en Santiago de Compostela 2013 hasta el cuarto que abordamos en Leiria diez años después.

Programa

Quinta-feira, 22/06

09:00 *Entrega de material*

09:30 Abertura

10:00 Ana Simões — As múltiplas faces das previsões científicas. Objectivos das expedições astronómicas organizadas na década de 1910 para testar a deflexão da luz

11:00 *Café*

11:30 Daniel Pinto — Vitelo e a Óptica de Euclides
12:00 Samuel Gessner — Aferir o peso do conhecimento: a cultura matemática dos almotacés no século 16
12:30 Angel Requena Fraile — Tipología de matemáticos ibéricos transfronterizos (1492–1718): Zacuto, Nunes, Lavanha, Stafford, Torres,...

13:00 *Almoço*

15:00 Antonio Mellado, Maria Rosa Massa — Medir y construir en los Elementos de Euclides del Curso matemático de Hérigone
15:30 Carlota Simões — O grande cometa de 1680 observado em Goa por Antoine Thomas
16:00 Antonio Linero Bas, Pedro J. Herrero — Jacques Ozanam (1640–1718), maestro en la difusión y algebrización de las matemáticas

16:30 *Café*

17:00 João Caramalho Domingues — Que matemática para os engenheiros militares? Da Aula de Fortificação à Academia Militar de Lisboa
17:30 Juan Navarro Loidi — Juan Andrés y la Historia de las Matemáticas
18:00 António Leal Duarte — É de D'Alembert a frase "Allez en avant, et la foi vous viendra"?

Boletim da SPM 81, Dezembro 2023, pp. 9–10

Sexta-feira, 23/06

09:00 Fernando B. Figueiredo — Estudando e aprendendo: a 'Bibliotheca Mathematica e Filosofica' da Universidade de Coimbra em finais do século XVIII
09:30 Ana L. Correia — A importância da trigonometria esférica na astronomia de posição: digressão por alguns manuais usados no ensino superior militar em Portugal na 2.ª metade do século XIX e 1.ª metade do século XX
10:00 Cecilia Neve — Las memorias de Lagrange sobre teoría de números: una exploración de algunos elementos influyentes en el desarrollo de esta disciplina

10:30 *Café*

11:00 José Ferreirós — Los números reales en transición: una panorámica entre el XVIII y el XIX
12:00 Teresa Sousa — O cálculo da Latitude por duas Alturas do Sol
12:30 Jorge Losada — Riemann, Cauchy, Lakatos y Dieudonné

13:00 *Almoço*

15:00 Rui Santos — "Teoremas de Jacob Bernoulli e lei dos desvios" em Pacheco d'Amorim (1914)
15:30 Ana Patrícia Martins — "Verdadeiros actuários" – sobre a regulamentação da actividade de actuário na primeira metade do século XX
16:00 Helmuth R. Malonek — On the rise of Mathematics in the 1919 founded University of Yerevan: Arshak Tonyan (1888–1942)

16:30 *Café*
17:00 *Tarde social*
20:00 *Jantar da conferência*

Sábado, 24/06

09:30 Francisco González Redondo — En los orígenes de esta historia. Prehistoria de la Matemática y Matemática en la Prehistoria
10:00 Rui Candeias — A teoria dos conjuntos no ensino primário: entre os programas oficiais e os manuais escolares (1968–1990)
10:30 Luis Español — La matemática española durante la ausencia de Julio Rey Pastor en torno a 1923
11:00 Luís Saraiva — Eduardo Ortiz, um historiador da matemática no exílio

11:30 Encerramento do Encontro

As múltiplas faces das previsões científicas. Objectivos das expedições astronómicas organizadas na década de 1910 para testar a deflexão da luz

Ana Simões
Centro Interuniversitário de História das Ciências e Tecnologia,
Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa

A 6 de novembro de 1919, na reunião conjunta da Royal Society of London e da Royal Astronomical Society, foram anunciados os resultados das duas expedições britânicas, que observaram o eclipse solar total de 29 de maio de 1919.

Os quatro expedicionários britânicos — astrónomos A.S. Eddington, C.R. Davidson, A.C.C. Crommelin, e o especialista em mecanismos de relógio E.T. Cottingham — observaram o fundo das estrelas atrás do Sol e, após um árduo trabalho de análise de dados durante o verão de 1919, confirmaram pela primeira vez a previsão da deflexão da luz feita pela recente teoria da relatividade geral de Einstein.

No entanto, desde 1911, ainda a teoria estava em desenvolvimento, a deflexão da luz já tinha sido prevista por Einstein, embora com um valor incorreto. É pouco conhecido que em 1912, 1914 e 1918, com a intervenção directa ou indirecta de Einstein, foram organizadas expedições por diferentes equipas de astrónomos de diferentes nacionalidades para testar a deflexão da luz, sem que fossem bem-sucedidas por motivos diversos, de meteorológicos a geopolíticos. Recorde-se que neste período, isto é, na década de 1910, a teoria da relatividade não estava ainda completa, era muito pouco conhecida, e muito menos compreendida, mesmo pela comunidade física. Por outro lado, o capital de crédito de Einstein estava ainda em ascensão e o conhecimento de física e de matemática da maioria dos astrónomos era limitado. Tendo em vista todos os factos anteriores, como explicar que fluxos cognitivos que ainda não se tornaram conhecimento aceite (uma consequência astronómica de uma teoria física em desenvolvimento), transgridam fronteiras disciplinares e se transformem em previsões aptas a ser verificadas? Como se explica que a previsão da deflexão da luz tenha despertado o interesse de astrónomos ao ponto de se arriscarem em testá-la sob condições exigentes e, muitas vezes, perigosas? Por que motivos o fizeram? Esses motivos foram sempre os mesmos? E que relação tinham com a teoria da relatividade? Estas são as questões a abordar nesta palestra.

Em 1911, quando Einstein previu pela primeira vez o encurvamento dos raios luminosos no contexto de uma teoria em desenvolvimento foi por mero acaso que esta notícia chegou aos ouvidos do astrónomo alemão Erwin Freundlich do Observatório de Berlim. Teórico por excelência, a realizar trabalho observacional que não o estimulava, aproveitou imediatamente a oportunidade para testar a previsão de Einstein. A forma encontrada, e discutida com Einstein, é a de solicitar chapas de eclipses passados a observatórios pelo mundo fora. O objetivo é o de comparar a posição de estrelas brilhantes existentes por detrás do sol durante o eclipse com a sua posição numa situação em que o sol não esteja entre a estrela e o observador e depois verificar se há ou não diferença de posição e, se sim, se essa diferença concorda com a previsão de Einstein. As chapas mais promissoras eram as tiradas na tentativa de identificar o planeta hipotético Vulcano, proposto pelo mesmo astrónomo que previu a existência de Neptuno, um retumbante sucesso da teoria newtoniana da gravitação. Entre os observatórios que responderam ao repto encontrava-se o Observatório Lick, especializado na procura de Vulcano e, após longos anos de observações infrutíferas, na comprovação da sua inexistência, o que se ficou a dever ao astrónomo Charles Dillon Perrine, que cresceu no Lick e nessa altura se encontrava já a chefiar o Observatório Córdoba na Argentina. Ficou então claro que as chapas existentes não tinham sido tiradas em condições para testar o encurvamento, pelo que o diretor do Lick, William Campbell, se disponibilizou a emprestar a Perrine as câmaras fotográficas usadas na procura de Vulcano, quando fosse observar o eclipse de 1912 no Brasil.

Neste primeiro momento das tentativas de verificação da deflexão, fica claro que só o teórico Freundlich estava interessado na previsão de Einstein por razões teóricas. Os astrónomos observacionais americanos tinham meramente um interesse prático na previsão, decorrente do seu treino na procura de Vulcano e no interesse em reforçarem por todos os meios possíveis a sua autoridade na área da astronomia de precisão. Portanto, não havia da sua parte qualquer compromisso com a teoria de Einstein, mesmo depois de saberem que o astrónomo e físico holandês Willem de Sitter propunha explicar a anomalia do periélio de Mercúrio através do recurso ao princípio da relatividade. Em suma, um fluxo cognitivo ligou a física (e a matemática) à astronomia, mas neste movimento as fronteiras entre disciplinas revelaram uma porosidade dependente da prática científica e da experiência daqueles que estavam na extremidade receptora e que reagiram positivamente a esse movimento.

O eclipse de 1912 não trouxe novidades, foi aliás um fracasso completo, pois o tempo não permitiu quaisquer observações. Apenas um efeito colateral deve ser assinalado: o encontro acidental de Arthur Stanley Eddington com Perrine poderá ter desempenhado um papel no interesse de Eddington pela teoria da relatividade.

Não admira, pois, que fossem grandes as expectativas depositadas no eclipse de 1914. Não só Einstein estava em ascensão na hierarquia científica como Freundlich tentou, mais uma vez, co-optar astrónomos de várias nacionalidades, entre os quais os britânicos, na observação do eclipse e no teste da deflexão. Entre as equipas que se deslocaram, Perrine escolheu observar na Crimeia tal como Freundlich mas sem testar Einstein, tendo aliás emprestado o seu equipamento para este fim a Freundlich. Campbell escolheu Kiev. Para além das condições meteorológicas não terem cooperado, com o deflagrar da Primeira Guerra Mundial Freundlich e a sua equipa foram feitos prisioneiros e os astrónomos americanos viram os seus instrumentos apreendidos. Apesar do desastre meteorológico e político, o envolvimento directo de Campbell na expedição de 1914 trouxe um resultado positivo, ao convencê-lo do potencial de se debruçar sobre o "Problema de Einstein", independentemente de Freundlich e dos colegas alemães. Esta decisão foi científica, especificamente astronómica, mas não física. O que isto quer dizer é que a partir deste momento o Problema de Einstein, isto é, o lado astronómico da ainda incompleta teoria da gravitação de Einstein, passou a integrar a agenda de investigação do Observatório Lick.

Após os fracassos de 1912 e 1914, as primeiras placas do fundo de estrelas tiradas durante um eclipse solar total ficaram a dever-se ao astrónomo do Lick, Heber D. Curtis, que observou em 1918, em Goldendale na Califórnia. Mas o eclipse foi muito curto, com poucas estrelas nas proximidades do Sol e o equipamento não era o adequado dado que os instrumentos enviados para Kiev em 1914 ainda estavam em trânsito de regresso aos Estados Unidos da América. Acresce que os dados obtidos demoraram demasiado tempo a serem reduzidos, de tal forma que quando foram apresentados por Campbell no Reino Unido já as expedições britânicas de 1919 se encontravam em acção.

Organizadas pelo Joint Permanent Eclipse Committee da Royal Society of London e da Royal Astronomical Society sob a batuta do Astrónomo Real Frank Dyson e de Eddington, o contexto em que tiveram lugar foi muito diferente das expedições anteriores com o mesmo objectivo: Desde 1915/16 que Einstein tinha completado a teoria da relatividade geral e, apesar do tempo de guerra, Eddington teve acesso aos resultados de Einstein por intermédio de de Sitter, tendo-se tornado um adepto da relatividade, ao ponto de, em 1918, publicar um livro intitulado *Report on the Relativity Theory of Gravitation*, o primeiro tratado sobre o assunto em inglês.

Portanto, em 1919, para Eddington (e para Dyson), o Problema de Einstein passou a ser sinónimo da teoria da gravitação de Einstein, o que aconteceu não só porque Einstein já havia concluído a sua teoria, mas também devido à autoridade de Eddington no assunto, reconhecida por Dyson, e que antecedeu o seu envolvimento nas expedições. Contrariamente, para os astrónomos americanos o teste da deflexão da luz antecedeu a sua ligação com a relatividade e, porque estava ligado ao problema Vulcano, não implicou qualquer compromisso com os fundamentos teóricos da relatividade.

Circunstâncias contingentes de carácter científico e (geo)político explicam a ausência nas observações de 1919 de Freundlich, Perrine, Campbell e Curtis, os astrónomos envolvidos nas expedições anteriores. Ao mesmo tempo, factores sociopolíticos, aliados a objectivos claramente diferentes das expedições anteriores à de 1919, são responsáveis pela especial notoriedade alcançada pelos resultados de 1919, independentemente da sua associação à primeira confirmação bem-sucedida do desvio da luz. Isto é tanto mais notório quanto as observações realizadas pela equipa do Observatório Lick chefiada por Campbell, em 1922 em Wallal na Austrália, envolveram muito mais estrelas e foram muito mais rigorosas tendo, por isso, elevado a certeza quanto à deflexão a um patamar que não tinha sido alcançado anteriormente. Com efeito, a 12 de abril de 1923, Campbell já se sentia confiante para telegrafar a Dyson que não seria preciso repetir "o teste de Einstein" no próximo eclipse.

Talvez por isso mesmo, não seja de espantar que após o eclipse de 1922, Perrine e Campbell tenham reivindicado a sua prioridade nas tentativas de testar a deflexão da luz, num processo que obliterou os seus objetivos astronómicos anteriores, claramente distintos e em evolução, contribuindo, assim, involuntariamente, para reforçar a visibilidade dos resultados de 1919.

Em 19 de Janeiro de 1923, sob os auspícios da Astronomical Society of the Pacific Campbell proferiu uma palestra intitulado "O eclipse total do Sol, 21 de setembro de 1922", em que afirmava que a expedição do Observatório Lick à Rússia, em 1914, tinha sido a "primeira proposta" para o verdadeiro "teste da teoria de Einstein", que no eclipse de 1918 tinham continuado os planos para "o teste de Einstein" e, finalmente, que a observação do eclipse de 1922, se tinha justificado pelo "sentimento de que os nossos esforços pioneiros em 1914 e 1918 colocaram-nos uma enorme responsabilidade".

Neste artigo Campbell nunca referiu se subscrevia ou não a teoria da relatividade enquanto teoria física e, de facto, os astrónomos do Observatório

Lick evidenciaram compromissos que foram da rejeição à neutralidade ou à defesa da teoria da gravitação de Einstein. A apropriação destes astrónomos foi selectiva e oportunista. Campbell não hesitou ainda em reivindicar na esfera pública a prioridade do seu Observatório. Em 12 de abril de 1923, no *New York Times*, Campbell escreveu que "As imagens do eclipse solar provam a teoria de Einstein; o Observatório Lick descobriu que a luz das estrelas é deflectida".

Poucos meses depois, em Junho de 1923, Perrine publicou também uma breve nota intitulada "Contribuição para a história das tentativas de testar a teoria da relatividade por meio de observações astronómicas", em que afirmava peremptoriamente: "Não tenho conhecimento de que qualquer outra expedição tenha tentado tais observações no eclipse de 1912 ou num anterior. Parece, portanto, que o Observatório de Córdoba fez a primeira tentativa de observação de um eclipse (o de 1912) tendo em vista o problema da relatividade e isso foi feito por instigação do Dr. Freundlich". Mais uma vez, a história estava a ser (re)escrita, por um lado rectificando as declarações anteriores de Campbell e, por outro, estabelecendo prioridade para Perrine e para o Observatório de Córdoba na genealogia de testes de relatividade por meios astronómicos.

É ainda de realçar que tanto as afirmações de Perrine, como as de Campbell, esclarecem a irrelevância do fracasso face ao sucesso do teste observacional e revelam que nenhum peso especial foi atribuído ao grau de adesão dos astrónomos à teoria da relatividade. Como tal, destacam que a avaliação das previsões revela muitas dimensões que não podem ser reduzidas a um resultado científico.

Em síntese, nesta palestra descentra-se a narrativa histórica dos testes da deflexão da luz das expedições britânicas de 1919 para a análise das expedições organizadas em 1912, 1914 e 1918, as primeiras das quais ainda ocorreram no contexto de agendas astronómicas anteriores ao estabelecimento da teoria da gravitação einsteiniana. Ao fazê-lo evidenciam-se as múltiplas dimensões científicas destas expedições e mostra-se que não podem ser reduzidas a uma linhagem direta das expedições britânicas de 1919, no sentido de que as motivações dos astrónomos envolvidos, de Freundlich aos astrónomos americanos associados ao Observatório Lick, evoluíram no tempo, variaram entre si e contrastaram com as que guiaram os astrónomos britânicos liderados por Eddington. Revela-se que, a partir de 1923, são os próprios astrónomos Campbell e Perrine a reivindicar uma correlação linear entre as suas tentativas anteriores e a verificação de 1919, obliterando no processo os objetivos diferentes das suas contribuições passadas e simultaneamente lucrando com o capital de crédito entretanto ganho por Einstein. À medida que o tempo foi passando, esta correlação linear acabou por ofuscar a complexidade de todo o processo em que tinham estado envolvidos. Fica, pois, claro que nenhuma narrativa histórica linear pode dar o devido crédito ao trabalho de todos estes astrónomos, e que só uma narrativa atenta às complexidades do processo astronómico e à variabilidade das alianças dos astrónomos permite detalhar os contornos do seu envolvimento e as diferentes razões pelas quais aceitaram testar a deflexão da luz. Conclui-se, ainda, que encontros casuais, redes não planeadas e aspirações diversas desempenharam um papel de relevo na transição do "problema de Freundlich" para o "problema de Vulcano" e para o "problema de Einstein", acoplado ou, finalmente, desacoplado do "problema de Freundlich". E, finalmente, que não só os fracassos podem ser tão estimulantes quanto os sucessos, como também que previsões com resultados inconclusivos, ou nenhuns resultados, podem, ainda assim, atuar como guias potentes da prática dos astrónomos.

Referências

Jeffrey Crelinsten, *Einstein's jury. The race to test relativity*, Princeton, Princeton University Press, 2006.

Daniel Kennefick, *No shadow of a doubt. The 1919 eclipse that confirmed Einstein's theory of relativity*, Princeton, Princeton University Press, 2019.

Ana Simões, "In the shadow of the 1919 total solar eclipse. The two British expeditions and the politics of invisibility", *Berichte zur Wissenschaftsgeschichte* Vol. 45 (2022), p. 581–601.

Ana Simões, Ana Matilde Sousa, *Einstein, Eddington e o Eclipse. Impressões de viagem/Einstein, Eddington and the Eclipse. Travel Impressions, Lisboa*, Chili com Carne, 2019.

Vitelo e a *Óptica* de Euclides

Daniel Pinto
CMUC — Universidade de Coimbra

A *Óptica* de Euclides, o mais antigo tratado conhecido de ótica geométrica, assenta em algumas definições iniciais, das quais uma se destaca:

> coisas vistas sob um ângulo maior aparecem maiores;
> coisas vistas sob um ângulo menor aparecem menores;
> coisas vistas sob ângulos iguais aparecem do mesmo tamanho.

Neste contexto, a análise do tamanho relativo da aparência dos objetos resume-se à comparação de ângulos no olho. Uma ideia simples que governa a quase totalidade do texto euclidiano. No entanto, à revelia desse programa de estudo, na demonstração de três proposições consecutivas, o conceito de *aparência* não assume especial relevância. Essas três proposições são semelhantes pelo que apresentamos aqui apenas a primeira delas.

> Proposição 15: De grandezas colocadas por baixo do olho em que uma [AB] excede a outra [GD], se o olho se aproximar da menor, aquilo que se vê por cima dela aparece maior, se o olho se afastar da menor, aquilo que se vê por cima dela aparece menor.

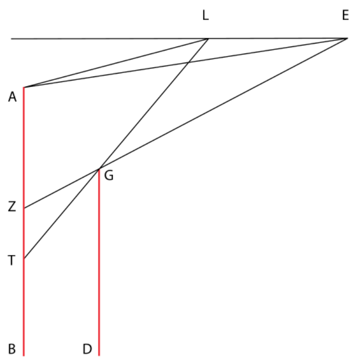
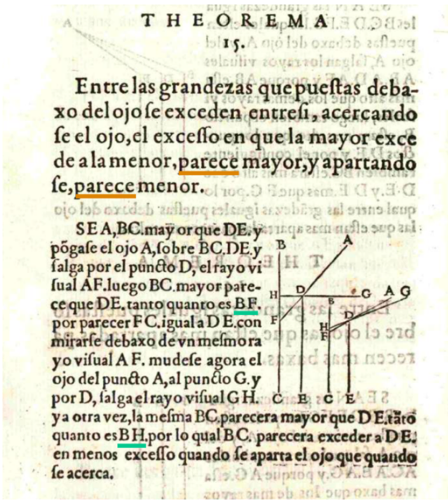


Figura 1: Proposição 15 da *Óptica* de Euclides.

Embora o enunciado da proposição aluda a comparações entre tamanhos aparentes, a verdade é que a demonstração de Euclides não estabelece uma comparação entre ângulos mas sim entre as grandezas AT e AZ (ver Figura

1). Esse desfasamento está presente nas principais versões da *Óptica* de Euclides em grego e em latim (por exemplo, em *Heiberg A*, *Heiberg B* e *Liber de visu*) mas também em versões noutros idiomas, como na de Pedro Ambrosio Ondériz, em castelhano, publicada na segunda metade do séc. XVI. O mesmo sucede ainda na versão (em latim) de Francisco de Melo, matemático português nascido por volta de 1490, em que o tamanho aparente dos objetos é negligenciado, embora a demonstração apresentada esteja associada a uma proposição um pouco diferente daquela que normalmente consta da *Óptica* de Euclides, eliminando alguma ambiguidade entre enunciado e prova.


THEOREMA
15.

Entre las grandezas que pueſtas debaxo del ojo ſe exceden entreſi, acercando ſe el ojo, el exceſſo en que la mayor excede a la menor, parece mayor, y apartando ſe, parece menor.

SEA, BC. mayor que DE. y põgaſe el ojo A, ſobre BC. DE. y ſalga por el puncto D, el rayo viſual AF. luego BC. mayor parece que DE. tanto quanto es BF. por parecer FC. igual a DE. con mirarſe debaxo de vn meſmo rayo viſual AF. mudeſe agora el ojo del puncto A, al puncto G. y por D, ſalga el rayo viſual GH. y a otra vez, la meſma BC. parecera mayor que DE. tãto quanto es BH. por lo qual BC. parecera exceder a DE. en menos exceſſo quando ſe aparta el ojo que quando ſe acerca.

Figura 2: *La Perspectiva y Especularia de Euclides* (Pedro Ondériz).

Apesar de não ser possível encontrar, nos dez livros que constituem a *Perspectiva* de Vitelo, qualquer menção à *Óptica* de Euclides, parece certo que o autor polaco (nascido por volta de 1230) conhecia muito bem as definições e proposições que a constituem. Há até indícios de que Vitelo poderia ser o responsável por uma recensão sobre a versão medieval da *Óptica* de Euclides. Indiscutível é a influência deste tratado em muitas das proposições do Livro IV da *Perspectiva* de Vitelo, dedicado à análise das condições em que a visão ocorre e à discussão de temas relacionados com a perceção visual e as ilusões óticas. A Proposição 41 do Livro IV da *Perspectiva* de Vitelo é uma adaptação da Proposição 17 da *Óptica* de Euclides.

> Proposição 41: Quando uma grandeza maior é vista por cima de uma grandeza menor, [e se se colocar o olho numa reta perpen-

dicular à grandeza menor que passe pelo seu topo] aquilo que se vê da grandeza maior será sempre o mesmo, embora possa não parecer o mesmo.

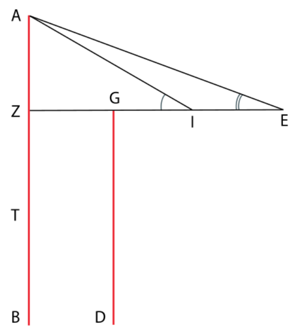


Figura 3: Proposição 41 do Livro IV da *Perspectiva* de Vitelo.

Como resulta claro deste enunciado, e depois da demonstração, Vitelo estabelece uma distinção entre *aquilo que se vê* (comparando grandezas) e a *aparência daquilo que se vê* (comparando ângulos).

Essa mesma estratégia é seguida por Vitelo na Proposição 42, que combina variantes das Proposições 15 e 16 da *Óptica* de Euclides. Vitelo, ao contrário do que ocorre na prova de Euclides, dá relevo ao tamanho aparente dos objetos. Mas nem todos os casos possíveis são abrangidos. A demonstração que Vitelo propõe não funciona se o olho estiver colocado acima de ambos os objetos.

Referências

Bernardo Mota e Henrique Leitão, *Francisco de Melo: obras matemáticas*, vol. I, Biblioteca Nacional de Portugal/Centro de Estudos Clássicos, 2014.

Carl J. Kelso Jr, *Witelonis perspectivae liber quartus: Book IV of Witelo's 'Perspectiva'. A critical edition and English translation with introduction, notes and commentary*, Tese de Doutoramento, University of Missouri-Columbia, EUA, 2003.

Fabio Acerbi, *Euclide, Tutte le opere*, Giunti Editore / Bompiani, 1st edition, 2019.

Pedro Ambrosio Ondériz, *La Perspectiva y Especularia de Euclides*, Madrid: Alonso Gomez, `https://books.google.pt/books?id=20DxC3FVF3Y`, 1585.

Wilfred Theisen *Witelo's Recension of Euclid's 'De visu'*, *Traditio* 33, 1977, p. 394–402.

Aferir o peso do conhecimento: a cultura matemática dos almotacés no século XVI

Samuel Gessner
Centro Interuniversitário de Históra das Ciências e da Tecnologia,
Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa

A reforma dos pesos e medidas no início da era moderna em Portugal é um exemplo fascinante do poder da matemática para impactar a sociedade. A reforma foi um processo complexo que envolveu peritos, comerciantes e funcionários do estado com diferentes origens. A cultura matemática dessas pessoas desempenhou um papel decisivo no processo.

Desde o início do reino e em continuação com o que acontecia no al-Andalus, almotacé designava um jurado municipal que, eleito por um mês, oficiava, entre outras tarefas, a aferição dos pesos e medidas. Este cargo existiu nos conselhos Portugueses durante séculos, desde a idade média até à idade moderna [3]. Membros da oligarquia camarária, os almotacés representavam as autoridades municipais que obedeciam, nesta área, ao almotacé-mor designado pela realeza. A perícia necessária para exercer tal ofício incluía conhecimentos de cálculo elementar, de procedimentos de pesagem e medição. O cargo envolvia também valores específicos de precisão, e um conhecimento da variedade dos padrões que diferiam então de cidade para cidade e de concelho para concelho. Os almotacés podiam enfrentar no dia a dia vários tipos de problemas, incluindo queixas sobre enganos no mercado, desvios de pesos do padrão guardado na câmara municipal, e tinham que intervir frequentemente no controlo e na correção dos pesos usados pelos mercadores e artesãos.

As reformas Manuelinas tinham sido motivadas por queixas recorrentes sobre abusos da utilização de diferentes padrões. Basearam-se num processo de consultação, começado já no reino de D. João II que propunha usar uniformemente o Marco de Colónia (excluindo o Marco de Troyes, chamado 'marco de tria') [4]. A reforma do sistema de pesos introduzida por D. Manuel, entre 1497 até 1504, constitui um período de viragem nesta instituição. Foi precedida por uma preparação minuciosa, com a encomenda de centenas de pesos padrão de Flandres, de um tamanho singular em toda a Europa (Fig. 1) e diligências para a sua distribuição pelo território [5]. A reforma

Agradeço ao Dr. António Neves pela sua gentil receção no Museu de Metrologia, no Instituto Português de Qualidade, Caparica, e pelo valioso apoio na pesquisa de literatura secundária sobre o tema durante a preparação desta contribuição.

Figura 1: Pilha de peso de um padrão Manuelino, 1 quintal (ca. 60 kg), datado 1499. Diam. ca. 270 mm, bronze. Inscrição na caixa: "DOM×EMANUEL×O PRIM[EI]RO×DE×PVRTVGAL ×O MVITO×ALTO×E×EIXELENTISIMO×REI× || ×ME×MANDOV× FAZER×ANO×DO N[AS]C[I]M[EN]TO×NOSO×S[E]N[H]OR × IH[S]V× XP[IST]O×D×1499". Caparica, Museu da Metrologia, IPQ, no. inv. MM670

consistia também na promulgação de novos regimentos dos almotacés [1]. A alteração mais palpável incidia na redefinição do peso do arrátel que passava a equivaler a dois marcos, ou seja 16 onças (em vez das 14 onças de antigamente). Desta maneira os padrões acabaram por organizar-se de uma forma inteiramente binária. Um padrão de um quintal (quando cheio) era constituído portanto por dezasseis peças, cada uma de peso duplo da seguinte, com excepção das duas peças mais leves, ambas de igual peso (de meia oitava [de onça]) (tabela 1).

A reforma Manuelina afetava todas as unidades de peso acima de uma onça (aumentando-as) — mas sem alterar o peso do marco (8 onças). Qual a razão das novas unidades? O que está por trás das operações definidas no regimento dos almotacés e do almotacé-mor no século dezasseis? As respostas a estas perguntas prendem-se também com a cultura matemática dos almotacés. Ao mesmo tempo a reforma envolvia um aspeto material

N.º	Peça	Múltiplo do arrátel
1	$^1/_2$ Quintal	64
2	Arroba	32
3	$^1/_2$ Arroba	16
4	8 Arráteis	8
5	4 Arráteis	4
6	2 Arráteis	2
7	Arrátel	1
8	Marco	$^1/_2$
9	Quarta	$^1/_4$
10	$^1/_2$ Quarta	$^1/_8$
11	Onça	$^1/_{16}$
12	$^1/_2$ Onça	$^1/_{32}$
13	2 Oitavas	$^1/_{64}$
14	Oitava	$^1/_{128}$
15 e 16	$^1/_2$ Oitava	$^1/_{256}$

Tabela 1: Peças contidas num padrão Manuelino de um Quintal (cheio)

não negligenciável que diz respeito à questão das modalidades da produção e distribuição dos novos padrões de peso.

A tendência geral da reforma resume-se nesta aparente 'racionalização' do sistema de padrões. Os pesos Manuelinos aparecem organizados segundo uma progressão de razão dupla. O conceito de progressão era um conceito familiar e corrente entre os comerciantes. Infere-se esta afirmação do facto de Gaspar Nicolas, no seu *Tratado da pratica dArismetyca* de 1519, incluir vários capítulos sobre somas de progressões, chamado 'pergressios'. O primeiro capítulo começa

> Se quiseres recolher todas has somas de huuma proporçam dupla, começa donde quiseres que nam faz ao caso, sempre tira ho primeyro numero do derradeyro. E ho que fycar ajunta-o com o derradeiro e a ssoma que vier, tanto he em todo. [2, fol. 36v]

que corresponde à regra simples de que:

$$\sum_{i=k}^{n} p_i = (p_n - p_k) + p_n \quad \text{onde } p_i = 2^i \tag{1}$$

Nicolas não refere, no entanto, que também

$$(p_n - p_k) + p_n = p_{n+1} - p_k \tag{2}$$

observação que seria útil no contexto destas pilhas de peso. Como é evidente a organização em proporção dupla das pilhas de peso permitia, combinando diferentes pesos, representar todos os múltiplos do menos pesado (½ oitava, ou seja ca. 1,8 g) até ao duplo do mais pesado (½ quintal). Além disso tem por efeito tornar impossível representar um peso dado por vários conjuntos diferentes de peças: a representação é única. Deduz-se disto que o objetivo principal visado era evitar ambiguidades. Por exemplo: um peso total de 15 onças é necessariamente representado pelas peças seguintes

$$\textit{onça} + \frac{1}{2}\textit{quarta} + \textit{quarta} + \textit{marco} = 15\ \textit{onças} \tag{3}$$

No sistema anterior, com um arrátel a 14 onças, existiam duas representações

$$\left.\begin{array}{l} \textit{onça} + \textit{duas onças} + \textit{quatro onças} + \textit{marco} \\ \text{ou} \\ \textit{arrátel} + \textit{onça} \end{array}\right\} = 15\ \textit{onças} \tag{4}$$

Duas formas de medir o mesmo peso podia suscitar dúvidas sobre possíveis fraudes associadas, dúvidas que já não podiam surgir mais com o padrão Manuelino.

Nesta intervenção da administração real através do almotacé-mor na gestão dos pesos o poder real mobilizou peritos para repensar e supervisionar uma atividade prática. Esta intervenção da coroa sobre os pesos e medidas, a saber um âmbito técnico da prática comercial, talvez tenha prefigurado a sua atuação, que parece semelhante, visando enquadrar e controlar a prática dos pilotos através dos cosmógrafos-mores. Nos dois casos os esforços do poder central confrontavam-se com certa resistência das práticas tradicionais cujos valores e critérios estavam em conflito com a racionalidade teórica por impor. Disso exemplo é a preservação do arrátel de 14 onças na Casa da Índia quando em todo o Reino vigorava o novo arrátel de 16 onças.

Referências

[1] J. J. Alves Dias, *Ordenações Manuelinas 500 anos depois: os dois primeiros sistemas (1512–1519)*, Biblioteca Nacional de Portugal, Centro de Estudos Históricos, Lisboa, 2012.

[2] G. Nicolas, *Tratado da pratica dArismetyca ordenada per Gaspar Nycolas e empremida com previlegio del Rey nosso Senhor*, Germã Galharde, Lisboa, 1519.

[3] S. M. G. Pinto, “A instituição da almotaçaria, o controlo da atividade construtiva e as singularidades de Lisboa em finais da Idade Média”, in *Lisboa medieval: gentes, espaços e poderes*, Eds. J. L. Inglês Fontes, L. F. Oliveira, C. Tente, M. Farelo, M. Gomes Martins (Lisboa: IEM – Instituto de Estudos Medievais, 2016), pp. 287–312

[4] L. Seabra Lopes, “O Regimento de Pesos e Medidas nos Reinados de Dom Afonso V e Dom João II”, *Boletim da Sociedade de Geografia de Lisboa*, Vol. 136, Nos. 1–12 (2018), pp. 134–168.

[5] L. Seabra Lopes, “The distribution of weight standards to Portuguese cities and towns in the early 16th century: administrative, demographic and economic factors”, *Finisterra*, Vol. 54, No. 112 (2019), pp. 45–70.

Matemáticos ibéricos transfronterizos (1492–1718)

Ángel Requena Fraile
Profesor de secundaria — SEHCYT

En 1496 se editaba en Leiria el *Almanaque Perpetuo* de José Vicinho, tablas astronómicas basadas en la *Composición Magna* de su maestro Abraham Zacuto. El incunable fue publicado en latín y castellano: sus muchas ediciones muestran la gran utilidad de la obra para la navegación y el calendario. El *Almanaque* fue la primera muestra destacada de la utilización del castellano como lengua científica por autores portugueses o residentes en Portugal. El fenómeno se empezó antes de la unión de las coronas y se mantiene bajo los reinados de los Habsburgos hasta 1640. Mostramos algunos de ellos: Zacuto, Nunes, Lavanha, y Stafford.

Se pone también de manifiesto como los estudios astronómicos se mantienen en universidades como parte de la formación en Medicina: *Homicidas medicos astrologiae ignaros* diría Robert Burton en su influyente *Anatomía de la melancolía* (1621). La astrología judiciaria podría estar condenada pero la influencia astral en la salud formaba parte de la cultura general.

El matemático, pícaro y astrólogo, Diego Torres Villarroel coincidió con el diagnóstico de Kepler: *La ramera Astrología debe sustentar a la madre, la Astronomía, ya que los salarios de los matemáticos son tan exiguos, que indefectiblemente la madre pasaría hambre si la hija nada ganase.*

Manifestaba Rey Pastor que el atraso matemático hispano en el siglo XVI se ponía de manifiesto con la poca atención al *Álgebra.* Portugal produce una obra notable, la de Pedro Nunes y además en castellano. Pero Nunes publica tarde, las nuevas obras italianas que conocía y critica marcaban un rumbo que él no alcanzó: se quedó como *Moisés sin ver la Tierra Prometida,* ha escrito el historiador danés Jens Høyrup.

La ponencia repasa biografías y obras de matemáticos ibéricos que ejemplifican la permeabilidad de las fronteras.

Abraham Zacuto (1452–1515)
Con Zacuto se cerraron cinco siglos de la brillante ciencia de los judíos en Sefarad. La expulsión de 1492 en Castilla/Aragón y de 1497 en Portugal pondrá final a una cultura que había alcanzado gran nivel y que tanto contribuyó a la expansión de la matemática por el occidente europeo.

La orden de expulsión acabó también con la estructura de apoyo a la ciencia: buena muestra es la edición en Leiria del incunable *Almanach perpetuum* por el impresor judío Abraham Samuel D'Ortas.

La edición del Almanaque en lengua castellana es expresada así: *Aquí se acaba la reçela delas tablas tresladas de abrayco et latín et de latín e noestro vulgar romançe por mestre jusepe vezino deçipolo del actor delas tablas. Deo graçias.*

Pedro Nunes (1502–1578)
Nunes fue el más destacado de los matemáticos ibéricos del siglo XVI. Sus estudios en Salamanca, casado con española y la publicación en castellano del *Libro de Álgebra* le hacer ser un ejemplo de esa permeabilidad transfronteriza entre los estudiosos.

El *Álgebra* de Nunes es un libro importante que ha sufrido uno de los males de la época: se publica tarde, cuando ya la disciplina camina por otros derroteros y otros se le han adelantado. Delicioso resulta el análisis crítico que Nunes hace de sus predecesores:

*Avisaros: Fray Lucas de Burgo – Excelente... pero sin orden. No es para aprendices. Tome muchos años para componer este libro. Cardano - Una **ensalada** mal hecha. Un libro de Álgebra que es un **caos.** Tartalla. Excelente Parece haber perdido el seso [de vanagloriarse]... causa hasta fastidio*

João Baptista Lavanha (1555–1624)
Llamado a Madrid muy joven para ser el primer profesor de la *Academia de Matemáticas* (1583) se convertirá en el cosmógrafo real, preceptor de Felipe IV, cartógrafo y encargado de los informes de política matemática de la corte, como la redacción del *Informe sobre propuesta de Galileo para el cálculo de la longitud.*

Labaña fue tan popular que el gran Lope de Vega le cita con admiración hasta en cuatro obras distintas: *Esto estudie en mi tierna edad del doctísimo portugués Juan Bautista de Labaña ... El hombre no se hizo por las estrellas (La Dorotea).*

La Biblioteca Nacional de España conserva un lujoso manuscrito de Labaña — *Descripción del universo* — un manual al modo de la *Esfera* de Sacrobosco para enseñar cosmografía al príncipe Felipe, el heredero del trono.

Ignacio Stafford (1599–1642)
El caso de Stafford apunta a la temprana globalización. Nacido inglés católico como Robert Badduley, le envían a estudiar en el colegio jesuita de los ingleses de Valladolid, donde ingresó en 1615 junto con su hermano William. El padre Stafford termina tras peripecias en Brasil como un prolífico profesor en el *Aula de la Esfera* de Lisboa.

Los jesuitas británicos constituyeron un puente cultural entre el Continente y las Islas Británicas como ponen de manifiesto las trece referencias bibliográficas de *Sphaera Mundi*. La imprenta solo vio su edición parcial de Euclides: *Elementos matemáticos* (1634), la segunda en lengua castellana tras la de Rodrigo Zamorano de 1576.

Diego Torres Villarroel (1693–1770)
Cerramos con el matemático pícaro, catedrático en Salamanca. Médico farsante en Coimbra y soldado en Lisboa.

Torres fue muy popular en su época por sus *Almanaques* y la publicación de *Vida*, una novela picaresca epigonal llena de citas deliciosas:

[De la Universidad salmantina] *Salí gran danzante, buen toreador, mediano músico y refinado y atrevido truhán. Las matemáticas, la música y la poesía se las doy a cualquiera, me quedaré con las zurrapas astrológicas que me dan de comer.*

Bibliografía

Cobos Bueno, José Maria. *Abraham Zacut*. Federación Española de Profesores de Matemáticas. Badajoz, 2001.

Gómez Aranda, Mariano. *Sefarad científica*. Editorial Nivola. Madrid 2003.

Navarro Loidi, Juan. *Ignacio Stafford (1599–1642) y sus Elementos matemáticos* (1634). SEHCYT. Revista Llull. Vol. 42 (Nº 86). 2019.

Nunes, Pedro. *Mathematics, Cosmography and Nautical Science in the 16th century*. `http://pedronunes.fc.ul.pt/works.html` (Visitado en marzo de 2023).

Nunes, Pedro. *Libro de Álgebra*. Amberes, 1567.

Pereira de Almeida, Bruno José M. G. *A influencia da obra de Pedro Nunes na náutica dos seculos XVI e XVII.* Tesis Universidad de Lisboa, 2011.

Requena Fraile, Ángel. *Matemáticos ibéricos transfronterizos.* 2023. `https://mateturismo.files.wordpress.com/2023/06/2023-4-eihm-transfronterizos.pdf`

Sánchez Pérez, Augusto. *Monografía sobre el matemático portugués Juan Bautista Labaña*. Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid. 1934.

Torres Villarroel, Diego. *Vida, ascendencia, nacimiento, crianza y aventuras.* Editorial Castalia, 1972.

Medir y construir en los *Elementos* de Euclides del *Curso matemático* de Hérigone

Antonio Mellado Romero
IES Licenciado Francisco Cascales (Murcia)

María Rosa Massa-Esteve
Univesidad Politècnica de Catalunya (Barcelona)

Pierre Hérigone (1580–1643) escribió, entre los años 1634 y 1642, un *Curso matemático* en seis volúmenes, con lenguaje simbólico y enunciados de las proposiciones en francés y en latín. En la obra se incluyen materias relacionadas con la *matemática pura* (geometría, aritmética y álgebra) y también con la *matemática mixta* (entre las que podemos citar: astronomía, trigonometría, milicia, geografía, el arte de navegar, óptica y perspectiva). Incluyó su versión de los *Elementos* de Euclides como primera obra del *Curso* con la idea de fundamentar todas las materias en el rigor inherente a esta obra clásica. Aunque siguió la versión de los *Elementos* (1574) de Christophorus Clavius (1538–1612), realizó importantes ampliaciones de esta obra para adaptarla a las necesidades de su *Curso*. En especial, desarrolló un procedimiento para medir magnitudes geométricas, necesario para la aplicación de los *Elementos* al *álgebra especiosa* y a la *matemática mixta*, que es totalmente novedoso en la época.

Para Hérigone, el rigor en la demostración fue fundamental. Incluir un procedimiento de medida de magnitudes geométricas en un texto como el de los *Elementos* requería, en primer lugar, dotar a este concepto del rigor inherente a este libro clásico. Para ello, añadió nuevas definiciones al Libro I, entre las que se encuentran las de *construir* (definición XXXVIII) y *conocer* (definición XXXIX) en geometría.[1]

Para Hérigone, *describir* o *construir* una figura geométrica es representarla con las medidas exactas de todas sus partes, mientras que *saber* o *conocer* en geometría es medir por una medida conocida o expresar mediante números cada parte de la figura propuesta.

De esta forma, «la construcción representa una figura en su verdadera forma», mientras que el conocimiento «la representa medida por una magnitud conocida y expresada por sus números». La construcción expresa la

[1]Hérigone incluyó en el Libro I, de su propia invención, las definiciones que van de la 37 a 44. Estas no se encuentran en la versión de Clavius. En estas definiciones se hallan, además de los conceptos de *construir* y *conocer*, otros como *teorema*, *problema*, *corolario*, *lema*, *escolio*, etc., que Hérigone especificó con minuciosidad y rigor.

figura con las proporciones de sus partes[2], utilizando los medios ofrecidos por los *Elementos* de Euclides.

Con estas definiciones, dotó de rigor y colocó a la misma altura la construcción de una figura y el conocimiento de las medidas numéricas de las diferentes partes de la misma. A partir de ellas, es factible el uso de medidas para los objetos geométricos dentro de los *Elementos*. De hecho, Hérigone incluyó medidas numéricas en una gran cantidad de proposiciones, usando números tanto racionales como irracionales.

En el Libro II, incluyó el proceso de medida de magnitudes geométricas. Más específicamente, en los escolios que añadió a la primera definición de este Libro II, la de rectángulo, que enunció, al igual que Clavius, de la forma clásica: «Todo paralelogramo rectángulo se dice contenido bajo dos líneas rectas que contienen un ángulo recto». Siguiendo a Clavius, incluyó un comentario en el que se muestra una visión mecánica de la formación del rectángulo mediante el movimiento de un lado sobre el otro. Clavius usó esta visión mecánica para relacionar la formación del rectángulo con el producto de sus lados, indicando que entre estos dos procesos hay «una gran afinidad». De esta forma, comparó el producto de dos números (aritmética) con el producto de dos líneas (geometría), basándose para ello en la proposición 16 de la obra *De triangulis omnimodis* (1533) donde Regiomontano (1436–1476) demostró que el área de un rectángulo se puede obtener mediante el producto de sus lados, para lo que necesitó dar validez al uso de números aproximados. Hérigone fue mas allá, al relacionar en los propios *Elementos* el área del rectángulo con el producto de sus lados. En el primer escolio escribió: «El área de un rectángulo se encuentra por la multiplicación del número de uno de los lados por el número del otro lado, que están alrededor del mismo ángulo». En el segundo: «Siendo conocidos el área y uno de los lados de un rectángulo, encontrar el otro lado. Se divide el número del área entre el número del lado dado, el cociente será el número requerido». Al incluir el proceso del cálculo del área de un rectángulo como enunciado de un escolio, concepto que había añadido a los *Elementos* en un comentario a la definición XLIV, le confería el rigor necesario para ser incluido y usado en este texto.

En diferentes proposiciones de los *Elementos* utilizó la construcción geométrica de una figura para obtener, posteriormente, la medida de alguno de

[2] «construere figuram Geometricam, est ipsam exhibere determinatam proportione suarum partium / Descrire ou construire une figure Geometriquè, est la representer avec les iustes mesures de toutes ses parties», [1, Tomo I, sn.]

sus lados. Por ejemplo, el problema VI del Libro IV propone inscribir un cuadrado en un círculo dado, [1, Tomo I, pp. 156–157].

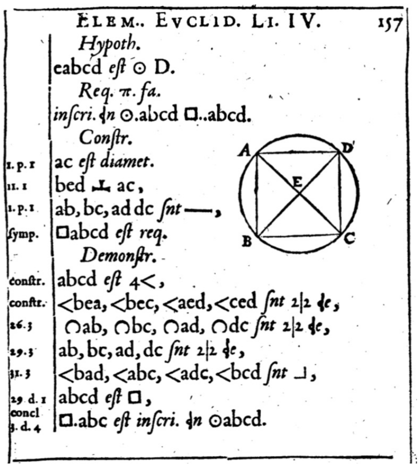


Figura 1: Construcción y demostración

Hérigone dio una construcción de dicho cuadrado, siguiendo los procedimientos clásicos de los *Elementos*, ver Figura 1, pero también añadió una explicación por números donde obtuvo numéricamente la medida del lado, suponiendo que el radio del círculo es 2, ver Figura 2. De hecho, Hérigone obtuvo $\sqrt{8}$ como valor del lado del cuadrado, incluyendo, de esta forma, números irracionales como medida dentro de los *Elementos.* Tomó el radio del círculo $AE = 2$, y ahora, aplicando el escolio a la definición primera del Libro II, obtuvo su cuadrado, 4. Usó entonces el teorema de Pitágoras sobre el triángulo AEB, rectángulo en E, para obtener el cuadrado de AB igual a 8, y de aquí, el lado AB igual a $\sqrt{8}$.

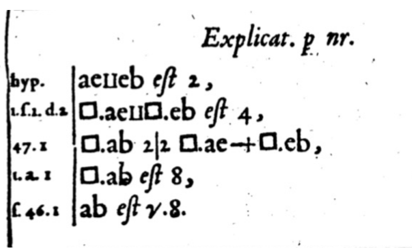


Figura 2: Explicación numérica

Por lo tanto, obtuvo por un lado la construcción de un cuadrado inscrito en una circunferencia y, por otro, la aplicación numérica, en este caso el cálculo de la medida del lado de dicho cuadrado, asignando números a las diferentes partes de la figura ya construida. Esta diferencia para Hérigone entre "forma" y "medida" de una figura se transmite a los conceptos de objeto geométrico que es *dado* y el que es *conocido*, que no son definidos por Hérigone de forma explícita, pero que podemos inferir del uso que hizo de ellos en algunos de los problemas de los *Elementos*. La explicación y aplicación de estos dos conceptos, *dado* y *conocido*, por parte de Hérigone, son una originalidad en sus *Elementos*. Para Hérigone, un objeto será dado cuando se tenga una representación de él, que puede no ser del mismo tamaño, pero que tiene todas sus partes en proporción, es decir, la forma del objeto. Pero será conocido cuando se tengan las medidas exactas de sus partes.

La aplicación de este proceso de medida fue de gran importancia para Hérigone en su interpretación del *álgebra especiosa* de Viète, así como en las disciplinas que conforman la matemática mixta, en especial en la trigonometría y en la geometría práctica. El *Curso*, que introdujo nuevos símbolos y sustituyó el lenguaje retórico por simbólico, como se puede apreciar en la Figuras 1 y 2, fue leído y usado ampliamente en el siglo XVII por lo que sus métodos fueron conocidos por los matemáticos contemporáneos.

Referencias

[1] P. Hérigone, *Cursus Mathematicus nova, brevi et clara methodo demonstratus, per NOTAS reales & universales, citra usum cuiuscumque idiomatis, intellectu, faciles*, 5 vols. (1634,1637) más un suplemento (1642). París: El autor y Henry Le Gras.

[2] M. R. Massa-Esteve, The Symbolic Treatment of Euclid's Elements in Hérigone's Cursus Mathematicus (1634, 1637, 1642). En: *Philosophical Aspect of Symbolic Reasoning in Early-Modern Mathematics*. Ed. por Albrecht Heeffer y Maarten Van Dyck. Vol 26. Studies in Logic. London: College Publications, (2010), pp. 165–191.

[3] A. Mellado Romero, La influencia del Cursus Mathematicus de Hérigone en la algebrización de la matemática, Tesis de Doctorado, Universidad de Murcia, (2022). Accesible: http://hdl.handle.net/10201/123566

O grande cometa de 1680 observado em Goa por Antoine Thomas

Carlota Simões
Universidade de Coimbra, CFisUC, Dep. de Matemática da FCTUC

Noël Golvers
Katholieke Universiteit Leuven

O Grande Cometa de 1680 (C/1680 V1), um dos maiores e mais brilhantes cometas do século XVII, foi o primeiro cometa descoberto por telescópio. A sua descoberta é hoje atribuída a Gottfried Kirch, a 14 de novembro de 1680. O padre jesuíta belga Antoine Thomas (Namur, 25 janeiro 1644 – Pequim, 29 junho 1709), que em novembro de 1680 se encontrava em Goa, em trânsito para a China, observou o cometa entre os dias 25 e 30, com métodos que descreve na sua obra *Synopsis Mathematica* [10] e apresentou estimativas para o tamanho do cometa e para o valor da sua distância à Terra. O diário das observações do cometa e as suas notas encontram-se num manuscrito na Biblioteca Geral da Universidade de Coimbra (BGUC) [9], um documento pouco conhecido. Neste texto damos conta deste documento e do seu enquadramento no desenvolvimento da astronomia a partir do estudo de cometas [7].

O autor do manuscrito

não continuou este P.e Mathematico com mais observações por se partir no principio do dito mez de Dezembro para a sua Missão do Japão, e esta Copea se tirou do tratado original que elle fez de sua própria Letra, que tem o P. Reytor do Collegio de São Paullo novo de Goa [9].

O manuscrito existente na BGUC é uma cópia de um documento então existente num colégio jesuíta em Goa, escrito por um "Padre da Comp.a, Mathematico estrangeiro, que veyo do Reino" [9], ou seja, um padre jesuíta, matemático e não português, que se encontrava em Goa, vindo de Portugal: trata-se de Antoine Thomas, jesuíta da Província Valona Belga que, vindo da Bélgica e tendo como destino a China, passou dois anos em Coimbra, onde observou um eclipse no dia 29 de outubro de 1678 [8] e onde terá escrito grande parte do seu livro *Synopsis Mathematica*, publicado em Douai em 1685 [10] (ver também [3]).

Thomas chegou a Coimbra a 25 de março de 1678, onde permaneceu até março de 1680 [4]. Sabemos que partiu de Lisboa a 10 de abril de 1680, escreveu uma carta a partir de Goa a 12 de outubro e a 13 de dezembro escreveu outra a partir de Tanor (Bangladesh). Conhecem-se ainda dois textos seus escritos em Macau, datados de 20 de dezembro de 1682 e 3 de dezembro de 1683, respetivamente. Terá chegado à China em 1685, sucedendo a Ferdinand Verbiest como Presidente do Tribunal das Matemáticas. Foi ainda vice-provincial da Companhia na China e morreu em Pequim em 1709 [6] (Vol. 7, pp. 1976–1980).

A observação do cometa em Goa

Antoine Thomas observou o cometa durante cinco dias, sempre à mesma hora, obtendo os valores apresentados na Tabela 1, onde um *signo* equivale a 30°, *comprimento* é ascenção recta e *largura* é declinação.

observações	Comprimento	Largura	Mov. próprio diurno
25/11/1680, 3.00	5 signos + 28° 10'	0°	4° 30'
26/11/1680, 3.00	6 signos + 2° 40'	0° 16' Sul	4° 30'
27/11/1680, 3.00	6 signos + 7° 16'	0° 40' Sul	4° 36'
28/11/1680, 3.00	6 signos + 12°	1° 10' Sul	4° 44'
29/11/1680, 3.00	6 signos + 16° 38'	1° 50' Sul	4° 38'
30/11/1680, 3.00	6 signos + 21° 13'	1° 59' Sul	4° 35'

Tabela 1: Posição do cometa nos seis dias de observações por Thomas.

Para calcular o tamanho do cometa e a sua distância à Terra, Thomas terá usado a técnica que descreve em [10] para determinar a paralaxe: "a paralaxe de qualquer estrela é a diferença de aspecto, que se mede pelo ângulo que parte de uma linha traçada pelo olho do observador, e a outra desde o centro da terra através da própria estrela, ou seja, o ângulo ABC", acompanhada do esquema apresentado na Figura 1, à esquerda.

Para determinar a paralaxe, Thomas precisaria não só de um valor para o raio da Terra, mas também de comparar as suas observações do cometa com outras: ou feitas por outro observador noutro local no mesmo momento, ou feitas por ele próprio, no mesmo local, em momentos diferentes. Estando ele em Goa, longe de todos os outros que observavam o cometa, terá comparado as suas observações às 3.00 com outras que terá feito noutra hora do dia, mas das quais não deixou registo.

Os cálculos de Thomas conduziram-no aos seguintes resultados: a paralaxe do cometa é de 10 minutos de grau, a distância à Terra é de 324.860 léguas portuguesas. Quanto às dimensões do cometa, a sua cauda mediria 4° = 22720 léguas e o seu diâmetro seria de 8' = 756 léguas. Acrescentamos ainda que na época uma légua portuguesa correspondia a 6173 metros, permitindo que os valores de Thomas possam ser confrontados com os que outros astrónomos obtiveram, mas deixaremos essa análise para trabalhos futuros.

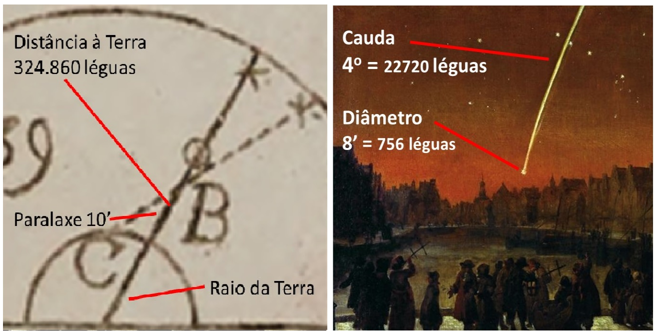


Figura 1: Paralaxe do cometa [10] (esq.) e dimensões do cometa (dir.).

Conclusão

O cometa de 1680 (C/1680) marca um momento especial na história da astronomia. Foi o primeiro a ser descoberto por telescópio antes de poder ser visto a olho nu, por Gottfried Kirch, sendo por isso conhecido por Cometa de Kirch. Na sua obra *Principia Mathematica*, Newton apresenta vários cálculos de modo a fazer a órbita do C/1680 coincidir com uma parábola [5], ficando por isso conhecido como Cometa de Newton. E também Cassini fez um estudo sobre o C/1680, que publicou em 1681 [2]. Dois anos mais tarde, outro cometa surgiria, o (1P/Halley). Edmond Halley terá observado o C/1680, mas este que agora surgia, complementado por estudos de muitos astrónomos que no passado tinham tomado nota rigorosa de outros cometas que se iam tornando visíveis, permitiu a Halley deduzir que o de 1682 teria uma órbita periódica, seria o mesmo que em 1607 fora estudado por Kepler, antecipando que, em 1759, ele iria surgir de novo. Halley já não testemunhou o regresso do cometa, mas tê-lo previsto levou a que ficasse com o seu nome: Cometa Halley, o mais famoso de todos os cometas. Quanto às notas de Antoine Thomas, ficaram quase esquecidas durante mais de quatro séculos no manuscrito que aqui se descreve e o seu nome ainda não se encontra associado ao cometa de 1680 (conhecemos apenas a referência à observação do cometa em Goa em [1], p. 394). No entanto, estas notas permitem-nos conhecer os interesses de Thomas, avaliar as técnicas usadas e os resultados obtidos, que poderemos vir a comparar com os relatos dos que como ele observaram o cometa e dele deram notícia.

Referências

[1] Baldini, Ugo, "The Teaching of Mathematics in the Jesuit Colleges of Portugal, from 1640 to Pombal", in: L. Saraiva, H. Leitão, *The practice of mathematics in Portugal*, Coimbra, Imprensa da Universidade 2004.

[2] Cassini, Giovanni Domenico, *Abrege des Observations & des Reflexions sur la Comete qui a paru au mois de Decembre 1689 & aux mois de Janvier, Fevrier & Mars de cette année 1681*, Paris, Estienne Michallet, 1681.

[3] Golvers, Noël, "Antoine Thomas, SJ and his *Synopsis Mathematica*: biography of a Jesuit mathematical textbook for the China mission", in *EASTM (East Asian Science, Technology and Medicine)*, n. 45, 2017, pp. 121–185.

[4] Golvers, Noël, "The scholarly context of the Colégio de Jesus / das Artes in Coimbra in the 2nd half of the 17th century, through the eyes of 4 'extranei' (I. Hartoghvelt; F. Verbiest; A. AIgenler; A. Thomas)", in Simões, C., Miranda, M. Casaleiro, P. (ed.) *Visto de Coimbra: O Colégio de Jesus entre Portugal e o Mundo*, Imprensa da Universidade de Coimbra, 2020, pp. 159–172.

[5] Newton, J. S. *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*, Londini: Jussu Societas Regiæ ac typis Josephi Streater, 1686.

[6] Sommervogel, Carlos, *Bibliothèque de la Compagnie de Jésus*, 12 Vol., Schepens, Bruxelles, 1890–1911.

[7] Stoyan, Ronald, *Atlas of Great Comets*, Cambridge University Press, Cambridge, 2015.

[8] Thomas, Antoine, "Observation de l'éclipse de Lune du 29 octobre 1678 faite à Coimbra", *Journal des Savants*, Févr. 1679, p. 56.

[9] *Breve tratado do Cometa que apareceo no mez de Novembro do anno de 1680 q. constava de hua estrella por cabeça, com hua cauda comprida, e aparecera de madrugada, o qual tratado fez na Cidade de Goa hum Padre da Comp.a, Mathematico estrangeiro, que veyo do Reino*. Ms. 185 n. 9. Biblioteca Geral da Universidade de Coimbra.

[10] Thomas, Antoine, *Synopsis Mathematica*, Douai, 1685.

Jacques Ozanam (1640–1718), un maestro de la difusión y algebrización de las matemáticas

Pedro J. Herrero Piñeyro
I. E. S. Beniaján. Beniaján (Murcia)

Antonio Linero Bas
Universidad de Murcia

La matemática del siglo XVII se desarrolló, según leemos en [7], por la interacción de tres fuerzas fundamentales, a saber, la recuperación de la herencia clásica que ya se había iniciado en el siglo XVI; la revolución del infinito, con la extensión de la matemática al uso de algoritmos infinitos; y la emergencia del álgebra y su aplicación a la resolución de problemas, con un nuevo lenguaje algebraico. Este proceso de algebrización duró aproximadamente un siglo y conllevó dos notables innovaciones: geometría analítica y cálculo diferencial. Una fecha clave es 1591, con la publicación de *In artem Analyticem Isagoge* de Viète (1540–1603), que supone el inicio de cambio de paradigma en el pensamiento matemático: se pasa de un pensamiento eminentemente geométrico a un pensamiento más algebraico [6]. El nuevo arte analítico de Viète se extiende con rapidez y despierta grandes expectativas: "Nullum non problema solvere", no dejar ningún problema sin resolver. Con la figura de Descartes (1596–1650) se afianza el nuevo lenguaje algebraico y su obra *La Géométrie*, incluida en su *Discours de la Méthode*, contribuye a la creación de la geometría analítica.

En este contexto, aparece la figura de Jacques Ozanam (1640–1718). Nació en Sainte-Olive (Ain), cerca de Lyon, en 1640, e inició estudios eclesiásticos en la Compañía de Jesús. Este hecho propició que tuviera relación con los matemáticos jesuitas Dechales (1621–1678) y De Billy (1602–1679). A la muerte de su padre, no obstante, abandona estos estudios para dedicarse a las matemáticas. Tras dar clases en Lyon, se desplaza a París, donde residirá hasta su muerte en 1718.[1]

Sobre la obra de Ozanam, podemos decir que fue extensa, con más de veinticinco tratados y cursos, reimpresiones, artículos en el *Journal de Sçavants*,..., abarcando diferentes campos como Álgebra, Geometría, matemáticas mixtas, recreaciones matemáticas y físicas,...[2] Su obra matemática fue conocida y reconocida en vida del propio Ozanam.[3]

[1] La mayoría de retazos biográficos nos ha llegado a través del elogio de Fontenelle (1657–1757) [2] y la obra de Montucla (1725–1799) sobre historia de las matemáticas [8].

[2] Para más información sobre la obra de Ozanam, véanse [4], [5] y [1].

[3] Por ejemplo, Leibniz (1646–1716) alaba el Álgebra de Ozanam porque le «[...] parece

Entre sus obras, paradójicamente, una de las que pudo haberle dado más fama, por la pericia matemática que demuestra y por el uso muy avanzado del nuevo lenguaje algebraico, es un manuscrito sobre la Aritmética de Diofanto.[4] Esta obra era apreciada por el mismo Leibniz, quien tuvo la oportunidad de leerla.[5] Montucla [8] afirma que la publicación del manuscrito hubiera contribuido, más que la mayor parte de sus obras, para aumentar su reputación, no ya entre los matemáticos ordinarios, sino entre los más habilidosos.

Sobre las razones que impidieron la publicación del manuscrito, se han barajado varias posibilidades: penurias económicas, el influjo de una depresión profunda tras la muerte de su mujer, etc.[6] Otra conjetura plausible se podría encontrar en la muerte imprevista de Jean-Baptiste Colbert (1619–1683), primer ministro de Francia en época de Luis XIV. Colbert patrocinó las ciencias con la creación de la Real Academia de las Ciencias de París en 1666, lo que propició la captación de talentos como Huygens (1629–1695) o Leibniz. No es de extrañar, por tanto, que la muerte de tan notable e influyente mecenas impidiera la publicación del manuscrito. Ozanam lo expresa de la siguiente forma en el prefacio de su *Géométrie Pratique* de 1684: «La muerte imprevista del Señor Colbert, habiendo roto el deseo que él tenía de mandar a imprimir la Aritmética de Diofanto [...] me ha hecho trabajar de nuevo sobre los seis libros de este autor [Diofanto], que aumentaré por lo menos el doble de lo que había antes, para no privar al público de las nuevas ideas que me vienen continuamente sobre esta materia».[7]

Para tener una idea más precisa sobre la calidad matemática de nuestro personaje, presentamos un episodio que trata de una controversia que mantuvieron Leibniz y Ozanam, al respecto de la conocida fórmula matemática $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots$ La autoría de esta fórmula, con razón, se atribuye a Leibniz, quien en su estancia en París, de 1672 a 1676, redacta el manuscrito *De quadratura aritmethica circuli, ellipseos et hyperbolae, cujus corollarium est trigonometria sine tabulis.* No obstante, no será hasta 1993 que aparezca publicado dicho manuscrito (bajo la traducción y comenta-

mucho mejor que la mayor parte de las que se han visto desde hace tiempo, que no hacen más que copiar a Descartes y sus comentaristas», *Le Journal des Sçavants*, 1703, p. 362.

[4]Véase [4] para conocer más detalles de este manuscrito de Ozanam: notación usada, lenguaje matemático, desarrollo de los problemas, algebrización de las matemáticas de la época, conexión entre álgebra y geometría en la resolución de los problemas,...

[5]Ver *The correspondence of Henry Oldenburg*, edición y traducción de A. R. Hall y M. B. Hall, Mansell, Londres, vol. XI, pp. 98–108.

[6]Más detalles en [4].

[7]Para más información sobre esta conjetura, véase [5].

rios de E. Knobloch, en un libro editado por Vandenhoeck und Ruprecht). Mientras tanto, Ozanam da la fórmula $4a^2 - \frac{4}{3}a^2 + \frac{4}{5}a^2 - \frac{4}{7}a^2 + \ldots$ para el área de un círculo de diámetro $2a$, en su libro *Géométrie Pratique*, de 1684. Este hecho da inicio a la disputa. Leibniz escribe a Foucher (1644–1696)[8] en 1686, en estos términos: «Hallo que él [Ozanam] no ha sido muy considerado conmigo; porque ha insertado en la Geometría [Práctica] mi cuadratura del círculo [...] con mi demostración, sin nombrarme y hablando de una forma como si esa demostración fuera suya»[3, p. 48]. Más tarde, a finales de 1691, Foucher transmite a Leibniz la respuesta de Ozanam en su defensa: «Dice el Sr. Ozanam que es cierto que usted le dio la *obertura* de la cuadratura del círculo; pero él se queja de que habiendo sido muy lento en el descubrimiento de lo que usted ya sabía, usted le dio lugar a que hiciera meditaciones sobre esto, y encontrar lo que él ha encontrado, de suerte que pretende tener derecho, también como usted, a este descubrimiento; pero con todo eso, me hubiera gustado que él os hubiera nombrado»[3, p. 85]. Por último, Leibniz comenta a inicios de 1692: «El Sr. Ozanam no estará en desacuerdo conmigo en que yo le he dado las primeras vistas de la cuadratura del círculo, de la que hablamos él y yo, y yo le hubiera comunicado mi demostración si él me la hubiera pedido» [3, p. 90]. Por tanto, de una sugerencia (*ouverture*) de Leibniz, Ozanam es capaz de construir su propia demostración.

Ante la pregunta de si podemos catalogar a Ozanam como un simple "enano" en el mundo de las matemáticas de la época, presentamos finalmente las siguientes reflexiones para que el lector pueda dilucidar si tal etiqueta es proporcionada o, por el contrario, debemos considerar que estamos ante un matemático sobresaliente. En primer lugar, Ozanam destaca por el elevado número de obras y reimpresiones, en todos los campos de las matemáticas de su tiempo, mostrando un profundo conocimiento de las materias; mantuvo contacto con importantes matemáticos de la época, de los cuales recibió importantes elogios; emplea y domina hábilmente un lenguaje algebraico avanzado, acompañado de un método analítico que le permite encontrar soluciones generales, con tratamiento riguroso;[9] en su Aritmética de Diofanto, de problemas aritméticos pasa a generalizaciones algebraicas, con consecuencias geométricas; su dominio algebraico le permite dar nuevos resultados, como es el caso de la cuadratura aritmética del círculo o las innumerables aportaciones que hace en su Diofanto; el proceso de algebrización

[8] Simon Foucher, destacado filósofo de la época. Su correspondencia con Leibniz aparece incluida dentro de la obra [3].

[9] Para el análisis de algunos ejemplos que clarifican esta afirmación, el lector puede consultar [4], [5].

de las matemáticas encuentra en Ozanam un pilar significativo, ya que con su numerosa obra y su, no menos importante, labor pedagógica es capaz de erigirse como uno de los principales difusores del proceso.

Referencias

[1] C. Càndito, "Jacques Ozanam (1640-1718)". En: (M. Cigola, editor) *Distinguished Figures in Descriptive Geometry and Its Applications for Mechanism Science. From the Middle Ages to the 17th Century*, History of Mechanism and Machine Science 30, Springer, Cham, 2016, pp. 223–248.

[2] B. Fontenelle, "Eloge de M. Ozanam", *Histoire de l'Académie Royale des Sciences, Année MDCCXVII*, Imprimerie Royale, Paris, 1719, pp. 86–92.

[3] A. Foucher de Careil, *Lettres et opuscules inédits de Leibniz. Précédés d'une introduction*, Librairie Philosophique de Ladrange, París, 1854.

[4] A. Gómez-García, P. J. Herrero-Piñeyro, A. Linero-Bas, M. R. Massa-Esteve e A. Mellado-Romero, "The six books of Diophantus' Arithmetic increased and reduced to specious: the lost manuscript of Jacques Ozanam (1640-1718)", *Archive for History of Exact Sciences*, Vol. 75 (2021), pp. 557–611. https://doi.org/10.1007/s00407-021-00274-3

[5] A. Gómez García, P. J. Herrero Piñeyro, A. Linero Bas e A. Mellado Romero, "Jacques Ozanam: Master of the Diffusion and Algebrization of Matemathics". En: (Davide Crippa, Maria Rosa Massa-Esteve, editores), *The Algebrization of Mathematics during the* 17^{th} *and* 18^{th} *Centuries. Dwarfs and Giants, Centres and Peripheries*, Dialogues and Games of Logic 8, College Publications, Rickmansworth (UK), 2023, pp. 25–68.

[6] M. S. Mahoney, "The beginnings of algebraic thought in the seventeenth century". En: (S. Gaukroger, editor), *Descartes' Philosophy, Mathematics and Physics*, Harvester Press, Brighton(UK), 1980, pp. 141–156.

[7] M. R. Massa-Esteve "Pietro Mengoli, matemático polifacético e innovador en el cálculo". En: (Juan Arana, director), *La cosmovisión de los grandes creadores de la ciencia moderna*, Editorial Tecnos, Madrid, 2023, pp. 88–97.

[8] J. E. Montucla, *Histoire des Mathématiques*, Chez Ch. Ant. Jombert, París, 1758.

Que matemática para os engenheiros militares? Da Aula de Fortificação à Academia Militar de Lisboa

João Caramalho Domingues
Centro de Matemática da Universidade do Minho

A pergunta colocada no título é: que *matemática* era ensinada aos futuros engenheiros militares portugueses de meados do século XVII a meados do século XVIII? Nesta pergunta, entenda-se a palavra «matemática» num sentido intencionalmente anacrónico: como o que hoje reconhecemos como matemática, correspondendo grosso modo ao que na altura se chamava «mathematica pura».

No contexto da Guerra da Restauração (1640–1668) entre Portugal e Espanha, o rei D. João IV ordenou em 1654 a Luís Serrão Pimentel que ensinasse fortificação:

> «hey por bem e me praz que o dito Luis Serrão Pimentel lea nesta cidade a arte da fortificaçaõ e a liçaõ [da artelharia esquadroẽs alojamentos de exercitos defensão, e expugnação das praças] aos que a quiserem aprender» (Alvará de 9 de Outubro de 1654).

Na sequência desta ordem foi tomando forma uma escola que viria a ser conhecida como Aula de Fortificação de Lisboa.

Luís Serrão Pimentel (Lisboa, 1613 – Lisboa, 1679) exerceu funções de cosmógrafo-mor a partir de 1641 (por impedimento do titular António de Mariz Carneiro), tendo sido nomeado oficialmente para o cargo em 1671; foi ainda nomeado engenheiro-mor do reino em 1673. Em 1680 foi publicado o seu *Methodo Lusitanico de desenhar as Fortificaçoens* [Pimentel 1680].

No «Proemio» desta obra pode ler-se que Serrão Pimentel pretendia ensinar

> «qualquer soldado [a] facillima, & brevissimamente desenhar todo o genero de Fortificaçoens, que hoje se practicaõ [...] sem que lhe seja necessario saber Geometria, nem Arithmetica, mais que multiplicar, & repartir [i. e., dividir] por [um ou dois algarismos]. Mas todavia para os Theoricos que sempre procuram a razaõ ou demonstração da Practica lha escrevi separada.»

De facto, o tratado de fortificação que ocupa três quartos deste volume está dividido em duas partes: na primeira, dita «operativa», são dadas regras muito práticas, sem justificação; apenas esta primeira parte seria obrigatória; é na segunda parte («qualificativa», menos de metade do tamanho da primeira) que essas regras são justificadas, para os «Theoricos». No final do volume aparecem quatro apêndices, dois dos quais matemáticos: um sobre trigonometria plana prática, aritmética decimal e logaritmos, e outro um breve resumo de geometria.

Resumindo, a matemática ensinada por Luís Serrão Pimentel na Aula de Fortificação provavelmente consistia em aritmética decimal, trigonometria plana (incluindo logaritmos), geometria prática e, eventualmente, geometria teórica. Mas toda esta matemática era opcional: destinava-se aos alunos que quisessem aprofundar a teoria, sendo possível aprender fortificação pelos métodos de Serrão Pimentel de uma forma puramente prática.

O sucessor de Luís Serrão Pimentel na Aula de Fortificação foi o seu filho Francisco Pimentel. Mudanças significativas aconteceriam apenas um pouco mais tarde, com Manuel de Azevedo Fortes.

Manuel de Azevedo Fortes (Lisboa, 1660 – Lisboa, 1749) é uma figura importantíssima na história intelectual portuguesa do início do século XVIII, sendo um dos primeiros *estrangeirados*. Tendo estudado em Espanha e em França (aqui no Collège du Plessis da Universidade de Paris), foi um dos principais divulgadores do cartesianismo em Portugal. Substituto da Aula de Fortificação a partir de 1696, chegou a engenheiro-mor do reino em 1719.

Entre 1719 e 1733, Azevedo Fortes esteve envolvido numa polémica com um outro militar, António do Couto de Castelo Branco, autor dumas *Memórias Militares* (2 vols., 1719, 1731), elucidativa das suas ideias sobre o que deviam ser os engenheiros [Araújo 2006]. Castelo Branco via os engenheiros como técnicos auxiliares, com menos reputação do que os outros oficiais. Azevedo Fortes tinha uma visão radicalmente oposta: queria aumentar o prestígio dos engenheiros, e defendia que tendencialmente todos os oficiais tivessem formação em engenharia, sendo esta formação muito mais lata do que um mero ensino de técnicas de fortificação. A esta visão do ensino de engenharia não será alheia a mudança de nome que ocorreu nesta época, de *Aula de Fortificação* para *Academia Militar* [Ribeiro 2009, 99–100].

A fonte mais óbvia e mais acessível sobre a matemática que Azevedo Fortes ensinaria na Academia Militar é o livro *O Engenheiro Portuguez* [Fortes 1728–1729], que resulta explicitamente desse ensino. O primeiro volume contém um tratado de geometria prática que é principalmente (mas não inteiramente) tradução de um livro francês, de Jean Boulenger, com comentários de Jacques Ozanam. No fim, há um apêndice sobre trigonometria plana, baseado num texto de Ozanam que tinha sido publicado em francês junto com uma versão das tabelas trigonométricas e logarítmicas de Adriaan Vlacq.

O segundo volume de [Fortes 1728–1729] é um tratado de fortificação (com um apêndice sobre armas de guerra), mas inclui uma passagem sobre o que, na opinião de Azevedo Fortes, os engenheiros devem saber indispensavelmente que inclui, quanto à matemática, «a Arithmetica, os Elementos de Euclides, a Geometria Pratica, a Trigonometria». Esta lista é prova suficiente de que este livro não contém todo o currículo matemático da Academia Militar. Mas alguns textos manuscritos permitem completar esse currículo.

Um desses manuscritos [Fortes 1724], com menção explícita a Azevedo Fortes como autor, contém (além de versões da trigonometria e de outra passagem d'*O Engenheiro Portuguez*) uns *Elementos* de Euclides (livros I–VI, XI e XII), a partir, mais uma vez, duma versão de Ozanam, esta por sua vez adaptada duma versão de Dechales. Trata-se, como era frequente na época, duma versão livre, por exemplo suprimindo proposições consideradas desnecessárias, mas mantendo a numeração original. As alterações mais significativas ocorrem na teoria das paralelas e na teoria das proporções. Um acrescento interessante é a indicação do uso de cada proposição.

O outro texto, que sobrevive em três manuscritos [Fortes s/d], é uma tradução dum compêndio do padre oratoriano francês Bernard Lamy, uma introdução à matemática de clara inspiração cartesiana, baseada na *mathesis universalis*, ciência da grandeza em geral, que é identificada com a álgebra; o conteúdo propriamente dito abrange aritmética e álgebra [Domingues 2018, 365–368]. Era este o texto com que principiavam as lições de matemática da Academia Militar no tempo de Azevedo Fortes.

Na verdade, é possível reconstituir com alguma segurança o currículo matemático (no sentido estrito indicado no princípio deste resumo) organizado por Azevedo Fortes como composto por:

1. «grandeza em geral» (aritmética e álgebra);
2. «geometria especulativa» (*Elementos* de Euclides);
3. trigonometria;
4. geometria prática

(o curso da Academia Militar prosseguia depois com assuntos como plantas e cartas topográficas, fortificação e artilharia).

É importante sublinhar que as diferenças entre o currículo muito prático e reduzido de Serrão Pimentel e o currículo bastante mais abrangente de Azevedo Fortes não se devem a este ser «melhor matemático», ou um matemático mais teórico, do que aquele — não há indícios que apontem para esse tipo de diferença entre os dois. O que os diferentes currículos parecem reflectir é diferentes perfis de engenheiros a formar: num caso engenheiros muito práticos, no outro engenheiros como militares muito completos e lutando por um estatuto condizente.

Referências

Renata de ARAÚJO, 2006. "Manoel de Azevedo Fortes e o estatuto dos Engenheiros Portugueses", em Mário Gonçalves Fernandes (ed.), *Manoel de Azevedo Fortes (1660–1749): Cartografia, Cultura e Urbanismo*, Porto: Gedes, 15–34.

João Caramalho DOMINGUES, 2018. "Três tradições algébricas em Portugal na primeira metade do séc. XVIII", em A. Costa Canas, J. Caramalho Domingues e L. Saraiva (eds.), *Actas/Anais do 7.º Encontro Luso-Brasileiro de História da Matemática*, SPM, vol. II, 357–372.

João Caramalho DOMINGUES, 2024. "What Mathematics for Portuguese Military Engineers? From the Class of Fortification to the Military Academy of Lisbon", em Philip Beeley e Christopher Hollings (eds.), *Beyond the Learned Academy: The Practice of Mathematics, 1600–1850*, Oxford University Press, 112–136.

Manoel de Azevedo FORTES [atribuído], s/d. *Elementos das Mathematicas, ou Tractado da grandeza em geral*, manuscrito, Biblioteca Nacional de Portugal, cód. 1861; cód. 5194//1; cód. 6205//17 (incompleto).

Manoel de Azevedo FORTES, 1724. *Geometria Espiculativa; Trigonometria Espherica; Modo de riscar e dar aguadas nas plantas melitares*, manuscrito, Biblioteca Pública de Évora, cód. Manizola 258.

Manoel de Azevedo FORTES, 1728–1729. *O Engenheiro Portuguez*, 2 vols., Lisboa Ocidental: Manoel Fernandes da Costa.

Luís Serrão PIMENTEL, 1680. *Methodo Lusitanico de desenhar as Fortificaçoens das Praças Regulares, & Irregulares, Fortes de Campanha, e outras obras pertencentes á Architectura Militar*, Lisboa: Antonio Craesbeeck de Mello.

Dulcyene Maria RIBEIRO, 2009. *A formação dos engenheiros militares: Azevedo Fortes, Matemática e ensino da Engenharia Militar no século XVIII em Portugal e no Brasil*, tese de doutoramento, São Paulo: Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo.

Juan Andrés y la Historia de las Matemáticas en España a finales del siglo XVIII

Juan Navarro Loidi
Cátedra Sánchez Mazas (UPV-EHU)

Juan Andrés y *Origen, progresos y estado actual de toda la literatura*

Juan Andrés (Planes, 1740 – Roma, 1817) entró en la Compañía de Jesús en 1754. En 1767 los jesuitas fueron expulsados de España y Andrés tuvo que pasar a Italia. Al suprimirse la Compañía de Jesús en 1773 encontró trabajo en Mantua como preceptor de los hijos del marqués de Bianchi. En Mantua contó con la rica biblioteca del marqués y un ambiente tranquilo que le permitió desarrollar un gran trabajo intelectual. En esa época redactó *Dell'origine, progressi e stato attuale d'ogni letteratura* y una multitud de escritos sobre hidráulica, literatura, antigüedades, enseñanza a sordo mudos, Galileo, la defensa del teatro español, y otras materias. En 1796 salió de Mantua para evitar el ejército francés y en 1804 se asentó en Nápoles porque el Papa permitió la actividad de los jesuitas en dicho reino. En 1814 la Compañía de Jesús fue restaurada por completo y Andrés se trasladó a Roma para ayudar en su restablecimiento, muriendo el año 1817.

Juan Andrés fue un erudito reconocido. En arte era un defensor del neoclasicismo, y en filosofía tenía una orientación empirista, próxima al sensualismo; pero al mismo tiempo era un firme creyente y un jesuita convencido. Por su formación estaba ligado a la cultura española; pero también fue un intelectual muy arraigado en Italia.

Su obra más importante fue *Dell'origine, progressi e stato attuale d'ogni letteratura* (1782–1799, 7 v.), que tuvo trece ediciones completas y cinco condensadas en italiano, y una en español, *Origen, progresos y estado actual de toda la literatura* (1784–1806, 10 v.). Por "literatura" Andrés entendía lo que ahora se llamaría cultura. La obra tiene cuatro partes: una primera dedicada a un estudio general de la historia del conocimiento; una segunda dedicada a la historia de las "buenas letras"; una tercera a la de "toda clase de ciencias naturales" y una cuarta sobre la historia de los saberes eclesiásticos.

La historia de las matemáticas se encuentra en los libros 7 y 8 en la edición española. Andrés trata primero de su historia en general para ver luego la de sus partes, comenzando por las matemáticas puras: aritmética, álgebra y geometría; y siguiendo por las aplicadas: mecánica, hidrostática, náutica, acústica, óptica y astronomía. Explica que el álgebra, que había nacido como auxiliar de la aritmética, se había convertido en una ciencia por sí misma tan importante, o más, que la aritmética. El cálculo de probabilidades lo incluye en la historia del álgebra. El cálculo diferencial también lo introduce dentro del álgebra, aunque sus principales aplicaciones las pone en la geometría. Es una historia puesta al día, que incluye las aportaciones de Condorcet, Laplace, Lagrange o Bossut; y bien fundamentada, en la que se indican convenientemente las fuentes utilizadas, citando a Montucla y a fuentes más cercanas como Diogenes Laercio para la Antigüedad, o las revistas contemporáneas de las academias de París, Petersburgo, Berlín, o Turín para los avances más recientes.

Juan Andrés considera que las matemáticas habían tenido dos periodos especialmente brillantes en su historia uno en la antigua Grecia, y otro en Europa a partir del Renacimiento, y que las matemáticas árabes fueron las que trasmitieron los conocimientos griegos a Europa. En esta trasmisión subraya el papel que jugó España. De los autores portugueses da importancia a Pedro Nunes.

Historia de los progresos del entendimiento humano (1775)

En otros libros editados en esa época también se trató de la historia de las matemáticas. *Historia de los progresos del entendimiento humano* es la traducción al castellano de *Histoire des progrès de l'esprit humain* (1766) de Alexandre Savérien (Arles, 1720 – Nanterre, 1804), un ingeniero naval y publicista francés. El traductor y autor del prólogo de la edición española es el periodista y ensayista Manuel Rubín de Celis (Llanes 1743- ¿?).

Savérien considera ciencias exactas: la aritmética, el álgebra, la geometría, la astronomía, la gnomónica, la cronología, la navegación, la óptica, la maquinaria, y la hidráulica; pero estudia también, por depender de las matemáticas, la música, la geografía, la arquitectura civil, la arquitectura militar y la arquitectura naval. La mecánica la incluye en la maquinaria. La historia del cálculo de probabilidades la da dentro del apartado del álgebra y la del cálculo diferencial en la geometría.

A diferencia de Andrés, Savérien tiene una orientación cartesiana en filosofía y opina que "los sentidos pueden engañarnos" pero la razón no. Sin embargo, su historia está mucho más inclinada a las cuestiones prácticas y técnicas que la del exjesuita. En general es una historia correcta, pero menos puesta al día y con menos información que la de Andrés. También es más anecdótica y menos rigurosa; cita pocas fuentes, algunas muy poco fiables como Mercurio Trismegisto.

Coincide con Andrés en su optimismo y su confianza en los avances de las matemáticas, aunque en su caso es demasiado optimista y opina que “la geometría está cerca de su perfección”.

Elementos de aritmética, álgebra y geometría (1782)

En algunos tratados de matemáticas publicados en esos años se incluía como prólogo una historia breve de las ciencias exactas. Uno de ellos es *Elementos de aritmética, álgebra y geometría* (1782) de Juan Justo García que comienza con un “Resumen histórico” dividido en tres partes, aritmética, álgebra y geometría. No trata de matemáticas mixtas.

Su autor es Juan Justo García (Zafra, 1752 – Salamanca, 1830), que fue catedrático de la Universidad de Salamanca y jugó un papel importante en la renovación de la enseñanza de las matemáticas en España.

Elementos de aritmética, álgebra y geometría (1782) es un libro puesto al día que incluye un apartado dedicado al cálculo diferencial e integral. Fue muy popular, y llegó a tener cinco ediciones.

Su historia es concisa, pero correcta y actualizada. En la historia del álgebra dedica un apartado al cálculo de probabilidades y en la de la geometría incluye la historia del cálculo diferencial, llegando a explicar los avances de autores contemporáneos, entre los que incluye al español Bails. No habla del papel de España en la transmisión a Europa de las matemáticas árabes y da poca importancia a los matemáticos españoles. Pedro Nunes es el único autor portugués que menciona. Esta historia tiene el inconveniente de que no cita las fuentes que utiliza.

Se muestra muy optimista de los logros las matemáticas y también opina que la geometría “sin duda está muy cerca de su perfección”.

Curso de Matemáticas, (1794-1798, 3 tomos en 4 volúmenes)

Su autor es Tadeo Lope (Madrid, 1753? – Madrid, 1802), un ingeniero militar que se dedicó a la enseñanza de las matemáticas en Madrid.

En el primer tomo de la obra se estudia la aritmética y el álgebra, en el segundo la geometría y las probabilidades, y en el tercero, editado en dos volúmenes, los logaritmos.

Cada tomo comienza con una breve historia de la materia tratada. En el tomo 1º se da primero una corta historia de la aritmética bastante correcta, pero que termina en el siglo XVII, con Wallis y Brounker, para continuar con la del álgebra, en la que se incluye la del cálculo de probabilidades. En el tomo 2º da una historia de la geometría bastante breve y escasa, que termina con Cavalieri y Wallis, porque deja la historia posterior de la geometría para un volumen dedicado al cálculo diferencial que no llegó a publicar. En el 3er volumen se explica la historia de los logaritmos y la de sus tablas de una forma detallada. Cita pocas veces sus fuentes.

Observations de M. l'Abbé Cavanilles sur l'article Espagne de la Nouvelle Encyclopédie (1784)

Este libro no es propiamente un tratado de historia de las ciencias. Surgió como una reacción a la entrada "Espagne" de la *Encyclopédie méthodique*, escrita por Masson de Morvilliers, que venía a decir que España no había hecho nada por el progreso de las ciencias. Esa opinión sentó muy mal en España y de forma extraoficial, el gobierno pidió al botánico Cavanilles, que le respondiera, lo que hizo con este libro.

Antonio José Cavanilles (Valencia, 1745 – Madrid, 1804) fue un sacerdote ilustrado y un prestigioso botánico español, que llegó a ser profesor y director del Jardín Real de Madrid.

Es un libro polémico en defensa de la cultura española y también de su historia. Al referirse a la historia de las matemáticas, recalca la importancia de los musulmanes españoles en la Edad Media y aconseja el libro de Juan Andrés para conocer más sobre la materia. En el Renacimiento menciona a los matemáticos Pedro Ciruelos, Martínez Siliceo, Jerónimo Muñoz, y Juan Herrera. En el siglo XVII no encuentra nada que señalar en matemáticas y en el siglo XVIII, cita a Tosca, Bails, Rosell, Mazarredo, Tofiño, Ulloa, Jorge Juan y a otros matemáticos.

Referencias

Andrés, Juan, *Origen, progresos y estado actual de toda la literatura*, Antonio de Sancha, Madrid, 1784–1806, 10 v. Traductor Carlos Andrés.

Cavanilles, Antonio José, *Observations de M. l'Abbé Cavanilles sur l'article Espagne de la Nouvelle Encyclopédie*, Jombert, Paris, 1784.

García, Juan Justo, *Elementos de Aritmética Álgebra y Geometría*, Joachim Ibarra, Madrid, 1782.

Lope, Tadeo, *Curso de matemáticas, para la enseñanza de los caballeros seminaristas del Real Seminario de Nobles de Madrid*, Imprenta Real, Madrid, 1794–1798, 3 t. en 4 v.

Savérien, Alexandre, *Historia de los progresos del entendimiento humano en las ciencias exactas y en las artes que dependen de ellas*, Antonio de Sancha, Madrid, 1775. Traductor Manuel Rubín de Celis.

É de D'Alembert a frase "Allez en avant, et la foi vous viendra"?

António Leal Duarte
CMUC, Dep. de Matemática Univ. de Coimbra

A propósito, por um lado, da falta de fundamentação do Cálculo, sentida desde a sua criação no séc. XVII e durante o séc. XVIII, e por outro, do enorme sucesso desse mesmo Cálculo na resolução de imensos problemas matemáticos e físicos é, muitas vezes citada a frase "Allez en avant, et la foi vous viendra" atribuída Jean Le Rond D'Alembert (1717–1783) e dita por este a um estudante que duvidava dos princípios do Cálculo. A referida frase surge em diversas Histórias da Matemática (veja-se, por exemplo, [B], [G], [S], [St-And]); uma busca no Google, desta frase ou da respectiva tradução em inglês ("Just go ahead and faith will follow" ou "Go forward and faith will follow" mostra inúmeras ocorrências (com os mais diversos propósitos) sempre com a atribuição a D'Alembert. No entanto, em geral, quer nestas ocorrências, quer nas obras acima referidas, ou não é indicada nenhuma referência, ou são indicadas referências muito tardias. Tanto quando sabemos a referida frase não se encontra em nenhuma obra de D'Alembert.

Assim coloca-se o problema: será aquela frase mesmo de D'Alembert? E como se iniciou a sua atribuição a D'Alembert?

Começamos por notar que a frase e a sua respectiva autoria têm uma tradição bem enraizada já no séc. XIX. Citaremos alguns exemplos.

Assim Victor Poncelet (1788–1867) escreve em *Applications d'Analyse et de Géométrie...*, Tome II, pág. 532 (1864):

> *... sans s'inquiéter des conséquences singulières et paradoxales qui peuvent en résulter dans les applications, de même qu'on l'a fait en Analyse algébrique, où ces difficultés subsistent et n'ont pourtant point arrêté sa marche ni ses progrès. Pourquoi, en effet, en cette occasion comme dans tant d'autres, n'userait-on pas de ce principe de d'Alembert devenu presque vulgaire à force d'être répété : Allez en avant et la foi vous viendra.*

Antoine Augustin Cournot (1801–1877), em *De l'Origine et des Limites de la Correspondance Entre l'Algebre et la Géométrie*, 1847, pág. 366 escreve:

> *tandis qu'il faut se familiariser par la culture des sciences, avec le sens et la valeur de ces idées spéculatives sur lesquelles on ne tomberait pas sans des études scientifiques. C'est ce qu'exprime*

> *ce mot fameux attribué à d'Alembert: Allez en avant, et la foi vous viendra.*

A mais antiga referência que encontrámos deve-se a Sylvestre François Lacroix (1765–1843) no *Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul intégral*, de 1802 onde, nas Réflexions Sur la manière d'enseigner les Mathématiques..., pág. XI escreve:

> *En passant à de nouvelles choses dans un ordre convenable, on sait mieux celles qu'on a déjà apprises; c'est dans ce sens que d'Alembert disoit à quelqu'un qui se plaignoit des nuages que certaines démonstrations avoient laissés dans son esprit : allez en avant et la foi vous viendra.*

Estas Réflexions aparecerão de forma desenvolvida nos *Essais sur l'enseignement en général, et sur celui des mathématiques en particulier* de 1805 (com várias edições posteriores). Notemos que não é impossível que Lacroix tivesse conhecido pessoalmente D'Alembert, mas os contactos entre ambos se existiram terão sido escassos pois Lacroix tinha 17 anos à data da morte de D'Alembert.

Há, no entanto, atribuições alternativas de que tivemos conhecimento através de [It], onde se lê:

> *... nous avons trouvé cité dans l'ouvrage le mot de d'Alembert : « Allez de l'avant, et la foi vous viendra. » Comme la plupart des mots célèbres, il pourrait bien être apocryphe. Sans l'affirmer, nous indiquerons simplement ce qu'écrit Bossut dans son Histoire des mathématiques ...*

Notemos que Charles Bossut (1730–1814), foi discípulo e colaborador de D'Alembert, autor de várias obras de Matemática entre as quais o *Essai sur l'Histoire générale des mathématiques* (1802), com uma 2.ª edição alargada em 1810. Em ambas as edições encontramos o trecho seguinte (transcrito por J. Itard), com uma frase muito semelhante à frase atribuída a D'Alembert:

> *Lorsque je commençais à étudier le livre du marquis de L'Hôpital, j'avais de la peine à concevoir qu'on pût négliger absolument, sans erreur quelconque, une quantité infiniment petite, en comparaison d'une quantité finie. Je confiai mon embarras à un fameux géomètre qui me répondit : Admettez les infiniment petits comme une hypothèse, étudiez la pratique du calcul, et la foi vous viendra. La foi est venue en effet : je me suis convaincu*

> *que la métaphysique de l'Analyse infinitésimale est la même que celle de la méthode d'exhaustion des anciens géomètres.* (Vol. II, 1.ª ed. pág. 142, 2.ª ed. pág. 145)

Em ambas as edições à margem o "fameux géomètre" é identificado como Alexis Fontaine des Bertins (1704–1771).

No texto de Lacroix (tal como em Cournot) o "*Allez en avant, et la foi vous viendra*" parece-nos, no entanto, significar que só aprendemos bem um assunto quando estudamos outros que sobre aquele se baseiam. Com esta interpretação a frase parece-nos ser próxima do pensamento de D'Alembert quando escreve:

> *Cette définition est peut-être la plus précise & la plus nette qu'on puisse donner du calcul différentiel ; mais elle ne peut être bien entendue que quand on se sera rendu ce calcul familier ; parce que souvent la vraie définition d'une science ne peut être bien sensible qu'à ceux qui ont étudié la science. Voyez le Disc. prélimin. page xxxvij.* ("Differentiel" da *Encyclopedie*, vol. IV, pág. 586)

No sentido referido no ínicio deste resumo (sentido que já Poncelet lhe atribui), a frase parece-nos distante do pensamento de D'Alembert (como alias, já nota G. Schubring [S, p. 113]). De facto, embora não tenha desenvolvido um programa completo da fundamentação da Análise insiste desde muito cedo em vários dos seus escritos na necessidade dessa fundamentação (vejam-se os artigos "Differentiel" ou "Limite" na *Encyclopedie*), propondo a noção de limite para base dessa fundamentação e dando uma definição de limite próxima da actual. Também a propósito do rigor escreve D'Alembert:

> *J'avoue que tous les raisonnements et tous les calcules fondés sur des séries qui ne sont pas convergentes, ou q'on peu supposer ne pas l'être, me paraîtront toujours très suspects, même que les resultats de ces raisonements s'accorderaient avec des vérités connues d'ailleurs.* (Opuscules Math. V. 5, 25.ª Mem.; citado [P, pág. 82].

Pelo que fica exposto parece-nos prudente afirmar com William C. Waterhouse (Bull. (NS) Amer. Math Soc. 7(3), 1982, p. 634): *The motto of the period, attributed (perhaps wrongly) to D'Alembert, was Allez en avant, et la foi vous viendra.*

Seja quem for o autor da frase ela descreve bem e sinteticamente a situação do Cálculo no séc. XVIII: O enorme sucesso das técnicas iniciadas por Newton e Leibniz na resolução de diversos problemas quer matemáticos quer da mecânica ou astronomia, a par com a falta de uma fundamentação rigorosa das mesmas técnicas, sentida de um modo geral pela comunidade matemática. Desde meados do séc. XVIII esta comunidade teve como principais actores L. Euler e J. D'Alembert.

Referências

[B] Carl B. Boyer and Uta C. Merzbach, *History of Mathematics*, 3rd ed, John Wiley & Sons, 2011.

[G] Judith Grabiner, *The Origins of Cauchy's Rigorous Calculus*, Dover, 2005 (ed. original MIT, 1981).

[It] Jean Itard, "F. Le Lionnais, Les Grands Courants de la pensée mathématique", *Revue d'histoire des sciences et de leurs applications*, tome 2, n.º 3, 1949, pp. 280–281.

[P] Michel Paty, *D'Alembert*, Les Belles Letres, 2004.

[S] Gert Schubring, *Conflicts Between Generalization, Rigor, and Intuition*, Springer, 2005.

[ENC] `http://enccre.academie-sciences.fr/encyclopedie/` (consultado a 03-11-2023).

[St-And] `https://mathshistory.standrews.ac.uk/Biographies/DAlembert/quotations/` (consultado a 20-06-2023).

Estudando e aprendendo: A 'Bibliotheca Mathematica e Filosofica' da Universidade de Coimbra em finais do século XVIII

Fernando B. Figueiredo
CITEUC, DM, Universidade de Coimbra

A Reforma Pombalina da Universidade de Coimbra em 1772 foi um marco histórico que trouxe mudanças significativas para o ensino universitário em Portugal. Com a criação das faculdades de matemática e filosofia (natural), o ensino moderno das ciências matemáticas e físico-naturais foi introduzido na Universidade. Para apoiar essa Reforma, novos livros de texto foram adotados e os alunos passaram a ter acesso a vários autores importantes. Neste breve artigo iremos apresentar um trabalho que temos em curso sobre um catálogo elaborado em 1798 pelo oficial da Biblioteca da Universidade Bernardo Alexandre Leal (?–?). Esse catálogo intitulado: *Bibliotheca Mathematica e Filosófica [...] da Universidade de Coimbra*, permite-nos ficar a conhecer uma parte significativa de referências bibliográficas acessíveis aos estudantes e professores.

Se olharmos para a Biblioteca universitária como mediadora da relação ensino-aprendizagem e de vínculo entre os alunos e professores, onde os primeiros podem encontrar livros indicados pelos segundos, então percebe-se melhor que o conhecimento deste catálogo (neste caso de matemática e ciências) pode fornecer pistas acerca da criação/produção de saberes e da formação curricular dos alunos. Paralelamente poderá também contribuir para estudos mais profundos que de certa forma compreendem o estudo de uma qualquer biblioteca do século XVIII e que se prendem, por exemplo, sobre as dinâmicas culturais, de leitura e circulação de conhecimento deste período.

Data de 12 de fevereiro de 1513, o primeiro documento que menciona a existência de um fundo bibliográfico na Universidade, mas só aquando da sua transferência definitiva para Coimbra (1537) é que o rei incumbe o reitor do estabelecimento de uma *Casa da Livraria*[1]. Porém, só no reinado de D. João V se constrói a Biblioteca Joanina (1716–26), mas que por falta de bibliotecário permaneceu fechada. Aquando da Reforma Pombalina foi considerado o seu aumento por adaptação da Capela, contudo o plano gizado por Guilherme Elsden nunca passaria do papel. Só em 1777 com a nomeação de António Ribeiro dos Santos para bibliotecário (C. R. de 9-10-1777) é que

[1]Sobre a história da Biblioteca da Universidade de Coimbra, veja-se Barreto Feyo 1857.

viu efectivamente cumprido o papel para o qual havia sido criada. Ribeiro dos Santos iniciou a sua reorganização no sentido de fomentar e facilitar os progressos dos estudos[2]. E o oficial da Biblioteca Bernardo Alexandre Leal elaborou um catálogo das obras de matemática e ciências naturais que esta possuía em 1798.

A elaboração de catálogos estava prevista na minuta de Ribeiro dos Santos:

> *"No tocante à formação dos Catálogos, e Assentos necessários para o bom uso, e serviço da Livraria, terá a seu cargo [o ajudante] fazer escrever os Catálogos Seguintes, e determinar a maneira por que devem ser escritos, a saber: 1.º Os Catálogos Alfabéticos dos Escritores de cada uma das Artes, e Ciências tanto das Obras impressas separadamente, e sobre si, como das que vêm de mistura em outras obras, ou se acham juntam em Corpos, Tesouros, e Colecções; com a declaração dos nomes dos seus Autores, dos Títulos das obras, da edição do número de seus volumes, e qualidade deles, e dos números correspondentes de cada Estante e Lugar, em que estão postos [...]. Os Catálogos Científicos e Sistemáticos de todos os Livros e peças segundo a distribuição metódica das divisões, e partes capitais de cada uma das Artes, e Ciências, e pela mesma Ordem, com que se acham colocadas em seus Lugares competentes."*

O catálogo de Bernardo Leal foi elaborado segundo estas directrizes.

Não é um catálogo alfabético de obras/títulos ou autores, mas sim um catálogo de assuntos ou matérias onde são elencadas as obras, ou capítulos das mesmas, que tratam de determinado assunto/tema e onde se fazem várias referências cruzadas. Por exemplo na entrada 'Álgebra' o catálogo referia tanto o livro 'Elementos de Analisi Mathematica traduzidos do frances', como a secção específica 'application de l'algebre a la geometrie'; a mesma entrada 'Álgebra' remete também para entrada 'Analyse Mathematica'. Muitas mais referências deste tipo, com os mais variados autores e

[2]Em 17 de Junho de 1778 foram nomeados oficialmente pelo Conselho dos Decanos os primeiros funcionários (oficiais) da Biblioteca e em julho e dezembro do ano seguinte, o porteiro e o contínuo. O primeiro regulamento oficial da biblioteca é de 7 de Novembro de 1800 (a minuta de Ribeiro dos Santos tinha carácter oficioso) e foi elaborado por José Monteiro da Rocha, professor da cadeira de Astronomia do *Curso Mathematico*, Director do Real Observatório Astronómico e Vice-reitor da Universidade de Coimbra, onde em 10 itens regulava o empréstimo e a consulta das obras e o horário de funcionamento da biblioteca.

obras, são feitas ao longo do catálogo. Bernardo Leal adverte o utilizador de que irá também elaborar um catálogo de autores para pesquisa das respectivas obras.

O catálogo apresenta 300 entradas temáticas; 81 das quais remetem para outras temáticas (p. ex. na entrada 'estrelas' tem indicação para se consultar também a entrada 'astronomia'). Distribuindo as 300 entradas por áreas verifica-se que: 127 são relacionadas com as ciências naturais e 173 relacionadas directamente com as ciências matemáticas. No que concerne a esta última área temos: 53 de matemática pura, 77 de matemática aplicada e 43 de astronomia.

O catálogo referencia 1865 itens (desde livros, a partes e/ou capítulos de livros que, eventualmente, se repetem em diferentes entradas), que se distribuem da seguinte maneira: 389 matemáticas puras; 283 nas matemáticas aplicadas; 274 em astronomia e 919 outras. De todas as entradas a que referencia mais itens é a 'physica' com 159 itens, seguindo-se a astronomia com 135 itens e em 3.º lugar a 'geometria' com 93 itens. A média de itens referenciados por entrada é cerca de 8 itens. O total dos itens dizem respeito a 519 títulos de obras correspondentes a 344 autores — da totalidade destes só 6 (1.74%) são portugueses (Manuel Azevedo Fortes, João Jacinto de Magalhães, Inácio Monteiro, António Pereira, Teodoro de Almeida e Custódio Gomes Villas-Boas) —, sendo 7 (2.03%) anónimos (e não nos foi possível classificar 5 (1.45%)).

Dos 519 títulos não foi possível determinar as datas de publicação de 6 (1.16% do total). Dos títulos cuja datação foi possível verifica-se que 57.89% foram publicados no seculo XVIII e 42.11% foram publicados em data anterior. Quanto à língua de publicação o latim é predominante com 49.04% dos títulos, seguindo-se o francês (36.61%), o italiano (7.51%), o inglês (3.08%) e só depois o português (2.12%). Dos 11 títulos em língua portuguesa 5 dizem respeito às traduções adotadas para o ensino das cadeiras da faculdade de matemática. O grosso das referências (70.49%) vão para obras publicadas anteriormente à década da Reforma Pombalina.

Olhando para a estatística que diz respeito às áreas temáticas verifica-se que as obras de matemática aplicada (foronomia e astronomia) representam quase metade (43.08%) das referências e as matemáticas puras menos de metade (19.23%) destas e no que diz respeito às obras gerais, onde se incluem os livros de texto de matemática, estas representam 11.54%, apenas 15 obras no conjunto das 130 referenciadas.

Por último, uma visão sobre os autores. Na matemática, não faltam grandes autores clássicos: Euclides, Arquimedes,... Não faltam autores modernos: Tacquet, Galileu, Newton e Leibniz, entre outros. E no que diz respeito aos autores do século XVIII, existem obras de alguns dos mais representativos, como Bernoulli, L'Hôpital, La Hire, Camus, Condorcet, D'Alembert, Euler, Clairaut, Bézout, Marie, Bossut, Lagrange, Lacroix, Sauri, Varignon, etc.

Referências

Florêncio Mago Barreto Feio, *Memoria historica e descriptiva á cêrca da Bibliotheca da Universidade de Coimbra [...].* Imprensa da Universidade, 1857.

Andréa Gagnoud et Thomas Bremer, ed. *Lire l'autre dans l'Europe des Lumières.* Montpellier : Presses universitaires de la Méditerranée, 2007.

Bernardo Leal, "*Bibliotheca Mathematica e Filosófica, na qual por ordem Alfabética se indicam as Matérias, e se apontam os Livros que delas tratam nestas Sciencias, que tem a Bibliotheca Publica da Universidade de Coimbra até ao anno de 1798 e se especificam as obras, tomos, e páginas em que as mesmas Matérias se acham escritas*", 2 vols. [de A–I, v. 1; de L–Z, v. 2], BGUG Secção de Reservados e Manuscritos Ms. 3415 e Ms. 3416.

Bernardo Leal, "*Catalog Auctor Sciencias Naturaes*", 2 vols. [v. 1 A–L, v. 2 L–Y], BGUC Ms. 3525, Ms. 342664.

Fernando B. Figueiredo, *José Monteiro da Rocha e a actividade científica da "Faculdade de Mathematica" e do "Real Observatório da Universidade de Coimbra": 1772–1820.* Tese de doutoramento, Universidade de Coimbra, Portugal, 2011.

Luís Carlos Martins de Mota, "A 'Minuta para o regimento da Biblioteca da Universidade de Coimbra' de António Ribeiro dos Santos: algumas notas para o seu enquadramento histórico-cultural". *Universidade(s): história, memória, perspectivas*, Actas do Congresso "História da Universidade", Vol. 2, 1997, Ed. Comissão Organizadora do C.H.U, p. 197–228.

A importância da trigonometria esférica na astronomia de posição: digressão por alguns manuais usados no ensino superior militar em Portugal na 2.ª metade do século XIX e 1.ª metade do século XX

Ana Luísa Correia
CEAFEL – U. Lisboa, Academia Militar – CINAMIL

1 Introdução

O objectivo da astronomia de posição é o estudo das posições e dos movimentos dos astros na esfera celeste e, desde, sempre, foi objecto de interesse do Homem. Esses movimentos estão ligados aos ciclos naturais (dia e noite, estações do ano, marés,...) e regiam as actividades económicas do sector primário (agricultura, pecuária, pesca,...). Por outro lado, com o desenvolvimento da navegação, o homem teve necessidade de se orientar (determinação de latitudes, longitudes e azimutes) e de efectuar medições de tempo cada vez mais precisas, o que estimulou o desenvolvimento tanto da astronomia como de outras ciências associadas. Em particular, a matemática respondeu a essas necessidades e contribuiu com ferramentas cada vez mais complexas (cálculo diferencial e integral, cálculo tensorial, teoria de matrizes, análise complexa, equações diferenciais, teoria dos erros,...). O ensino da Astronomia foi introduzido na Escola do Exército (EE) em 1891, fazendo parte dos curricula das disciplinas de Topografia e Geodesia. Nesse sentido, conhecimentos sólidos em trigonometria rectilínea e esférica eram fundamentais na formação dos oficiais do Exército. Neste artigo, abordaremos alguns manuais de trigonometria esférica usados, na segunda metade do século XIX e na primeira metade do século XX, na Escola Politécnica (EP) e depois na Faculdade de Ciências de Universidade de Lisboa (FCL). Daremos especial ênfase a manuais com aplicações à Astronomia e Geodesia.

2 Escolas de Ensino Superior Para Oficiais do Exército

As escolas de ensino superior para a formação de oficiais do Exército passaram por várias reestruturações, relacionadas com os diferentes períodos políticos e sociais que o país atravessou, e tiveram diferentes nomes: Escola do Exército (EE) (1837 a 1910 e 1938 a 1959), Escola de Guerra (EG) (1911 a 1919), Escola Militar (EM) (1919 a 1938) e Academia Militar (AM) (1959 até ao presente) (cf. [1]). Nessas escolas foram/são ministrados cursos de: engenharia (com diferentes especialidades), artilharia, infantaria, cavalaria e administração militar. Até 1948, para o ingresso, em qualquer um desses cursos, os candidatos a oficiais do Exército faziam cursos preparatórios com 1, 2 ou 3 anos, dependentes da arma, maioritariamente ministrados na Escola Politécnica (EP) em Lisboa, que funcionou de 11Jan1837 a 19Abril1911, e depois na Faculdade de Ciências de Lisboa (FCL).

3 Ensino da trigonometria esférica

O ensino da trigonometria esférica era essencial para a formação dos oficiais do Exército, muito especialmente para as cadeiras com conteúdos de Geodesia e Astronomia. A trigonometria esférica fazia parte da 1.ª cadeira da EP, cujo nome *Álgebra elementar, Geometria sintética elementar, plana, sólida e descritiva; introdução à Geometria algébrica, e Trigonometria rectilínea e esférica*, vigorou até 1911, altura em que foi criada a FCL. As cadeiras foram reestruturadas e a 1.ª cadeira passou a chamar-se *Álgebra Superior, Geometria Analítica e Trigonometria Esférica* (cf. [3]).

Em qualquer dos manuais usados nos cursos preparatórios, que abordam este tema, encontramos as definições principais de um triângulo esférico e a sua relação com o triedro respectivo. Essa correspondência é usada para deduzir quatro grupos de fórmulas que conhecidos três elementos de um triângulo esférico permitem determinar um quarto de entre outros três desconhecidos. Este procedimento é conhecido por *resolução de um triângulo esférico*. Se A, B, C designam os ângulos e a, b, c os lados de um triângulo esférico, as principais fórmulas podem reduzir-se aos 4 tipos seguintes:

$$\begin{aligned}
&\cos a = \cos b \cdot \cos c + \operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} c \cdot \cos A\\
&\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} a} = \frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} b} = \frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} c}\\
&\operatorname{cotg} a \cdot \operatorname{sen} b = \operatorname{cotg} A \cdot \operatorname{sen} C + \cos b \cdot \cos C\\
&\cos A = -\cos B \cdot \cos C + \operatorname{sen} B \cdot \operatorname{sen} C \cdot \cos a
\end{aligned}$$

Muitas vezes era ainda necessário transformar e adaptar as fórmulas de modo a aplicar logaritmos. A fórmula abaixo é uma “fórmula logarítmica”

$$\operatorname{tg} \tfrac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-b)\cdot\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen} p \cdot \operatorname{sen}(p-a)}} \quad \text{com } p = \frac{a+b+c}{2}.$$

As fórmulas indicadas, assim como as regras de Neper, as fórmulas de Delambre, são importantes na determinação das relações entre os diferentes sistemas de coordenadas e na resolução de triângulos de posição em Astronomia.

No que se segue listamos os diferentes manuais consultados. Todos eles apresentam a discussão dos diferentes casos da resolução de triângulos esféricos e algumas aplicações numéricas. Alguns contêm vários problemas aplicados à Astronomia. Em particular, em quase todos encontramos o seguinte:

> Problema clássico: *Conhecendo as latitudes e longitudes de dois pontos do globo terrestre (suposto esférico) achar a distância entre esses dois pontos.*

3.1 Manuais para uso dos alunos na EP

Mariano Ghira, 1871. *Elementos de Trigonometria Espherica*, redigidos para o uso dos seus alunos, Typographia do Futuro, Lisboa, p. 46.

João Ignacio do Patrocinio da Costa, 1887. *Elementos de Trigonometria Espherica e Introducção ao estudo da Geometria Analytica*, Para o uso dos estudantes da 1.ª cadeira da Escola Polytechnica, Companhia Nacional Editora, Lisboa, p. 93.

Autor não identificado, 1910. *Escola Polytechnica 1.ª Cadeira: Lições de Trigonometria Espherica*, 4.ª edição, 1909–1910, p. 58.

No manual de M. Ghira e no de J. da Costa encontramos apenas o problema clássico. O terceiro manual, provavelmente da autoria de Pedro José da Cunha, contém 4 aplicações à Astronomia.

3.2 Manuais para uso dos alunos na FCL

Alberto Ribeiro da Costa, 1915. *Matematicas Geraes*, Segundo as lições dadas pelo Exmo. Snr. Dr. Mira Fernandes em 1914–1915, Abílio Pinto Editor, Lisboa, p. 475.

Eduardo Andrea, 1929. *Apontamentos de Álgebra Superior, Geometria Analítica e Trigonometria Esférica*, Curso da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa em 1928–1929, p. 427.

A. M. Da Costa Leão, 1940. *Geometria Analítica e Trigonometria Esférica*, Folhas compiladas segundo as lições do Exmo Professor Doutor Ramos e Costa, Lisboa, p. 204.

Os manuais compilados por A. Costa e por A. Leão não apresentam aplicações à Astronomia. O manual da autoria de E. Andrea apresenta um resumo sobre as coordenadas astronómicas e contém 9 problemas sobre este tema.

3.3 Manuais para uso dos alunos na EE

Autor não identificado, 1953. *Apontamentos da Cadeira de Matematicas Gerais*, Curso Preparatório em 1952–53, Escola do Exército, p. 95.

Frederico Alcides de Oliveira, 1958. *Matematicas Gerais*, Apontamentos coligidos em 1957–58, Escola do Exército, vol 1 e vol 2, p. 480.

O primeiro manual não contém exercícios de Astronomia. Os manuais coligidos por F. Oliveira apresentam vários conteúdos de Astronomia. Em particular, dedicam várias páginas às coordenadas geográficas (latitude, longitude) e às coordenadas celestes (equatoriais, zenitais, eclípticas, horárias). Apresentam várias aplicações práticas à Astronomia.

4 Conclusão

David Corazzi, a partir de 1881, editou a "Bibliotheca do Povo e das Escolas" que durou até 1913, tendo sido editados 237 livros em variadíssimas áreas da ciência, artes ou indústrias. Foram editados 8 livros com conteúdos matemáticos, sendo um deles, da autoria de Rodolpho Guimarães, dedicado à Geometria e Trigonometria esférica (cf. [2]), portanto um tema que merecia interesse. O livro termina com o problema clássico que indicámos.

Os tópicos de Astronomia já não constam dos programas dos actuais cursos da Academia Militar e, assim, os conteúdos de trigonometria esférica já não são abordados nas cadeiras de Matemáticas Gerais.

Referências

[1] AA. VV. (1959). *Esboço Histórico do Ensino Superior Militar em Portugal*, Separata ao Anuário da Academia Militar, Lisboa, pp. 31–77.

[2] Guimarães, R. (1910). *Geometria e Trigonometria Espherica*, Bibliotheca do Povo e das Escolas, 29.ª serie, N.º 231, A Editora, Lisboa, p. 64.

[3] Sousa de Macedo, J. C. C. (1937). *A Escola Politécnica de Lisboa, a 1.ª Cadeira: Álgebra Superior, Geometria Analítica e trigonometria Esférica*, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, p. 41.

Las memorias de Lagrange sobre Teoría de Números: una exploración de algunos elementos influyentes en el desarrollo de esta disciplina

Cecilia Neve Jiménez
Universidad de Sevilla

La vida de J.-L. Lagrange suele dividirse en tres grandes periodos, que corresponden a los lugares donde residió: el periodo de Turín (1736–1766), donde creció y fue profesor de la Escuela de Artillería, el periodo de Berlín (1766–1787), donde fue director de la Clase de Matemáticas de la Academia de Ciencias de Berlín, y el periodo de París (1787–1813), donde se integró a las nuevas instituciones que fueron producto de la revolución francesa. Para el tema de esta presentación nos interesa el periodo de Berlín, y en particular su primera década allí. Durante este tiempo, Lagrange dedicó parte importante de sus investigaciones a trabajar sobre temas de teoría de números, mismos que en aquella época eran poco populares, y de los que prácticamente sólo Euler se ocupaba. Fruto de estas investigaciones fueron una serie de innovadores trabajos que dieron un renovado empuje a esta disciplina y sentaron las bases para su florecimiento en el siglo XIX. En esta exposición hacemos un recuento de una selección de ellos. Tomamos como guía cronológica las fechas de las lecturas de Lagrange ante la Academia [1] (ver figura 1), lo que brinda más orientación que las fechas de su publicación.

Nos centramos en ocho obras de Lagrange, publicadas entre 1768 y 1777. Estudiar estos escritos como conjunto nos permite trazar el surgimiento, transformación e interacción de algunos elementos y conceptos prevalentes en ellas, así como señalar los caminos que éstos abrieron en el posterior desarrollo de la teoría de números. Nos presenta también la oportunidad de apreciar algunas características distintivas de Lagrange que lo alinean con tradiciones más propias del siglo XIX: la búsqueda de rigor y generalidad, alejándose de los métodos de prueba y error, la preocupación por un análisis exhaustivo de los temas, un abordaje "relacional" de los problemas y un interés por el encuadre histórico de los mismos.

Analizamos cómo en el primer trabajo, *"Solution d'un probleme d'arithmetique"* [8], para dar una solución general a la *ecuación de Pell*, Lagrange utiliza extensamente el (ahora llamado) "lema de composición", que es un antecedente importante de lo que será después la "composición de formas" desarrollada por Gauss en sus *Disquisitiones Arithmeticae*, y por Dirichlet y Dedekind posteriormente, tomando nueva forma con el

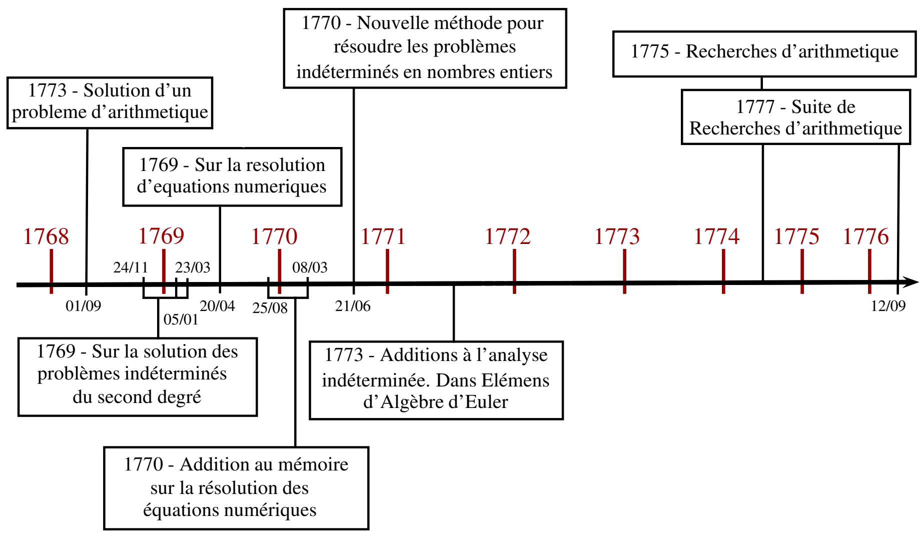


Figura 1: Cronología de las obras analizadas de Lagrange, ordenadas según su lectura ante la Academia de Berlín [1].

advenimiento de la teoría de números algebraica. Lagrange utiliza fracciones continuas y un argumento de repetición infinita, aún sin mencionar periodicidad alguna. Ésta llega hasta la segunda obra, *"Sur la solution des problèmes indéterminés du second degré"* [4], que da un paso más en el camino hacia un abordaje general de las formas cuadráticas. Además de la periodicidad, aquí aparecen las transformaciones lineales enteras que hoy llamaríamos *"unimodulares"*, que son esenciales para lo que después será la equivalencia de formas, y constituyen un antecedente del grupo modular $PSL(2, \mathbb{Z})$. Señalamos la interacción en esta memoria de dichos tres elementos (lema de composición, fracciones continuas y transformaciones "unimodulares"). Pasamos a las obras *"Sur la résolution des équations numériques"* y sus *"Additions"* [3, 5], en los que se vuelve a estudiar y después a profundizar en las fracciones continuas y las transformaciones "unimodulares", esta vez en el contexto de un método para el estudio y aproximación de raíces de polinomios. Destacamos cómo Lagrange retoma el fenómeno de periodicidad que había abordado en cierto tipo de formas cuadráticas, y en el contexto polinomial demuestra que las fracciones continuas de irracionales cuadráticos son periódicas.

El quinto trabajo es la memoria *"Nouvelle méthode pour résoudre les* *problèmes indéterminés en nombres entiers"* [6]. Explicamos cómo la evolución e incorporación de elementos desarrollados en los primeros cuatro trabajos desembocan naturalmente en éste, que retoma lo abordado en el segundo trabajo [4], pero desde una aproximación más general y directa. Ahora plantea el problema en términos de búsqueda de soluciones enteras de ecuaciones polinomiales homogéneas de cualquier grado en dos variables. Desarrollando ideas que se vienen gestando desde los primeros trabajos, transforma el problema en aproximar las raíces de una ecuación polinomial de una variable, explotando la condición de "mejores aproximantes" de las sucesiones dadas por las fracciones continuas. Hay una rica interacción de los elementos que han entrado en juego hasta ahora.

El sexto trabajo, las *"Additions de l'analyse indeterminée"* [7], es un apéndice que escribió Lagrange al libro de *Álgebra* de Euler, en el que hace una presentación sistemática de las fracciones continuas y toca temas que han aparecido en las cinco obras que analizamos anteriormente. Señalamos la oportunidad que ofrece este texto para seguir la evolución de sus ideas. Con ello pasamos finalmente a los trabajos séptimo y octavo, que constituyen las *"Recherches D'arithmétique"* [9, 10]. Mencionamos por qué pueden considerarse el inicio formal de la teoría de formas cuadráticas. Notamos que en ellas sale a relucir la diferencia entre lo que hoy llamamos formas equivalentes y formas que tienen el mismo discriminante, tema medular dentro de la teoría de números algebraica. La influencia de los trabajos anteriores es decisiva para la gestación de estas culminantes obras.

En síntesis, destacamos algunos elementos transversales en esta serie de obras y cómo a partir de su interacción y abordaje sucesivo fueron dando lugar a nuevas investigaciones: las fracciones continuas y las propiedades de sus convergentes y residuos, las mejores aproximaciones y las transformaciones "unimodulares"; el fenómeno de periodicidad en formas cuadráticas y en fracciones continuas de irracionales cuadráticos; las soluciones enteras de ecuaciones polinomiales homogéneas de dos variables y la aproximación de raíces de polinomios de una variable; el "lema de composición" y la "preservación de una forma bajo el producto"; y la relación entre transformaciones "unimodulares" y la preservación del discriminante. Las obras presentadas de Lagrange ofrecen una oportunidad única para estudiar la influencia de unos de sus elementos en otros, así como el papel seminal de este autor en temas que, aunque poco llamativos en su época, resultaron fructíferos en importantes líneas de desarrollo de la teoría de números.

Referencias

[1] Archiv der Berlin-Brandenburgischen Akademie der Wissenschaften. Sitzungsprotokolle der Akademie. `https://akademieregistres.bbaw.de/modules/scripts/protokolle.xql`.

[2] M. T. Borgato, Lagrange's Mathematical Life in Berlin and Paris. A Reappraisal. In M. T. Borgato and C. Phili, eds., *In Foreign Lands: The Migration of Scientists for Political or Economic Reasons*, Trends in the History of Science, pp. 19–53, Springer, 2022.

[3] J. L. Lagrange, Sur la résolution des équations numériques. *Hist. Ac. Berlin, année 1767*, Vol. 23, (1769), pp. 311–352.

[4] J. L. Lagrange, Sur la solution des problèmes indéterminés du second degré. *Hist. Ac. Berlin, année 1767*, Vol. 23, (1769), pp. 165–310.

[5] J. L. Lagrange, Addition au mémoire sur la résolution des équations numériques. *Hist. Ac. Berlin, année 1768*, Vol. 24, (1770), pp. 111–180.

[6] J. L. Lagrange, Nouvelle méthode pour résoudre les problèmes indéterminés en nombres entiers. *Hist. Ac. Berlin, année 1768*, Vol. 24, (1770), pp. 181–250.

[7] J. L. Lagrange, Additions. De l'analyse indeterminée. En *Éléments D'Algebre D'Euler*, Volume II, pp. 369–658. J. M. Bruyset et Paris, Lyon, 1773.

[8] J. L. Lagrange, Solution d'un probleme d'arithmetique. *Miscel. Taur., pour les années 1766–1769*, Vol. IV, No. 2 (1773), pp. 41–97.

[9] J. L. Lagrange, Recherches D'arithmétique. *Nouv. Mem. Berlin, année 1773*, (1775), pp. 265–312.

[10] J. L. Lagrange, Suite des Recherches D'arithmétique. *Nouv. Mem. Berlin, année 1775*, (1777), pp. 323–356.

Los números reales en transición: una panorámica entre el siglo XVIII y el XIX

José Ferreirós
Universidad de Sevilla
con *Eduardo Dorrego* (A Coruña) y *Elías Fuentes Guillén* (Praga)

> "Just like an infinite number is no number, so an irrational number is not a true number, because it is so to speak concealed under a fog of infinity [*infinitatis nebula*]." Stifel, *Arithmetica integra*, 1544

El objetivo de esta ponencia fue discutir el estatus de los números reales en las décadas anteriores a la formulación de las famosas teorías de Dedekind, Weierstrass, Cantor y Méray.[1] Argumentamos que en el siglo XVIII no había una idea clara del "sistema completo" $\mathbf{R}$, ni siquiera hubo hacia 1800 un proyecto de fundamentación comparable a los de la década de 1870. Se consideraban sobre todo, o casi exclusivamente, los números "*radicales*" –también llamados "*sordos*"– como $\sqrt[3]{2}$, etc. Había entonces poco interés por los "irracionales especiales", e y π, aunque sin duda tuvieron lugar avances importantes, de la mano de Euler, Lambert, Legendre, etc. Pero la evidencia sugiere que estos avances tardaron mucho en incorporarse como doctrina común y básica para los matemáticos.

Es conocido que, ya en el siglo XVII, Ludolph van Ceulen (1596) y otros autores utilizaron expansiones decimales, como:

3.14159265358979323846264338327950289…

Pero si nos preguntamos por los motivos de su interés en ellas, se trataba por ejemplo de excluir falsas cuadraturas: dada una fracción que supuestamente determinara el valor de π, expansiones como la anterior se pueden usar fácilmente para excluirla.[2] En algunas ocasiones, se trataba de investigar propiedades de números (hay ejemplos en la correspondencia Goldbach–Bernoulli, o la de Goldbach–Euler).

La situación cambió significativamente en el siglo XVIII, gracias a que se introducen varios tipos de expresiones analíticas, como la serie de Leibniz:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ \ldots$$

[1] En el ámbito hispano-hablante, se podría añadir el nombre de Indalecio Liévano Reyes (1834–1913), colombiano.

[2] En la tesis doctoral de E. Dorrego se ofrece un análisis detallado y una justificación de esa tesis.

el producto infinito de Wallis, o sobre todo la fracción continua determinada por W. Brouncker (1684–1720):

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1}{2 + \frac{9}{2+\frac{25}{2+\frac{49}{2+\dots}}}}$$

El recurso a expresiones analíticas como estas permitió ir mucho más allá que usando expansiones decimales, y así se logró elucidar algunas cantidades "transcendentes". Euler (en trabajos de 1737 y 1744) pudo establecer que e es irracional, y Lambert (en un famoso artículo de 1767/1768) demostró dos resultados importantes:

$$v \in \mathbf{Q} \Rightarrow e^v \notin \mathbf{Q}$$

$$v \in \mathbf{Q} \Rightarrow \tan v \notin \mathbf{Q}.$$ [3]

Dado que conocemos $\tan\pi = 0$, se deduce que π debe ser irracional. Poco después (1794), Legendre ofreció una demostración diferente y algo más simple del resultado sobre π, pudiendo ampliarlo además para demostrar que $\pi^2 \notin \mathbf{Q}$.

Estamos viendo cómo una serie de matemáticos investigadores, líderes en su momento, fueron incorporando estas nuevas ideas, pero en adelante queremos preguntarnos por la repercusión de estas nuevas ideas en la comunidad matemática en sentido amplio. O dicho a la inversa, ¿qué concepción era la dominante con respecto a los números reales, entre 1800 y 1860?

En su trabajo, Euler utilizó la fracción continua para e, igual que Lambert para π. Pero además de esa cuestión de las herramientas analíticas, es importante considerar también cómo evolucionó el concepto de "transcendente". Euler parece haber considerado que una cantidad es transcendente si la función que describe su relación con la unidad es transcendente; es decir, la idea de *función* transcendente es primaria, la de cantidad es derivativa.[4] Tenemos por ejemplo que $\frac{\pi}{2} = \arctan 1$; y que $e = \log 1$. Veremos que hay una evolución y que la noción moderna de número transcendente aparece con Lambert.

Johan H. Lambert (1728–1777) fue un importante miembro de la Academia de Berlín, científico, matemático, filósofo y lógico. Aquí nos interesa

[3] Ver el libro de Eduardo Dorrego López (con E. Fuentes Guillén): *Dilucidando π. Irracionalidad, trascendencia y cuadratura del circulo en J. H. Lambert (1728–1777)*. London, College Publications, 2021. ISBN 978-1-84890-359-3.

[4] Petrie, B. 2012. Leonhard Euler's use and understanding of mathematical transcendence. *Historia Mathematica* 39:3, 280–291.

especialmente su 'Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendantes circulaires et logarithmiques', de 1768.[5]

En el artículo de Lambert, muy riguroso, no solo se demuestra la irracionalidad de π, sino que se conjetura su transcendencia. Aparece aquí el sentido moderno de la distinción entre números algebraicos y transcendentes. Anteriormente, se distinguía entre cantidad algebraica y no-algebraica (hecha "al azar", o "transcendente" en el sentido de Euler); ahora, se acuña la idea de no-algebraico como un número que no es raíz de una ecuación algebraica: el sentido moderno de *transcendente*. Pero estas ideas tardan mucho en incorporarse al *mainstream* y a la docencia (en manuales, quizá es solamente hacia 1870 que se estudian de manera habitual).

Consideramos ahora algún manual del siglo XIX, comenzando por Martin Ohm (1792–1872), profesor en Berlín, hermano del famoso físico, y que tuvo gran influencia entre los profesores de secundaria alemanes. Su libro clave es *Versuch eines vollkommen konsequenten Systems der Mathematik* [*Sistema completamente consistente de Matemáticas*], de 1822.

Ohm fue el primero en proponer una idea muy influyente: la de abordar una expansión gradual y rigurosa del sistema numérico a los enteros, los racionales, etc. introducidos como "símbolos". Para él, el concepto de número natural es *intuitivo* y *simple*, viene dado con sus propiedades básicas; son los números "originales" y actuales. Obtenemos así leyes para $\mathbf{N}$, y el problema es expandir su dominio de validez con nuevos símbolos y nuevas definiciones de las operaciones, mediante un "principio de permanencia" de las leyes. Los enteros se manejan como pares de naturales y los números racionales como pares de enteros (aunque en ambos casos de modo formalista, como 'símbolos'). La definición de igualdad es expandida, en cada caso, y también las operaciones básicas, bajo el principio de permanencia.

Todo esto es muy interesante, y apunta hacia los trabajos futuros de Weierstrass y Dedekind. Pero consideremos ahora la concepción de los números reales. Ohm no introduce novedades: se limita a usar nuevos "símbolos" $\sqrt[m]{a}$ con un sentido operacional, expandiendo el concepto de raíz. Los irracionales se consideran como meras *aproximaciones* racionales, no como verdaderos objetos de la aritmética. La operación $\sqrt{\ }$ lleva a nuevos números irracionales (sordos), pero "in conception he did not distinguish between rational and irrational numbers" (Bekemeier 1987, 120):

[5]Publicada en *Mémoires de l'Académie royale des sciences de Berlin*, 1761/1768, pp. 265–322. También se trata el tema de π en su libro *Beyträge zum Gebrauche der Mathematik*, vol. 2, pero a un nivel de popularización. Ver el libro citado de E. Dorrego y E. Fuentes (2021), que contiene los dos textos.

> "Una raíz irracional es tratada (*behandelt*) como cualquier otro número entero o fraccional, y por esa razón en lo sucesivo no se hará ninguna diferencia." (Ohm 1822, 123)

En resumidas cuentas, su explicación de los irracionales es tan clara, o tan oscura, como solía ser a comienzos del siglo XIX (*cf.* Bekemeier 1987, 121). Hay una diferencia práctica: las fracciones pueden ser "realmente dadas" pero en los irracionales solo manejamos "valores aproximados" (*Näherungswerthe*) (p. 123).

Puede verse aquí que el *proyecto de reducir los números reales* a los racionales ni siquiera ha sido imaginado aún. Cabría imaginar que las cosas son mejores en autores más sofisticados y prestigiosos, como pueden ser Bolzano y Grassmann. Pero veamos qué encontramos.

Bernard Bolzano (1781–1848) experimentó un largo proceso de maduración de ideas, desde trabajos muy importantes de los años 1810, en especial el del teorema del valor intermedio, hasta llegar al marco conceptual de los "números medibles" (en su *Reine Zahlenlehre*, años 1830). Aquí vamos a resaltar las *incertidumbres* en relación con las ideas de cantidad y número, que servirán para poner de manifiesto las dificultades con las que tropezó en su camino hacia una teoría de los reales.[6]

Además del interés de su "demostración puramente analítica" del teorema del valor intermedio, es bien conocido que Bolzano llegó a ser partidario radical del infinito actual. Pero esto sucedía al final de su vida, y desde luego no en los años 1810. En su libro de 1810, *Beyträge zur einer begründeteren Darstellung der Mathematik* (*Contribuciones a la fundamentación de las Matemáticas*), permanece sin decidir si el infinito no es "nada más que una expresión simbólica", como es el caso de "$\sqrt{-1}$ y expresiones semejantes". En manuscritos de 1814 encontramos que un irracional es considerado como una cantidad que está entre dos cantidades (fracciones) dadas. Los conceptos del infinito, el 0 y $\sqrt{-1}$ "denotan una especie de nada" aun cuando "son esencialmente diferentes". En esta década, maneja también la noción de cantidades ω que devienen tan pequeñas como se desee. Al tratarse de cantidades variables, vemos que su enfoque está aún lejos de la idea moderna de los *números* reales.

Pasando a un artículo importante de 1816, sobre el teorema del bino-

[6]E. Fuentes Guillén (con Carmen Martinez Adame): "The notion of variable quantities ω in Bolzano's early works", *Historia Mathematica* 50, 25–49. También: "Bolzano's Theory of *messbare Zahlen*: Insights and Uncertainties Regarding the Number Continuum". In: Bharath Sriraman (ed.), *Handbook of the History and Philosophy of Mathematical Practice*. Springer, Cham, 2024.

mio, no encontramos grandes cambios: sigue pensando en términos de aproximaciones mediante fracciones, por ej. al considerar la serie binomial para $(1+x)^n$, con n irracional. Pero reconoce que el concepto de "la irracionalidad de una cantidad" tiene aún que ser desarrollado, igual que el de una "expresión imaginaria".

Las incertidumbres de Bolzano con respecto a ideas básicas se siguen manifestando en la década siguiente. En manuscritos de 1824 encontramos que el 0, el ∞ y las llamadas "cantidades imaginarias" no deben considerarse cantidades sino "meras ideas de cantidades". Por otro lado, en 1828–29 vemos ciertos avances: dice que las propiedades conmutativa y asociativa valen no solo para los enteros y las fracciones, sino también para "cantidades irracionales" del tipo "$i = \frac{m}{n} + \omega$", donde m, n son enteros y "ω puede hacerse tan pequeño como se quiera". Pero habría todavía que librarse de estas cantidades ω que varían y "devienen" 0.

Si pasamos a considerar la *Reine Zahlenlehre*, aquí trata sobre ideas o "conceptos" de número, representados por "signos" o "expresiones numéricas". Por "idea de número" se entiende "cualquier idea de la forma «un número que tiene los atributos b, b', b''», sin considerar si dichos atributos pueden de hecho encontrarse combinados en un número, o no; esto es, sin considerar si acaso dicha idea tiene un objeto actual [*wirklich*] o no". Aunque puede sorprender esta idea de números que corresponden a entes reales, y otros meramente posibles, la idea está emparentada con la admisión de "objetos ideales" que encontraremos en Dedekind y Hilbert, años más tarde.

Veamos por último el caso de Hermann G. Grassmann (1809–1877), quien además de la célebre *Ausdehnungslehre*, escribió un manual (*Lehrbuch der Arithmetik*, 1861) elogiado entre otros por Cantor y por Peano. Grassmann promete "el primer tratamiento estrictamente riguroso y científico" de la aritmética, e incluso "el único método posible para un tratamiento riguroso, consecuente y natural de esa ciencia" (1861, Prefacio, v). La matemática es, según su definición, la *ciencia de la combinación* (*Verknüpfung*) *de magnitudes*. Magnitud es cualquier entidad que pueda decirse igual o desigual que otra (*igualdad* en el sentido de Leibniz). Pero, de nuevo, veremos que la tarea de una introducción purista o una definición (o 'construcción') de los números irracionales, ni siquiera se plantea. Difícilmente podría ser resuelta...

Resulta especialmente novedoso el tratamiento de los enteros: emplea definiciones recursivas de las operaciones, usa de manera sistemática la demostración por inducción matemática. Influirá sobre Peano. Ahora bien, cuando se trata de los números reales, considera la radicación y define lo que se entiende por valor aproximado [*Näherungswerth*] (1861, 262) y por el resto. De acuerdo con este manual, parecería que los números irracionales son los que se obtienen mediante radicales o mediante logaritmos.

> "250. Definición. Los números enteros y las fracciones se llaman *números racionales*. Las magnitudes que no son números racionales, pero en las que son válidos todos los teoremas de comparación de igual manera que para los números racionales, se llaman *números irracionales*." (Grassmann 1861, 99)

En el apartado 254 muestra que, siendo a entero, $\sqrt[n]{a}$ es o bien entero o irracional, dando el ejemplo de la raíz cuadrada de 2. Pero es interesante comprobar que, en todo el libro, los irracionales especiales como e y π no son mencionados siquiera. En un apéndice discute lo más básico de las fracciones continuas, pero la idea se aplica solamente a 'sordos'.

Si Lawvere tiene razón, Grassmann no es un idealista, sino realista:[7] es posible que no se haga cuestión de un tratamiento puramente matemático del dominio de los números reales. En su lugar, el problema sería elaborar conceptos matemáticos para tratar con diversas situaciones del mundo real. Sugiero que quizá Grassmann no intenta edificar un 'reino' puramente intelectual de los números, autónomo y completamente independiente de la realidad física o mental. Pero tampoco habla mucho de aplicaciones físicas...

Conclusiones:

- Hay avances muy importantes en el siglo XVIII con Euler, Lagrange, Legendre, y sobre todo Lambert, empleando fracciones continuas.
- Se obtienen así resultados avanzados sobre irracionales especiales, e y π. Aparece un nuevo concepto de número transcendente; se conjetura la transcendencia de π.
- Yendo a manuales de los más avanzados para la época, ni Ohm ni Grassmann *plantearon* el problema de definir los números irracionales mediante reducción a los racionales.
- Permanecen en el terreno tradicional de presuponer dadas ciertas 'cantidades reales' y trabajar con aproximaciones. Y solamente *consideran 'sordos' o radicales*. La concepción del sistema de los reales es muy incompleta.

[7]Lawvere, F. W. 1996. Grassmann's Dialectics and Category Theory. *Boston Studies in the Philosophy of Science* 187, 255–264.

- Comienza, sin embargo, el proyecto de una *ciencia autónoma* del número, desarrollado solo para la expansión de **N** a **Q**. Este esbozo tuvo una probable influencia en Weierstrass y en Dedekind, quienes fueron mucho más lejos (irracionales).
- Ni siquiera Bolzano tenía un proyecto moderno, comparable a Weierstrass o Dedekind; hay que destacar las incertidumbres de sus diversas tentativas.

Un elemento que quizá fue común, es la concepción *intelectualista* del sistema numérico, como creación puramente intelectual. Se trata de un *Idealismo lógico*, para utilizar la frase del filósofo Ernst Cassirer (objetos ideales, *Gedankendinge,* y pura lógica).

O cálculo da Latitude por duas Alturas do Sol

Teresa Sousa
CINAV, Escola Naval, Instituto Universitário Militar
Center for Mathematics and Applications (NovaMath), FCT NOVA

1 Introdução

No final do século XV para determinar a latitude os navegadores utilizavam um método baseado na observação do Sol na passagem meridiana, ou seja, na sua altura máxima. Esta altura depende do dia do ano, por isso, era também necessário saber a declinação do Sol em cada dia. O processo para obtenção da latitude através da altura meridiana do Sol e da sua declinação era um processo matematicamente simples. Este método implicava a observação do Sol naquele preciso instante, que devido às condições meteorológicas poderia ser difícil ou mesmo impossível. Não sendo essa observação possível, seria necessário esperar pelo dia seguinte para se poder obter a latitude. Na prática, podiam seguir-se vários dias sem que a passagem meridiana do Sol fosse visível, e consequentemente, seguir-se-iam vários dias sem que os navegadores conseguissem obter a sua latitude. Para resolver este problema vários autores desenvolveram métodos para determinar a latitude utilizando duas altitudes do Sol em duas horas diferentes do dia. Com esses novos métodos, os pilotos determinariam a latitude fora da passagem no meridiano. Neste trabalho estudamos os métodos propostos por Cornelius Dowues (1740) e Edward Riddle (1822).

2 Proposta de Douwes

O método proposto por Douwes, em 1740, para o cálculo da latitude por duas alturas do Sol é considerado o primeiro método algorítmico e terá sido o precursor de todos os outros métodos que se seguiram. Douwes apresenta um método iterativo, pelo que, para se efetuarem os cálculos, é necessário conhecer um valor estimado da latitude e, no final, o valor obtido deve ser comparado com o valor estimado sendo avaliada a diferença [3]. Se a diferença for grande, repete-se o processo, usando para a latitude estimada o valor obtido na iteração anterior. Este método foi divulgado em inglês através da tradução de Richard Harrison [4] e pode ser encontrado em textos de J. W. Norie [7] e Nathaniel Bowditch [1]. A aplicação do método proposto por Douwes requere o conhecimento de duas alturas do Sol fora da passagem meridiana, as horas das observações, a declinação do Sol no instante em que se observou a maior altura, e a latitude estimada. As alturas do Sol eram obtidas através de instrumentos próprios para o efeito, como por exemplo, o sextante, e o valor da declinação do Sol seria retirado do Almanaque Náutico. O processo de cálculo consiste em 7 passos distintos, sendo que em cada um deles é necessário a obtenção de valores numéricos através de consulta de tabelas logarítmicas previamente elaboradas pelo autor para o efeito, ou realizar pequenas operações de adição e subtração. No entanto, para a obtenção de resultados fiáveis era necessário ter em conta que as observações das alturas do Sol deveriam obedecer a determinadas restrições.

> As the above method is only an approximation to the truth, it must be used under the following restrictions. ([7], p. 192)

a) As observações devem ser realizadas entre as 9 horas da manhã e as 3h da tarde;

b) Se ambas as observações forem de manhã ou ambas de tarde, o tempo decorrido entre observações deve ser maior que o tempo decorrido entre o meio-dia e a hora da maior altura;

c) Se as observações forem uma de manhã e outra de tarde, o tempo decorrido entre observações não deverá exceder a 4h30.

d) Em todos os casos, quanto mais perto estiver a maior altura do meio-dia tanto melhor será.

Além de se ter em conta as restrições apresentadas, a aplicação do método também exige que o valor da menor altura do Sol seja corrigido para o instante em que foi observada a maior altura.

3 Proposta de Riddle

O método proposto por Douwes para o cálculo da latitude dependia do conhecimento da latitude estimada. De modo a evitar esse inconveniente, em 1821 James Ivory [5] propõe uma solução para o cálculo da latitude que é independente do conhecimento da latitude estimada. O processo proposto por Ivory foi melhorado e simplificado por Edward Riddle em 1822 [8]. A proposta de Riddle serviu de base a inúmeros autores do século XIX que procuravam métodos expeditos e fiáveis para o cálculo da latitude por duas alturas do Sol. Estes métodos estão descritos em textos de J. W. Norie [7], Nathaniel Bowditch [1] e João Peregrino Leitão [6], entre outros. Para a aplicação do método de Riddle é necessário conhecer duas alturas do Sol fora da passagem meridiana, as horas em que as alturas foram observadas e a declinação do Sol no instante em que a maior altura foi observada. Com o conhecimento destes dados a latitude era calculada usando um algoritmo que contém 8 passos distintos. Em cada um desses passos seria necessário consultar valores em tabelas logarítmicas previamente elaboradas para o efeito ou realizar pequenas adições e subtrações. Neste método as observações devem obedecer às restrições apresentadas para a proposta de Douwes. Além de ter em conta as restrições apresentadas, a aplicação do método também exige que o valor da menor altura do Sol seja corrigido para o instante em que foi observada a maior altura.

4 Resultados Algorítmicos

Neste trabalho iremos usar observações reais de alturas do Sol para cálculo da latitude usando os métodos propostos por Douwes e Riddle. Os valores obtidos serão comparados com os valores de latitude retirados do GPS. Em 2021, durante uma viagem no *NRP Sagres* entre Lisboa e os Açores foram observados 61 pares de alturas do Sol. Ao mesmo tempo, foram também registadas as posições GPS para cada observação e a declinação do Sol. Em 2022, entre os dias 27 de julho e 5 de agosto, também numa viagem no *NRP Sagres* entre Lisboa e o Brasil foram observados 65 pares de alturas do Sol, registando-se também as respetivas posições GPS e a declinação do Sol. Para cada um destes pares foi corrigido o valor da menor altura para o instante em que foi observada a maior altura. De seguida os métodos propostos para o cálculo da latitude foram implementados numa folha de cálculo Excel. Para os pares de alturas observados foi determinada a latitude usando os algoritmos propostos por Douwes e Riddle. Os valores obtidos foram depois comparados com os valores de latitude GPS, de forma a aferir a fiabilidade de cada um dos métodos. Em ambos os métodos, foram obtidos erros inferiores a 20 milhas relativamente à latitude GPS para cerca de 90% dos pares considerados, o que mostra que ambos os métodos produzem resultados fiáveis.

Referências

[1] N. Bowditch, *The New American Practical Navigator. Being an Epitome of Navigation.* New York: E. & G. W. Blunt, 1837.

[2] A. C. Canas, A. F. Queirós e T. Sousa, "Latitude by two altitudes of the Sun – Douwes' and Riddle's methods", submetido para publicação em Journal of Navigation.

[3] C. Douwes, *Zeemans-Tafelen en Voorbeelden*, Amsterdam, Joannes van Keulen en Zoonen, 1760.

[4] R. Harrison, *A New Set of Logarithmic Solar Tables*, 1759.

[5] J. Ivory, "On the problem in Nautical Astronomy for finding the latitude by means of two observations of the Sun's altitude and the time elapsed between them", *The Philosophical Magazine and Journal*, Vol. LVIII, Londres, Richard e Arthur Taylor, 1821, pp. 81–90.

[6] J. Peregrino Leitão, *Guia Nautica ou Tratado Pratico de Navegação*. Lisboa: Sociedade Typographica Franco Portuguesa 6, 1865.

[7] J. W. Norie, *A New and Complete Epitome of Practical Navigation*, 11.ª ed., London, Lords of Commissioners of the Admiralty, 1835.

[8] E. Riddle, "Suggestions for simplifying Mr. Ivory's solution of double altitude problem", *The Philosophical Magazine and Journal*, Ed. por Alexander Tilloch e Richard Taylor, Vol. LX, Londres, Richard e Arthur Taylor, 1822, pp. 167–170.

Riemann, Cauchy, Lakatos y Dieudonné

Jorge Losada-Rodríguez
Universidade de Santiago de Compostela

Esta conferencia centra su interés en torno a un anatema proferido por el matemático francés Jean Dieudonné en la Abadía de Royaumont (situada en las cercanías de París) en 1959 durante una conferencia organizada por el germen de la actual OCDE. Aunque su soflama fue clara:

«À bas Euclide! Mort aux triangles!»,

interpretarla no es sencillo y ha sido objeto de múltiples –e incluso contradictorias– explicaciones desde que fue pronunciada.

Nosotros intentaremos descifrarla analizando lo que dice y omite Jean Dieudonné sobre la integral de Riemann en su obra *Fundamentos de Análisis Moderno*.

Esencialmente, Jean Dieudonné omite la teoría de integración de Riemann y decide sustituirla por la hoy en día conocida como integral de Cauchy. El bourbakista francés justifica su elección indicando que:

> de no haber sido por su prestigioso nombre hace ya tiempo que se habría dejado de considerar [la integral de Riemann], pues (con toda la reverencia que se debe al genio de Riemann) es muy claro para todo matemático, que esta teoría tiene actualmente la importancia de un ejercicio medianamente interesante en la teoría general de la medida y de la integración. Sólo un sentido conservador a ultranza de la tradición académica la ha dejado congelada como capítulo notable de los programas mucho después de transcurrido el momento histórico en que tuvo verdadero significado. Por tanto es perfectamente factible limitar el proceso de integración a una categoría de funciones que basta sobradamente para lo que se necesita en Análisis elemental (al nivel de este curso), y que están suficientemente próximas a las funciones continuas, para poder prescindir de de toda consideración acerca de la teoría de la medida; así se ha procedido al definir sólo la integral de funciones débilmente regulares (algunas veces llamada «integral de Cauchy»). Cuando se necesite un instrumento más potente no es posible quedarse a mitad de camino y se ha de recurrir a la teoría general de la integración («Lebesgue») que es la única que representa un progreso efectivo.

Expliquemos brevemente en que consiste la «integral de Cauchy».

Una función $\varphi\colon [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice escalonada si existe una partición $P \in \mathcal{P}([a,b])$ de modo que φ es constante en cada uno de los subintervalos abiertos que define P. Es decir, φ es una función escalonada, si existe $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in \mathcal{P}([a,b])$ de modo que para cada $1 \leq k \leq n$ se tiene que

$$\varphi(x) = \varphi_k \quad \text{para todo } x \in (x_{k-1}, x_k).$$

Definir la integral de una función escalonada φ en el intervalo $[a,b]$ es evidente

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k \Delta x_k.$$

Dada una función $f\colon [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ para la que existe una sucesión de funciones escalonadas $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a f en $[a,b]$, se define la integral de f en dicho intervalo como

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n(x)\,dx.$$

Es decir, se define la integral (de la función límite) como el límite de las integrales:

$$\int_a^b f(x)\,dx \equiv \int_a^b \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n(x)\,dx.$$

Ahora, desde el punto de vista del análisis matemático, lo interesante es aclarar y formalizar el tipo de convergencia mencionado anteriormente –que será la convergencia uniforme– y caracterizar luego cuales son las funciones que son límite de una sucesión de de funciones escalonadas. Y esto es justamente lo que explica de manera rigurosa Jean Dieudonné en *Fundamentos de Análisis Moderno*.

La idea de definir la integral del límite como el límite las integrales se debe originalmente a Cauchy, pero es bien conocida la dificultad que supuso para éste la formalización del concepto de convergencia uniforme, a la postre fundamental también para una correcta comprensión de sus ideas sobre la integral. La historia sobre el nacimiento y desarrollo del concepto de convergencia uniforme –y el papel jugado por Cauchy– ha sido analizado en detalle por Imre Lakatos en sus *Pruebas y refutaciones*.

A nuestro juicio, la «integral de Cauchy» presenta numerosas ventajas desde el punto de vista didáctico y pedagógico: se fundamenta en una idea clave del análisis matemático más sencillo que el de la integral de Riemann

–que es ciertamente más sofisticada– y el Teorema Fundamental del Cálculo correspondiente es prácticamente evidente, pues involucra únicamente límites, funciones escalonadas y funciones lineales. Para Jean Dieudonné, aunque en ocasiones parezca lo contrario, esto último –la relación del análisis con la geometría y la aproximación lineal– es el fundamento último del análisis matemático.

En nuestra opinión, revisar las ideas sobre la integral de Cauchy emulando las *Pruebas y refutaciones* de Imre Lakatos es un ejercicio especialmente instructivo.

Finalmente, nos gustaría indicar que, a nuestro juicio, las ideas y propuestas de Jean Dieudonné han sido a veces malinterpretadas. Sus propuestas sobre la enseñanza de la teoría de integración podría ser un buen ejemplo de lo que decimos. Conviene mencionar que en este caso la propuesta de Jean Dieudonné coincide plenamente con las ideas y propuestas de W. Servais –pedagogo belga– y T. Varga –pedagogo y profesor de matemáticas húngaro– en relación con una enseñanza de las matemáticas para el siglo XXI.

Creemos que deberían analizarse seriamente las propuestas en relación con la teoría de integración de este grupo de autores.

Referencias

[1] J. Dieudonné, *Fundamentos de análisis moderno*, Reverté, 1966.

[2] I. Lakatos, *Matemáticas, ciencia y epistemología*, Alianza, 1987.

[3] I. Lakatos, *Pruebas y refutaciones*, Alianza, 1978.

[4] W. Servais y Tamás Varga, *Teaching School Mathematics*, Penguin Books-Unesco, 1971.

“Teoremas de Jacob Bernoulli e lei dos desvios” em Diogo Pacheco d'Amorim (1914)

Rui Santos[1]
Escola Superior de Tecnologia e Gestão, Politécnico de Leiria
CEAUL — Centro de Estatística e Aplicações, Universidade de Lisboa

Diogo Pacheco d'Amorim (1914) dedica o capítulo “Teoremas de Jacob Bernoulli e lei dos desvios” da sua tese de doutoramento à dedução da Lei (fraca) dos Grande Números (Teoremas de Bernoulli) e do Teorema Limite Central de De Moivre-Laplace (Lei dos Desvios).

Nesta análise, restrita a provas de Bernoulli independentes com probabilidade de sucesso constante $p \in (0,1)$, Pacheco d'Amorim recorre à distância entre as vantagens $\frac{n_p}{n_q}$ observadas em n provas e as vantagens teóricas $\frac{p}{q}$, i.e.

$$\left| \frac{n_p}{n_q} - \frac{p}{q} \right|, \tag{1}$$

onde n_p representa o número de sucessos, $q = 1 - p$ e $n_q = n - n_p$.

É uma apresentação diferente da usual da época, mas não original, sendo semelhante, por exemplo, a Montessus de Ballore (1908). Todavia, como há uma relação bijectiva entre as vantagens e a probabilidade, os resultados obtidos são equivalentes. Efetivamente, as vantagens, que permitem igualmente medir a incerteza, são associadas a ambientes de apostas, pois as vantagens $\frac{p}{q}$ correspondem à quantidade de euros que o jogador deverá apostar de forma a ganhar um euro (se ganhar a aposta) num jogo equitativo (com valor esperado nulo). Este conceito é central em diversas interpretações de probabilidade, nomeadamente nas visões bayesianas personalistas, mas não na interpretação proposta por Pacheco d'Amorim (1914), cf. Santos (2008).

Com base na probabilidade $p(x,n) = \binom{n}{x}\, p^x\, q^{n-x}$ de se obter x sucessos em n provas de Bernoulli e na fórmula de Stirling $n! = n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}(1+\varepsilon_n)$, Pacheco d'Amorim conclui que a probabilidade varia inversamente com a distância (1) [1.º Teorema de Bernoulli] e que a probabilidade de observar qualquer distância (fixa) converge para zero à medida que se multiplicam as experiências, mas tanto mais rapidamente quanto maior for a distância (1) [2.º Teorema de Bernoulli]. Por fim, recorrendo ao Lema de Valllée-Poussin

[1]Este trabalho é financiado por Fundos Nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e a Tecnologia no âmbito do projeto UIDB/00006/2020.

(1907), demonstra o 3.º Teorema de Bernoulli, i.e.

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left[\left|\frac{n_p}{n_q}-\frac{p}{q}\right|<\varepsilon\right]=1,\quad \forall\varepsilon>0,$$

referindo que este teorema pode ser enunciado por "*A probabilidade, do afastamento ser da ordem do número de experiências, tende para zero quando o número de experiências tende para infinito*". Este resultado é equivalente à Lei Fraca dos Grandes Números (restrita a provas de Bernoulli) que é habitualmente apresentada recorrendo à distância entre a proporção observada (amostral) $\widehat{p}_n$ e a proporção populacional (probabilidade) p através de

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left[|\widehat{p}_n-p|<\varepsilon\right]=1,\quad \forall\varepsilon>0.$$

De seguida, conclui que os afastamentos α (distância entre o número de sucessos observado e o número de sucessos esperado) têm de ser divididos por $\sqrt{n}$ para existir uma convergência em distribuição para uma lei não degenerada. Para tal, analisa a ordem de convergência do número de experiências em relação aos afastamentos, procurando o valor de β tal que $\frac{\alpha^\beta}{n}$ convirja em distribuição para uma variável aleatória não degenerada, i. e.

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\frac{\alpha^\beta}{n}\leq\varepsilon\right)=\mathrm{F}_X(\varepsilon),$$

com F_X uma função de distribuição de uma variável aleatória não degenerada. Assim, considerando $m>1$, demonstra que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\frac{\alpha^{m+1}}{n^m}>\varepsilon\right)\to 0,\quad \forall\varepsilon>0,$$

estabelecendo que $\frac{\alpha^\beta}{n}$, com $\beta<2$, converge para uma distribuição degenerada no ponto zero. Depois, considerando $m>2$, demonstra que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\frac{\alpha}{\sqrt[m]{n}}<\varepsilon\right)\to 0,\quad \forall\varepsilon>0,$$

o que equivale a estabelecer que $\frac{\alpha^\beta}{n}$, com $\beta>2$, verifica

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\frac{\alpha^\beta}{n}<\varepsilon\right)\to 0,\quad \forall\varepsilon>0.$$

Posteriormente, Pacheco d'Amorim analisa em detalhe o caso $\beta=2$ e deduz a convergência para a distribuição gaussiana, resultado que denomina por

Lei dos Desvios e que corresponde ao Teorema Limite Central de De Moivre-Laplace (Teorema Limite Central restrito a provas de Bernoulli).

Em suma, Pacheco d'Amorim conclui que a ordem do número de experiências relativas ao afastamento α será a segunda, i. e.

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\frac{\alpha^\beta}{n} \leq \varepsilon\right) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad \beta < 2 \\ 2\Phi\left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{pq}}\right) - 1 & \text{se} \quad \beta = 2, \\ 0 & \text{se} \quad \beta > 2 \end{cases} \qquad \forall \varepsilon > 0,$$

onde Φ representa a função de distribuição de uma gaussiana standard.

Efetivamente, Pacheco d'Amorim não analisa o caso geral, tal como tentaram fazer Laplace (1812) e Poincaré (1896), entre outros. No entanto, Manuel dos Reis (1929) afirma que a fundamentação de que temos de dividir o afastamento α por $\sqrt{n}$ para obtermos a convergência em distribuição é original de Pacheco d'Amorim (1914). Por conseguinte, Pacheco d'Amorim parece antecipar algumas ideias incutidas nos conceitos domínio de atração e leis estáveis, que são posteriores à sua tese, sendo a origem destas ideias habitualmente atribuídas a Paul Lévy (1925).

Referências

[1] P. Laplace, *Théorie Analytique des Probabilités*, Courcier, Paris, 1812.

[2] P. Lévy, *Calcul des Probabilités*, Gauthier–Villars, Paris, 1925.

[3] R. Montessus de Ballore (1908). *Leçons Élémentaires sur le Calcul des Probabilités*, Gauthier-Villars, Paris, 1908.

[4] D. Pacheco d'Amorim, *Elementos de Cálculo das Probabilidades*, Doutoramento, Universidade Coimbra, 1914.

[5] H. Poincaré, *Calcul des Probabilités*, Gauthier-Villars, Paris, 1896.

[6] M. Reis, *Cálculo das Probabilidades*, Doutoramento, Universidade de Coimbra, 1929.

[7] R. Santos, *Probabilidade Circa 1914 e a Construção de Pacheco d'Amorim*, Doutoramento, Universidade de Lisboa, 2008.

[8] C.J. Vallée-Poussin, "Demonstration nouvelle du théorème de Bernoulli", *Ann Soc Sci Brux*, Vol. 31 (1907), pp. 219–236.

“Verdadeiros actuários” — sobre a regulamentação da actividade de actuário na 1.ª metade do século XX

Ana Patrícia Martins
Escola Superior de Educação de Viseu / CIUHCT (Portugal)

Sobre a actividade de actuário em Portugal na 1.ª metade do século XX, serviu-nos de motivação o panorama a seguir, apresentado em meados da década de 1930 no jornal *Arquivo Financeiro e Segurador* (AFS) (1934–1943):

> “Sejam quais forem as suas proveniências, e elas são bem variadas, o que é certo é que os actuários portugueses vivem num completo isolamento. Cada qual trabalha como entende, seguindo as directrizes que o seu saber e a sua inteligência lhe ditam, sem que um intercâmbio intelectual e científico estabeleça unidade de vistas e uniformidade de processos [...]”

Jornal mensal dedicado à actividade seguradora, o AFS teve como patrono Fernando Brederode (1837–1939), figura incontornável da indústria de seguros Vida em Portugal desde inícios do século XX. Essa ligação transparece na linha editorial do AFS, pela frequência de artigos sobre seguros Vida.

Os artigos “O Actuário”, “A responsabilidade do actuário” e “Verdadeiros actuários e actuários completos” são escritos por José António Queiroz de Barros (1909–c. 1985), licenciado em Matemática (pela Universidade de Lisboa (UL)) e actuário desde 1928, e neles abordam-se temas como a regulamentação da profissão de actuário e o associativismo. (Publicados no AFS em Abril e Julho/1936 e Setembro/1937.) Barros considera como “verdadeiros actuários todos aqueles que são matemáticos, ainda mesmo que não sejam formados em matemática” e, acrescenta, devem possuir “vastos conhecimentos de economia política e social, de estatística e contabilidade”. Destaca as figuras de Brederode, bacharel em Filosofia, pela Universidade de Coimbra (UC) (onde frequentou cadeiras do curso Matemático, a par do curso Filosófico), António dos Santos Lucas (1866–1939) e Luciano Pereira da Silva (1964–1926) (os últimos, doutores em Matemática). Ou, mais recentemente, os licenciados em Matemática Luís Filipe Leite Pinto (1904–1997) e Pedro Teotónio Pereira (1902–1971). A seu ver, as “tradições do actuariado português” justificam que, para além de diplomados com o Curso de Finanças pelo Instituto Superior de Ciências Económicas e Financeiras

(ISCEF), uma regulamentação da profissão admitisse o acesso a licenciados em Matemática pelas Faculdades de Ciências.

(À data, existiam em Portugal três Faculdades de Ciências, nas UC, UL e Universidade do Porto. A instrução em Actuariado em Portugal — em Lisboa e no Porto — iniciou-se na década de 1880, nos Institutos Industriais e Comerciais (IIC) — no Curso Superior de Comércio (CSP) —, prosseguiu na década de 1910 para os Institutos Superiores de Comércio (ISC) — nos CSP/Curso de Finanças — e, em Lisboa, na década de 1930, era ministrada no ISCEF — no Curso Superior de Ciências Económicas e Financeiras: (Martins, 2020). Não obstante, desde a década de 1910, e até se efectuar uma reestruturação em 1949, são apontadas deficiências a essa instrução. Assistiu-se a um declínio nas décadas de 1970 e 1980 e, em 1990, o Instituto Superior de Economia e Gestão, sucessor do ISCEF, tornou-se pioneiro com formação pós-graduada em Actuariado, o que se verifica até aos dias de hoje.)

Posição distinta da de Barros defende que a profissão de actuário fosse reservada a indivíduos com formação especializada. Disso são exemplo os artigos "Um problema da ética do seguro (Acerca dos actuários «legalmente habilitados»)" e "Um problema da ética do seguro (Do actuário a 6% ao actuário 100%)", escritos em resposta a Barros. (Publicados no AFS em Maio/1936 e Março/1937.) O seu autor é Hermínio da Conceição Pereira Paveia, doutor em Ciências Económicas e Financeiras, pelo ISCEF. No seu entender, "para se dirigir uma companhia de seguros não basta saber matemática (o que sabem os engenheiros, os oficiais ou os doutores da dita), mas é preciso ter estudado para ser actuário — o que não se aprende na Faculdade de Ciências, no Instituto Superior Técnico, no Instituto Superior de Agronomia, na Escola do Exército ou na Escola Naval".

De qualquer modo, as primeiras iniciativas ao nível da regulamentação e associação de actuários surgem uma década antes, após ser criada, em 1926, a Associação de Actuários Portugueses (AAP), pioneira em associativismo profissional. Balizamos esta comunicação entre as fundações da AAP e do actual Instituto dos Actuários Portugueses (IAP), em 1945.

Sobre a AAP sabe-se pouco — desconhecem-se actividade ou razões de extinção. (Em meados de 1930 estava já extinta.) O seu espólio passou para o IAP e a ligação entre as duas associações é notória nas listas de sócios fundadores: 9 dos 21 sócios fundadores da AAP (43%) são sócios fundadores do IAP (representando, aí, 12% do total). (Dos 21 sócios fundadores da AAP, 18 são actuários ou ex-actuários, com números próximos de comercialistas e de matemáticos: 7 habilitados com o CSP dos IIC ou ISC e 6 matemáticos

— 2 graduados pela UL e 4 formados na UC, dos quais 2 doutores.) Ao candidato a sócio da AAP exige-se aprovação num "exame sobre aritmética, álgebra, geometria analítica, cálculo infinitesimal e das probabilidades, operações financeiras, teoria dos seguros, economia social e noções de contabilidade", podendo ser dispensados aqueles cujos "trabalhos actuariais" o tornem "digno" de aí ingressar, bem como licenciados em Matemática por uma Faculdade de Ciências, diplomados com o CSP ou detentores de qualquer outro diploma científico que venha a ser regulamentado por lei. (AAP, 1926)

Pouco após a criação da AAP é formada uma comissão para propor as "bases em que deve ser feita a regulamentação do exercício da profissão de actuário". (Brederode, 1926) Dela fazem parte professores dos ISC de Lisboa e do Porto (Caetano Maria Beirão da Veiga (1884–1962) e Arthur Malheiros, respectivamente), membros do Conselho de Seguros e actuários (Brederode e Santos Lucas). Desconhecemos os trabalhos dessa comissão, mas certo é que até à criação do IAP, em 1945, nada foi legislado sobre esse tema.

Barros pretende, com os seus artigos, sensibilizar os *verdadeiros actuários* para os problemas da profissão, lançando a ideia de formação de um *instituto*. Sobre o exercício da profissão, esclarece que não existe regulação nas companhias de seguros: "Qualquer indivíduo que se julgue apto a exercer tão delicadas funções e que encontre o necessário apoio junto da administração de uma sociedade de seguros pode intitular-se actuário e praticar [...] todos os actos a que o seu título lhe dá direito". Já o Estado criara mecanismos de controlo, ainda que sem uniformidade. No caso da Inspecção de Seguros (1929), os actuários (2) deveriam possuir o Curso de Finanças, pelos ISC, ou ser licenciados em Matemática, pelas Faculdades de Ciências; o que contrasta com o recrutamento feito no Instituto Nacional do Trabalho e Previdência (1933), onde se exigia, a um dos inspectores, prática em Actuariado, mas não formação específica. No seu entender, a garantia da adequação ao exercício da profissão passaria pela realização de um exame, à semelhança de países mais adiantados, como Inglaterra, Estados Unidos, Japão, França ou Itália.

Desenvolvimentos sobre o *instituto* que Barros idealizara não surgem no AFS. Esclarece-nos que, entretanto, surgira "qualquer coisa de novo" (entre Julho/1936 e Setembro/1937, quando são publicados os 2.º e 3.º artigos):

> "Pensou-se em criar uma Sociedade Portuguesa de Matemática. [...] [No projecto de estatutos decidiu-se que] reunisse todos os matemáticos portugueses, fosse qual fosse a especialidade que cada um praticasse, dividindo-se os sócios por várias secções.

> Pensou-se imediatamente, e isso ficou assente, que uma das secções seria a actuarial e que dela fariam parte todos os actuários que o desejasse."

Esta é uma das primeiras evidências de ligação entre as comunidades de matemáticos e actuários, firmada com a criação da Sociedade Portuguesa de Matemática (SPM), em 1940. Senão, veja-se, no *Regulamento Interno* da SPM, prevê-se a criação de Comissões Permanentes, entre as quais a Comissão de Matemática Aplicada, que inclui um especialista em Cálculo Actuarial. (SPM, 1940) A actividade dessa Comissão, em particular no campo do Actuariado, está por determinar. Mais notícias sobre a *Sociedade* a que alude Barros em 1937, ou sobre a SPM, não se encontram no AFS.

A ligação entre matemáticos e actuários é também clara, aquando da criação do IAP, em 1945 — 31 dos 78 sócios fundadores do IAP (40%) são sócios da SPM. A admissão é permitida, de modo semelhante àquela na AAP, a licenciados em Ciências Matemáticas ou Ciências Económicas e Financeiras (secção de Finanças) ou a quem tenha "mostrado especial aptidão, por trabalhos actuariais executados, para o estudo da matemática e técnica de seguros". (IAP, 1945) Mas, ao invés de uma examinação do candidato, define-se uma proposta de admissão feita por dois sócios, avaliada pela Direcção.

Os primeiros passos ao nível da regulamentação da profissão de actuário em Portugal surgem na década de 1920. Identificam-se, até meados do século XX, opiniões distintas quanto à formação desejável para o exercício da profissão ou necessidade de examinação para além dessa formação. Actualmente, não existe, ainda, tal regulamentação nem existe uma *Ordem* dos actuários. (De qualquer forma, existe regulação no exercício da profissão, feita pela Autoridade de Supervisão de Seguros e Fundos de Pensões. A exigência de qualificação profissional certificada decorreu da criação da figura do *actuário responsável*, em 1994.) Para este panorama, julgamos ter contribuído o estado do ensino em Actuariado em Portugal até à década de 1990.

Referências

Arquivo Financeiro e Segurador (1934–1943).

Associação dos Actuários Portugueses. "Associação dos Actuários Portugueses [Estatutos]", *Seguros e Finanças*, 2.ª série, n.º 2 (Setembro 1926), 20–21.

Brederode, Fernando, "Revisão da legislação de Seguros", *Seguros e Finanças*, 2.ª série, n.º 1 (16 Setembro 1926), 6–7.

Instituto dos Actuários Portugueses. "Estatutos do Instituto dos Actuários Portugueses", 1945.

Martins, Ana Patrícia, "Contributos para a história do Actuariado em Portugal anterior à fundação do Instituto dos Actuários Portugueses", in José Manuel Mendinhos (coord.), *Para a História do Atuariado em Portugal*, Lisboa: Instituto dos Actuários Portugueses, 2020, pp. 23–69.

Sociedade Portuguesa de Matemática, "Regulamento interno da Sociedade Portuguesa de Matemática" [1940], *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática*, série B, vol. 1, n.º 1 (1947).

On the rise of Mathematics in the 1919 founded University of Yerevan: Arshak Tonyan (1888–1942)

Helmuth R. Malonek
Department of Mathematics, CIDMA, University of Aveiro, Portugal

The founding of a university is one of the most important educational and cultural ventures of a newly independent country. This also applies to the First Republic of Armenia (May 1918 – Dec. 1920), where in May 1919 the Council of Ministers decided to establish a university in the capital Yerevan. This happened after the end of World War I, at a time of extreme political instability. Before Armenia was part of the USSR as the Armenian Soviet Socialist Republic until 1991, Armenia was integrated into a Transcaucasian Soviet Federative Socialist Republic from 1922 to 1936.

Armenian mathematician Arshak Hovsepi Tonyan was one of the actors in the first two decades of Yerevan State University (YSU) and one of its most eminent scholars. Born in 1888 as a citizen of the Russian Empire, he enrolled at the Friedrichs-Universität Halle-Wittenberg in Germany in 1910, shortly before Georg Cantor retired from his chair at that university. At the beginning of World War I, he was interned as a prisoner of war but due to severe eye problems was soon released as he was unable to serve in the Russian Army. In 1921, Tonyan was invited to teach in the YSU, bringing with him knowledge of several languages and the experience of his encounter with mathematical education in Germany. The aim of our talk is to show how he actively contributed to the development of a mathematical education and a mathematical school in the YSU until his tragic fate as a victim of Stalinist repression after 1937.

References

1. Tonyanz, Arschak (1910–1925): Documents in *Archiv der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, Germany*

2. Tonyanz, Arschak (1925): Ueber gewisse Biegungsregelflächen des einschaligen Hyperboloids, Inaugural-Dissertation, *Martin-Luther-*

O Professor Helmuth Malonek não pôde enviar o resumo alargado da sua palestra, pelo que incluímos aqui o resumo original.

Universität Halle-Wittenberg, Universitäts- und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt, Germany

3. Tonyan, A. H.; Tonyan, V. A. (1965), Matʿematikakan terminneri bařaran : Angleren, řuseren, hayeren, germaneren, franseren lezunerov [Dictionary of mathematical terms. In the English, Russian, Armenian, German, French languages], Yerevan: Academy Press

En los orígenes de esta historia. Prehistoria de la Matemática y Matemática en la Prehistoria

Francisco A. González Redondo
Facultad de Educación, Universidad Complutense de Madrid, España

Parece oportuno en un congreso de Historia de la Matemática que alguna comunicación se centre en el origen de esta historia, es decir, en la determinación de en qué momento los desarrollos matemáticos adquirieron naturaleza científica y, por tanto, cuándo nació la Matemática como ciencia. Determinar qué es la Matemática resulta requisito imprescindible para organizar su enseñanza, pues dependiendo de qué concepto se tenga —o adopte— de la disciplina los enfoques docentes pueden diferir enormemente.

Simplificando, en tanto que ciencia, la Matemática es un conjunto de teorías matemáticas. Del mismo modo, una teoría matemática es un sistema hipotético-deductivo, es decir, un conjunto de enunciados concatenados por las leyes de la Lógica —los teoremas—, que parten de unos primitivos que se admiten sin demostración —los axiomas—, y que se refieren a un conjunto de conceptos primarios o indefinidos, cuya existencia se postula y admite, o a los definidos a partir de ellos.

De acuerdo con este enfoque, nuestra disciplina nacería en el momento en que se formulase la primera teoría matemática (es decir, la primera organización axiomático-deductiva de enunciados matemáticos), instante a partir del cual puede considerarse que ha alcanzado un estadio científico. En ese momento en el que surgiría un objeto historiable, en el que comenzaría su Historia.

Hasta dónde conocemos hoy, y a pesar de diferentes menciones a otros autores anteriores, el primer ejemplo de utilización sistemática del método axiomático-deductivo lo constituyen los *Elementos* de Euclides de Alejandría. Con este tratado (este hito histórico) lo matemático adquiriría por primera vez carácter científico. Con él nacería la *Matemática* como Ciencia y comenzaría su Historia. De hecho, éste es el formato de la Matemática que enseñamos en la Universidad: desarrollos matemáticos que transmitimos científicamente, axiomático-deductivamente.

Utilizando el prefijo de antelación “proto” (previo, pero de la misma naturaleza del lexema que le sigue), antes de la existencia de la Matemática como Ciencia, pero conformada por conceptos, métodos y desarrollos de naturaleza propiamente matemática, lo que existiría sería *Protomatemática*. Éste es el formato de la Matemática que enseñamos en Bachillerato y, en algunos casos, al final de la Educación Secundaria Obligatoria: desarrollos matemáticos propiamente científicos que enseñamos descriptivamente, sin organización axiomático-deductiva, sin demostraciones. Correspondería con la etapa en que se inicia la formalización, que, en el caso pionero de la Matemática griega, empezaría con Tales de Mileto y llegaría hasta Euclides.

Utilizando el prefijo de antelación "pre" (previo, pero de naturaleza distinta al lexema cuya carga semántica complementa), el conjunto de descubrimientos que conducirán directamente a la construcción de los conceptos matemáticos, con algo propio de los sentidos que tendrán posteriormente, pero anteriores a toda consideración teórica general, conformarían la *Prematemática*, es decir, los desarrollos matemáticos que introducimos a partir de ejemplos, preferiblemente abstraídos de la realidad cotidiana, con cantidades numéricas, medidas, etc. concretas. En suma, la Matemática de la Educación Primaria y comienzos de la Secundaria Obligatoria. Históricamente, correspondería a los desarrollos matemáticos de todas las civilizaciones de la Antigüedad hasta el "milagro griego".

Finalmente, podría introducir una categoría histórica y conceptualmente anterior a la *Prematemática*, la *Etnomatemática*: las manifestaciones de pensamiento matemático desde la Prehistoria hasta que los individuos "se ven sometidos" a un sistema educativo, es decir, la Matemática registrada desde el origen de *Homo sapiens sapiens* hasta que esos humanos pasaron por una Escuela, como las de los escribas mesopotámicos, egipcios, mayas, etc.

De acuerdo con las visiones usuales, en esa etapa de la *Prehistoria* que se conoce como el Paleolítico Superior, en concreto durante el Auriñaciense europeo (hace unos 40.000 años), nuestros antepasados demostrarían estar dotados ya de la capacidad de registrar simbólicamente el pensamiento en las que se suelen considerar las primeras manifestaciones "artísticas", una evidencia de la modernidad en nuestra especie que nos distinguiría de todas las anteriores.

Sin embargo, junto a caballos, ciervas, cabras o bisontes pintados en las paredes de las cuevas o grabados en hueso y piedra, en la *Prehistoria* también encontramos manifestaciones simbólicas "abstractas" que contienen un tipo de registro no figurativo que, aparentemente, sólo podrían entenderse desde una perspectiva *etnomatemática*. De hecho, cada vez está aceptándose más la interpretación de ese registro simbólico como anotaciones contables e, incluso, calendárico-astronómicas. Y, aunque parezca insólito que se haya tardado tanto, se está trascendiendo el tradicional eurocentrismo de no pocos antropólogos y arqueólogos, cambiando el enfoque de las investigaciones de Europa a África, donde se asume hoy que surgió nuestra especie hace unos

200.000 años con las capacidades intelectuales que hoy tenemos de almacenar conceptos mediante el uso de símbolos materiales, situando el recuerdo fuera del cerebro de cada individuo, es decir, de "escribir" nuestra *Historia*.

En realidad, todos los libros de Historia de la Matemática publicados durante las últimas décadas, antes de exponer los primeros descubrimientos aritméticos, geométricos y/o algebraicos de las antiguas civilizaciones, dedican un primer capítulo a desarrollar las pre-concepciones matemáticas de nuestros antepasados durante el Paleolítico, ilustrando sus consideraciones con algunas manifestaciones especialmente significativas de lo que suele considerarse *arte* prehistórico: pinturas rupestres y, sobre todo, unos signos incisos en piezas transportables, generalmente de hueso, que podrían constituir las primeras evidencias del registro simbólico del pensamiento matemático de la Humanidad. Y sería en estos últimos tipos de manifestaciones, que hasta no hace tanto tiempo se venían considerando como "marcas de caza", donde radicarían los primeros registros contables realizados por los humanos.

Es razonable pensar que los humanos del Paleolítico sentirían la necesidad de efectuar recuentos de diferentes colecciones de objetos o sucesos, por ejemplo, el transcurrir del tiempo tomando como unidad el día, incluso agrupándolos en meses lunares de en torno a 30 días, repeticiones constantes en el tiempo de procesos que pudieron constituir las primeras motivaciones contables de nuestros antepasados. Incluso se ha propuesto que los autores de los primeros registros simbólicos del pensamiento matemático no tendrían por qué haber sido únicamente hombres; es más, que podrían haber sido, prioritariamente, mujeres.

En cualquier caso, si nuestra especie es la única que ha dejado registro escrito, podríamos entender la *Protohistoria* de la humanidad como el "comienzo de la historia de nuestra especie". Con este enfoque, la evolución de la humanidad podría quedar organizada en tres etapas:

Figura 1: Etapas en la evolución de la Humanidad.

- *Prehistoria*: el período evolutivo desde la aparición del género *Homo* hasta la aparición de nuestra especie (la única con capacidad para escribir).

- *Protohistoria*: el período entre la aparición de nuestra especie y el momento (diferente en cada lugar del mundo) en que nuestros congéneres empezaron a escribir.
- *Historia*: el período (diferente en cada lugar del mundo) desde que nuestros congéneres empezaron a escribir hasta el presente.

Referencias

M. Corballis, *The Recursive Mind*, Princeton University Press, New Jersey, 2011.

F. D'Errico et al., "Archaeological evidence for the emergence of languagem symbolism, and music. An alternative multidisciplinary perspective", *Journal of World Prehistory*, Vol. 15, No. 1 (2003), p. 1–70.

B. A. Frolov, "Aspects mathematiques dans l'art prehistorique", *Valcamonica Symposium*, Actes du Symposium Internacional d'Art Prehistorique, 1970, Eds. Del Centro, p. 475–478.

F. A. González Redondo, *Historia del Análisis Dimensional*, Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Madrid, España, 2000.

F. A. González Redondo, *Un modelo para la demilitación teórica, estructuración histórica y organización docente de las diciplinas científicas: el caso de la Matemática*, Academia de Ciencias e Ingenierías de Lanzarote, Madrid, 2003.

F. A. González Redondo, M. Martín-Loeches y E. Silván Pobes, "Prehistoria de la matemática y mente moderna: pensamiento matemático y recursividad en el Paleolítico franco-cantábrico", *Dynamis*, Vol. 30 (2010), p. 167–195.

F. A. González Redondo y R. M.ª Plata Quintanilla, "Altamira es nombre de mujer ... y de una de las primeras matronas, plausiblemente, también", *Matronas hoy*, Vol. 9, No. 3 (2021), p. 41–50.

F. A. González Redondo, "La 'Conjetura Zaslavsky'. ¿Fueron las mujeres las primeras *matemáticas*?", *La fisura de la Historia. Intelectuales, artistas y científicas*, Editorial Comares, Ed. E. Moreno Lago, p. 53–66, 2021.

A. Marshack, *The Roots of Civilization*, Weidenfeld and Nocolson, New York, 1972.

A teoria dos conjuntos no ensino primário: entre os programas oficiais e os manuais escolares

Rui Candeias
Agrupamento de Escolas Terras de Larus, CICS.NOVA

No presente texto analisa-se a forma como o tema da teoria dos conjuntos foi introduzido no ensino da matemática no primário em Portugal, através do estudo da presença deste tema nos programas do ensino primário oficial e nos manuais escolares, desde a década de 1960 até à década de 1990.

O período cronológico em estudo coincide com um movimento no interior do ensino da Matemática, o Movimento da Matemática Moderna, que irá influenciar o ensino da Matemática nos diferentes níveis de ensino.

A partir de meados da década de 1960 são desenvolvidos diversos projetos que se centram na matemática do ensino primário, destacando-se alguns projetos desenvolvidos com ligações a fundações privadas (Moon, 1986).

Um dos marcos dessa modernização da matemática nos anos iniciais do ensino básico, antigo primário, deve-se à introdução da teoria dos conjuntos, com simbologias próprias a ser apreendidas. No ensino primário, a linguagem dos conjuntos consistia num aglomerado de estruturas axiomáticas e regras definidas, mediadas pela abstração de símbolos e correspondência entre elementos (Arruda, 2011).

De acordo com Servais (1975), na Europa existiram diferentes concretizações da reforma da Matemática Moderna, como o caso do currículo francês, onde se acentuava a vertente mais abstrata e formal; ou o caso belga, também na mesma linha, que dava ênfase à utilização de materiais manipuláveis no ensino elementar — Barras de Cuisenaire, blocos lógicos de Dienes, grafos com o uso da cor e a mini-calculadora de Papy.

Em Portugal existiram algumas iniciativas tendo em vista a divulgação de metodologias ligadas à Matemática Moderna no ensino primário (Matos, 2004) como os trabalhos desenvolvidos nalguns colégios particulares, o trabalho desenvolvido pelos professores de Didática Especial, nas Escolas do Magistério Primário, ou o projeto de modernização da Iniciação das matemáticas no Ensino Primário, desenvolvido pelo Centro de Investigação Pedagógica da Fundação Calouste Gulbenkian.

Dentro da diversidade de concretizações que se efetuaram no contexto da Matemática Moderna, com modificações importantes ao nível dos conteúdos e da estrutura do currículo de Matemática, de uma forma geral, não houve a melhoria esperada no sucesso escolar, tanto ao nível da aprendizagem, como ao nível da promoção da compreensão matemática (Guimarães, 2003).

No início dos anos sessenta, Morris Kline critica a estrutura formal da reforma curricular. Kline critica não só a introdução da Matemática Moderna nos currículos de Matemática, à custa de conteúdos tradicionais, como o próprio desenvolvimento que se deu aos conteúdos da Matemática Moderna, nomeadamente com a utilização exagerada da teoria dos conjuntos por parte dos novos currículos, principalmente na iniciação.

Guimarães (2003) refere que a par do movimento de reação à Matemática Moderna, intitulado “Back to Basics”, surgem outros posicionamentos que se opõem a esta reação mais conservadora, criticando as tendências que consideram redutoras para o ensino da matemática (aptidões básicas) e apresentando propostas que envolvem a resolução de problemas ou a utilização das novas tecnologias.

Em Portugal também surgiram críticas à reforma da Matemática Moderna, nomeadamente no ensino primário, onde se apontam deficiências no cálculo como a razão para o fraco aproveitamento dos alunos, recomendando o reforço do ensino da aritmética para além do 4.º ano de escolaridade, numa posição alinhada com o movimento do “Back to Basics”.

No que se refere à análise das fontes, no período em análise estiveram em vigor seis programas para o ensino primário, alguns deles com uma condição experimental e temporária. Da análise global destaca-se uma alteração significativa na estrutura dos diferentes programas e na organização dos conteúdos de Matemática.

É no programa B da 1.ª classe, de 1974–1975, que se assume explicitamente uma colagem às ideias da Matemática Moderna e se apresentam atividades relacionadas com os conjuntos, sendo estes uma rubrica destacada no programa B. No programa de 1975 os conjuntos surgem integrados nos temas da introdução dos números e na introdução e desenvolvimento das diferentes operações. No programa de 1978 os conjuntos constituem a primeira unidade temática apresentada no programa de Matemática. Os conjuntos também são abordados noutras unidades temáticas como a dos Números Inteiros, onde é trabalhado o estudo do número e das diferentes operações. No programa de 1980 os conjuntos voltam a formar um tema próprio dentro da área da Matemática. Este tema é explorado nos 1.º e 3.º anos, com a introdução ao estudo dos números e das diferentes operações. Este programa tem um forte impacto nos manuais. No Programa do 1.º Ciclo de 1990 já não existem referências explícitas ao tema dos Conjuntos e este também não é um tema integrado no trabalho com os números e operações.

No tema dos conjuntos, presente nos programas de 1974–75, 1975, 1978 e 1980, destacam-se objetivos e rubricas como a formação de conjuntos a partir de propriedades, enunciação de propriedades dos objetos de um conjunto, formação de subconjuntos de um conjunto, identificação de conjuntos singulares e conjuntos vazios, a reunião de conjuntos e a reunião de dois conjuntos disjuntos, o complementar de um conjunto em relação ao universo e a partição de um conjunto em subconjuntos todos com o mesmo número de elementos.

O manual analisado, Patamar 1 – Iniciação à Matemática, do 1.º ano de escolaridade, de 1987, segue de uma forma muito direta as orientações do programa para o qual foi concebido, numa relação próxima entre o currículo prescrito e o currículo apresentado.

Referências

Arruda, J. (2011). *Histórias e práticas de um ensino na escola primária: marcas e movimentos da matemática moderna.* Tese de Doutoramento. Universidade Federal de Santa Catarina, Brasil, 2011.

Guimarães, H. M. (2003). *Concepções sobre a matemática e a actividade matemática: um estudo com matemáticos e professores do ensino básico e secundário.* Coleção Teses. Lisboa: APM.

Matos, J. M. (2004). *Cronologias: Cronologia do ensino da matemática (1940–1980).*

Moon, B. (1986). *The "New Maths" curriculum controversy. An International story.* London: The Falmer Press.

Servais, W. (1975). Continental traditions and reforms. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, vol. 6, n.º 1, pp. 37–58.

Fontes

Programas do Ensino Primário – 1968, 1974, 1975, 1978 e 1980.

Vasconcelos, H., Miranda, A., Lopes, C. (1987). *Patamar 1 – Iniciação à matemática – 1.º ano de escolaridade.* 1.ª ed. Porto: Porto Editora.

La matemática española durante la ausencia de Julio Rey Pastor en torno a 1923

Luis Español González
Universidad de La Rioja

Entre 1915 y 1920, Rey Pastor era, pese a su juventud, el mejor matemático español del momento, con una influencia intensa en el panorama nacional desde su cátedra en la Universidad Central [1, 2]. A finales de 1920, ingresó en la Real Academia de Ciencias denunciando las trabas que limitaban su actuación en Madrid —no logró impartir las asignaturas del doctorado— y anunciando que marchaba a la Universidad de Buenos Aires para poner en marcha un doctorado en matemáticas.[1] Obtuvo la excedencia por un año en la Universidad Central, luego prorrogada sucesivamente.

Durante la primera mitad de la década de los veinte, Rey Pastor no publicó investigación, volcó su intensa actividad en Buenos Aires en las enseñanzas preparatorias del nuevo doctorado y en la edición de libros de texto elementales y superiores. Por otra parte, se casó con una porteña en diciembre de 1921, con la que pronto tuvo dos hijos, y se involucró en los negocios de su familia política. En la universidad argentina, los estudiantes no dejaban de solicitar que su estancia se prolongara.[2]

1923, año de referencia. La ausencia de Rey Pastor se notó particularmente en el doctorado [5], la matemática española parecía estar a la espera de su regreso. No obstante, el decano Luis Octavio de Toledo[3] empezó a tomar medidas para reorganizar el análisis matemático en la Facultad de Ciencias de la Central ante una ausencia que se podía intuir muy duradera. La preocupación del decano estaba justificada, porque dicha materia se consideraba mal atendida en el plan de estudios, con solo tres asignaturas: Análisis matemático 1.º y 2.º, en las que se alternaban los catedráticos Octavio de Toledo y Rey Pastor, y en el tercer curso Elementos de Cálculo infinitesimal, a cargo de José Andrés Irueste. En 1915 se incorporó en cuarto curso una asignatura opcional, Complementos de Cálculo infinitesimal,

[1] Fue propuesto académico en 1918. El accidentado proceso hasta su ingreso puede seguirse en el expediente de Rey Pastor en la Real Academia de Ciencias. Ver mi conferencia `https://www.youtube.com/watch?v=kFOtHS6Y6K8` (14/06/2023).

[2] Véase el *Libro de Actas de las Sesiones del Consejo Directivo 1919–1928* de la Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires.

[3] Era el catedrático de análisis matemático que tenía acumulada la asignatura del doctorado a la que el joven colega no pudo acceder. Fue decano desde 1917 hasta 1931.

que compartieron como acumulada Rey Pastor y José Ruiz-Castizo, catedrático de Mecánica racional. Cuando se jubiló Iueste en 1918, la cátedra vacante no se convocó y se asignó como acumulada a Rey Pastor, quedando para Ruiz-Castizo toda la asignatura antes compartida. Esta situación se consideraba provisional a la espera de una reforma del plan de estudios que consolidara cuatro asignaturas de análisis matemático con sus correspondientes cátedras, mejora que demoró una década. Cuando Rey Pastor marchó a Buenos Aires en 1921, el único catedrático de análisis matemático que quedó en Madrid fue Octavio de Toledo, con la jubilación a la vista en 1929; José Gabriel Álvarez Ude, catedrático de Geometría descriptiva, pasó a colaborar en la docencia de análisis.

En 2023 se ha conmemorado el centenario del breve paso de Einstein por España (conferencias y actos protocolarios en Barcelona, Madrid y Zaragoza en febrero–marzo). Con motivo de la visita del físico alemán a Madrid, tuvo un protagonismo especial Tomás Rodríguez Bachiller, un matemático recién licenciado que redactó resúmenes de las conferencias de Einstein para el periódico *El Debate* [4]. Por entonces, Bachiller terminaba su segunda carrera, ingeniero de caminos, y preparaba una tesis doctoral en ciencias exactas sobre correspondencias algebraicas, inspirada por Severi y realizada en el Laboratorio y Seminario Matemático (LSM) de la JAE, dirigido entonces, en ausencia de Rey Pastor, por Álvarez Ude y José María Plans, catedrático de Mecánica celeste. Plans había sido promotor de los resúmenes de *El Debate* y Álvarez Ude era el apoyo que Bachiller podía tener en su investigación sobre correspondencias.

Existía una divergencia de criterio entre, por una parte, Rey Pastor y estos dos catedráticos que le acompañaban en el LSM y, por otra, Octavio de Toledo, especialmente preocupado por la facultad y el futuro en ella de las enseñanzas del análisis matemático. Además de conmemorar el centenario de la visita de Einstein con el protagonismo en ella de Bachiller, se puede también conmemorar, con el mismo joven protagonista, el centenario de la reacción del decano para hacer frente a la ausencia de Rey Pastor que presumía indefinida.[4] En 1923, Bachiller solicitó a la JAE una pensión para iniciar una investigación en análisis matemático desligada de su proyecto de tesis doctoral en geometría algebraica; fue denegada, pero el decano le consiguió en el ministerio, a través del rectorado y al margen de la JAE, una estancia en París para el curso 1923-24. A partir de entonces, Bachiller se incorporó a la facultad y desde ella y el LSM fue portavoz de la moderna teoría de funciones basada en álgebra y topología. Al mismo tiempo, el

[4] Ver mi conferencia de 14/06/2023 antes citada.

decano sumó a su proyecto para la facultad al brillante estudiante tardío José Barinaga Mata, licenciado en ciencias exactas en 1926, doctorado en 1929 y que fue en 1931 el catedrático que sustituyó a Octavio de Toledo, jubilado en 1929.

En 1925 Rey Pastor volvió a Madrid, no para reintegrarse a su cátedra sino para renovar por otros tres años su permanencia en Buenos Aires. Lo hizo en condiciones ventajosas, pues la Dictadura militar le permitió cobrar el sueldo de su cátedra a cambio de cursos superiores impartidos en Madrid durante las vacaciones del verano austral, que a partir de entonces y hasta la guerra civil pasó en la capital española. En 1926, Rey Pastor dio señales de reiniciar la investigación en el que fue su tema durante los años treinta, los algoritmos lineales para la sumación de series divergentes, hecho que se consolidó a partir de 1928 en ambas orillas del Atlántico.

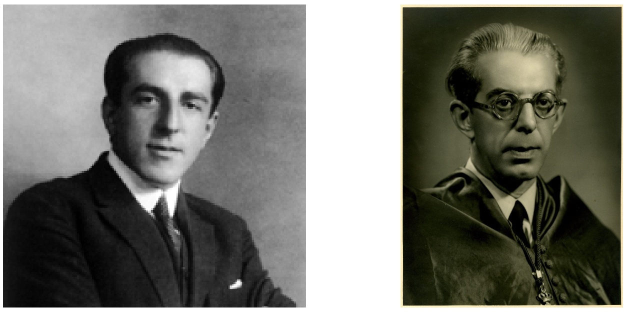


Figura 1: Julio Rey Pastor (izda.) y Tomás Rodríguez Bachiller (dcha.).

Dos proyectos y un consenso frustrado. Durante esos años con breves estancias anuales en Madrid, Rey Pastor promovió un plan para ocupar las cátedras de análisis matemático alternativo al del decano. A primeros de 1928, en una reunión científica de la Sociedad Matemática Española en la que intervenían él y Bachiller sobre topología, en presencia de Octavio de Toledo y Esteban Terradas, catedrático en Barcelona, que había sido llamado a Madrid como miembro de la Asamblea Nacional de la Dictadura, Rey Pastor descalificó agriamente la valía matemática de Bachiller.[5] Hasta tal punto afectó a Bachiller este incidente que abandonó la facultad y comenzó a ganarse la vida como ingeniero.

Ese mismo año, el gobierno de la Dictadura nombró directamente a Te-

[5]Véase [2] y *Libro de Actas de la RSME 1924–1941*.

rradas catedrático de Análisis matemático 4.º (ecuaciones diferenciales).[6] El decano solo pudo lamentar que no se hubiera convocado una oposición pública. Esta victoria de Rey Pastor duró poco. Llegada la Segunda República, Terradas tuvo que opositar a la cátedra que se le había asignado irregularmente y suspendió la oposición con tres votos en contra, uno de ellos de Barinaga, quien acababa de ganar la cátedra que fuera de Octavio de Toledo. Daniel Marín Toyos se trasladó desde Barcelona a la cátedra que fuera temporalmente de Terradas. Barinaga repescó a Bachiller, que se doctoró y ganó la cátedra de teoría de funciones. Por otra parte, Rey Pastor renunció a su cátedra (se le exigió dedicarse a ella) y fue sustituido por su joven discípulo Ricardo San Juan [3]. Para el curso 1935–36, recuperada la cordialidad entre los involucrados, el elenco de las cátedras de análisis matemático en la Central era prometedor en el marco de una Facultad de Ciencias de excelencia, pero la sublevación militar y la guerra dieron al traste con un brillante futuro matemático y científico en ciernes.

Referencias

[1] L. Español González, "Julio Rey Pastor. Primeros años españoles: hasta 1920", *La Gaceta de la RSME*, Vol. 9, No. 2 (2006), pp. 545–585.

[2] L. Español González, *Historia de la Real Sociedad Matemática Española (RSME)*, RSME, Sevilla, 2011.

[3] L. Español González, "Los estudios de matemáticas en la Facultad de Ciencias de la Universidad Central durante la Segunda República Española", en *La Universidad Central durante la Segunda República: las facultades de ciencias y su contexto internacional*, A. Ribagorda e L. López-Ocón, Dykinson, Madrid, 2022, pp. 79–110.

[4] L. Español González e M. Á. Martínez García, "Hacia la matemática abstracta: Tomás Rodríguez Bachiller (1899–1980)", *La Gaceta de la RSME*, Vol. 13, No. 4 (2010), pp. 769–796.

[5] M. Á. Martínez García e L. Español González, "El doctorado en ciencias exactas en España entre 1922 y 1930", *Llull*, Vol. 44, No. 89 (2021), pp. 139–156.

[6] Acababan de aparecer las esperadas cuatro asignaturas de análisis matemático, las nuevas de los cursos superiores dedicadas a teoría de funciones y a ecuaciones diferenciales.

Eduardo Ortiz, um historiador da Matemática no exílio

Luis Saraiva
CIUHCT, DM da FCUL

Eduardo Leopoldo Ortiz nasceu em Buenos Aires em 1931. Licenciou-se em Ciências Físico-Matemáticas na Universidade de Buenos Aires em 1956. Concluiu o seu doutoramento em 1961, sob a orientação do matemático Micha Cotlar (1913–2007), com a tese *Continuity of Potential Operators in Spaces with weighted measures.* Trabalhou um ano no *Institute for Advance Studies* de Dublin. Após um ano de estada em Londres, no *Imperial College*, regressou à Argentina, começando a sua carreira docente na *Universidade de Buenos Aires.* Contudo o golpe militar de 1966, a que se seguiu uma repressão generalizada que atingiu igualmente a Universidade, fez com que numerosos docentes se demitissem, entre eles Ortiz e o seu antigo orientador Misha Cotlar. Resolveu deixar a Argentina, estando primeiro no Peru, e depois em Inglaterra, tendo aí fixado residência a partir de 1967, sendo docente do *Imperial College* de Londres até ao fim da sua carreira. Ou seja, embora tenha tido regressos pontuais à Argentina, Ortiz viveu mais de meio século fora do seu país natal.

Apesar de se ter interessado pela história da matemática desde os seus tempos universitários, só a partir de 1984 é que a sua produção científica nessa área se tornou significativa, primeiro coexistindo com a sua produção matemática, e depois, quinze anos mais tarde, tornando-se dominante.

É em 1962 que publica o seu primeiro artigo em história da Matemática, nos *Archives Internationales d'Histoire des Sciences*, com o título "*On a new study of Spanish American science towards the end of the colonial period*". Depois até 1983 só publica mais 3 artigos em história da Matemática, todos relacionados com pessoas que foram importantes para a sua vida e carreira.

Assim em 1976, para um número especial da revista *Computers and Mathematics with Applications*, de homenagem ao físico húngaro Cornelius Lánczos (1893–1974), Ortiz contribuiu com o artigo "*Lánczos and the Institute for Advanced Studies in the early sixties*", certamente relatando muito da sua experiência pessoal quando esteve nesse Instituto. Enquanto em Dublin, Ortiz leu os artigos matemáticos de Lánczos sobre o *método Tau.* Generalizou este método e obteve um modo mais incisivo de analisar certos tipos de equações diferenciais. Pode dizer-se que o seu contacto com Lánczos foi essencial na sua vida de investigador matemático. Em 1980 a *Sociedade Portuguesa de Matemática* homenageou o matemático português

Intervalo Temporal	Artigos ou capítulos de livros	Publicações por ano	Um só autor	Dois ou mais autores
1962	1	1	1	-------------
1976–1983	3	0,4	3	-------------
1984–1998	29	1,9	22	7
1999–2012	39	2,8	27	12
2013–2021	11	1,2	6	5
Total	83	1,8 (em 76–21)	59	

Tabela 1: Publicações de Eduardo Ortiz em História da Matemática

António Aniceto Monteiro (1907–1980) com a publicação de um número a ele dedicado da *Portugaliae Mathematica*. Ortiz contribuiu com o artigo "*Professor António Monteiro and contemporary mathematics in Argentina*". Ortiz tinha sido apresentado a Monteiro durante o seu curso, quando o matemático português, então na *Universidad Nacional de Cuyo*, em San Juan, veio a Buenos Aires para dar um curso sobre a Teoria dos Filtros na *Sociedade Científica Argentina*. Estabeleceu-se entre os dois uma amizade que iria durar até ao falecimento de Monteiro. O valor científico e as qualidades cívicas e morais de Monteiro impressionaram profundamente Ortiz, tendo-se mantido o contacto entre ambos, mesmo após a saída de Ortiz da Argentina. Finalmente em 1983 Ortiz escreveu a *Apresentation* do livro de Julio Rey Pastor (1886–1962) *Introducción a la Matematica Superior*, uma reedição do *Instituto de Estudios Riojianos de Logroño*. Ortiz considerava Rey Pastor como um dos três professores mais importantes que tinha tido na Faculdade, e fora este matemático espanhol, uma figura essencial da matemática espanhola e argentina da primeira metade do século XX, quem inicialmente fez interessar Ortiz pela história da Matemática.

Ou seja, estes três artigos surgem mais como uma necessidade de contribuir para à sua maneira homenagear pessoas que foram importantes para a sua vida do que o resultado de uma sua vontade de fazer investigação em História da Matemática.

A partir de 1984 o panorama muda, Ortiz começa a publicar regularmente artigos de história da Matemática, embora inicialmente a sua produção matemática continue a ser a principal: no período 1980–1998 Ortiz publica 31 artigos em História da Matemática e 67 em Matemática. Contudo no período seguinte, de 1999 até a sua morte em 2021, a produção em história da Matemática torna-se praticamente exclusiva: 50 artigos em história da Matemática contra apenas 2 em Matemática, o último dos quais em 2007. Mais de 70% dos seus artigos de História têm-no como único autor. Dos seus 12 colaboradores, só com um deles tem mais de 2 artigos publicados: com Alejandro Gangui, nascido em 1964, investigador da *Universidade de Buenos Aires*, e do *Instituto de Astronomia e Física Espacial* (IAFE/CONICET) publicou 11 artigos entre 2005 e 2020, sete deles relativos à viagem de Einstein à Argentina e Uruguai em 1925.

A grande maioria dos seus artigos de História, 72 em 83, é sobre a história da Matemática e da Física no mundo latino, sendo sensivelmente 36 relativos à Argentina, nove à América Latina e às relações científicas não só entre os seus países, mas também sobre a influência europeia e norte-americana. Analisa igualmente aspetos da história matemática na Península Ibérica e as relações com a América Latina.

É importante referir que Ortiz foi o editor das *Obras Completas de Rey Pastor*, publicadas em 1988 em oito volumes de micro-fichas pela *Humboldt Society*, de Londres, e das *Obras Completas de António Monteiro* em 1998, num só volume, igualmente pela mesma editora e também em micro-fichas. Em relação a esta última obra estão indicados no livro mais três editores: Alfredo Pereira Gomes (1919–2006), Leopoldo Nachbin (1922–1993) e Marcel-Paul Schutzenberger (1920–1996) Em 2008, com o patrocínio da *Fundação Calouste Gulbenkian*, saiu uma edição das obras de Monteiro em CD-ROM, mas agora só mencionando Alfredo Pereira Gomes como co-editor[1], possivelmente por ter sido ele, em coordenação com Eduardo Ortiz, quem superintendeu à passagem das micro-fichas para digital, e daí para os CD-ROM.

Eduardo Ortiz veio a Portugal várias vezes participar em actividades de História da Matemática, principalmente a partir de 2000, tendo feito seis visitas entre 2000 e 2019, que produziram 6 artigos, o último dos quais ainda pôde ver publicado, pois recebeu-o uns meses antes do seu falecimento.

Eduardo Ortiz era uma pessoa de uma grande simplicidade, simpatia, e de grande cultura. Nunca o vi utilizar argumentos de autoridade nos debates e conferências a que assisti. Era igualmente uma pessoa de fino humor e espírito positivo face aos contratempos que por vezes inesperadamente

[1]Miguel Ortiz, filho de Eduardo Ortiz, teve a amabilidade de me enviar os volumes destas duas obras, pelo que estamos a tentar encontrar uma instituição que faça a passagem das micro-fichas das obras de Rey Pastor para digital, e deste modo as suas obras possam ficar acessíveis a todos os que as quiserem consultar.

surgiam. Foi extraordinário vê-lo no Encontro de Coimbra de 2019, pela sua energia e vivacidade nunca se imaginaria que então tinha 88 anos.

Sabemos que há pessoas que, independentemente do seu valor, utilizam a influência das organizações políticas ou religiosas de que são membros para se imporem e aparecerem destacadas. Eduardo Ortiz sempre se impôs apenas pelo seu valor científico e pela sua personalidade, nunca o vi utilisar nada a seu favor que não fosse a sua argumentação própria. Guardo muitas memórias preciosas das conversas que tivemos ao longo dos anos.

Como outros antes dele, é um exemplo que não devemos esquecer.

Bibliografia

Saraiva, L., In Memoriam: Eduardo Ortiz (1931–2021), para publicação em *Archives Internationales d'Histoire des Sciences.*