

SUBESPAÇOS LINEARES DE $C(K)$

João Paulos, Paulo R. Pinto

Departamento de Matemática
Instituto Superior Técnico,
Universidade de Lisboa
Av. Rovisco Pais, 1049 –001 Lisboa
e-mail: joao.paulos@tecnico.ulisboa.pt
ppinto@math.tecnico.ulisboa.pt

Resumo: Abordamos alguns resultados provenientes da prolífica obra de Stefan Banach, que constituem pontos de referência no estudo dos espaços lineares. Provamos que qualquer espaço linear real X pode ser mergulhado isometricamente no espaço linear $C(K)$ das funções contínuas, para K um espaço compacto e Hausdorff. Se K é metrizável, mostramos que podemos mergulhar $C(K)$ em $C([0,1])$. Provamos ainda que a métrica de $C(K)$ determina a topologia de K .

Abstract We review some landmark results around the work of Stefan Banach from the viewpoint of linear spaces. We prove that any real linear space X can be isometrically embedded in the linear space $C(K)$ of continuous functions on a compact and Hausdorff space K . If K is metrizable then we show that we can embed $C(K)$ in $C([0,1])$. We also prove that the metric of $C(K)$ determines the topology of K .

palavras-chave: Espaço linear; Espaço de Banach.

keywords: Linear space; Banach Space.

1 Motivação e introdução

Um resultado de álgebra linear diz-nos que um espaço linear real X de dimensão finita é isomorfo a $\mathbb{R}^{\dim(X)}$. Neste trabalho, pretendemos mostrar que em dimensão infinita, $C(K)$ é o espaço linear que substitui $\mathbb{R}^{\dim(X)}$, onde $C(K)$ designa o espaço linear das funções reais contínuas com K compacto e Hausdorff. Provamos que todo o espaço linear (real) X pode ser mergulhado em algum $C(K)$ onde K depende do espaço linear inicial X . Em alguns casos, veremos que podemos considerar o intervalo unitário $K = [0,1]$. Veremos que a estrutura métrica de $C(K)$ determina a topologia de K . Estes resultados apareceram nos anos 1930 à volta da escola do matemático polaco Stefan Banach e podem ser encontrados em algumas monografias, e.g. em [1, 2, 4, 3, 5, 6].

Note-se que dado um conjunto finito $K = \{k_1, \dots, k_n\}$, munido com a topologia discreta, o espaço linear $C(K)$ das funções reais contínuas de K para \mathbb{R} pode ser identificado com \mathbb{R}^n , pois dar uma função $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ é dar um vector $(f(k_1), \dots, f(k_n))$. Observamos ainda que um espaço linear (real) qualquer X pode sempre ser munido de uma norma, pois podemos considerar uma sua base de Hamel $\{e_i: i \in I\}$ —que existe, pelo Axioma da Escolha—e como, dado $x \in X$, existe um subconjunto finito F_x de I e escalares $\alpha_i, i \in F_x$:

$$x = \sum_{i \in F_x} \alpha_i e_i$$

podemos definir a norma $\|x\| = \max\{|\alpha_i|: i \in F_x\}$.

Dado um espaço compacto e Hausdorff, K , o espaço linear $C(K)$ das funções contínuas $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ tem uma outra norma, nomeadamente

$$\|f\|_\infty := \sup_{t \in K} |f(t)|,$$

para a qual $C(K)$ é um espaço de Banach. Mais geralmente, podemos considerar uma norma num espaço linear X e pensar no chamado espaço dual $X^* = \{f: X \rightarrow \mathbb{R} \text{ linear e contínua}\}$, que também é um espaço de Banach para a norma $\|f\| = \sup_{x \in X: \|x\| \leq 1} |f(x)|$. Podemos então considerar um conjunto limitado em X^* , por exemplo, a bola unitária $B_{X^*} = \{f \in X^* : \|f\| \leq 1\}$. Todavia B_{X^*} não é compacto para a topologia induzida pela norma no dual, se $\dim(X) = \infty$. Usando a topologia fraca*, ver Definição 1, então o Teorema de Banach-Alaoglu (Teorema 3) garante-nos que B_{X^*} é um espaço compacto e Hausdorff, mas que *a priori* não tem de ser metrizável.

Sendo X espaço normado separável (i.e. existe um subconjunto numerável e denso em X), provamos que a bola unitária B_{X^*} , munida com a topologia fraca*, é na verdade um espaço metrizável. Mais, usando propriedades do conjunto de Cantor, podemos provar que de facto X pode ser mergulhado no espaço $C([0, 1])$ (ver Teorema de Banach-Mazur (Teorema 13)).

Note que uma função contínua $h: K_2 \rightarrow K_1$ entre espaços compactos e Hausdorff induz uma transformação linear contínua $T: C(K_1) \rightarrow C(K_2)$ dada por $T(f) = f \circ h$. Mais, T é sobrejectiva (isometria linear) se e só se h é injectiva (sobrejectiva), pelo que cada homeomorfismo h fornece uma isometria linear sobrejectiva T . Na verdade, qualquer aplicação contínua $a: K_2 \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $|a(k)| = 1$ para qualquer k e qualquer homeomorfismo $h: K_2 \rightarrow K_1$, fornece uma isometria sobrejectiva $T_a: C(K_1) \rightarrow C(K_2)$ definida por $T_a(f) = a \cdot (f \circ h)$. O Teorema de Banach-Stone (Teorema 14) demonstra que uma qualquer isometria (linear) sobrejectiva entre $C(K_1)$ e $C(K_2)$ é desta forma. Ainda hoje se exploram sob que condições uma aplicação linear $T: C(K_1) \rightarrow C(K_2)$ fornece um homeomorfismo entre K_2 e K_1 .

2 O Teorema de Banach-Alaoglu

Vamos definir uma topologia muito natural no dual X^* do espaço normado X e estudamos alguns resultados interessantes que advêm da mesma. Considerem-se as aplicações $\Phi_x : X^* \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\Phi_x(f) = f(x)$, para $x \in X$.

Definição 1 *A topologia fraca* em X^* é a topologia gerada pela sub-base constituída pelos conjuntos da forma $\{\Phi_x^{-1}(U)\}$, onde $U \subset \mathbb{R}$ são abertos e $x \in X$.*

Rapidamente nos apercebemos que se trata da topologia que X^* herda enquanto subespaço de \mathbb{R}^X , com a topologia produto. Assim sendo, a topologia fraca* é a topologia mais fraca em X^* que torna todas as aplicações Φ_x contínuas. Constata-se facilmente que, fixado $x^* \in X^*$, para $\epsilon > 0$ e F subconjunto finito de X , os conjuntos

$$B_{x^*}(\epsilon, F) := \{f \in X^* : |(f - x^*)(x_i)| < \epsilon, i \in \{i_1, \dots, i_n\}\}$$

constituem uma base de vizinhanças de x^* na topologia fraca*. Como a topologia fraca* é induzida pela topologia produto (em \mathbb{R}^X) será de esperar que esta nos forneça o contexto ideal para estudarmos propriedades como a compacidade. Tal será concretizado ainda nesta secção com o Teorema de Banach-Alaoglu.

Lema 2 *1) Seja X^* munido com a topologia fraca*. Considere-se uma rede $\{f_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ em X^* . Então, $f_\alpha \rightarrow f$ em X^* se e só se $f_\alpha(x) \rightarrow f(x)$, para todo $x \in X$.*

2) Seja X^ munido com a topologia fraca*. Então X^* é um espaço Hausdorff.*

Prova: 1) Suponha-se que $f_\alpha \rightarrow f$ em X^* e seja $x \in X$. Para provar que $f_\alpha(x) \rightarrow f(x)$, seja $U \in N_{f(x)}$ (onde N_a designa a coleção das vizinhanças abertas de a). De acordo com a Definição 1, $\Phi_x^{-1}(U)$ é aberto em X^* e como $f_\alpha \rightarrow f$ em X^* , existe $\beta \in \Lambda$ tal que para $\alpha \geq \beta$ temos que $f_\alpha \in \Phi_x^{-1}(U)$, isto é, $f_\alpha(x) = \Phi_x(f_\alpha) \in U$. Logo, em \mathbb{R} , temos que $f_\alpha(x) \rightarrow f(x)$. Reciprocamente, suponha-se que para todo $x \in X$ temos que $f_\alpha(x) \rightarrow f(x)$. Fixemos $\epsilon > 0$ e um subconjunto finito $F \subset X$. Consideremos agora a correspondente vizinhança $B_f(\epsilon, F) = \{g \in X^* : |g(x) - f(x)| < \epsilon, \forall x \in F\}$. Como $F \subset X$, temos que $f_\alpha(x) \rightarrow f(x)$ para todo $x \in F$ e conseqüentemente, para todo $x \in F$ existe $\beta_x \in \Lambda$ tal que $|f_\alpha(x) - f(x)| < \epsilon$, para todo $\alpha \geq \beta_x$. Como Λ é um conjunto dirigido, quaisquer dois elementos β_{x_i} e β_{x_j} (com x_i e x_j em F), têm um majorante em Λ . Assim sendo, e como a relação de pré-ordem

em Λ é transitiva, deve ser claro que existe $m \in \Lambda$ tal que majora todos os elementos β_x . Observe-se que $f_\alpha \in B_f(\epsilon, F)$ para todo $\alpha \geq m$. Logo, $f_\alpha \rightarrow f$ em X^* .

2) Sejam $f_1 \neq f_2$ em X^* . Então existe $x \in X$ tal que $f_1(x) \neq f_2(x)$ e como \mathbb{R} é Hausdorff, sejam $U \in N_{f_1(x)}$ e $V \in N_{f_2(x)}$ disjuntos. Assim, $\Phi_x^{-1}(U) \in N_{f_1}$ e $\Phi_x^{-1}(V) \in N_{f_2}$ são disjuntos e X^* é Hausdorff. \square

Teorema 3 (*Banach-Alaoglu*) *Suponha-se X^* munido com a topologia fraca*. Então, $B_{X^*} = \{f \in X^* : \|f\| \leq 1\}$ é um conjunto compacto.*

Prova: Defina-se $D_x = \{\lambda \in \mathbb{R} : |\lambda| \leq \|x\|\}$, um conjunto compacto de \mathbb{R} . Seja $D = \prod_{x \in X} D_x$ na topologia produto, ainda compacto pelo Teorema de Tychonoff. Defina-se agora $\Psi : B_{X^*} \rightarrow D$ tal que $\Psi(f) = (f(x))_{x \in X}$. Note-se que Ψ está bem definido pois $|f(x)| \leq \|f\| \|x\|$ para $f \in X^*$, logo $\Psi(f) \in D$. Note-se ainda que Ψ é obviamente injectiva. Além disso, Ψ é contínua pois dada rede $f_\alpha \rightarrow f$ na topologia fraca*, vimos que $f_\alpha(x) \rightarrow f(x)$ para todo $x \in X$. Mas isto é a convergência na topologia produto em D e como tal, $\Psi(f_\alpha) \rightarrow \Psi(f)$. De forma muito análoga, verificamos que a inversa de Ψ é contínua, já que $(f_\alpha(x))_{x \in X} \rightarrow (f(x))_{x \in X}$ se e só se $f_\alpha(x) \rightarrow f(x)$ para todo o $x \in X$, pois D está na topologia produto. Mas isto é o mesmo que $f_\alpha \rightarrow f$ na topologia fraca*. Concluimos que Ψ é um homeomorfismo de B_{X^*} em D e como D é compacto, resta-nos provar que $\Psi(B_{X^*})$ é um conjunto fechado de D . Ora, seja $(f_n(x))_{x \in X} \rightarrow g$. Como D está munido com a topologia produto, $g = (\lim_n f_n(x))_{x \in X}$. Assim, tome-se $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $x \mapsto \lim_n f_n(x)$. Torna-se claro que $\Psi(f) = g$ e que $\|f\| \leq 1$. \square

3 O Teorema de Banach-Mazur

Nesta secção provamos o Teorema de Banach-Mazur, ver [2], que diz que qualquer espaço normado X separável (i.e. existe um conjunto numerável denso em X), pode ser mergulhado isometricamente em $C[0, 1]$. É inequivocamente um resultado profundo e poderoso, que *reduz* o estudo de um espaço normado separável qualquer, ao estudo de um espaço de funções contínuas num intervalo compacto de \mathbb{R} . Começamos com um lema que é consequência do Teorema de Banach-Alaoglu, que será posteriormente refinado por um intermediário talvez algo surpreendente - o Conjunto de Cantor - até culminar no aguardado Teorema de Banach-Mazur.

Teorema 4 *Seja X um espaço normado. Então, existe uma isometria entre X e $C(K)$, para algum compacto e Hausdorff K .*

Prova: Basta tomar $K = B_{X^*}$, compacto pelo Teorema de Banach-Alaoglu e Hausdorff quando munido com a topologia fraca*. Considere-se $\Phi : X \rightarrow C(K)$ tal que $x \mapsto \Phi_x$, com $\Phi_x : K \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\Phi_x(f) = f(x)$. Note-se que de acordo com a Definição 1 e as considerações que se lhe seguem, de facto $\Phi_x \in C(K)$. Além disso, Φ_x é claramente linear e temos que Φ é uma isometria, uma vez que $\|\Phi(x)\| = \sup_{\|f\|=1} \{|f(x)|\} = \|x\|$, onde a última igualdade é uma consequência do Teorema de Hanh-Banach. \square

Lema 5 *Seja X um espaço normado e separável. Então, B_{X^*} é metrizável.*

Prova: Seja $\{x_n\}$ um subconjunto denso e numerável de X . Assim, para $x^*, y^* \in B_{X^*}$, defina-se $d(x^*, y^*) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(x^* - y^*)(x_n)|}{2^n}$. Como $\{x_n\}$ é denso, d define uma métrica. É evidente que $d(x^*, y^*) \geq 0$ e que d é simétrica. Não é difícil provar a desigualdade triangular e por fim, $d(x^*, y^*) = 0$ se e só se $x^* = y^*$ e aqui tiramos partido da separabilidade de X . De facto, se $d(x^*, y^*) = 0$, é porque $|(x^* - y^*)(x_n)| = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, dado $z \in X$ qualquer, como $\{x_n\}$ é denso, existe uma subsucessão de $\{x_n\}$, que continuamos a designar por $\{x_n\}$, tal que $x_n \rightarrow z$ e, portanto, $x^*(z) = \lim_n x^*(x_n) = \lim_n y^*(x_n) = y^*(z)$. Assim, $x^* = y^*$. Resta provar que a topologia induzida por d coincide com a topologia fraca*.

O objectivo será provar que aplicação identidade id entre B_{X^*} com a topologia fraca* e B_{X^*} com a topologia induzida por d , é na verdade um homeomorfismo. Dada a compacidade do primeiro espaço topológico pelo Teorema de Banach-Alaoglu e dado o facto de que o segundo espaço é Hausdorff, por ser métrico, resta apenas provar que id é contínua¹. Observe-se que $d(x^*, y^*) \leq \max_{1 \leq n \leq M} |(x^* - y^*)(x_n)| \sum_{n=1}^M \frac{1}{2^n} + 2 \sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$, uma vez que $\|x^* - y^*\| \leq 2$. Assim, concluímos que $d(x^*, y^*) < \max_{1 \leq n \leq M} |(x^* - y^*)(x_n)| + 2^{-M+1}$.

Seja $x^* \in X^*$ e fixe-se $\epsilon > 0$. Escolha-se M tal que $2^{-M+1} < \frac{\epsilon}{2}$. Atendendo às considerações feitas após a Definição 1, o conjunto $N_{x^*}^{1, \dots, M} = \{y^* \in X^* : |(y^* - x^*)(x_i)| < \epsilon/2, i \in \{1, \dots, M\}\}$ é uma base de vizinhança de x^* . Assim, como $N_{x^*}^{1, \dots, M} \cap B_{X^*} \subset \{y^* \in B_{X^*} : d(x^*, y^*) < \epsilon\}$, conclui-se que a aplicação id é contínua. \square

Os dois lemas anteriores implicam o seguinte resultado.

Corolário 6 *Dado X espaço normado e separável, então existe uma isometria entre X e $C(K)$, com K compacto e metrizável.*

¹Uma aplicação bijectiva e contínua de um espaço compacto para um espaço Hausdorff é necessariamente um homeomorfismo.

Antes de provar o próximo lema, recorde-se que um conjunto compacto e metrizável tem base numerável e portanto é separável.

Lema 7 *Seja K um espaço compacto e metrizável. Então K é homeomorfo a um subespaço fechado de $[0, 1]^{\mathbb{N}}$.*

Prova: Seja $\{x_n\}$ um subconjunto numerável e denso em K (pelos comentários anteriores, sabemos que existe). Observe-se que podemos considerar, sem perda de generalidade, que a métrica d em K satisfaz $d(x, y) \leq 1$. Assim sendo, defina-se $\Psi : K \rightarrow [0, 1]^{\mathbb{N}}$ tal que $x \mapsto (d(x, x_n))_{n \in \mathbb{N}}$. Como cada componente de Ψ é contínua e $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ está munido com a topologia produto, temos que Ψ é contínua. Para provar que $K \approx \Psi(K) \subset [0, 1]^{\mathbb{N}}$, como K é compacto e $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ é Hausdorff, resta provar que Ψ é injectiva. Para estabelecer este facto, tiramos partido de que $\{x_n\}$ é denso em K : seja $\Psi(x) = \Psi(y)$. Como tal, para todo $n \in \mathbb{N}$ temos que $d(x, x_n) = d(y, x_n)$ e portanto, como existe uma subsucessão $x_m \rightarrow x$ em K , concluimos que $x_m \rightarrow y$ e como o limite é único, uma vez que K é Hausdorff (pois é métrico), logo $x = y$. \square

Já conseguimos relacionar um espaço normado e separável X com $C(K)$, onde K é compacto e métrico. Além disso, já conseguimos relacionar K com $[0, 1]^{\mathbb{N}}$. Suponha-se, por um momento, que sabíamos que existe uma função contínua f tal que $K = f([0, 1])$. Então, certamente que $C(K)$ seria isométrico a um subespaço de $C([0, 1])$. É nesta fase que o Conjunto de Cantor Δ se revela central, servindo de *tradução contínua* entre os mundos de $[0, 1]$ e de $[0, 1]^{\mathbb{N}}$. A característica do Conjunto de Cantor Δ que o torna importante neste momento é o facto de que $\Delta \approx \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. É fácil de entender este facto se pensarmos num elemento de Δ como uma sucessão de zeros e dois, provenientes da expansão ternária.

Lema 8 $[0, 1] = f(\Delta)$, com f contínua².

Prova: Basta considerar a aplicação $f : \Delta \rightarrow [0, 1]$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^{n+1}}$, onde um elemento genérico do Conjunto de Cantor é da forma $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$ com $a_n \in \{0, 2\}$ para todo o $n \in \mathbb{N}$. Por vezes, f é designada por *função de Cantor-Lebesgue*. \square

Concluimos assim que $C([0, 1])$ é isométrico a um subespaço (fechado) de $C(\Delta)$. De facto, defina-se $\Psi : C([0, 1]) \rightarrow C(\Delta)$ tal que $\Psi(g) = g \circ f$, onde f

²É fácil de mostrar que Δ é compacto. Assim, como $[0, 1] = f(\Delta)$ e f é contínua, concluimos que $[0, 1]$ é compacto. Temos assim uma prova alternativa do Teorema de Heine-Borel.

é a função do Lema 8. É imediato que Ψ é linear e que é uma isometria, pois $\|g\| = \sup_{x \in [0,1]} \{g(x)\} = \sup_{k \in \Delta} \{(g \circ f)(k)\} = \|g \circ f\| = \|\Psi(g)\|$. Além disso, $\Psi(C([0, 1]))$ é fechado: seja $\{h_n\} \in \Psi(C([0, 1]))$ tal que $h_n \rightarrow h$, com $h_n = g_n \circ f$. Ora se $g_n \circ f \rightarrow h$, temos que $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é Cauchy e portanto $g = \lim g_n$ existe, uma vez que $C([0, 1])$ é um espaço de Banach. Além disso, como a convergência é uniforme, $g \in C([0, 1])$. Assim, $h = g \circ f$ ou seja, $h = \Psi(g)$.

Lema 9 $[0, 1]^{\mathbb{N}} = f(\Delta)$, com f contínua.

Prova: Recordemos que \mathbb{N} admite uma partição infinita numerável em subconjuntos infinitos numeráveis, digamos $\mathcal{P} = \{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Para cada elemento $I_n \subset \mathbb{N}$ de \mathcal{P} , como $|I_n| = |\mathbb{N}|$ (onde $|A|$ designa o cardinal do conjunto A) temos que $\Delta \approx \{0, 1\}^{|I_n|}$. Assim sendo, pelo Lema 8 existem funções contínuas $f_n : \{0, 1\}^{|I_n|} \rightarrow [0, 1]$ tais que $f_n(\{0, 1\}^{|I_n|}) = [0, 1]$. Defina-se então $f : \Delta \rightarrow [0, 1]^{\mathbb{N}}$ dada por $f(x) = (f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$, claramente contínua na topologia produto, uma vez que cada componente f_n é contínua. \square

Voltamos agora à tentativa de relacionar um conjunto compacto e métrico K com o Conjunto de Cantor.

Teorema 10 *Qualquer espaço compacto e métrico K é a imagem de Δ por uma aplicação contínua.*

Prova: Pelo Lema 7, já sabemos que K é homeomorfo a um subespaço fechado de $[0, 1]^{\mathbb{N}}$. Assim, pelo Lema 9, K é a imagem de Δ por uma aplicação contínua de algum subconjunto fechado. Deste modo, se provarmos que cada fechado de Δ fôr a imagem de Δ por uma aplicação contínua, temos que K é imagem de Δ por uma aplicação contínua, por simples composição. Seja então $F \subset \Delta$ um fechado. Dado $x \in \Delta$, note-se que $d(x, F) = \inf_{y \in F} \{d(x, y)\}$ é atingido por algum y_0 , uma vez que F é um subespaço fechado de Δ . Considere-se a função contínua auxiliar $d_x : F \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $d_x(z) = d(x, z)$.³ Observe-se que $Y = d_x^{-1}(d(x, F))$ é um subconjunto fechado de Δ e como tal, compacto. Assim, existe $y_0 = \min_{y \in Y} \{d(x, y)\}$. Definimos então $\varphi : \Delta \rightarrow F$ tal que $\varphi(x) = y_0$. Assim sendo, φ é contínua: seja $x_n \rightarrow x$ e como F é compacto (e portanto, como Δ é métrico, F é sequencialmente compacto), seja sem perda de generalidade, $\varphi(x_n) \rightarrow z \in \Delta$. Então, $d(x_n, \varphi(x_n)) \rightarrow d(x, z)$ e $d(x_n, \varphi(x_n)) = d(x_n, F) \rightarrow d(x, F)$. Ora, $d(x, F) = d(x, y_0)$ e como tal, $y_0 = z$. Assim, $\varphi(x_n) \rightarrow z = \varphi(x)$. \square

³Estamos a usar a métrica $d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n - b_n|}{3^n}$, onde a_n e b_n são os coeficientes da expansão ternária de x e de y respectivamente.

Corolário 11 *Se K é compacto e métrico, $C(K)$ é isométrico a um subespaço de $C(\Delta)$.*

Concluimos que $C(\Delta)$ é *universal* - no sentido explicitado no corolário anterior - para a classe $C(K)$, com K compacto e métrico. Notamos agora que dado $f \in C(\Delta)$, pelo Teorema da Extensão de Tietze, existe um prolongamento de f em $C([0, 1])$. No entanto, vamos prolongar f de uma forma particular, que nos permitirá dar os últimos passos na prova do Teorema de Banach-Mazur. Ora o complementar de Δ em $[0, 1]$ é uma união numerável de abertos disjuntos I_n . Assim, temos $I_n =]a_n, b_n[$ com $a_n, b_n \in \Delta$. Basta ligar $f(a_n)$ e $f(b_n)$ por uma recta e temos extensão de $f \in C(\Delta)$, uma aplicação $f^+ \in C[0, 1]$. Além disso, $\sup_{0 \leq x \leq 1} |f^+(x)| = \sup_{x \in \Delta} |f(x)|$ e dados $f, g \in C(\Delta)$ é imediato verificar que $(f+g)^+ = f^+ + g^+$. Usando o Corolário 11, temos o seguinte resultado.

Lema 12 *1) Existe uma extensão de $C(\Delta)$ para $C([0, 1])$, que é isometria linear.*

2) Seja K compacto e métrico. Então, $C(K)$ é isométrico a um subespaço de $C([0, 1])$.

Estamos por fim em condições de deduzir como simples corolário, o Teorema de Banach-Mazur.

Teorema 13 (*Banach-Mazur*) *Seja X um espaço normado e separável. Então, existe uma isometria entre X e um subespaço de $C([0, 1])$.*

Prova: Pelo Corolário 6, existe uma isometria $i_1 : X \rightarrow C(K)$, com K compacto e métrico. Pelo Lema 12, existe uma isometria $i_2 : C(K) \rightarrow C([0, 1])$. Basta tomar a isometria $i : X \rightarrow C([0, 1])$, tal que $i = i_2 \circ i_1$. \square

4 Teorema de Banach-Stone

Nesta última secção, esboçamos a prova de uma versão do Teorema de Banach-Stone, e.g. [7]. Este resultado estabelece de forma muito precisa a relação profunda entre equivalência de espaços compactos e Hausdorff K (onde naturalmente se quer dizer que K_1 e K_2 são equivalentes se forem homeomorfos) e os respectivos espaços $C(K)$ (onde se consideram $C(K_1)$ e $C(K_2)$ equivalentes se forem isométricos). Vale a pena mencionar que Banach provou uma versão mais fraca deste teorema em 1932, considerando apenas espaços métricos e compactos K . Em 1937, Stone provou o caso geral [7].

Teorema 14 (*Banach-Stone*) *Seja K_1 e K_2 espaços compactos de Hausdorff. Então $C(K_1)$ e $C(K_2)$ são isométricos se e só se K_1 e K_2 são homeomorfos. Mais, uma qualquer isometria linear $T : C(K_1) \rightarrow C(K_2)$ é da forma*

$$(Tf)(k_2) = a(k_2)(f \circ h)(k_2), \quad k_2 \in K_2$$

onde $h : K_2 \rightarrow K_1$ é um homeomorfismo e $a : K_2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua tal que $|a(k_2)| = 1$ para cada $k_2 \in K_2$.

Os próximos lemas estabelecem a prova do Teorema 14.

Lema 15 *Sejam K e L espaços compactos e Hausdorff. Seja $h : K \rightarrow L$, um homeomorfismo. Então, $T : C(L) \rightarrow C(K)$ tal que $T(f) = f \circ h$, é uma isometria linear sobrejectiva.*

Prova: Deve ser claro que T é uma aplicação linear bem definida. Além disso, $\|T(f)\| = \sup\{|f(h(k))| : k \in K\} \leq \sup\{|f(l)| : l \in L\} = \|f\|$. Como h é sobrejectiva, temos que $\|T(f)\| = \|f\|$ e portanto, T é uma isometria. Resta provar que T é sobrejectiva: Sendo h injectiva, K compacto e L Hausdorff, temos que h restrito a K é um homeomorfismo. Em particular, dado $g \in C(K)$ temos que $g \circ h^{-1} : h(K) \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua. Por outro lado, como L é Hausdorff e $h(K)$ é compacto, temos que $h(K) \subset L$ é fechado. Assim, pelo Teorema da Extensão de Tietze, existe $f \in C(L)$ tal que $f(x) = (g \circ h^{-1})(x)$ para $x \in h(K)$. Logo, $T(f) = g$. \square

Dado um espaço compacto e Hausdorff K , designamos os *funcionais de avaliação* por δ_x , isto é as aplicações $\delta_x : C(K) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\delta_x(f) = f(x)$. É fácil de verificar que $i : K \hookrightarrow C(K)^*$ tal que $i(x) = \delta_x$ constitui um mergulho. Designamos ainda o conjunto dos *pontos de extremo* de um conjunto convexo K , por $ext(K)$ ⁴. Se $T : K_1 \rightarrow K_2$ é uma isometria sobrejectiva, então $T(ext(B_{K_1})) = ext(B_{K_2})$, onde B_{K_1} e B_{K_2} designam as bolas unitárias em K_1 e em K_2 . Recordamos ainda que se K é compacto e Hausdorff, então $ext(B_{C(K)^*}) = \{^+\delta_x, x \in K\}$.

Lema 16 *Sejam K_1 e K_2 espaços compactos e Hausdorff e $T : C(K_1) \rightarrow C(K_2)$ uma isometria linear sobrejectiva. Então, T é da forma $T(f)(k_2) = a(k_2)(f \circ h)(k_2)$, onde $h : K_2 \rightarrow K_1$ é um homeomorfismo e $|a(k_2)| = 1$, com $a : K_2 \rightarrow \mathbb{R}$. Em particular, K_1 e K_2 são homeomorfos (cf. [8]).*

⁴Teorema de Krein-Milman: Se X é um espaço vectorial Hausdorff e localmente convexo e $C \subset X$ é um subconjunto não vazio, compacto e convexo, então $ext(C) \neq \emptyset$.

Prova: Seja $T : C(K_1) \rightarrow C(K_2)$, uma isometria linear sobrejectiva. Então, o operador adjunto de Banach $T^* : C(K_2)^* \rightarrow C(K_1)^*$, i.e. $(T^*\phi)f = \phi(T(f))$ com $\phi \in C(K_2)^*$, $f \in C(K_1)$, é ainda uma isometria linear sobrejectiva. Assim, T^* constitui uma bijecção entre $\text{ext}(B_{C(K_2)^*})$ e $\text{ext}(B_{C(K_1)^*})$. Para cada $k \in K_2$, seja $\delta_k \in \text{ext}(B_{C(K_2)^*})$. Assim, existe $a(k) = \pm 1$ tal que $T^*(\delta_k) = a(k)\delta_{h(k)}$. Obtêm-se aplicações $a : K_2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $h : K_2 \rightarrow K_1$, como sugerido pela notação. Resta-nos pois provar que a é contínua e que h é um homeomorfismo. Os detalhes são omitidos, podendo ser consultados em [8]. Por fim, a partir de simples manipulações, podemos concluir que $Tf(k) = a(k)(f \circ h)(k)$. \square

Agradecimentos: Agradecemos as sugestões do revisor.

Referências

- [1] L. Alaoglu, “Weak topologies of normed linear spaces”, *Annals of Mathematics*, Vol. **41** (1940), pp. 252–267.
- [2] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Chelsea Publishing Co., New York, vii+254, 1955.
- [3] N. L. Carothers, *A Short Course on Banach Space Theory*, London Mathematical Society Student Texts, Vol. **64**, 2004.
- [4] John B. Conway, *A course in functional analysis*, Segunda Edição. GTM, Vol. **96**. Springer-Verlag, New York, pp. xvi+399, 1990.
- [5] H. E. Lacey, *The Isometric Theory of Classical Banach Spaces*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Vol. **208**, Springer-Verlag, New York, 1974.
- [6] P. R. Pinto, *Texto de apoio de Análise Funcional*, IST, 2013.
- [7] M. Stone, “Applications of the theory of Boolean rings general topology”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol. **41** (1937), pp. 375–481.
- [8] M. I. Garrido, J. A. Jaramillo, “Variations on the Banach-Stone Theorem”, *Extracta Mathematicae*, Vol. **17** No. 3, 2002.

MOVIMENTO E FORMA

*Maria Pires de Carvalho, Ana Cristina Oliveira*¹

Departamento de Matemática & Centro de Matemática
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
Rua do Campo Alegre, 687, 4169-007 Porto
mpcarval@fc.up.pt

Associação Atractor (www.atractor.pt)
Rua de Ceuta, 118, 5º, 4050-190 Porto
amolivei@fc.up.pt

Resumo: Um sistema articulado é uma cadeia finita de hastes rígidas, com algumas junções fixas e outras móveis, que funciona movendo os nós sob algum constrangimento. O espaço de configuração de um tal sistema é a união de todas as suas posições permitidas. Descreveremos os espaços de configuração de quadriláteros e de pentágonos articulados no plano, sendo utilizada uma abordagem construtiva que nos permitirá também definir, em termos do mecanismo, uma topologia natural no espaço de configuração e alguns invariantes topológicos. Para além de conjuntos degenerados, obtaremos cada superfície compacta, conexa, orientável e sem bordo como espaço de configuração de um mecanismo devidamente construído.

Abstract: A mechanical linkage consists of a finite number of rods joined together by hinges, some of which are pinned down with respect to a fixed frame, so that the system is free to move in a plane. The configuration space of a linkage is the set of all its admissible positions. We will construct the configuration spaces of planar quadrilaterals and pentagons, endow them with a suitable topology and define a set of invariants. Apart from a few degenerate spaces, we will obtain any connected compact oriented closed surface as the configuration space of an appropriate mechanism.

palavras-chave: Mecanismo; espaço de configuração; topologia quociente.

keywords: Linkage; configuration space; quotient topology.

1 Introdução

Para quem não conheça o conceito de superfície, ou nunca se tenha questionado sobre quantos tipos topológicos de superfícies há, o que é essencial no

¹As autoras agradecem a Manuel Arala Chaves e a Maria Dedò os comentários que em muito melhoraram este texto.

conteúdo deste texto é a noção de espaço de configuração de um mecanismo e o modo como é possível transferir informação topológica de um conjunto de pontos e hastes em movimento no plano para um espaço abstracto onde se descrevem as posições admissíveis do sistema articulado, cuja representação conduz a modelos tão regulares como uma esfera ou um toro. A quem já tenha estudado superfícies e o respectivo Teorema de Classificação [3, 1, 7], o texto apresenta outro modo de construir esses espaços e de definir alguns dos invariantes topológicos que lhes estão associados, apelando essencialmente ao uso de relações de ordem entre comprimentos de hastes.

O processo indutivo, sugerido em [5], de construção dos espaços de configuração assegura que a lista desses espaços contém a família completa das superfícies orientáveis. Cada superfície compacta, conexa, sem bordo e orientável surge neste texto associada a um sistema de hastes articuladas, e as noções de genus e de componente conexa são expressas numa linguagem simples mas rigorosa. Observe-se, porém, que o argumento clássico para classificar as superfícies orientáveis começa com uma esfera e justifica matematicamente um procedimento que permite costurar ansas (isto é, cilindros) à esfera depois de se lhe retirarem círculos disjuntos (em número finito par). Com os mecanismos, o processo natural inicia-se numa esfera e num toro (obtidos com um mesmo pentágono articulado a que se variam os comprimentos das hastes) e indica como unir toros sucessivos, de que se excluem dois ou quatro círculos devidamente posicionados, para obter toros de genus g qualquer. Não se analisou neste texto se os mecanismos apresentados cumprem a função de construir espaços de configuração de genus g com esforço mínimo, em número de pontos e hastes.

Em [6, 10, 2, 9], os autores apresentam uma descrição dos espaços de configuração obtidos com pentágonos articulados ditos genéricos usando métodos distintos do utilizado neste texto para os identificar (como a Teoria de Morse ou fibrações). Em [4], pode aprender-se a construir um mecanismo gigantesco cujo espaço de configuração contém uma componente conexa que é o plano projectivo, uma garrafa de Klein ou outra superfície compacta, sem bordo e não orientável. Ao contrário do caso orientável, não se conhece um mecanismo cujo espaço de configuração tenha apenas uma componente conexa e que seja precisamente uma destas superfícies.

Seria interessante, e uma motivação adicional para o estudo dos mecanismos e respectivos espaços de configuração, obter reformulações elementares na linguagem dos mecanismos de propriedades relevantes de superfícies, como o Teorema da Esfera Cabeluda, o Teorema da Curva de Jordan, o Teorema de Euler para Poliedros ou o Teorema do Ponto Fixo de Brower.

Além disso, parte do que aqui se analisou é susceptível de generalização a variedades de dimensão superior. Por exemplo, é fácil descrever um mecanismo que construa um toro de dimensão 3 como o produto de três circunferências, $S^1 \times S^1 \times S^1$; e o processo de empilhar camadas que utilizámos, para obter as superfícies a partir de curvas, sugere que se investigue a viabilidade de um método geral que, empilhando superfícies ou apelando a fibrações, permita obter outras variedades de dimensão 3 como espaço de configuração de algum mecanismo.

Na maioria dos casos, este processo de construção de superfícies com mecanismos não permite fabricar modelos físicos, manipuláveis, porque as hastes apropriadas têm comprimentos demasiado grandes. Por isso, a segunda autora deste texto construiu um módulo virtual que, fornecendo uma lista sucinta de instruções e informações, permite uma aprendizagem interactiva do funcionamento de um mecanismo e do modo como as relações de ordem entre comprimentos de hastes determinam as características topológicas dos espaços de configuração. A programação das animações do módulo teve ainda como objectivo sincronizar as escolhas do utilizador com o movimento do mecanismo e a criação dos respectivos espaços de configuração. Neste contexto, o módulo interactivo serve também para sistematizar o que aqui se vai aprendendo, sugerindo-se aos leitores retornos oportunos a esse módulo. Está disponível em [8] e no site <http://www.atractor.pt/mat/MovimentoForma/pagini.html>

2 Mecanismos no plano

As estruturas articuladas que aqui consideraremos são versões planas de engenhos simples, mas capazes de tarefas complicadas, como os que encontramos em *robots*, na engrenagem das rodas de um comboio, nas suspensões das bicicletas, nas sanfonas das portas dos antigos elevadores, nos alicates de pressão, nos pantógrafos ou em cadeiras de balanço. Nesta secção, descreveremos formalmente o que se entende por um sistema de pontos e hastes articuladas no plano e estudaremos as suas posições possíveis.²

Definição 1. *Um conjunto de peças é um terno $\mathcal{M} = (\mathcal{V}, \mathcal{A}, d)$ constituído por:*

- *Um conjunto finito $\mathcal{V} = \mathcal{V}_F \cup \mathcal{V}_M$ de pontos, sendo $\mathcal{V}_F = \{V_1, \dots, V_m\}$, $\mathcal{V}_M = \{V_{m+1}, \dots, V_n\}$, $m, n \in \mathbb{N}$ e $n > m$.*

²Podemos testar os conceitos que apresentaremos através dos Exemplos 1 a 3 das páginas 1-3 do módulo virtual.

- Um conjunto finito de hastes

$$\mathcal{A} = \{[V_i V_j] : i, j \in \{1, \dots, n\} \text{ e } i \neq j\}$$

tal que, para quaisquer dois pontos V_k e V_ℓ de \mathcal{V} , existe um subconjunto $\{[V_k V_{i_1}], [V_{i_1} V_{i_2}], \dots, [V_{i_s} V_\ell]\}$ não-vazio em \mathcal{A} .

- Uma função $d : \mathcal{A} \mapsto \mathbb{R}^+$.

Se fixarmos um ponto $V \in \mathcal{V}_F$ e uma haste $H = [V_i V_j] \in \mathcal{A}$, diremos que H e V estão ligados se $V \in H$. Duas hastes $H_1 = [V_i V_j]$ e $H_2 = [V_k V_\ell]$ dizem-se unidas se $H_1 \cap H_2 = V_s$ para algum $s \in \{i, j, k, \ell\}$.

Definição 2. Um conjunto de peças $\mathcal{M} = (\mathcal{V}, \mathcal{A}, d)$ com $n > 2$ pontos é uma *cadeia* se tiver um arranjo cíclico, isto é, se

- $\mathcal{V}_F = \{V_1, V_2\}$.
- $\mathcal{V}_M = \{V_3, \dots, V_n\}$.
- $\mathcal{A} = \{[V_1 V_2], [V_2 V_3], \dots, [V_{n-1} V_n], [V_n V_1]\}$.

Uma cadeia pode ser vista como uma linha poligonal articulada que tem dois vértices adjacentes fixos. Os exemplos 1 e 3 do módulo virtual são cadeias.

Definição 3. Um conjunto de peças $\mathcal{M} = (\mathcal{V}, \mathcal{A}, d)$ é *realizável* se existir uma função $\mathcal{R} : \mathcal{V} \mapsto \mathbb{R}^2$ tal que, para todos os pares de pontos $V_i, V_j \in \mathcal{V}$, se tem

$$\|\mathcal{R}(V_i) - \mathcal{R}(V_j)\| = d([V_i V_j])$$

onde $\|\cdot\|$ designa a distância euclidiana em \mathbb{R}^2 . A imagem de \mathcal{R} é uma *realização* de \mathcal{M} .

Uma realização permite visualizar o conjunto de peças no plano como pontos unidos por segmentos de recta. Isso nem sempre é possível, como a cadeia com três pontos P_1, P_2, P_3 do plano cujas hastes medem $\|P_1 - P_2\| = 11$, $\|P_2 - P_3\| = 5$ e $\|P_3 - P_1\| = 3$.

Definição 4. Um *mecanismo* é um conjunto de peças realizável.

Para cada realização $\{\mathcal{R}(v) : v \in \mathcal{V}\}$ de um mecanismo $\mathcal{M} = (\mathcal{V}, \mathcal{A}, d)$, designaremos por pontos fixos os elementos de $\mathcal{R}(\mathcal{V}_F)$, por pontos móveis os de $\mathcal{R}(\mathcal{V}_M)$ e por hastes os de $\{[\mathcal{R}(V_i), \mathcal{R}(V_j)] : [V_i V_j] \in \mathcal{A}\}$, onde $[A, B]$ designa o segmento de recta que une A a B em \mathbb{R}^2 . Note-se que o comprimento de cada haste $[\mathcal{R}(V_i), \mathcal{R}(V_j)]$ é precisamente $d([V_i V_j])$. Como é irrelevante o lugar no plano onde os pontos fixos se situam, adoptaremos como equivalentes todas as versões isométricas (por isometrias que preservem a orientação) da união dos pontos fixos e das hastes de um mecanismo.

Exemplo 1. Seja $\mathcal{M} = (\mathcal{V}, \mathcal{A}, d)$, com $V_F = \{V_1, V_2\}$, $\mathcal{V}_M = \{V_3\}$, $\mathcal{A} = \{[V_1V_2], [V_2V_3], [V_3V_1]\}$ e $d : \mathcal{A} \mapsto \mathbb{R}^+$ tais que $d(a) = \sqrt{3}$ para todo $a \in \mathcal{A}$. Então a função $\mathcal{R} : \mathcal{V} \mapsto \mathbb{R}^2$ definida por

$$\mathcal{R}(V_1) = (1, 0), \quad \mathcal{R}(V_2) = \left(\cos \frac{2\pi}{3}, \sin \frac{2\pi}{3} \right), \quad \mathcal{R}(V_3) = \left(\cos \frac{4\pi}{3}, \sin \frac{4\pi}{3} \right)$$

é uma realização de \mathcal{M} .

2.1 Mecanismos em cadeia

Numa cadeia de peças com n pontos, representaremos por ℓ_1, \dots, ℓ_n as imagens por d dos elementos do conjunto $\{[V_1V_2], [V_2V_3], \dots, [V_nV_1]\}$.

Proposição 1. Uma cadeia de peças \mathcal{M} com n pontos é um mecanismo se e só se

$$\ell_i \leq \sum_{k=1, k \neq i}^n \ell_k \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Demonstração. Suponhamos que \mathcal{M} é um mecanismo e seja \mathcal{R} uma sua realização.³ Os elementos desta realização são vértices de uma linha poligonal plana e fechada, com lados de comprimentos ℓ_1, \dots, ℓ_n . Por isso, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, tem-se

$$\ell_i \leq \sum_{k=1, k \neq i}^n \ell_k.$$

Reciprocamente, sejam $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^2$ tais que $\|P_1 - P_2\| = \ell_1$. Uma vez que

$$\ell_1 \leq \sum_{k=2}^n \ell_k \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{n-1} \ell_k \geq \ell_n,$$

concluimos que existe $1 \leq j \leq n - 2$ tal que

$$\sum_{k=1}^j \ell_k \leq \sum_{k=j+1}^n \ell_k \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{j+1} \ell_k \geq \sum_{k=j+2}^n \ell_k. \quad (1)$$

Sejam $S_1 = \sum_{k=1}^j \ell_k$ e $S_2 = \sum_{k=j+2}^n \ell_k$. A condição (1) é equivalente a

$$S_1 \leq S_2 + \ell_{j+1} \quad \text{e} \quad S_1 + \ell_{j+1} \geq S_2.$$

³Sugerimos que não avance neste argumento sem explorar a animação da página [pag5.html](#) do módulo.

Se $S_1 = S_2 + \ell_{j+1}$, consideremos P_3, P_4, \dots, P_{j+1} na semi-recta com origem em P_1 e que passa em P_2 (que designamos por $\overline{P_1 P_2}$) de modo que:

$$\|P_2 - P_3\| = \ell_2, \quad \|P_3 - P_4\| = \ell_3, \dots \quad \text{e} \quad P_3 \notin \overline{P_2 P_1}, \quad P_4 \notin \overline{P_3 P_1}, \dots$$

Analogamente, sejam $P_{j+2}, P_{j+3}, \dots, P_n$ em $\overline{P_1 P_2}$ tais que $\|P_{j+1} - P_{j+2}\| = \ell_{j+1}$, $\|P_{j+2} - P_{j+3}\| = \ell_{j+2}$, etc., e $P_{j+2} \in \overline{P_{j+1} P_1}$, $P_{j+3} \in \overline{P_{j+2} P_1}$, etc. Assim, a função

$$\begin{aligned} \mathcal{R}: \mathcal{V} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ V_i &\rightarrow P_i \end{aligned}$$

é uma realização de \mathcal{M} .

Por um argumento semelhante se conclui que, se $S_1 + \ell_{j+1} = S_2$ ou $\ell_{j+1} = S_1 + S_2$, então \mathcal{M} é um mecanismo. Falta analisar o caso em que

$$S_1 < S_2 + \ell_{j+1}, \quad S_1 + \ell_{j+1} > S_2 \quad \text{e} \quad \ell_{j+1} < S_1 + S_2,$$

condições que indicam que S_1 , ℓ_{j+1} e S_2 são os comprimentos dos lados de um triângulo. Para obter uma realização de \mathcal{M} , tomemos P_{j+1} como sendo o ponto de $\overline{P_1 P_2}$ tal que $\|P_1 - P_{j+1}\| = S_1$, e P_{j+2} como um dos (dois) pontos do plano tais que

$$\|P_{j+2} - P_{j+1}\| = \ell_{j+1} \quad \text{e} \quad \|P_{j+2} - P_1\| = S_2.$$

De seguida, consideremos pontos P_3, P_4, \dots, P_j do segmento $[P_1, P_{j+1}]$, que une os pontos P_1 e P_{j+1} , tais que

$$\|P_2 - P_3\| = \ell_2, \quad \|P_3 - P_4\| = \ell_3, \dots$$

Finalmente, escolhamos $P_{j+3}, P_{j+4}, \dots, P_n$ em $[P_{j+2}, P_1]$ tais que

$$\|P_{j+2} - P_{j+3}\| = \ell_{j+2}, \quad \|P_{j+3} - P_{j+4}\| = \ell_{j+3}, \dots \quad \square$$

2.2 Espaço de configuração de um mecanismo

Dado um mecanismo \mathcal{M} , estamos interessados na união de todas as posições admissíveis às realizações de \mathcal{M} , isto é, dos sistemas articulados formados por m pontos fixos previamente escolhidos e que possuem $n-m$ junções entre as suas hastes como prescreve \mathcal{M} . Na verdade, queremos estabelecer um homeomorfismo entre este conjunto de posições, com uma topologia adequada, e um subconjunto de \mathbb{R}^N , para um natural N suficientemente elevado.

Seja $\mathcal{M} = (\mathcal{V}, \mathcal{A}, d)$ um mecanismo tal que V_1, \dots, V_m são pontos fixos e V_{m+1}, \dots, V_n são pontos móveis. Consideremos m pontos P_1, \dots, P_m do plano tais que $\|P_i - P_j\| = d([V_i V_j])$, para todo o $[V_i V_j] \in \mathcal{A}$ com V_i e V_j fixos.

Definição 5. O espaço de configuração de \mathcal{M} , que designaremos por $[\mathcal{M}]_{(P_1, \dots, P_m)}$ ou, mais abreviadamente, $[\mathcal{M}]$, é o conjunto, com a métrica induzida da métrica euclídeana em $(\mathbb{R}^2)^{n-m}$, dado por

$$\bigcup_{\mathcal{R}} \{(\mathcal{R}(V_{m+1}), \dots, \mathcal{R}(V_n)) \in (\mathbb{R}^2)^{n-m}\}$$

onde \mathcal{R} designa uma qualquer realização de \mathcal{M} tal que $\mathcal{R}(V_i) = P_i$ para todo o $i \in \{1, \dots, m\}$.

Note-se que a todo o m -uplo de pontos em \mathbb{R}^2 , digamos P_1, \dots, P_m , tal que $\|P_i - P_j\| = d([V_i V_j])$ para todo o $[V_i V_j] \in \mathcal{A}$ com $V_i, V_j \in \mathcal{V}_F$, está associado um espaço de configuração de \mathcal{M} . Contudo, até à Secção 7, interessar-nos-ão apenas espaços de configuração de mecanismos com dois pontos fixos e, neste caso, como veremos (Proposição 6), todos os espaços de configuração são homeomorfos. Até essa secção, falaremos do (único) espaço de configuração de \mathcal{M} .

2.3 Representação do espaço de configuração

Consideremos, a título de exemplo, um mecanismo M com um ponto fixo, V_1 , dois pontos móveis, V_2 e V_3 , e hastes $[V_1 V_2]$ e $[V_2 V_3]$. O seu espaço de configuração é o conjunto de pares de pontos do plano (P_2, P_3) tais que P_2 e P_3 são pontos móveis de uma qualquer realização do mecanismo. Nesse conjunto, consideremos a topologia induzida da métrica euclídeana de \mathbb{R}^4 . Tais pontos ficam completamente determinados por dois ângulos (μ, α) de $[-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$, onde α é o ângulo entre a direcção orientada $\overrightarrow{P_1 P_2}$ e a vertical, e μ entre $\overrightarrow{P_2 P_3}$ e a vertical, como indica a Figura 1. Será o quadrado $[-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$ uma representação adequada do espaço de configuração?

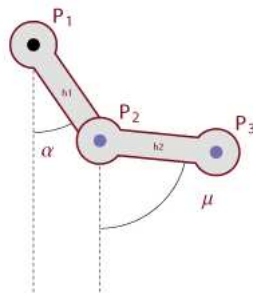


Figura 1: Ângulos α e μ .

Note-se que não há diferença, a nível do movimento do mecanismo e dos pontos que gera no espaço de configuração, no facto de α medir $-\pi$ ou π ; e a mesma situação ocorre com μ . Por esse motivo, para obtermos um modelo ajustado, precisamos de identificar, para qualquer $\mu \in]-\pi, \pi[$, os dois pontos $(\mu, -\pi)$ e (μ, π) e, analogamente, de entender como idênticos os dois pontos $(-\pi, \alpha)$ e (π, α) , para cada $\alpha \in]-\pi, \pi[$. Finalmente, temos ainda de identificar os quatro pontos $(-\pi, -\pi)$, $(-\pi, \pi)$, $(\pi, -\pi)$ e (π, π) .

No espaço quociente \mathcal{T} do quadrado com identificações, cada ponto representa uma e uma só posição do mecanismo. Contudo, há outra característica que pretendemos exigir do modelo: que a topologia que nele consideremos traduza correctamente a noção de proximidade entre pontos do espaço de configuração do mecanismo M . A topologia natural em \mathcal{T} é a topologia quociente, que é a maior família de abertos em \mathcal{T} que torna contínua a projecção do quadrado no espaço quociente [12]. Vejamos que ela é a topologia acertada para o espaço de configuração do mecanismo M .

Consideremos uma realização $\mathcal{R}_0 = (P_2, P_3)$ do mecanismo e o correspondente par de ângulos $(\mu, \alpha) \in \mathcal{T}$. Fixemos de seguida duas bolas abertas, \mathcal{B}_2 e \mathcal{B}_3 , centradas em P_2 e P_3 , respectivamente (Figura 2).

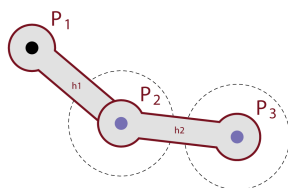


Figura 2: \mathcal{R}_0 , \mathcal{B}_2 e \mathcal{B}_3 .

O conjunto formado pelas realizações (Q_2, Q_3) de M tais que Q_2 e Q_3 estão contidos, respectivamente, em \mathcal{B}_2 e \mathcal{B}_3 , formam uma vizinhança \mathcal{W} de \mathcal{R}_0 . E, reciprocamente, qualquer vizinhança de \mathcal{R}_0 contém uma vizinhança deste tipo. Além disso, é possível encontrar uma vizinhança suficientemente pequena de $(\mu, \alpha) \in \mathcal{T}$ tal que todos os elementos desta vizinhança correspondem a realizações de M contidas em \mathcal{W} (Figura 3).

Reciprocamente, fixados um par $(\mu, \alpha) \in \mathcal{T}$, uma sua vizinhança U e a respectiva realização \mathcal{R}_0 do mecanismo M , existe uma vizinhança \mathcal{U} de \mathcal{R}_0 tal que toda a realização \mathcal{S} em \mathcal{U} corresponde a um par (μ_S, α_S) de U .

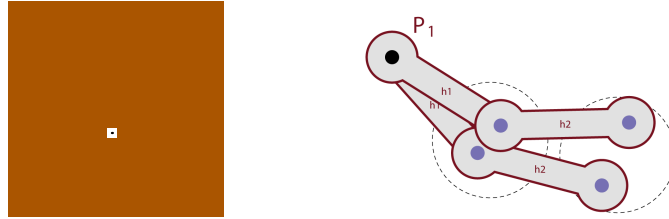


Figura 3: Vizinhança de (μ, α) , no quadrado e no mecanismo.

Conclusão: Um bom modelo para o espaço de configuração é o quadrado com as identificações que descrevemos; ou seja, é um toro.⁴

3 Propriedades dos espaços de configuração

Pretende-se agora reunir informação geral sobre o que podem ser os espaços de configuração dos mecanismos.

3.1 Mecanismos fixos

Em que circunstâncias o espaço de configuração de um mecanismo em cadeia se reduz a um ponto? Esperamos que uma tal rigidez resulte de uma relação desfavorável entre os comprimentos das hastes.⁵ E, de facto:

Proposição 2. *O espaço de configuração de um mecanismo em cadeia \mathcal{M} com n pontos é um conjunto com um só elemento se e só se existir $1 \leq i \leq n$ tal que $\ell_i = \sum_{k=1, k \neq i}^n \ell_k$.*

Demonstração. Se $\ell_i = \sum_{k=1, k \neq i}^n \ell_k$, então há apenas uma realização possível do mecanismo e, portanto, o espaço de configuração é constituído por um ponto. Quanto à implicação recíproca, sejam P_1 e P_2 pontos do plano tais que $\|P_1 - P_2\| = \ell_1$. Suponhamos, por absurdo, que $\ell_i \neq \sum_{k=1, k \neq i}^n \ell_k$, para todo o $i \in \{1, \dots, n\}$. Então, pela Proposição 1, tem-se $\ell_1 < \sum_{k=2}^n \ell_k$ e $\ell_n < \sum_{k=1}^{n-1} \ell_k$. Logo, existe $1 < j \leq n - 2$ tal que

$$\sum_{k=1}^j \ell_k \leq \sum_{k=j+1}^n \ell_k \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{j+1} \ell_k > \sum_{k=j+2}^n \ell_k.$$

⁴O Exemplo 5 do módulo, que consta da página [pag8.html](#), ilustra interactivamente este resultado.

⁵Sugere-se que consulte o Exemplo 4 do módulo, em [pag6.html](#).

Note-se, contudo, que, se se verificar a desigualdade estrita na primeira destas condições,

$$\sum_{k=1}^j \ell_k < \sum_{k=j+1}^n \ell_k,$$

então, como $\ell_{j+1} \neq \sum_{k=1, k \neq j+1}^n \ell_k$, os comprimentos

$$\sum_{k=1}^j \ell_k, \quad \ell_{j+1}, \quad \sum_{k=j+2}^n \ell_k$$

são lados de um triângulo, o que implica que o espaço de configuração possui, pelo menos, dois pontos distintos, correspondentes às realizações da Figura 4. Isto contradiz a hipótese de o espaço de configuração estar reduzido a um ponto. Devemos, portanto, ter

$$\sum_{k=1}^j \ell_k = \sum_{k=j+1}^n \ell_k.$$

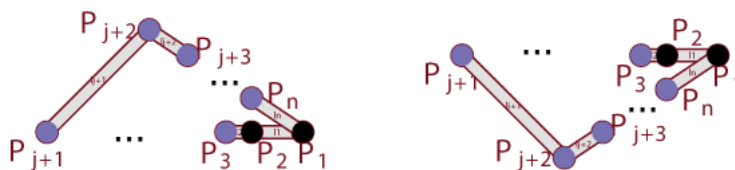


Figura 4: Duas realizações de um mecanismo.

Defina-se N^* como o máximo do conjunto

$$\left\{ \left(\ell_{j+1} - \sum_{k=j+2}^n \ell_k \right), \left(\ell_{j+2} - \sum_{k=j+1, k \neq j+2}^n \ell_k \right), \dots, \left(\ell_n - \sum_{k=j+1}^{n-1} \ell_k \right) \right\}$$

e consideremos λ tal que

$$\max \left\{ \left| \sum_{k=1}^{j-1} \ell_k - \ell_j \right|, N^* \right\} < \lambda < \sum_{k=1}^j \ell_k.$$

Os comprimentos

$$\sum_{k=1}^{j-1} \ell_k, \quad \ell_j, \quad \lambda$$

são lados de um triângulo, logo podemos considerar pontos $P_j \in \overline{P_1 P_2}$ e $P_{j+1} \neq Q_{j+1}$ tais que $\|P_1 - P_j\| = \sum_{k=1}^{j-1} \ell_k$ e, ainda,

$$\|P_j - P_{j+1}\| = \|P_j - Q_{j+1}\| = \ell_j \quad \text{e} \quad \|P_{j+1} - P_1\| = \|Q_{j+1} - P_1\| = \lambda.$$

Tomemos de seguida P_3, P_4, \dots, P_{j-1} em $[P_1 P_j]$ tais que

$$\|P_2 - P_3\| = \ell_2, \quad \|P_3 - P_4\| = \ell_3, \dots$$

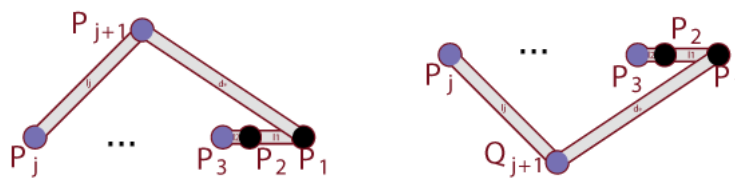


Figura 5: Duas realizações de \mathcal{M}' .

Consideremos agora a cadeia de peças \mathcal{M}' com $n - j$ hastes que se obtém de \mathcal{M} retirando os pontos V_2, V_3, \dots, V_j e as hastes a eles associadas, passando o ponto móvel V_{j+1} a fixo e acrescentando-se uma nova haste $[V_1 V_{j+1}]$ de comprimento λ . Uma vez que $\lambda > N^*$ e que $\lambda < \sum_{k=j+1}^n \ell_k$, este conjunto de peças é também um mecanismo. E, portanto, encontrámos duas realizações para \mathcal{M}' :

$$R_1 = \{P_{j+1}, P_{j+2}, \dots, P_n, P_1\} \quad \text{e} \quad R_2 = \{Q_{j+1}, Q_{j+2}, \dots, Q_n, P_1\}.$$

Deste modo, exibimos dois elementos distintos do espaço de configuração do mecanismo inicial, nomeadamente

$$\{P_3, \dots, P_j, P_{j+1}, P_{j+2}, \dots, P_n\} \quad \text{e} \quad \{P_3, \dots, P_j, Q_{j+1}, Q_{j+2}, \dots, Q_n\},$$

o que contradiz o facto de o espaço de configuração conter apenas um ponto. E, portanto, devemos ter

$$\left\{ i \in \{1, \dots, n\} : \ell_i = \sum_{k=1, k \neq i}^n \ell_k \right\} \neq \emptyset. \quad \square$$

3.2 Mecanismos com três pontos

A Proposição seguinte informa que, para obtermos espaços de configuração interessantes, devemos trabalhar com mecanismos com mais do que três pontos.

Proposição 3. *O espaço de configuração de um mecanismo em cadeia em que o cardinal de \mathcal{V} é 3 reduz-se a um ou dois pontos.*

Demonstração. Com efeito, ou existe $i \in \{1, 2, 3\}$ tal que $\ell_i = \sum_{k=1, k \neq i}^3 \ell_k$, caso em que a Proposição 2 determina que o espaço de configuração é singular; ou $\ell_i < \sum_{k=1, k \neq i}^3 \ell_k$, para todo o $i \in \{1, 2, 3\}$ e, portanto, ℓ_1, ℓ_2 e ℓ_3 são lados de um triângulo. Neste caso, dados dois pontos, P_1 e P_2 , de \mathbb{R}^2 tais que $\|P_1 - P_2\| = \ell_1$, existem duas, e apenas duas, escolhas para um ponto P_3 que pertença ao espaço de configuração: é o terceiro ponto de um dos dois triângulos com lados de comprimentos ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 e tendo P_1 e P_2 como vértices. \square

3.3 Polígonos articulados

Para determinarmos o espaço de configuração de um polígono articulado, precisamos de identificar o contributo de cada componente móvel, enquanto controlamos a posição relativa de todas as outras partes, fixas e móveis, do mecanismo. Se uma haste com base num ponto fixo Q fosse, de resto, inteiramente livre, traçaria no plano uma circunferência centrada em Q e de raio igual ao comprimento da haste. É a junção a outras hastes que condiciona esse movimento e, portanto, restringe o que afinal o espaço de configuração contém.

Consideremos um mecanismo em cadeia $\mathcal{M} = (\mathcal{V}, \mathcal{A}, d)$ com $n > 3$ pontos e $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^2$ tais que $\|P_1 - P_2\| = \ell_1$. Denotemos por:

- C_α , o ponto da circunferência de centro P_2 e raio ℓ_2 tal que $\overrightarrow{P_2 C_\alpha}$ faz um ângulo orientado $\alpha \in [0, 2\pi]$ com $\overrightarrow{P_2 P_1}$.

- $d_{\mathcal{M}}$, a função

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{M}} : [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}_0^+ \\ \alpha &\rightarrow \|P_1 - C_\alpha\|. \end{aligned}$$

que mede quão amplo pode ser o movimento conjunto das peças do mecanismo.

- $\mathcal{D}_{\mathcal{M}}$, o conjunto

$$\{\alpha \in [0, 2\pi] : \exists \text{ realização } \mathcal{R} : C_\alpha \equiv \mathcal{R}(V_3), \mathcal{R}(V_1) \equiv P_1, \mathcal{R}(V_2) \equiv P_2\}.$$

- $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$, o conjunto $[0, \pi] \cap \mathcal{D}_{\mathcal{M}}$.

Proposição 4. *Nas condições enunciadas, tem-se:*

(a) $d_{\mathcal{M}}(\alpha) = d_{\mathcal{M}}(2\pi - \alpha)$ para todo o $\alpha \in [0, 2\pi]$.

(b) $d_{\mathcal{M}|_{[0, \pi]}}$ é estritamente crescente e contínua.

(c) $d_{\mathcal{M}}$ tem um mínimo global em 0, com valor igual a $|\ell_1 - \ell_2|$, e um máximo global, atingido em π , de valor $\ell_1 + \ell_2$.

(d) $\alpha \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}}$ se e só se

$$d_{\mathcal{M}}(\alpha) \leq \sum_{k=3}^n \ell_k \quad e \quad d_{\mathcal{M}}(\alpha) \geq \max \left\{ \left[\ell_i - \sum_{k=3, k \neq i}^n \ell_k \right] : 3 \leq i \leq n \right\}.$$

(e) Sejam $\alpha_1, \alpha_0 \in [0, \pi]$ tais que $0 < \alpha_1 < \alpha_0 < \pi$. Então:

– α_0 é o máximo de $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ se e só se $d_{\mathcal{M}}(\alpha_0) = \sum_{k=3}^n \ell_k$.

– α_1 é o mínimo de $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ se e só se

$$d_{\mathcal{M}}(\alpha_1) = \max \left\{ \left[\ell_i - \sum_{k=3, k \neq i}^n \ell_k \right] : 3 \leq i \leq n \right\}.$$

(f) $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ é um intervalo fechado.

(g) $\mathcal{D}_{\mathcal{M}} = [\alpha_1, \alpha_0] \cup [2\pi - \alpha_0, 2\pi - \alpha_1]$, onde $0 \leq \alpha_1 < \alpha_0 \leq \pi$.

Demonstração. A primeira propriedade resulta do facto de as posições do mecanismo serem simétricas relativamente à recta P_1P_2 . Quanto à segunda, consideremos um referencial no plano para o qual $P_2 = (0, 0)$ e $P_1 = (\ell_1, 0)$. Então

$$C_{\alpha} = \ell_2 (\cos \alpha, \sin \alpha)$$

e

$$d_{\mathcal{M}}(\alpha) = \sqrt{(\ell_2)^2 + (\ell_1)^2 - 2 \ell_2 \ell_1 \cos(\alpha)}.$$

A função $d_{\mathcal{M}|_{[0, \pi]}}$ é, pois, contínua e estritamente crescente. Daqui resulta que $d_{\mathcal{M}}$ tem um mínimo global em 0 e um máximo global em π . Além disso, por construção, $d_{\mathcal{M}}(0) = |\ell_1 - \ell_2|$ e $d_{\mathcal{M}}(\pi) = \ell_1 + \ell_2$.

Designemos por X_1 a soma $\sum_{k=3}^n \ell_k$ e por X_2 o valor do

$$\max \left\{ \left(\ell_i - \sum_{k=3, k \neq i}^n \ell_k \right) : 3 \leq i \leq n \right\}.$$

Pela Proposição 1, dado $\alpha \in [0, 2\pi]$, tem-se $\alpha \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}}$ se e só se

$$d_{\mathcal{M}}(\alpha) \leq X_1 \quad \text{e} \quad d_{\mathcal{M}}(\alpha) \geq \left(\ell_i - \sum_{k=3, k \neq i}^n \ell_k \right), \quad \forall 3 \leq i \leq n$$

ou, equivalentemente,

$$d_{\mathcal{M}}(\alpha) \leq X_1 \quad \text{e} \quad d_{\mathcal{M}}(\alpha) \geq X_2. \quad (2)$$

Como \mathcal{M} é um mecanismo, sabemos que existe pelo menos um $\alpha \in [0, \pi]$ que satisfaz a condição (2). Se $d_{\mathcal{M}}(\alpha_0) = X_1$, então, como $d_{\mathcal{M}|_{[0, \pi]}}$ é estritamente crescente, para $\alpha_0 < \beta \leq \pi$ tem-se $d_{\mathcal{M}}(\beta) > X_1$ e um tal β não é um elemento de $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$. Consequentemente, $\alpha \leq \alpha_0$ e, por isso, $d_{\mathcal{M}}(\alpha_0) = X_1 \geq d_{\mathcal{M}}(\alpha) \geq X_2$. E, portanto, não só α_0 é um elemento de $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ como é o seu máximo. Analogamente se prova que, se $d_{\mathcal{M}}(\alpha_1) = X_2$, então α_1 é o mínimo de $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$. Reciprocamente, se $0 < \alpha_0 < \pi$ é o máximo de $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$, então $d_{\mathcal{M}}(\alpha_0) \leq X_1$ e, para todo o $\alpha_0 < \alpha \leq \pi$, tem-se $\alpha \notin \mathcal{E}_{\mathcal{M}}$; logo, $d_{\mathcal{M}}(\alpha) > X_1$. Por outro lado, como $d_{\mathcal{M}}$ é estritamente crescente, para todo o $\alpha < \alpha_0$, tem-se

$$d_{\mathcal{M}}(\alpha) < d_{\mathcal{M}}(\alpha_0) \leq X_1.$$

Assim, pela continuidade de $d_{\mathcal{M}}$, temos $d_{\mathcal{M}}(\alpha_0) = X_1$. Analogamente se prova que, se α_1 é o mínimo de $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$, então $d_{\mathcal{M}}(\alpha_1) = X_2$.

Pelo que acabámos de deduzir, se existir $\alpha_0 < \pi$ tal que $d_{\mathcal{M}}(\alpha_0) = X_1$, então α_0 é o máximo de $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$. Se não existir um tal α_0 , então é porque $d_{\mathcal{M}}(\alpha) < X_1$, para todo o $\alpha \in [0, \pi[$ e, nesse caso, o máximo de $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ é $\alpha_0 = \pi$. Do mesmo modo se argumenta sobre a existência do mínimo α_1 de $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$. Acresce que todo o $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_0]$ satisfaz a condição

$$X_2 \leq d_{\mathcal{M}}(\alpha_1) < d_{\mathcal{M}}(\alpha) < d_{\mathcal{M}}(\alpha_0) \leq X_1$$

pelo que α é um elemento de $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ e $\mathcal{E}_{\mathcal{M}} = [\alpha_1, \alpha_0]$.

Finalmente, da simetria de $d_{\mathcal{M}}$ e da caracterização de α_0 e α_1 , concluímos que $\mathcal{D}_{\mathcal{M}} = [\alpha_1, \alpha_0] \cup [2\pi - \alpha_0, 2\pi - \alpha_1]$. \square

Seja $\mathcal{M} = (\mathcal{V}, \mathcal{A}, d)$ um mecanismo em cadeia com $n > 3$ pontos. Se $n = 4$, diremos que \mathcal{M} é um **quadrilátero articulado**; se $n = 5$, \mathcal{M} é um **pentágono articulado**. Começaremos por analisar estes dois tipos simples de mecanismos, para mais tarde entendermos o efeito de lhes acrescentarmos pontos e hastes.

4 Quadriláteros articulados

Consideremos um quadrilátero articulado \mathcal{M} . Sejam P_1 e P_2 dois pontos de \mathbb{R}^2 tais que $\|P_1 - P_2\| = \ell_1$. O espaço de configuração de \mathcal{M} é

$$[\mathcal{M}] = \{(P_3, P_4) \in (\mathbb{R}^2)^2 : \|P_2 - P_3\| = \ell_2, \|P_3 - P_4\| = \ell_3, \|P_4 - P_1\| = \ell_4\}.$$

Além disso, por construção, $P_3 = C_\alpha$ para algum $\alpha \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}}$.

Suponhamos que $\ell_1 \neq \ell_2$. Pela Proposição 4, existem $0 \leq \alpha_1 < \alpha_0 \leq \pi$ tais que $\mathcal{D}_{\mathcal{M}} = [\alpha_1, \alpha_0] \cup [2\pi - \alpha_0, 2\pi - \alpha_1]$. Além disso, se P_4 e P'_4 designam os pontos de intersecção das circunferências de centros C_α e P_1 e raios, respectivamente, ℓ_3 e ℓ_4 , então o espaço de configuração $[\mathcal{M}]$ é a união $\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$, onde \mathcal{M}_1 é o conjunto

$$\{(C_\alpha, P_4) : \alpha \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}} \text{ e a concavidade entre } \overrightarrow{P_4 C_\alpha} \text{ e } \overrightarrow{P_4 P_1} \text{ é nula ou positiva}\}$$

e \mathcal{M}_2 é dado por

$$\{(C_\alpha, P'_4) : \alpha \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}} \text{ e a concavidade entre } \overrightarrow{P'_4 C_\alpha} \text{ e } \overrightarrow{P'_4 P_1} \text{ é nula ou negativa}\}.$$

A proposição seguinte informa que podemos considerar \mathcal{M}_1 e \mathcal{M}_2 como subconjuntos de \mathbb{R}^2 e que, para os descrever, basta um parâmetro real.

Proposição 5. *Dado um quadrilátero articulado \mathcal{M} , os espaços \mathcal{M}_1 e \mathcal{M}_2 são homeomorfos a $\{C_\alpha : \alpha \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}}\}$.*

Demonstração. Seja $\mathfrak{F} = \{C_\alpha : \alpha \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}}\}$. As projecções

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}_1 : & \mathcal{M}_1 & \rightarrow \mathfrak{F} \\ & (C_\alpha, P_4) & \rightarrow C_\alpha \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{P}_2 : & \mathcal{M}_2 & \rightarrow \mathfrak{F} \\ & (C_\alpha, P'_4) & \rightarrow C_\alpha \end{array}$$

são homeomorfismos. □

4.1 Curvas

Consideremos um quadrilátero articulado \mathcal{M} , o seu espaço de configuração $[\mathcal{M}]$ e dois pontos P_1 e P_2 de \mathbb{R}^2 tais que $\|P_1 - P_2\| = \ell_1$. Sejam $\alpha_0, \alpha_1 \in [0, \pi]$ tais que $\mathcal{E}_{\mathcal{M}} = [\alpha_1, \alpha_0]$. A cada $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_0]$ correspondem dois pontos do espaço de configuração, nomeadamente (C_α, P_4) e (C_α, P'_4) , onde P_4 e P'_4 são os pontos que resultam da intersecção das circunferências de centros C_α e P_1 e raios, respectivamente, ℓ_3 e ℓ_4 (veja-se a Figura 6). Em

que circunstâncias é que os dois pontos indicados coincidem?⁶ Tal acontece se $\overrightarrow{P_4C_\alpha}$ e $\overrightarrow{P_4P_1}$ estiverem alinhados, isto é, se as circunferências da Figura 6 são tangentes, o que significa que

$$d_{\mathcal{M}}(\alpha) = \ell_3 + \ell_4 \quad \text{ou} \quad d_{\mathcal{M}}(\alpha) = |\ell_3 - \ell_4|.$$

E quando é que alguma das igualdades anteriores ocorre? Sabemos, pela Proposição 4, que, se $\ell_1 \neq \ell_2$, então

$$\exists \alpha \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}} : d_{\mathcal{M}}(\alpha) = \ell_3 + \ell_4 \Leftrightarrow \ell_1 + \ell_2 = \max(d_{\mathcal{M}}) \geq \ell_3 + \ell_4$$

e que

$$\exists \alpha \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}} : d_{\mathcal{M}}(\alpha) = |\ell_3 - \ell_4| \Leftrightarrow |\ell_1 - \ell_2| = \min(d_{\mathcal{M}}) \leq |\ell_3 - \ell_4|.$$

Interessa-nos, pois, analisar as relações de grandeza entre $\ell_1 + \ell_2$, $\ell_3 + \ell_4$, $|\ell_1 - \ell_2|$ e $|\ell_3 - \ell_4|$.

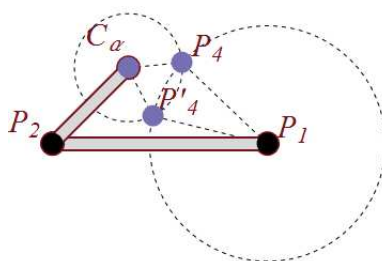






Figura 6: Dois pontos do espaço de configuração.

De seguida, identificaremos o espaço de configuração de um quadrilátero articulado, com $\ell_1 \neq \ell_2$, a partir das relações $>$, $=$ ou $<$ entre $\ell_1 + \ell_2$ e $\ell_3 + \ell_4$, e entre $|\ell_1 - \ell_2|$ e $|\ell_3 - \ell_4|$. Usaremos a expressão abreviada $(>, >)$ para designar as desigualdades $\ell_1 + \ell_2 > \ell_3 + \ell_4$ e $|\ell_1 - \ell_2| > |\ell_3 - \ell_4|$, e expressões análogas para as outras oito possibilidades de pares de símbolos do alfabeto $\{<, =, >\}$.

Proposição 6. Num quadrilátero articulado $\mathcal{M} = (\mathcal{V}, \mathcal{A}, d)$ tal que $\ell_1 \neq \ell_2$ e $\ell_i \neq \sum_{j=1, j \neq i}^4 \ell_j$, para todo o $i \in \{1, \dots, 4\}$, o espaço de configuração é homeomorfo a uma curva da seguinte tabela:

⁶Propomos que comece por explorar o conteúdo da página [pag9.html](#) do módulo, analisando depois os Exemplos 6 a 9.

$(<, <) \text{ ou } (>, >)$	
$(<, >) \text{ ou } (>, <)$	
$(<, =), (>, =), (=, >) \text{ ou } (=, <)$	
$(=, =)$	

Demonstração. Distinguiremos vários casos de acordo com as combinações possíveis das desigualdades representadas pelos símbolos $\{<, =, >\}$.⁷

Caso 1. $\ell_1 + \ell_2 > \ell_3 + \ell_4$ e $|\ell_1 - \ell_2| > |\ell_3 - \ell_4|$

Como vimos, existe $\alpha_0 \neq \pi$ em $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ tal que $d_{\mathcal{M}}(\alpha_0) = \ell_3 + \ell_4$. Sendo

$$|\ell_1 - \ell_2| > |\ell_3 - \ell_4|,$$

não existe α_1 em $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ tal que $d_{\mathcal{M}}(\alpha_1) = |\ell_3 - \ell_4|$. E, portanto, α_0 é o máximo de $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ e 0 é o seu mínimo. Além disso, como $\mathcal{D}_{\mathcal{M}} = [0, \alpha_0] \cup [2\pi - \alpha_0, 2\pi]$, podemos supor que $\mathcal{D}_{\mathcal{M}} = [-\alpha_0, \alpha_0]$ e, desse modo, \mathcal{M}_1 e \mathcal{M}_2 são ambos homeomorfos a arcos de circunferência. Note-se ainda que \mathcal{M}_1 e \mathcal{M}_2 se intersectam em dois pontos, nomeadamente (C_{α_0}, P) e $(C_{-\alpha_0}, Q)$, que, pela Proposição 5, podemos considerar como estando em \mathbb{R}^2 : são as extremidades dos referidos arcos de circunferência. Ou seja, o espaço de configuração do mecanismo é constituído por dois arcos de circunferência que se intersectam apenas nas extremidades. Do ponto de vista topológico (isto é, a menos de um homeomorfismo), $[\mathcal{M}]$ é uma **circunferência** (Figura 7).

Caso 2. $\ell_1 + \ell_2 > \ell_3 + \ell_4$ e $|\ell_1 - \ell_2| = |\ell_3 - \ell_4|$

Seja $\alpha_0 \neq \pi$ em $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ tal que $d_{\mathcal{M}}(\alpha_0) = \ell_3 + \ell_4$. Sendo

$$|\ell_1 - \ell_2| = |\ell_3 - \ell_4|,$$

temos $d_{\mathcal{M}}(0) = |\ell_3 - \ell_4|$. Logo α_0 é o máximo de $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ e 0 é o mínimo. Tal como anteriormente, podemos considerar que $\mathcal{D}_{\mathcal{M}} = [-\alpha_0, \alpha_0]$ e que

$$\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 = \{(C_{\alpha_0}, P), (C_{-\alpha_0}, Q), (C_0, R)\}$$

⁷Podemos acompanhar esta demonstração com a animação da página pag18.html do módulo.

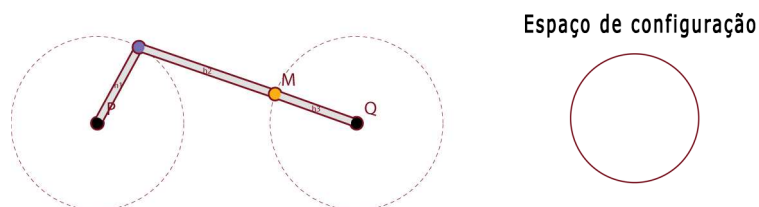


Figura 7: Espaço de configuração se $(>, >)$.

para três pontos P, Q, R distintos do plano. Novamente, \mathcal{M}_1 e \mathcal{M}_2 são ambos homeomorfos a arcos de circunferência que se intersectam nas extremidades; mas, como há um terceiro ponto, naturalmente do interior dos arcos, que está na intersecção destas componentes do espaço de configuração, forma-se uma figura topologicamente semelhante a um **oito** (Figura 8).⁸

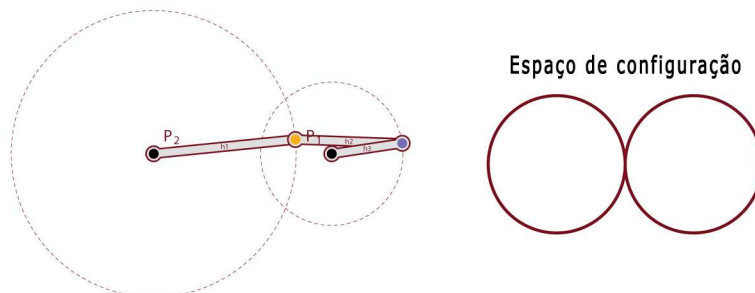


Figura 8: Espaço de configuração se $(>, =)$.

Caso 3. $\ell_1 + \ell_2 > \ell_3 + \ell_4$ e $|\ell_1 - \ell_2| < |\ell_3 - \ell_4|$
 Seja $\alpha_0 \neq \pi$ em $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ tal que $d_{\mathcal{M}}(\alpha_0) = \ell_3 + \ell_4$. Como

$$|\ell_1 - \ell_2| < |\ell_3 - \ell_4|,$$

existe $\alpha_1 \neq 0$ em $\mathcal{D}_{\mathcal{M}}$ tal que $d_{\mathcal{M}}(\alpha_1) = |\ell_3 - \ell_4|$. E, portanto, α_0 é o máximo de $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ e α_1 é o mínimo. Note-se agora que $\mathcal{D}_{\mathcal{M}} = [\alpha_1, \alpha_0] \cup [2\pi - \alpha_0, 2\pi - \alpha_1]$ é constituído por dois intervalos disjuntos. Por esse motivo, \mathcal{M}_1 e \mathcal{M}_2 são homeomorfos, cada um deles, a dois arcos de circunferência. A sua intersecção resume-se a quatro pontos, (C_{α_0}, P) , (C_{α_1}, Q) , $(C_{2\pi - \alpha_0}, R)$ e $(C_{2\pi - \alpha_1}, S)$, correspondendo os dois primeiros às extremidades de um dos

⁸É útil comparar agora, usando o módulo, as vizinhanças no espaço de configuração do ponto de tangência do oito com as vizinhanças no mecanismo da posição correspondente.

arcos (em \mathcal{M}_1 e \mathcal{M}_2) e os outros às extremidades do outro arco. Assim, o espaço de configuração é constituído por **duas circunferências disjuntas** (Figura 9).

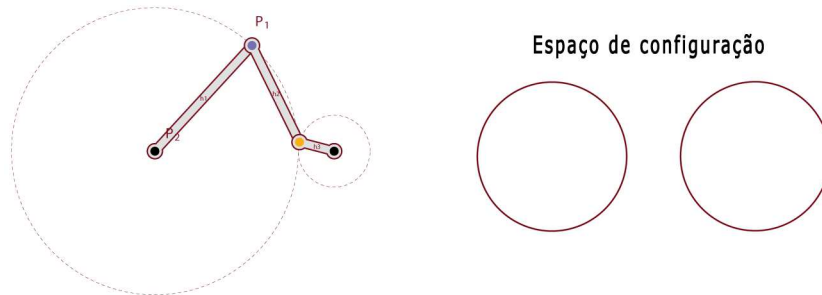


Figura 9: Espaço de configuração se $(>, <)$.

Caso 4. $l_1 + l_2 = l_3 + l_4$ e $|\ell_1 - \ell_2| > |\ell_3 - \ell_4|$

Sabemos que $d_{\mathcal{M}}(\pi) = l_3 + l_4$ e que não existe α_1 em $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ tal que $d_{\mathcal{M}}(\alpha_1) = |\ell_3 - \ell_4|$. Logo π é o máximo de $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ e 0 é o mínimo. Sendo $\mathcal{D}_{\mathcal{M}} = [0, 2\pi]$, as componentes \mathcal{M}_1 e \mathcal{M}_2 são ambas homeomorfas a circunferências. Note-se ainda que \mathcal{M}_1 e \mathcal{M}_2 se intersectam num único ponto (C_{π}, P) , para algum $P \in \mathbb{R}^2$. Por essa razão, o espaço de configuração é constituído por duas circunferências que se intersectam num ponto, ou seja, um **oito** (Figura 10).

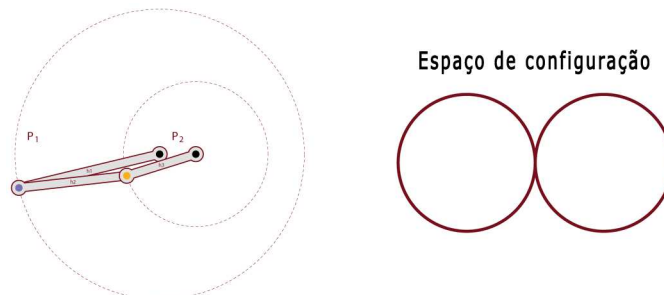


Figura 10: Espaço de configuração se $(=, >)$.

Caso 5. $l_1 + l_2 = l_3 + l_4$ e $|\ell_1 - \ell_2| = |\ell_3 - \ell_4|$

Como anteriormente, temos $d_{\mathcal{M}}(\pi) = l_3 + l_4$; mas agora também vale a igualdade $d_{\mathcal{M}}(0) = |\ell_3 - \ell_4|$. Consequentemente, π é o máximo de $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ e 0 é o mínimo. Uma vez que $\mathcal{D}_{\mathcal{M}} = [0, 2\pi]$, os conjuntos \mathcal{M}_1 e \mathcal{M}_2 são ambos homeomorfos a circunferências. Acresce que \mathcal{M}_1 e \mathcal{M}_2 se intersectam em

dois pontos (C_π, P) e (C_0, Q) , com $P, Q \in \mathbb{R}^2$. Por esse motivo, o espaço de configuração é constituído por duas circunferências (topológicas) que se intersectam em dois pontos. Trata-se pois de uma curva homeomorfa à ilustrada na Figura 11.

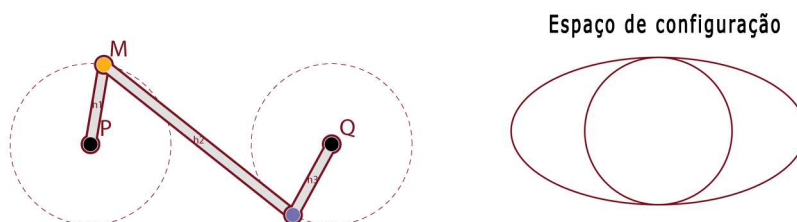


Figura 11: Espaço de configuração se $(=, =)$.

Caso 6. $\ell_1 + \ell_2 = \ell_3 + \ell_4$ e $|\ell_1 - \ell_2| < |\ell_3 - \ell_4|$
 Como no caso anterior, $d_{\mathcal{M}}(\pi) = \ell_3 + \ell_4$. E, porque

$$|\ell_1 - \ell_2| < |\ell_3 - \ell_4|,$$

existe $\alpha_1 \neq 0$ em $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ tal que $d_{\mathcal{M}}(\alpha_1) = |\ell_3 - \ell_4|$. Logo π é o máximo de $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ e α_1 é o mínimo. Note-se que agora $\mathcal{D}_{\mathcal{M}} = [\alpha_1, 2\pi - \alpha_1]$ e, por isso, \mathcal{M}_1 e \mathcal{M}_2 são homeomorfos, cada um deles, a um arco de circunferência. A sua intersecção é $\{(C_{\alpha_1}, P), (C_{2\pi - \alpha_1}, Q), (C_\pi, R)\}$, onde $P, Q, R \in \mathbb{R}^2$ e (C_π, R) é interior aos arcos. Assim, do ponto de vista topológico, $[\mathcal{M}]$ é um **oito** (Figura 12).

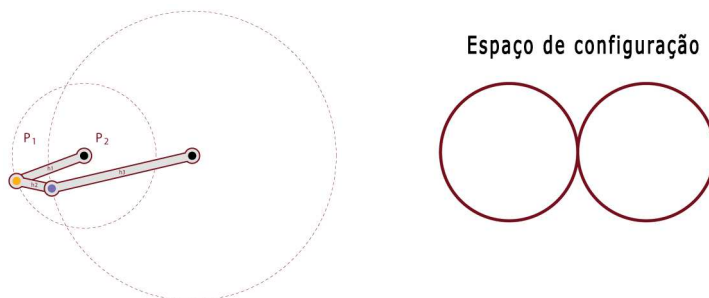


Figura 12: Espaço de configuração se $(=, <)$.

Caso 7. $\ell_1 + \ell_2 < \ell_3 + \ell_4$ e $|\ell_1 - \ell_2| > |\ell_3 - \ell_4|$
 Como vimos, nestas condições não existe α em $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ tal que $d_{\mathcal{M}}(\alpha) = \ell_3 + \ell_4$. Logo, o máximo de $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ é π . Além disso, não existe α_1 em $\mathcal{D}_{\mathcal{M}}$ tal que

$d_{\mathcal{M}}(\alpha_1) = |\ell_3 - \ell_4|$. Logo π é o máximo de $\mathcal{D}_{\mathcal{M}}$ e 0 é o mínimo. Uma vez que $\mathcal{D}_{\mathcal{M}} = [0, 2\pi]$, os conjuntos \mathcal{M}_1 e \mathcal{M}_2 são ambos homeomorfos a circunferências. E, como $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 = \emptyset$, o espaço de configuração é constituído por **duas circunferências disjuntas** (Figura 13).

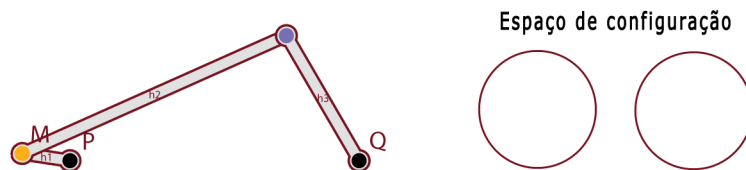


Figura 13: Espaço de configuração se $(<, >)$.

Caso 8. $\ell_1 + \ell_2 < \ell_3 + \ell_4$ e $|\ell_1 - \ell_2| = |\ell_3 - \ell_4|$

Como não existe α em $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ tal que $d_{\mathcal{M}}(\alpha) = \ell_3 + \ell_4$, sabemos que o máximo de $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ é π . E, de

$$|\ell_1 - \ell_2| = |\ell_3 - \ell_4|,$$

resulta que $d_{\mathcal{M}}(0) = |\ell_3 - \ell_4|$. Portanto, 0 é o mínimo de $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$. Como $\mathcal{D}_{\mathcal{M}} = [0, 2\pi]$, \mathcal{M}_1 e \mathcal{M}_2 são ambos homeomorfos a circunferências. Acresce que \mathcal{M}_1 e \mathcal{M}_2 se intersectam num único ponto (C_0, P) , onde $P \in \mathbb{R}^2$. Por esse motivo, o espaço de configuração é constituído por duas circunferências que se intersectam num ponto, tratando-se pois de um **oito** (Figura 14).

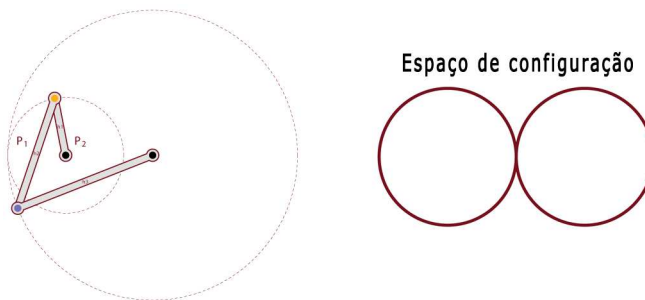


Figura 14: Espaço de configuração se $(<, =)$.

Caso 9. $\ell_1 + \ell_2 < \ell_3 + \ell_4$ e $|\ell_1 - \ell_2| < |\ell_3 - \ell_4|$

De novo, como não existe α em $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ tal que $d_{\mathcal{M}}(\alpha) = \ell_3 + \ell_4$, o máximo de $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ é π . Mas, neste caso, existe $\alpha_1 \neq 0$ em $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ tal que $d_{\mathcal{M}}(\alpha_1) = |\ell_3 - \ell_4|$. Portanto, π é o máximo de $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$, α_1 é o mínimo. Note-se ainda que $\mathcal{D}_{\mathcal{M}} = [\alpha_1, 2\pi - \alpha_1]$ e, portanto, \mathcal{M}_1 e \mathcal{M}_2 são homeomorfos, cada um deles, a um arco de circunferência. Como \mathcal{M}_1 e \mathcal{M}_2 se intersectam apenas em (C_{α_1}, P) e $(C_{2\pi - \alpha_1}, Q)$, para alguns P, Q em \mathbb{R}^2 , estes arcos estão unidos nas extremidades, formando (do ponto de vista topológico) uma **circunferência** (Figura 15).

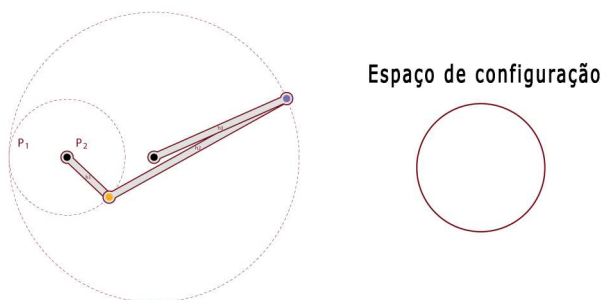


Figura 15: Espaço de configuração se $(<, <)$.

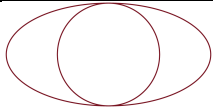
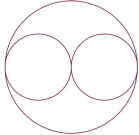
□

Observação 1. *Observe-se que, quando ocorrem igualdades, o espaço de configuração contém pontos singulares: pontos sem vizinhanças homeomorfas a \mathbb{R} . Podemos verificar que tais pontos correspondem, no mecanismo, a posições relativamente às quais o sistema articulado tem quatro alternativas de movimento, ao contrário dos outros pontos em que há apenas duas.*

No estudo anterior, suposemos que os dois comprimentos ℓ_1 e ℓ_2 são distintos para evitarmos que se desse o caso degenerado em que $0 \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}}$ e $d_{\mathcal{M}}(0) = 0$. Contudo, se $\ell_1 = \ell_2$ e $\ell_3 \neq \ell_4$, nunca se tem $0 \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}}$. Por esse motivo, na Proposição 6 podemos substituir a condição $\ell_1 \neq \ell_2$ por uma das condições $\ell_1 \neq \ell_2$ ou $\ell_3 \neq \ell_4$.

Quando nenhuma destas condições se verifica, pode provar-se, usando um argumento que difere em poucos detalhes do anterior, que:

Proposição 7. *Num mecanismo $\mathcal{M} = (\mathcal{V}, \mathcal{A}, d)$ em cadeia com 4 hastes tais que $\ell_1 = \ell_2$ e $\ell_3 = \ell_4$, o espaço de configuração é homeomorfo a:*

<i>Condição</i>	<i>Espaço de configuração</i>
$(<, =)$ ou $(>, =)$	
$(=, =)$	

No percurso opcional proposto no módulo virtual (veja-se <http://www.atractor.pt/mat/MovimentoForma/auxi1.html>), pode encontrar a lista completa dos espaços de configuração de quadriláteros articulados.

5 Pentágonos articulados

Dado um pentágono articulado \mathcal{M} , sejam P_1 e P_2 dois pontos de \mathbb{R}^2 tais que $\|P_1 - P_2\| = \ell_1$. Então o espaço de configuração $[\mathcal{M}]$ é o conjunto $\{(P_3, P_4, P_5) \in (\mathbb{R}^2)^3\}$ cujos pontos verificam as duas condições:

- $\|P_i - P_{i+1} \text{ (módulo } 5)\| = \ell_i$ para todo o $i \in \{2, 3, 4, 5\}$
- $P_3 = C_\alpha$ para algum $\alpha \in \mathcal{D}_\mathcal{M}$.

Selecionemos no mecanismo \mathcal{M} uma componente com menos peças através do processo seguinte.

Definição 6. *Seja $\alpha \in \mathcal{D}_\mathcal{M}$. Se $\alpha \neq 0$ ou $d_\mathcal{M}(0) \neq 0$, então \mathcal{M}_α designa o mecanismo que se obtém de \mathcal{M} retirando-se o ponto V_2 e as duas hastes a ele ligadas, passando-se o ponto V_3 de móvel a fixo e acrescentando-se a haste $[V_1V_3]$ com comprimento $d_\mathcal{M}(\alpha)$.*

O conjunto de posições correspondente a cada \mathcal{M}_α permitirá reconstituir o espaço de configuração de \mathcal{M} . Antes dessa síntese, atentemos no Exemplo 10 do módulo interativo, em [pag19.html](#), onde se observa, em tempo real, um pentágono articulado, um modelo do seu espaço de configuração e um homeomorfismo que a cada posição do mecanismo faz corresponder um ponto do modelo.

5.1 Exemplo

Consideremos um pentágono articulado \mathcal{M} com comprimentos $l_1 = 20$, $l_2 = 9$, $l_3 = 3$, $l_4 = 4$ e $l_5 = 5$. Pela Proposição 4, $\max(d_{\mathcal{M}}) = l_1 + l_2 = 29$ e $\min(d_{\mathcal{M}}) = |l_1 - l_2| = 11$. Como $\max(d_{\mathcal{M}}) > l_3 + l_4 + l_5 = 12$, o máximo α_0 de $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ é diferente de π (de facto, é igual a $\arccos(337/360)$) e, portanto, novamente pela Proposição 4, temos $d_{\mathcal{M}}(\alpha_0) = l_3 + l_4 + l_5$. Logo, α_0 é o ângulo interno do triângulo de lados l_1 , l_2 e $l_3 + l_4 + l_5$, ou seja, 20, 9 e 12, compreendido entre os lados de comprimentos 20 e 9 (Figura 16).

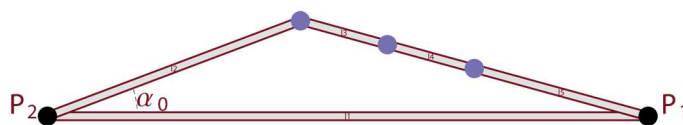


Figura 16: Ângulo α_0 .

Por outro lado, $11 = \min(d_{\mathcal{M}}) > -2 = \max L$, onde

$$L = \{l_3 - (l_4 + l_5), l_4 - (l_3 + l_5), l_5 - (l_3 + l_4)\}.$$

Consequentemente, pela Proposição 4, o mínimo de $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ é 0 e $\mathcal{D}_{\mathcal{M}} = [0, \alpha_0] \cup [2\pi - \alpha_0, 2\pi]$. Podemos pois reposicionar os elementos de $\mathcal{D}_{\mathcal{M}}$ e supor que $\mathcal{D}_{\mathcal{M}} = [-\alpha_0, \alpha_0]$.

Analisemos agora o espaço de configuração de \mathcal{M}_{α} para cada α em $[-\alpha_0, \alpha_0]$. Para isso, bastará determinar, para todo o α , o par de relações entre $d_{\mathcal{M}}(\alpha) + l_3$ e $l_4 + l_5$, e entre $|d_{\mathcal{M}}(\alpha) - l_3|$ e $|l_4 - l_5|$, e depois aplicar a Proposição 6. Eis o que se obtém:

- Para $\alpha = \pm\alpha_0$, tem-se $d_{\mathcal{M}}(\alpha) = l_3 + l_4 + l_5$, e portanto o espaço de configuração do mecanismo \mathcal{M}_{α} é um **ponto**.
- Quando $-\alpha_0 < \alpha < \alpha_0$, como

$$d_{\mathcal{M}}(\alpha) + l_3 \geq \min(d_{\mathcal{M}}) + l_3 = 14 > 9 = l_4 + l_5$$

e

$$|d_{\mathcal{M}}(\alpha) - l_3| \geq 8 > 1 = |l_4 - l_5|,$$

o espaço de configuração do mecanismo \mathcal{M}_{α} é uma **circunferência**.

Podemos entender o espaço de configuração do pentágono articulado \mathcal{M} como sendo obtido através da junção, *às camadas*, de todos os espaços

de configuração de \mathcal{M}_α , onde $\alpha \in [-\alpha_0, \alpha_0]$.⁹ É o que se representa na Figura 17, feita com o programa *Mathematica* exactamente como união parametrizada por α destas curvas. A justificação para este modo de unir as fatias \mathcal{M}_α será apresentada na Secção 5.2.

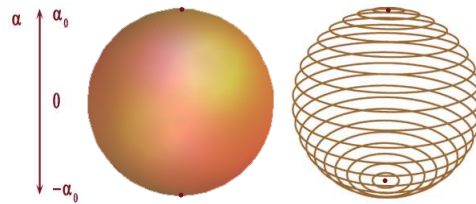


Figura 17: Espaço de configuração quando $\ell_1 = 20$.

Diminuamos agora progressivamente o comprimento ℓ_1 , mantendo-o sob a condição $\ell_1 > 15$. Obtemos espaços de configuração homeomorfos ao tipo descrito no caso anterior (Figura 18).

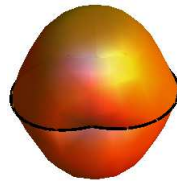


Figura 18: Espaço de configuração quando $15 < \ell_1 < 20$.

Quando $\ell_1 = 15$, continuamos a ter

$$\max d_{\mathcal{M}} > \ell_3 + \ell_4 + \ell_5 \quad \text{e} \quad \min d_{\mathcal{M}} > \max L,$$

e, portanto, podemos supor que $\mathcal{D}_{\mathcal{M}} = [-\alpha_0, \alpha_0]$, desta vez para $\alpha_0 = \arccos\left(\frac{3}{5}\right)$. Além disso, o espaço de configuração de \mathcal{M}_α é o que indica a tabela seguinte e a Figura 19:

Condição sobre α	Relações	Espaço de configuração de \mathcal{M}_α
$\alpha = \alpha_0$	$(>, >)$	Ponto
$0 < \alpha < \alpha_0$	$(>, >)$	Circunferência
$\alpha = 0$	$(=, >)$	Oito
$-\alpha_0 < \alpha < 0$	$(>, >)$	Circunferência
$\alpha = -\alpha_0$	$(>, >)$	Ponto

⁹Esta é a abordagem usada no módulo; veja-se, por exemplo, a página [pag21.html](#).

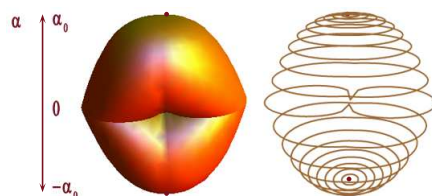


Figura 19: Espaço de configuração quando $l_1 = 15$.

Antes de avançar para o caso seguinte, sugerimos que o leitor analise o Exemplo 11 do módulo e as justificações apresentadas nas páginas 25 a 27.

Se diminuirmos o comprimento de l_1 , para valores em $]13, 15[$, continuaremos a ter $\mathcal{E}_{\mathcal{M}} = [-\alpha_0, \alpha_0]$, com $0 < \alpha_0 < \pi$, mas agora o tipo de espaço de configuração de \mathcal{M}_{α} varia para diferentes valores de α em $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$. Fixemos $l_1 \in]13, 15[$. Por um lado, temos $|d_{\mathcal{M}}(\alpha) - l_3| > |l_4 - l_5|$, para todo o $\alpha \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}}$. Por outro,

$$d_{\mathcal{M}}(\alpha_0) + l_3 > l_4 + l_5 > |l_1 - l_2| + 3 = d_{\mathcal{M}}(0) + l_3.$$

Existe, pois, $\beta_1 \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}} \setminus \{0\}$ tal que $d_{\mathcal{M}}(\beta_1) = l_4 + l_5 - l_3$, e a única mudança nas relações ocorre na vizinhança de β_1 (e de $-\beta_1$). Em resumo:

Condição sobre α	Relações	Espaço de configuração de \mathcal{M}_{α}
$\alpha = \alpha_0$	$(>, >)$	Ponto
$\beta_1 < \alpha < \alpha_0$	$(>, >)$	Circunferência
$\alpha = \beta_1$	$(=, >)$	Oito
$-\beta_1 < \alpha < \beta_1$	$(<, >)$	Duas circunferências disjuntas
$\alpha = -\beta_1$	$(=, >)$	Oito
$-\alpha_0 < \alpha < -\beta_1$	$(>, >)$	Circunferência
$\alpha = -\alpha_0$	$(>, >)$	Ponto

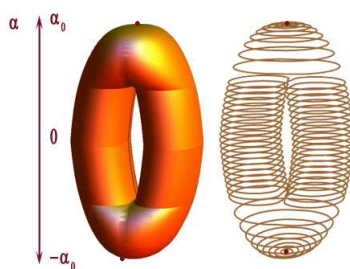


Figura 20: Espaço de configuração quando $13 < l_1 < 15$.

Quando $\ell_1 = 13$, mantém-se a igualdade $\mathcal{E}_{\mathcal{M}} = [-\alpha_0, \alpha_0]$, onde agora $\alpha_0 = \arccos\left(\frac{53}{117}\right)$. Também, como no caso anterior, existe $\beta_1 \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ tal que $d_{\mathcal{M}}(\beta_1) = \ell_4 + \ell_5 - \ell_3$, e a única mudança na primeira relação ocorre na vizinhança de β_1 (e de $-\beta_1$). Porém, $|d_{\mathcal{M}}(\alpha) - \ell_3| > |d_{\mathcal{M}}(0) - \ell_3| = |\ell_4 - \ell_5|$, para todo o $\alpha \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}} \setminus \{0\}$. Por este motivo, a única mudança na segunda relação ocorre em 0 (veja-se a Figura 21 e a próxima tabela).

Condição sobre α	Relações	Espaço de configuração de \mathcal{M}_{α}
$\alpha = \alpha_0$	($>$, $>$)	Ponto
$\beta_1 < \alpha < \alpha_0$	($>$, $>$)	Circunferência
$\alpha = \beta_1$	($=$, $>$)	Oito
$0 < \alpha < \beta_1$	($<$, $>$)	Duas circunferências disjuntas
$\alpha = 0$	($<$, $=$)	Oito
$-\beta_1 < \alpha < 0$	($<$, $>$)	Duas circunferências disjuntas
$\alpha = -\beta_1$	($=$, $>$)	Oito
$-\alpha_0 < \alpha < -\beta_1$	($>$, $>$)	Circunferência
$\alpha = -\alpha_0$	($>$, $>$)	Ponto

Se continuarmos a diminuir ℓ_1 , para valores em $]11, 13[$, teremos, para algum β_2 com $0 < \beta_2 < \beta_1$,

Condição sobre α	Relações	Espaço de configuração de \mathcal{M}_{α}
$\alpha = \alpha_0$	($>$, $>$)	Ponto
$\beta_1 < \alpha < \alpha_0$	($>$, $>$)	Circunferência
$\alpha = \beta_1$	($=$, $>$)	Oito
$\beta_2 < \alpha < \beta_1$	($<$, $>$)	Duas circunferências disjuntas
$\alpha = \beta_2$	($<$, $=$)	Oito
$-\beta_2 < \alpha < \beta_2$	($<$, $<$)	Circunferência
$\alpha = -\beta_2$	($<$, $=$)	Oito
$-\beta_1 < \alpha < -\beta_2$	($<$, $>$)	Duas circunferências disjuntas
$\alpha = -\beta_1$	($=$, $>$)	Oito
$-\alpha_0 < \alpha < -\beta_1$	($>$, $>$)	Circunferência
$\alpha = -\alpha_0$	($>$, $>$)	Ponto

Quando se atinge a igualdade $\ell_1 = 11$, obtemos um espaço de configuração como mostra a Figura 21, união das fatias:

Condição sobre α	Relações	Espaço de configuração de \mathcal{M}_α
$\alpha = \alpha_0$	$(>, >)$	Ponto
$\beta_1 < \alpha < \alpha_0$	$(>, >)$	Circunferência
$\alpha = \beta_1$	$(=, >)$	Oito
$\beta_2 < \alpha < \beta_1$	$(<, >)$	Duas circunferências disjuntas
$\alpha = \beta_2$	$(<, =)$	Oito
$0 < \alpha < \beta_2$	$(<, <)$	Circunferência
$\alpha = 0$	$(<, =)$	Oito
$-\beta_2 < \alpha < 0$	$(<, <)$	Circunferência
$\alpha = -\beta_2$	$(<, =)$	Oito
$-\beta_1 < \alpha < -\beta_2$	$(<, >)$	Duas circunferências disjuntas
$\alpha = -\beta_1$	$(=, >)$	Oito
$-\alpha_0 < \alpha < -\beta_1$	$(>, >)$	Circunferência
$\alpha = -\alpha_0$	$(>, >)$	Ponto

Finalmente, se $\ell_1 \in]9, 11[$, existe β_3 verificando $0 < \beta_3 < \beta_2$ tal que as camadas \mathcal{M}_α são as seguintes:

Condição sobre α	Relações	Espaço de configuração de \mathcal{M}_α
$\alpha = \alpha_0$	$(>, >)$	Ponto
$\beta_1 < \alpha < \alpha_0$	$(>, >)$	Circunferência
$\alpha = \beta_1$	$(=, >)$	Oito
$\beta_2 < \alpha < \beta_1$	$(<, >)$	Duas circunferências disjuntas
$\alpha = \beta_2$	$(<, =)$	Oito
$\beta_3 < \alpha < \beta_2$	$(<, <)$	Circunferência
$\alpha = \beta_3$	$(<, =)$	Oito
$-\beta_3 < \alpha < \beta_3$	$(<, >)$	Duas circunferências disjuntas
$\alpha = -\beta_3$	$(<, =)$	Oito
$-\beta_2 < \alpha < -\beta_3$	$(<, <)$	Circunferência
$\alpha = -\beta_2$	$(<, =)$	Oito
$-\beta_1 < \alpha < -\beta_2$	$(<, >)$	Duas circunferências disjuntas
$\alpha = -\beta_1$	$(=, >)$	Oito
$-\alpha_0 < \alpha < -\beta_1$	$(>, >)$	Circunferência
$\alpha = -\alpha_0$	$(>, >)$	Ponto

Note-se que, na maioria dos espaços de configuração deste exemplo, cada ponto tem uma vizinhança que é homeomorfa a um disco do plano.¹⁰ Esses espaços são portanto *superfícies*. Mas isso não acontece quando $\ell_1 = 11, 13, 15$, apesar de também serem parametrizáveis por dois parâmetros. Diremos que são espaços **degenerados** pois correspondem a posições degeneradas do mecanismo.

¹⁰Em [pag29.html](#), há animações que elucidam sobre os homeomorfismos entre os espaços de configuração destes mecanismos e os respectivos modelos.

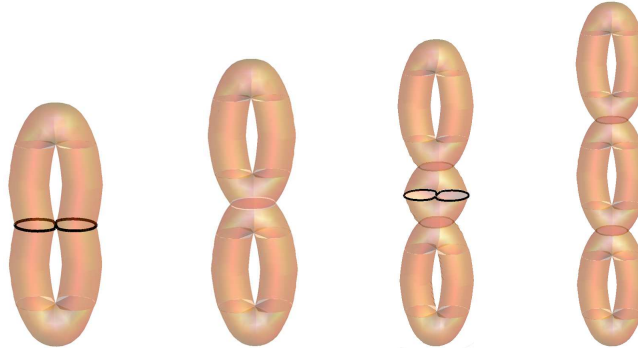


Figura 21: $\ell_1 = 13$, $11 < \ell_1 < 13$, $\ell_1 = 11$ e $9 < \ell_1 < 11$, respectivamente.

5.2 Escolha de um modelo para o espaço de configuração

Fixemos um pentágono articulado e uma sua realização. Se impusermos que a concavidade entre as hastes h_4 e h_5 é sempre não-negativa, a realização fica completamente determinada pelo ângulo orientado $\alpha \in [0, \alpha_0]$ entre as hastes h_1 e h_2 , e o ângulo orientado μ entre a haste h_3 e a direcção $\overrightarrow{P_3P_1}$, assinalados na Figura 22.

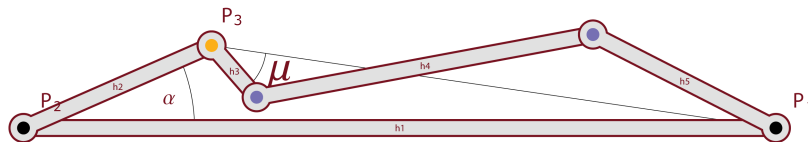


Figura 22: Ângulos α e μ .

Note-se que, para o mecanismo desta figura (cujas hastes medem 3, 1, 5, 3 e 11), temos $0 < \alpha_0 < \pi$, e que, para cada α , os valores permitidos de $\mu(\alpha)$ estão num intervalo $[-\mu_0(\alpha), \mu_0(\alpha)]$, onde $\mu_0(\alpha) \in [0, \pi[$ (a Figura 23 mostra uma posição do mecanismo em que $\mu(\alpha) = 0$). E, portanto, só uma parte do quadrado e do toro que construímos na Secção 2.3 intervém na descrição do espaço de configuração: o domínio de tais (μ, α) no toro forma a região sombreada \mathcal{D}_1 da Figura 24.

O mesmo argumento vale para realizações deste mecanismo em que a concavidade entre as hastes h_4 e h_5 é sempre não-positiva, sendo agora a posição do mecanismo descrita univocamente pelos ângulos $\alpha \in [-\alpha_0, \alpha_0]$ e $\mu \in [-\mu_0, \mu_0]$. Assim, obtemos duas regiões, \mathcal{D}_1 e \mathcal{D}_2 , que têm em comum os pares (μ, α) em que a concavidade é nula. Estes pares em comum situam-se na fronteira de cada uma das regiões uma vez que, para α não negativo, o

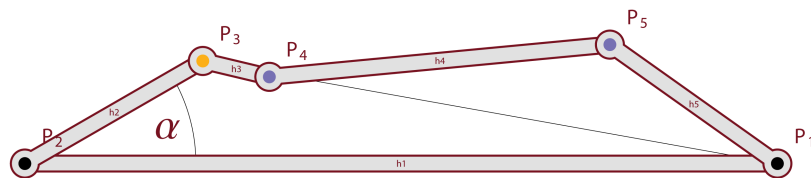


Figura 23: $\mu(\alpha) = 0$: P_3 , P_4 e P_1 alinhados.

ângulo $\mu_0(\alpha) \in [0, \pi]$ é função contínua e estritamente decrescente de α . Por isso, o modelo que descreve todas as realizações deste mecanismo obtém-se identificando as duas regiões pelos bordos, como mostra a Figura 25.

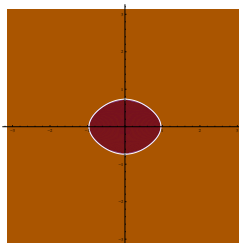


Figura 24: \mathcal{D}_1

Observe-se como cada nível de α com os extremos identificados forma uma curva homeomorfa a uma circunferência. Uma imagem mais simétrica do modelo, por ter em conta as amplitudes dos ângulos, pode obter-se desenhando um cilindro e impondo que o perímetro de cada circunferência seja exactamente o dobro da amplitude do intervalo $[-\mu_0(\alpha), \mu_0(\alpha)]$; depois acrescentamos ao cilindro um ponto para cada par $(0, \alpha_0)$ e $(0, -\alpha_0)$.

Analisemos, porém, com mais detalhe o que acontece quando $\alpha = \alpha_0$ ou $\alpha = -\alpha_0$. Face à primeira forma da Figura 26, que representa um cilindro aberto (na base e no topo), a intuição diz-nos que basta acrescentar um ponto em cima e outro em baixo para obter uma representação completa e adequada do espaço de configuração. Mas um cilindro como os outros dois da mesma figura também poderia ser usado como modelo se nos restringíssemos aos valores $-\alpha_0 < \alpha < \alpha_0$ e, aqui já não parece haver maneira única, ou natural, de acrescentar um ponto em cima e outro em baixo. À parte a forma, o que é essencialmente diferente nestas alternativas? No primeiro caso, por mais pequena que seja a vizinhança do ponto que é acrescentado no topo, ela contém circunferências inteiras (parametrizadas por μ , para α constante), enquanto que para as outras formas da Figura 26 isso não acontece.

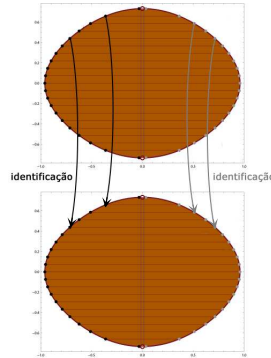
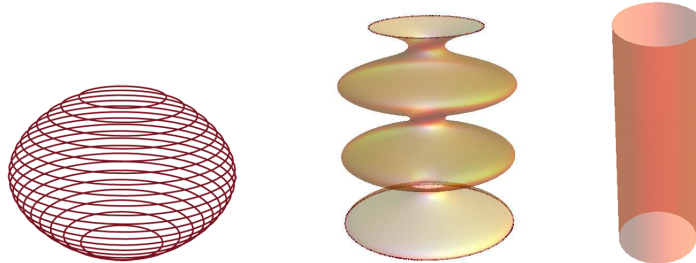
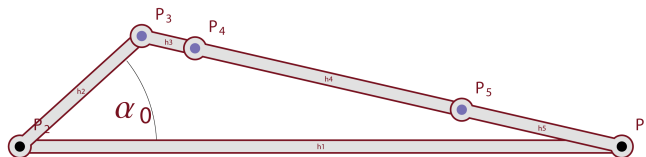
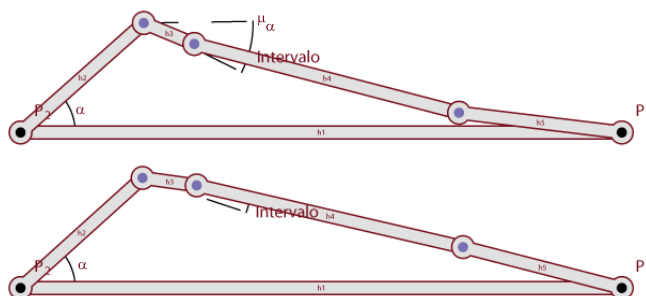
Figura 25: Colagem pelos bordos de \mathcal{D}_1 a \mathcal{D}_2 .

Figura 26: Três formas para o empilhamento das circunferências.

Para decidirmos qual é afinal a boa escolha, voltemos ao espaço de configuração: o ponto que se está a acrescentar em cima corresponde a $\alpha = \alpha_0$ e $\mu = 0$, valores que, no mecanismo, determinam a posição representada na Figura 27. Ora, por mais pequena que seja a vizinhança de $(0, \alpha_0)$, como $\mu_0(\alpha)$ tende para 0 quando α se aproxima de α_0 (Figura 28), é possível encontrar α suficientemente próximo de α_0 tal que o conjunto

$$\{(\mu, \alpha) : \mu \in [-\mu_0(\alpha), \mu_0(\alpha)]\}$$

está contido na vizinhança fixada. Consequentemente, por menor que seja a vizinhança no modelo do ponto de cima que se está a acrescentar, ela deverá conter circunferências de nível α do tipo indicado. A escolha apropriada para modelo é, portanto, a primeira forma da Figura 26. Alterando o perímetro das circunferências de nível α , podemos transformar o modelo numa esfera (geométrica) sem que ele perca qualquer uma das propriedades topológicas referidas.

Figura 27: $\alpha = \alpha_0$ e $\mu = 0$.Figura 28: $\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \mu_0(\alpha) = 0$.

6 Genus e simetria

Regressemos ao Exemplo 5.1 e observemos os espaços de configuração dos três casos não degenerados aí apresentados. Constatamos que a diferença mais relevante entre eles está no número de *oitos* que surgem no espaço de configuração de \mathcal{M}_α . Se conhecêssemos de antemão esse número de oitos, saberíamos descrever imediatamente o espaço de configuração do mecanismo: seria formado pela junção, *por camadas*, de um ponto, seguido de circunferências, seguido de um oito (se existisse), seguido de circunferências disjuntas, etc, seguido de circunferências e terminando num ponto. Ora, numericamente, esse número de oitos é precisamente o dobro do número de elementos do conjunto

$$\tilde{L} = \{\ell_3 + \ell_4 - \ell_5, \ell_4 + \ell_5 - \ell_3, \ell_5 + \ell_3 - \ell_4\}$$

que estão no intervalo $[|\ell_1 - \ell_2|, \ell_1 + \ell_2]$.

Analiseemos o exemplo seguinte para identificarmos outro aspecto de natureza topológica a ter em conta nos espaços de configuração. Consideremos pentágonos articulados \mathcal{M}_{ℓ_1} , com hastes de comprimentos

$$\ell_1 \in \{6, 7, 8\}, \ell_2 = 5, \ell_3 = 1, \ell_4 = 2, \ell_5 = 5. \quad (3)$$

Os correspondentes espaços de configuração são como se mostra na Figura 29 (e nas páginas `auxi17.html`, `auxi18.html` e `auxi19.html` do módulo virtual).

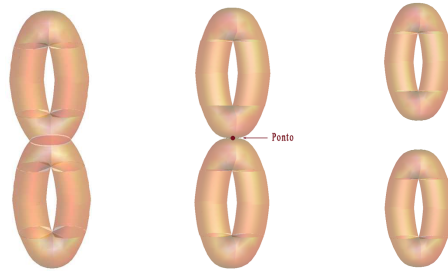


Figura 29: Espaços de configuração para $\ell_1 = 8$, $\ell_1 = 7$ e $\ell_1 = 6$, respectivamente.

Observe-se que começamos com um espaço de configuração conexo até terminarmos num espaço com duas componentes conexas. O que determinou essa mudança no número de componentes conexas? O facto de 0 ou π pertencerem a $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$. Em termos mecânicos, tal significa que as hastes móveis conseguem passar da posição no semiplano acima da linha que une P_1 a P_2 para a posição **simétrica** mas no semiplano abaixo. Assim, para sabermos quantas componentes conexas tem um espaço de configuração, há apenas que verificar quantos elementos de $\{0, \pi\}$ pertencem a $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ ou, equivalentemente, quantos elementos de $\{|\ell_1 - \ell_2|, \ell_1 + \ell_2\}$ pertencem ao intervalo $[\max L, \ell_3 + \ell_4 + \ell_5]$. Por isso, é imediato que:

Proposição 8. *Seja \mathcal{M} um pentágono articulado tal que $[\mathcal{M}]$ não é degenerado. O espaço de configuração de \mathcal{M} é conexo se e só se*

- $\{0, \pi\} \cap \mathcal{D}_{\mathcal{M}} \neq \emptyset$ e
- Existe $\alpha \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}}$ tal que $[\mathcal{M}_{\alpha}]$ não é um par de circunferências disjuntas.

Caso contrário, o espaço de configuração de \mathcal{M} tem duas componentes conexas.

As considerações anteriores sugerem a seguinte definição.

Definição 7. *Seja \mathcal{M} um pentágono articulado com espaço de configuração não degenerado. Designamos por **genus** de cada componente conexa de $[\mathcal{M}]$ o número*

$$\frac{n_1}{2} + n_2 - 1$$

onde

$$n_1 = \text{número de oitos existentes em } \bigcup_{\alpha \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}}} [\mathcal{M}_{\alpha}]$$

e

$$n_2 = \text{número de elementos de } \{0, \pi\} \text{ em } \mathcal{E}_{\mathcal{M}}.$$

Note-se que n_1 é sempre par, logo o genus é um inteiro maior ou igual a -1 . Foram os seguintes os valores obtidos nos casos do Exemplo 5.1 em que o espaço de configuração não é degenerado (é sempre conexo) e no exemplo descrito em (3):

ℓ_1	n_1	n_2	Genus
$15 < \ell_1 \leq 20$	0	1	0
$13 < \ell_1 < 15$	2	1	1
$11 < \ell_1 < 13$	4	1	2
$9 < \ell_1 < 11$	6	1	3

ℓ_1	n_1	n_2	Genus de cada componente conexa	Nº de componentes conexas
8	4	1	2	1
6	4	0	1	2

6.1 Genus menor ou igual a 4

Dado um pentágono articulado \mathcal{M} tal que $[\mathcal{M}]$ é não degenerado, como \tilde{L} tem no máximo 3 elementos, sabemos que $\frac{n_1}{2} \leq 3$. Além disso, como $\{0, \pi\}$ só tem dois elementos, $n_2 \leq 2$. Assim, o genus de cada componente conexa de $[\mathcal{M}]$ é menor ou igual a 4. Diremos que $[\mathcal{M}]$ é uma **esfera** se o genus de $[\mathcal{M}]$ for 0; um **toro** se o genus de $[\mathcal{M}]$ for 1; um **bi-toro** se o genus de $[\mathcal{M}]$ for 2; um **tri-toro** se o genus de $[\mathcal{M}]$ for 3; um **n-toro** se o genus de $[\mathcal{M}]$ for n , para algum natural $n \geq 3$. Vimos já exemplos de mecanismos cujo espaço de configuração é uma esfera ou um toro (Exemplo 5.1), um bi-toro (Exemplo 5.1 e o exemplo descrito em (3)) e um tri-toro (Exemplo 5.1). Será possível obter um 4-toro?

Teorema 9. *Seja \mathcal{M} um pentágono articulado tal que $\mathcal{E}_{\mathcal{M}} \neq [0, \pi]$ e $[\mathcal{M}]$ não é degenerado. Então o espaço de configuração é uma esfera, um toro, um bi-toro, um tri-toro ou um par de toros.*

Demonstração. Suponhamos que $\mathcal{E}_{\mathcal{M}} = [0, \alpha_0]$, para algum $\alpha_0 \neq \pi$. Então $n_2 = 1$ e o genus de cada componente conexa de $[\mathcal{M}]$ é não-negativo mas menor ou igual a 3. Por outro lado, como $0 \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ e $[\mathcal{M}_{\alpha_0}]$ é um ponto, $[\mathcal{M}]$ tem uma componente conexa. Concluimos assim que $[\mathcal{M}]$ é uma esfera, um

toro, um bi-toro ou um tri-toro. Conclusão análoga se $\mathcal{E}_{\mathcal{M}} = [\alpha_1, \pi]$, para algum $\alpha_1 \neq 0$.

Suponhamos agora que $\mathcal{E}_{\mathcal{M}} = [\alpha_1, \alpha_0]$, sendo $\alpha_0 \neq \pi$ e $\alpha_1 \neq 0$. Neste caso $[\mathcal{M}]$ é constituído por duas componentes conexas. Qual o genus de cada uma? Como $0 \notin \mathcal{D}_{\mathcal{M}}$, tem-se $|\ell_1 - \ell_2| < \max L$. Se $\max L = \ell_3 - (\ell_4 + \ell_5)$ (os outros casos são análogos), então

$$\ell_1 + \ell_2 > \ell_3 + \ell_4 + \ell_5 > \ell_3 + \ell_4 - \ell_5, \ell_3 + \ell_5 - \ell_4$$

e

$$\ell_3 + \ell_5 - \ell_4, \ell_3 + \ell_5 - \ell_4 > \max L > \ell_4 + \ell_5 - \ell_3.$$

Há, pois, dois elementos de \tilde{L} no intervalo $[\max L, \ell_3 + \ell_4 + \ell_5]$, e portanto $\frac{n_1}{2} = 2$. Por outro lado, como $n_2 = 0$, o genus é 1. O espaço de configuração é, pois, constituído por um par de toros. E, no exemplo descrito em (3), apresentou-se um pentágono articulado nas condições indicadas. \square

Analisemos agora pentágonos articulados em que $\mathcal{E}_{\mathcal{M}} = [0, \pi]$.

Teorema 10. *Seja \mathcal{M} um pentágono articulado tal que $\mathcal{E}_{\mathcal{M}} = [0, \pi]$ e $[\mathcal{M}]$ não é degenerado. Então o espaço de configuração é um toro, um bi-toro, um tri-toro, um 4-toro ou um par de toros.*

Demonstração. Como $\mathcal{E}_{\mathcal{M}} = [0, \pi]$, temos $n_2 = 2$. Se $n_1 = 0$, então cada componente conexa do espaço de configuração tem genus 1 e, portanto, é um toro. Além disso, para todo o $\alpha \in [0, \pi]$, tem-se uma das propriedades seguintes: $(>, >)$, $(<, <)$, $(<, >)$ ou $(>, <)$. Se for válida a primeira ou a segunda destas condições, então $[\mathcal{M}_{\alpha}]$ é uma circunferência, para todo o $\alpha \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}}$, e, por isso, $[\mathcal{M}]$ possui uma só componente conexa. Caso contrário, $[\mathcal{M}_{\alpha}]$ é formado por duas circunferências disjuntas, para todo o $\alpha \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}}$ e, portanto, $[\mathcal{M}]$ contém duas componentes conexas. Logo o espaço de configuração de \mathcal{M} é um toro ou um par de toros.

Se $n_1 > 0$, então existe β em $]0, \pi[$ tal que $[\mathcal{M}_{\beta}]$ é um oito. Por esse motivo, $[\mathcal{M}]$ só tem uma componente conexa. Como n_1 é par e

$$\frac{n_1}{2} = \#(\tilde{L}) \leq 3$$

concluimos que

$$2 \leq \frac{n_1}{2} + 1 \leq 4$$

logo o espaço de configuração tem genus 2, 3 ou 4. \square

A tabela seguinte indica exemplos de mecanismos para construir cada um destes espaços.

l_1, l_2, l_3, l_4, l_5	Espaço de configuração
4, 5, 11, 12, 13	dois toros disjuntos
20, 5, 11, 12, 13	toro
18, 5, 11, 12, 13	bi-toro
16, 5, 11, 12, 13	tri-toro
14, 5, 11, 12, 13	4-toro

Como vimos, a passagem de uma esfera a um toro, ou de um toro para um par de toros, pode ser feita como no Exemplo 5.1 e no exemplo apresentado em (3). Contudo, estas não são as únicas transições possíveis entre os diferentes tipos de espaços de configuração. Por exemplo, partindo novamente de um mecanismo \mathcal{M} tal que $[\mathcal{M}]$ é uma esfera e alterando o comprimento de uma haste por forma a que se obtenha $l_1 + l_2 = l_3 + l_4 + l_5$ e depois $l_1 + l_2 < l_3 + l_4 + l_5$, enquanto as restantes desigualdades se mantêm, encontramos uma esfera com dois pontos identificados e depois um toro, como mostra a Figura 30.

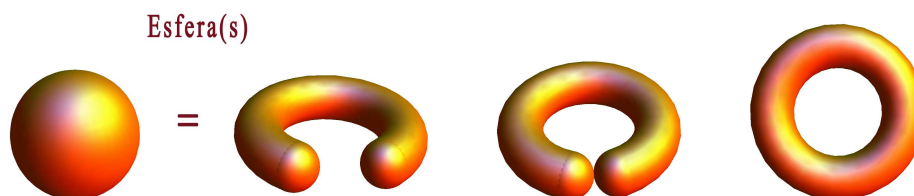


Figura 30: Transição entre espaços de configuração.

7 Genus superior a 4

Verificámos nas secções anteriores que, do ponto de vista topológico, só há cinco possibilidades para o espaço de configuração de um quadrilátero articulado e que a variedade de espaços de configuração resultantes de pentágonos articulados é também escassa. Sabemos, por exemplo, que se pretendermos obter um espaço de configuração com genus superior a 4, não basta um pentágono articulado \mathcal{M} , ainda que $[\mathcal{M}]$ não seja degenerado.

Uma possibilidade seria acrescentar uma haste unida a um novo ponto fixo, como indica a Figura 31.¹¹

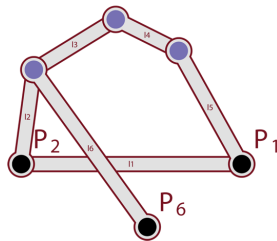


Figura 31: Pentágono com mais uma haste unida a um novo ponto fixo.

Porém, o mero acréscimo de um ponto fixo e de uma haste a ele ligada não conduz a um espaço de configuração mais rico (aliás, em geral, acontece o oposto). Mas, se acrescentarmos um ponto móvel, obtemos um espaço de configuração muito mais vasto do que o inicial: na verdade, até vasto de mais, pois o espaço de configuração é agora parametrizável por 4 variáveis livres. Uma maneira de reduzirmos a liberdade excessiva neste último cenário consiste em unir à haste adicionada uma outra haste ligada a um novo ponto fixo, P_7 , como ilustra a Figura 32.¹²

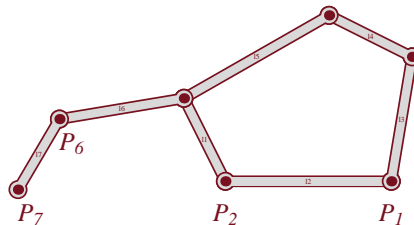


Figura 32: Pentágono com mais duas hastes e um novo ponto fixo.

É precisamente esse tipo de mecanismos que estudaremos de seguida, estabelecendo através deles um processo indutivo que constrói mecanismos cujos espaços de configuração têm genus arbitrariamente grande.

¹¹Como complemento a esta informação, sugerimos que consulte a página [auxi22.html](#) do módulo.

¹²Explicações adicionais são apresentadas, através do Exemplo 14, na página [auxi23.html](#) do módulo.

7.1 Pentágonos articulados aumentados

Definição 8. Um *pentágono articulado aumentado* $\widehat{\mathcal{M}}$ é um mecanismo que se obtém de um pentágono articulado \mathcal{M} acrescentando-lhe n pontos fixos, n pontos móveis e n pares de hastes do seguinte modo:

- O primeiro par de hastes une um novo ponto móvel, digamos \mathcal{P}_6 , a um ponto móvel já existente, \mathcal{P}_3 , e a um novo ponto fixo, digamos \mathcal{P}_7 .
- O segundo par de hastes une um outro novo ponto móvel, digamos \mathcal{P}_8 , a \mathcal{P}_6 e a um novo ponto fixo, digamos \mathcal{P}_9 ,
- Etc.

Uma vez que um pentágono articulado aumentado $\widehat{\mathcal{M}}$ contém de facto apenas um pentágono articulado, manteremos a notação anterior para \mathcal{M}_α , $d_{\mathcal{M}}$, $\mathcal{D}_{\mathcal{M}}$, $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$, etc, tendo em atenção que se referem ao sub-mecanismo \mathcal{M} de $\widehat{\mathcal{M}}$. A Figura 33 mostra uma realização de um pentágono articulado aumentado, sendo $n = 2$.

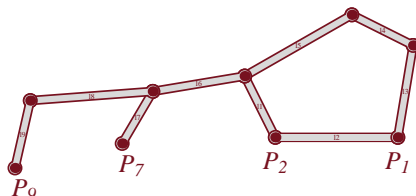


Figura 33: Pentágono articulado aumentado.

Recorde-se que, no caso dos quadriláteros e dos pentágonos articulados, só existem dois pontos fixos e conhecemos a distância entre eles porque, por definição, estão unidos por uma haste (de comprimento ℓ_1). Por esse motivo, é indiferente qual o par de pontos que escolhemos em \mathbb{R}^2 para fixar o mecanismo: escolhido outro par de pontos fixos, digamos P_3 e P_4 , que distem entre si ℓ_1 , existe uma isometria que preserva a orientação, leva $[P_1P_2]$ em $[P_3P_4]$ e associa a cada realização de \mathcal{M} com pontos fixos P_1 e P_2 uma realização de \mathcal{M} com pontos fixos P_3 e P_4 . E, portanto, os espaços de configuração $[\mathcal{M}]_{(P_1, P_2)}$ e $[\mathcal{M}]_{(P_3, P_4)}$ são homeomorfos. Do mesmo modo, dados $\ell_1 > 0$ e dois pontos P_1 e P_2 , a qualquer terno de pontos (P_1, P_2, P_7) verificando

$$\|P_1 - P_2\| = \ell_1 \quad \text{e} \quad \|P_7 - P_2\| \leq \ell_2 + \ell_6 + \ell_7$$

está associado um espaço de configuração $[\mathcal{M}]_{(P_1, P_2, P_7)}$. Contudo, o terceiro ponto fixo, P_7 , não está unido por uma haste aos restantes pontos fixos P_1 e P_2 . Isso faz com que o possamos escolher por forma a ficar a uma distância de P_1 e P_2 tal que o espaço de configuração associado a P_1, P_2, P_7 seja apenas um ponto, ou, pelo contrário, o possamos escolher por forma a duplicar o espaço de configuração do pentágono articulado que deu origem ao pentágono articulado aumentado. O que significa que, para diferentes escolhas de P_7 , os espaços de configuração podem não ser homeomorfos entre si.

7.2 Construção

No que se segue, partiremos de um pentágono articulado cujo espaço de configuração é um toro e acrescentaremos duas hastes, um ponto fixo e um ponto móvel. Desse modo, conseguiremos aumentar em 1 o genus do espaço de configuração. Depois prosseguiremos por indução. A Figura 34 esquematiza este processo indutivo e exhibe uma realização de um mecanismo cujo espaço de configuração tem genus g .



Figura 34: Esquema da indução até g .

Na Secção 5, vimos que, se $0 \leq g \leq 4$, basta usar um pentágono articulado com 2 pontos fixos, 3 pontos móveis e 5 hastes apropriadamente escolhidas para obter um espaço de configuração de genus g . Provaremos de seguida que, dado natural $g > 4$, existe um pentágono articulado aumentado cujo espaço de configuração tem genus g e que é formado por

$$\begin{cases} \frac{g+4}{2} \text{ pontos fixos, } \frac{g+6}{2} \text{ móveis e } g+5 \text{ hastes, se } g > 4 \text{ e } g \text{ é par;} \\ \frac{g+5}{2} \text{ pontos fixos, } \frac{g+7}{2} \text{ móveis e } g+6 \text{ hastes, se } g > 4 \text{ e } g \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Teorema 11. *Para cada $g \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, existe um pentágono articulado aumentado cujo espaço de configuração tem genus g .*

Demonstração. Regressemos ao caso $g = 1$ para iniciar o procedimento que, por indução, construirá um pentágono aumentado cujo espaço de configuração tem genus superior a quatro. Consideremos um pentágono articulado \mathcal{M} tal que $[\mathcal{M}]_{(P_1, P_2)}$ é um toro com $\alpha_0 < \frac{\pi}{2}$. Suponhamos, por exemplo, que as medidas das hastes em \mathcal{M} são 9, 3, 1, 5, 3. Obteremos um pentágono articulado aumentado $\widehat{\mathcal{M}}$ adicionando a \mathcal{M} um novo ponto fixo e duas novas hastes de comprimentos ℓ_6 e ℓ_7 . Recorde-se que, se P_1, P_2, P_7 são pontos do plano tais que

$$\|P_1 - P_2\| = \ell_1 \quad \text{e} \quad \|P_7 - P_2\| \leq \ell_2 + \ell_6 + \ell_7$$

então $[\widehat{\mathcal{M}}]_{(P_1, P_2, P_7)}$ é a união dos espaços $[\widehat{\mathcal{M}}_\alpha]_{(P_1, P_2, P_7)}$, para todo o $\alpha \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}}$.

Seja $\alpha' \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ tal que $[\mathcal{M}_{\alpha'}]$ é um oito. Suponhamos que escolhemos o novo ponto P_7 de modo que as duas novas hastes fiquem (esticadas) na mesma direcção quando $P_3 = C_\delta$, para algum δ com $\alpha' < \delta < \alpha_0$, e apenas nessas circunstâncias (Figura 35). Suponhamos ainda que P_7 pertence à semi-recta $\overrightarrow{C_\delta C_{-\alpha_0}}$. Desse modo, P_6 é C_β^* , para algum $\beta \in [-\pi, \pi]$, onde C_β^* é o ponto da circunferência de centro P_7 e raio ℓ_7 tal que $\overrightarrow{P_7 C_\beta^*}$ faz um ângulo igual a β com $\overrightarrow{P_7 C_\delta}$ (Figura 35).

Por fim, suponhamos que, por construção das novas hastes, se tem

- (a) o valor máximo de β , que designamos por β_0 , é menor que $\frac{\pi}{2}$ e é obtido quando $P_3 = C_{-\alpha_0}$,
- (b) o valor mínimo de β é $-\beta_0$ e é também obtido quando $P_3 = C_{-\alpha_0}$,
- (c) o ângulo $\angle P_7 C_{\beta_0}^* C_{-\alpha_0} = \angle P_7 C_{-\beta_0}^* C_{-\alpha_0} = \frac{\pi}{2}$

e analisemos, para cada $\alpha \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}}$, o espaço $[\widehat{\mathcal{M}}_\alpha]_{(P_1, P_2, P_7)}$.

Repare-se¹³ que $[\widehat{\mathcal{M}}]_{(P_1, P_2, P_7)} = \widehat{\mathcal{M}}_1 \cup \widehat{\mathcal{M}}_2$, onde

$$\widehat{\mathcal{M}}_1 = \bigcup_{\alpha \in [-\alpha_0, \delta]} [\widehat{\mathcal{M}}_\alpha] = \widehat{\mathcal{M}}_2.$$

Como $\widehat{\mathcal{M}}_1$ e $\widehat{\mathcal{M}}_2$ possuem o mesmo número de oitos que $[\mathcal{M}] = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}}} [\mathcal{M}_\alpha]$

e a curva de colagem $[\widehat{\mathcal{M}}_\delta]_{(P_1, P_2, P_7)}$ de $\widehat{\mathcal{M}}_1$ a $\widehat{\mathcal{M}}_2$ é uma circunferência¹⁴, então a reunião de $\widehat{\mathcal{M}}_1$ e $\widehat{\mathcal{M}}_2$ duplica o número de oitos existente em $[\mathcal{M}]$

¹³A página [auxi24.html](#) do módulo ajuda a compreender este detalhe do argumento.

¹⁴Este caso está ilustrado na página [auxi25.html](#) do módulo.

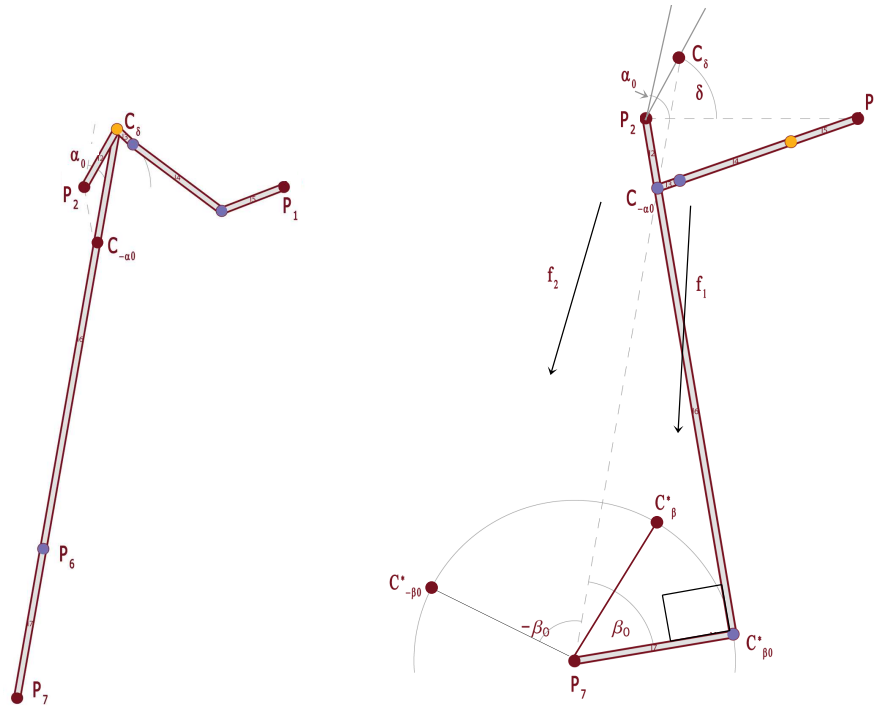


Figura 35: À esquerda: Posição do mecanismo com as duas novas hastes esticadas. À direita: Ligação entre P_6 , P_7 e C_δ .

e, portanto, $[\widehat{\mathcal{M}}]_{(P_1, P_2, P_7)}$ tem uma componente conexa e é um bi-toro. A tabela seguinte resume esta informação e a Figura 36 mostra o espaço de configuração.

Condição sobre α	Relações	$[\widehat{\mathcal{M}}]_{(P_1, P_2, P_7)}$
$\alpha = -\alpha_0$	$(>, >)$	Dois pontos
$-\alpha_0 < \alpha < -\alpha'$	$(>, >)$	Duas circunferências disjuntas
$\alpha = -\alpha'$	$(>, =)$	Dois oitos
$-\alpha' < \alpha < \alpha'$	$(>, <)$	Dois pares de circunferências disjuntas
$\alpha = \alpha'$	$(>, =)$	Dois oitos
$\alpha' < \alpha < \delta$	$(>, >)$	Duas circunferências disjuntas
$\alpha = \delta$	$(>, >)$	Uma circunferência

Em resumo, o processo que descrevemos consiste em adicionar um ponto fixo e um par de hastes a um pentágono articulado previamente fixado de modo a *cortar* o seu espaço de configuração por uma circunferência, depois

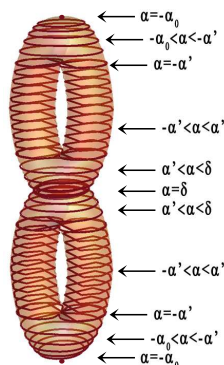


Figura 36: Bi-toro obtido com um pentágono aumentado.

duplicar a parte *cortada* e finalmente unir as duas partes, a original cortada e a sua cópia, pela circunferência. Assim, partindo de um toro, construímos um bi-toro.

Lema 12. *A construção anterior é possível.*

Demonstração. Observemos a Figura 37. Temos

$$\begin{aligned} \|P_7 - C_{-\alpha_0}\| &= \|P_7 - C_\delta\| - \|C_\delta - C_{-\alpha_0}\| = \ell_6 + \ell_7 - \|C_\delta - C_{-\alpha_0}\| \\ &= \ell_6 + \ell_7 - 2\ell_2 \cos(\gamma) \end{aligned}$$

onde

$$\gamma = \frac{\pi - (\delta + \alpha_0)}{2}.$$

Por outro lado,

$$\ell_6 = \|P_7 - C_{-\alpha_0}\| \cos(\gamma) \quad \text{e} \quad \ell_7 = \|P_7 - C_{-\alpha_0}\| \sin(\gamma)$$

de onde se conclui que

$$\|P_7 - C_{-\alpha_0}\| = \|P_7 - C_{-\alpha_0}\| \cos(\gamma) + \|P_7 - C_{-\alpha_0}\| \sin(\gamma) - 2\ell_2 \cos(\gamma)$$

isto é,

$$\|P_7 - C_{-\alpha_0}\| = \frac{2\ell_2 \cos(\gamma)}{\cos(\gamma) + \sin(\gamma) - 1}.$$

Daqui resulta que

$$\ell_6 = \frac{2\ell_2 \cos^2(\gamma)}{\cos(\gamma) + \sin(\gamma) - 1} \quad \text{e} \quad \ell_7 = \ell_2 (\cos(\gamma) + \sin(\gamma) + 1).$$

Além disso, $\beta_0 = \pi - \frac{\pi}{2} - \gamma < \frac{\pi}{2}$. □

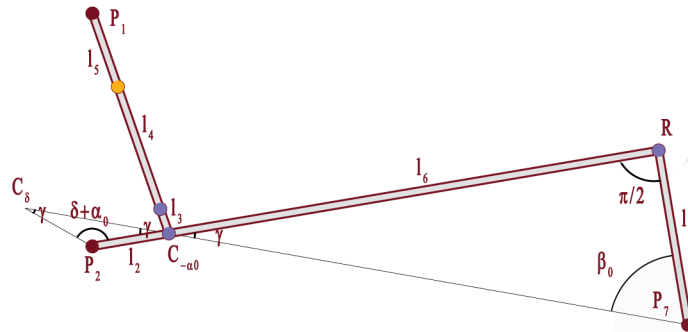


Figura 37: $\beta_0 < \frac{\pi}{2}$.

Observação 2. Consideremos a correspondência $f_1 : [-\alpha_0, \delta] \rightarrow [0, \beta_0]$ que a cada $\alpha \in [-\alpha_0, \delta]$ associa o valor em $[0, \beta_0]$ tal que $C_{f_1(\alpha)}^*$ pertence à circunferência de centro C_α e raio ℓ_6 e a concavidade entre $\overrightarrow{C_{f_1(\alpha)}^* P_7}$ e $\overrightarrow{C_{f_1(\alpha)}^* C_\alpha}$ é positiva ou nula; e também $f_2 : [-\alpha_0, \delta] \rightarrow [-\beta_0, 0]$ que a cada $\alpha \in [-\alpha_0, \delta]$ associa o elemento de $[-\beta_0, 0]$ tal que $C_{f_2(\alpha)}^*$ pertence à circunferência de centro C_α e raio ℓ_6 e a concavidade entre $\overrightarrow{C_{f_2(\alpha)}^* P_7}$ e $\overrightarrow{C_{f_2(\alpha)}^* C_\alpha}$ é negativa ou nula. Em [5], provou-se que f_1 e f_2 são funções e estritamente monótonas (respectivamente, decrescente e crescente). Por isso, em vez de analisarmos $[\widehat{\mathcal{M}}]_{(P_1, P_2, P_7)}$ em função do ângulo α em $[-\alpha_0, \delta]$, podemos transferir o estudo para a variável β no intervalo $[-\beta_0, \beta_0]$. Desse modo,¹⁵

$$\widehat{\mathcal{M}}_1 = \bigcup_{\beta \in [0, \beta_0]} [\widehat{\mathcal{M}}_{f_1^{-1}(\beta)}] \quad e \quad \widehat{\mathcal{M}}_2 = \bigcup_{\beta \in [-\beta_0, 0]} [\widehat{\mathcal{M}}_{f_2^{-1}(\beta)}].$$

O método anterior pode ser generalizado para se obter um espaço de configuração com uma componente conexa de genus $g = 3$. Vejamos como. Regressemos ao pentágono articulado aumentado anterior e consideremos a função $g : [-\beta_0, \beta_0] \rightarrow [-\alpha_0, \delta]$ tal que

$$g|_{[0, \beta_0]} \equiv f_1^{-1} \quad e \quad g|_{[-\beta_0, 0]} \equiv f_2^{-1}.$$

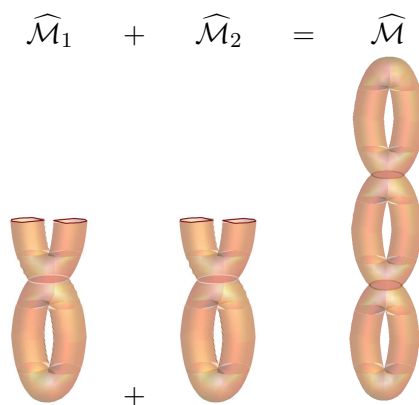
Seja $\varepsilon \in]0, \beta_0[$ tal que $\cup_{\beta \in [-\beta_0, \varepsilon]} [\widehat{\mathcal{M}}_{g(\beta)}]_{(P_1, P_2, P_7)}$ contém três oitos. Acrescentemos um ponto fixo P_9 e duas hastes, de comprimentos ℓ_8 e ℓ_9 , nas condições indicadas no Lema 12. Em particular, pretendemos que fiquem

¹⁵Sugerimos que explore esta construção na animação da página [auxi23.html](#) do módulo.

completamente esticadas quando (e só quando) $\beta = \varepsilon$ e que formem um triângulo rectângulo quando $\beta = -\beta_0$. Tal é possível, bastando tomar

$$\begin{aligned} \ell_8 &= \frac{2\ell_7 \cos^2(\gamma)}{\cos(\gamma) + \sin(\gamma) - 1} \\ \ell_9 &= \ell_7 (\cos(\gamma) + \sin(\gamma) + 1) \\ \gamma &= \frac{\pi - (\varepsilon + \beta_0)}{2} \\ P_9 &= \text{o ponto da semi-recta } \overline{C_\varepsilon^* C_{-\beta_0}^*} \text{ tal que } \|C_\varepsilon^* - P_9\| = \ell_8 + \ell_9. \end{aligned}$$

Esquemáticamente, temos:

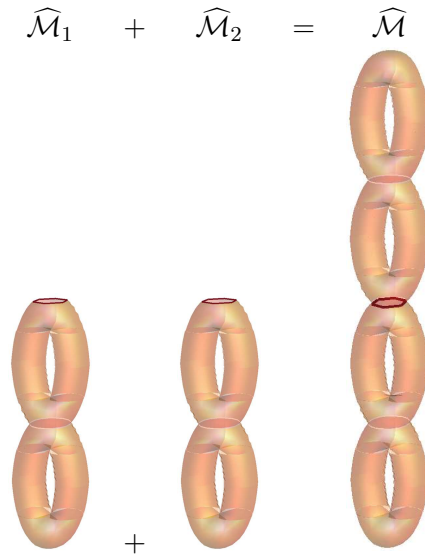


Resumindo: Adicionámos um ponto fixo e um par de hastes ao pentágono articulado aumentado obtido para o caso $g = 2$ de modo a *cortar* o seu espaço de configuração por um par de circunferências disjuntas, depois duplicar a parte *cortada* e finalmente unir as duas partes pelo par de circunferências referido. Desse modo, construímos um novo pentágono articulado aumentado $\widehat{\mathcal{M}}$ tal que $[\widehat{\mathcal{M}}]_{(P_1, P_2, P_7, P_9)}$ é um tri-toro (sendo $n_1 = 1$ e $n_2 = 6$).

Claramente, se se tivesse escolhido ε por forma a que

$$\bigcup_{\beta \in [-\beta_0, \varepsilon]} [\widehat{\mathcal{M}}_{g(\beta)}]_{(P_1, P_2, P_7)}$$

contivesse quatro oitos, o espaço final seria um 4-toro.



Repetindo o procedimento a partir dos últimos mecanismos, podemos produzir indutivamente espaços de configuração com uma componente conexa e genus arbitrariamente grande. Mais concretamente, para cada $n \in \mathbb{N}$, os pentágonos articulados aumentados com $n + 3$ pontos fixos, $n + 4$ pontos móveis e $2n + 7$ hastes permitem a construção de espaços de configuração não degenerados com genus $g = 2n + 1$ e $g = 2n + 2$. \square

Observação 3. *Sugere-se que o leitor verifique que espaços de configuração obteria se aplicasse o procedimento da secção anterior a quadriláteros, construindo quadriláteros articulados aumentados.*

Referências

- [1] R. Courant, H. Robbins, I. Stewart, *What is Mathematics? An elementary approach to ideas and methods*, Oxford University Press, 2^a edição, 1996.
- [2] R. Curtis, M. Steiner, *Configuration spaces of planar pentagons*, American Mathematical Monthly 114 (2007) 183–201.
- [3] G.K. Francis, J.R. Weeks, *Conway's ZIP Proof*, American Mathematical Monthly 106 (1999) 393–399.
- [4] D. Jordan, M. Steiner, *Configuration spaces of mechanical linkages*, Discrete and Computational Geometry 22 (1999) 297–315.

- [5] D. Jordan, M. Steiner, *Compact surfaces as configuration spaces of mechanical linkages*, Israel Journal of Mathematics 122 (2001) 175–187.
- [6] O. Mermoud, M. Steiner, *Visualisation of configuration spaces of polygonal linkages*, Journal for Geometry and Graphics 4, No. 2 (2000) 147–157.
- [7] J.R. Munkres, *Topology: a first course*, Prentice-Hall, 1975.
- [8] A.C. Oliveira, *Matemática Experimental*, Tese de Doutorado, Universidade do Porto, 2013.
- [9] W.P. Thurston, J.R. Weeks, *The mathematics of three-dimensional manifolds*, Scientific American 251 (1984) 94–107.
- [10] D. Shimamoto, C. Vanderwaart, *Spaces of polygons in the plane and Morse theory*, American Mathematical Monthly 112 (2005) 289–310.
- [11] <http://www.math.toronto.edu/drorbn/People/Eldar/thesis/>
- [12] S. Willard, *General Topology*, Addison-Wesley, 1970.

FUNÇÕES ITERADORAS DE ORDEM DE CONVERGÊNCIA SUPERIOR À DO MÉTODO DE NEWTON

Mário M. Graça, Pedro T. Lima

Departamento de Matemática
Instituto Superior Técnico
Universidade de Lisboa
Av. Rovisco Pais,
1049-001 Lisboa, Portugal.
e-mail: mgraca@math.tecnico.ulisboa.pt
plima@math.tecnico.ulisboa.pt

Resumo: Para aproximar um zero de uma função real, construímos recursivamente uma família de funções iteradoras recorrendo a regras de quadratura de Newton-Cotes fechadas. Provamos que a partir de uma regra de quadratura com n nós se obtém uma função iteradora de ordem de convergência pelo menos $n + 1$, começando com $n = 1$. São apresentados alguns exemplos numéricos ilustrando a eficiência dos algoritmos propostos.

Abstract: Based on Newton-Cotes closed quadrature rules a family of iterative functions is recursively constructed in order to approximate a root of a real function. We prove that with the help of a n -node quadrature rule an iterating function with convergence order of at least $n + 1$ is obtained, starting with $n = 1$. Some numerical examples are presented to illustrate the efficiency of the proposed methods.

palavras-chave: Regras de quadratura; métodos iterativos; método de Newton-trapézios; método de Newton-Simpson; ordem de convergência.

keywords: Quadrature rules; iterative methods; Newton-trapezoidal method; Newton-Simpson method; convergence order.

1 Introdução

Regras de quadratura aplicadas na construção de métodos iterativos para equações não lineares, de ordem de convergência superior à do método de Newton, é assunto que tem sido objecto de investigação de vários autores, por exemplo [3], [22], [6], [11], [16]. Todavia, com frequência na literatura tais métodos são apresentados caso a caso ou para um conjunto muito restrito de regras de quadratura. Neste trabalho procuramos abordar a questão numa perspectiva uniformizadora e sistemática.

Fixado um inteiro positivo n , definimos recursivamente uma função iteradora $t_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ baseada numa regra de quadratura de Newton-Cotes fechada, com $n + 1$ nós (ver Definição 2.1). Sobre integração numérica ver, por exemplo, [14] Ch. 6, [2] Ch. 5, e para as regras de Newton-Cotes [7], Ch. 3, e [10]. Neste trabalho a função t_0 , tomada como função iteradora de base, coincide com a iteradora de Newton.

Se o método de Newton tiver ordem de convergência $p \geq 2$, provamos no Teorema 3.2, que a nossa função iteradora t_n possui ordem de convergência não inferior a $p + n$, pelo que ficamos assim habilitados a construir métodos iterativos de ordem de convergência arbitrária para a resolução de equações não lineares, por via de quadraturas numéricas (sobre classificação de processos iterativos em função da sua ordem de convergência ver, por exemplo, [19]).

Iniciamos este trabalho começando por estabelecer, na Secção 2, uma relação entre a aproximação de uma raiz z real duma equação $f(x) = 0$ e um método de quadratura, por aplicação do teorema fundamental do cálculo. Embora nos restrinjamos ao caso das regras de Newton-Cotes fechadas, outras regras de quadratura poderão ser usadas.

Mostramos no parágrafo 3.1, que a função iteradora t_0 (que aqui tomamos como função iteradora de base de recursividade), coincide com a função iteradora clássica de Newton.

Para $n \geq 1$, o passo de uma regra de Newton-Cotes é definido de modo a garantir que o método iterativo t_n , construído a partir dessa regra, possua ordem de convergência superior ao da função iteradora t_{n-1} , sendo o processo recursivo de construção de funções iteradoras iniciado com a função t_0 , que assumimos de convergência supralinear.

É universalmente reconhecido que entre os métodos iterativos para equações não lineares avulta o método de Newton, o qual é considerado um método de eleição para aproximar uma raiz simples z da equação $f(x) = 0$, visto que, sob as hipóteses usuais de regularidade da função f , podemos garantir a convergência supralinear local deste método. Todavia, nas aplicações, é por vezes vantajoso dispor de métodos de ordem de convergência superior à do método de Newton, particularmente quando se pretende usar aproximações iniciais para as quais o método de Newton falha.

Seja p a ordem de convergência local do método gerado por t_0 . Assumimos em primeiro lugar que a ordem de convergência deste método é $p \geq 2$

(correspondente ao caso de zeros simples da função) e introduziremos depois modificações adequadas para lidarmos com o caso de zeros múltiplos, de modo que possamos assumir que a função iteradora de base, t_0 , possui ordem de convergência local $p \geq 2$).

Partindo de uma função iteradora t_0 , de convergência supralinear, provamos que qualquer membro da família de funções iteradoras t_n , para $n \geq 1$ possui convergência supralinear (Proposição 2.1). O mesmo resultado é generalizável para o caso $d \geq 2$, ou seja, para sistemas de equações não lineares.

Dado que a expressão da função iteradora inicial que usamos pode ser obtida por aplicação da regra de quadratura conhecida pela designação de *regra do retângulo* (à esquerda), designamos t_0 por função de Newton, ou por *função iteradora de Newton-rectângulo*.

A regra dos trapézios será a seguir utilizada com um determinado passo $h_1(x)$, definido à custa de $t_0(x)$. A aplicação $t_1(x)$ daí resultante, será designada por *iteradora de Newton-trapézios* (ver parágrafo 3.2). Estabelecemos depois, no parágrafo 3.3, uma relação entre a iteradora de Newton-trapézios e o célebre método de Halley [12]. Para simplificar, as funções iteradoras que assim construímos serão também designadas pelos nomes por que são conhecidas as regras de quadratura que lhes dão origem.

Definindo seguidamente um passo $h_2(x)$, dependente da aplicação $t_1(x)$, obtemos a função $t_2(x)$, designada por *função iteradora de Simpson* por resultar de uma aplicação da regra de Simpson, com passo $h_2(x)$ (ver parágrafo 3.4).

Um esquema de recursividade análogo ao anteriormente referido é igualmente utilizado para se definir a iteradora $t_n(x)$, para $n \geq 3$, resultante da aplicação da correspondente regra de Newton-Cotes com $n + 1$ nós e passo $h_n(x)$, sendo este passo definido recursivamente a partir da função iteradora anterior t_{n-1} (ver Definição 2.1).

Deixamos para outro trabalho a consideração de métodos iterativos baseados em regras de quadratura abertas, ou regras interpolatórias de grau de exactidão superior ao das regras de Newton-Cotes. De igual modo, o tratamento detalhado de sistemas de equações não lineares não será discutido aqui. Note-se que, pelo menos do ponto de vista formal, as funções iteradoras que construímos são imediatamente generalizáveis a \mathbb{R}^d , para $d \geq 2$.

Na Secção 4 damos alguns exemplos numéricos de aplicação dos métodos fechados de Newton-Cotes. Comparando com o método de Newton, os métodos dos trapézios, t_1 e de Simpson, t_2 , permitem-nos obter aproximações

precisas de uma raiz efectuando apenas algumas iterações das iteradoras t_1 e t_2 . Métodos de ordem de convergência superior a 4 são igualmente testados em exemplos para os quais o método de Newton falha.

A família de funções iteradoras t_n que obtivemos pode ser obviamente alargada por mera composição. Por exemplo, a partir das funções iteradoras dos trapézios e de Simpson, apresentamos exemplos numéricos aplicando a função iteradora composta, designada por t_{23} , de ordem de convergência pelo menos 12. Todavia, comparações sistemáticas com outros métodos de ordem elevada, aplicados a baterias de funções de testes (ver por exemplo [18]), estão fora dos objectivos do presente trabalho. Sublinhe-se, porém, que entre outras aplicações, os métodos de ordem de convergência elevada aqui desenvolvidos podem encontrar um campo de aplicação fundamental na área de optimização sem restrições.

A adopção de programação *Mathematica* dinâmica [23] facilita a consideração de expressões exactas de funções iteradoras de ordem de convergência elevada, bem como combinações dessas expressões, como é o caso da nossa função iteradora t_{76} , correspondente a um método de ordem de convergência pelo menos 56, iteradora baseada na composição de dois métodos resultando de quadraturas de Newton-Cotes, que designamos por t_6 e t_7 . Tais métodos permitem obter aproximações muito precisas de um zero z de uma função, usando apenas duas ou três iterações, e partindo de uma aproximação inicial afastada de z , aproximação esta para a qual o método de Newton é frequentemente inútil (ver Secção 4).

2 Relação entre o cálculo de uma raiz e métodos de quadratura

Dada uma equação de variável real $f(x) = 0$, seja z uma raiz simples, isto é, $f(z) = 0$ e $f'(z) \neq 0$. Suponhamos que a função f é suficientemente regular numa certa vizinhança de z . Pelo teorema fundamental do cálculo, sabemos que

$$\int_x^z f^{(1)}(t) dt = f(z) - f(x) = -f(x). \quad (1)$$

Fixado um inteiro não negativo n , considere-se uma regra interpolatória de quadratura com $n + 1$ nós, aplicada à função derivada $f^{(1)}$, denotada por $Q_n(f^{(1)})$, a qual será usada para aproximar o integral em (1). A regra

$Q_n(f^{(1)})$ pode sempre escrever-se na forma

$$Q_n(f^{(1)}) = \frac{z-x}{c_n} B_n(x). \quad (2)$$

A função $B_n(x)$ em (2) é caracterizada pelos pesos A_i e pelos “nós” $\xi_i(x) \in [x, z]$, tendo como expressão

$$B_n(x) = A_0 f^{(1)}(\xi_0(x)) + A_1 f^{(1)}(\xi_1(x)) + \cdots + A_n f^{(1)}(\xi_n(x)). \quad (3)$$

Nas regras interpolatórias a constante c_n em (2) satisfaz a igualdade

$$c_n = \sum_{i=0}^n A_i, \quad (4)$$

uma vez que, por construção, a regra é exacta quando aplicada á função $f(x) \equiv 1$ ¹.

Supomos ainda que os nós $\xi_i(x)$ são tais que no intervalo $[x, z]$ a função $f^{(1)}$ está definida, e que a função $B_n(x)$ é finita e possui inverso aritmético, isto é,

$$B_n(t) \neq 0 \quad \forall t \in [x, z]. \quad (5)$$

Assumimos também que os nós de quadratura $\xi_i(x)$, no ponto $x = z$, satisfazem as seguintes igualdades,

$$\xi_i(z) = z, \quad \text{para } i = 0, 1, \dots, n. \quad (6)$$

As funções $\xi_i(x)$ que servem de nós de quadratura na expressão (3), serão fixadas adiante na Secção 3, ao particularizarmos $B_n(x)$ adoptando as regras de quadratura de Newton-Cotes fechadas ([7], Ch. 3). Os processos iterativos que iremos construir para cálculo aproximado de zeros de funções herdarão, portanto, certas propriedades das regras de quadratura adoptadas, propriedades estas que aparecerão reflectidas na demonstração de alguns resultados adiante provados. Regras de Newton-Cotes abertas serão usadas noutro trabalho.

No caso da função f ser multivariada, isto é, para $d \geq 2$, a função $f^{(1)}$ deve entender-se como sendo a matriz jacobiana de f , admitindo-se ainda, em vez

¹Estamos a admitir que o comprimento do intervalo onde se aplica a quadratura é c_n , sendo este o menor número para o qual todos os pesos A_i são inteiros. Para considerarmos a integração num intervalo de comprimento diferente, todos os pesos deverão ser multiplicados por uma certa constante, razão por que aparece o factor $(z-x)/c_n$ na fórmula (2).

de (5), que a matriz $B_n(x)$ é invertível numa vizinhança de um zero simples de $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$.

Substituindo (2) em (1), obtém-se

$$z - x \simeq -c_n B_n^{-1}(x) f(x). \quad (7)$$

A aproximação obtida em (7) sugere-nos o processo iterativo gerado pela função t_n definida a seguir.

Definição 2.1. (*Função iteradora baseada em regra de quadratura*)

Fixado $n \geq 0$ e a função $B_n(x)$ associada à regra de quadratura (2), satisfazendo as condições (3)-(6), designamos por função iteradora baseada na regra de quadratura a função

$$t_n(x) = x - c_n B_n^{-1}(x) f(x). \quad (8)$$

Considerando a função auxiliar

$$H_n(x) = t_n(x) - x. \quad (9)$$

a função t_n pode também ser definida implicitamente pela relação

$$B_n(x) H_n(x) = -c_n f(x) \iff H_n(x) = -c_n B_n^{-1}(x) f(x). \quad (10)$$

Visto que para $n \geq 1$ apenas usaremos as regras de quadratura de Newton-Cotes fechadas, a correspondente função iteradora t_n em (8) será designada por *função iteradora de Newton-Cotes* (fechada) com $n + 1$ nós.

Começemos por provar a seguinte proposição relativa à convergência supralinear dos métodos iterativos gerados por (8), no caso de ser dada uma função f suficientemente regular numa vizinhança de um seu zero simples.

Proposição 2.1. (*Convergência supralinear das funções iteradoras*)

Uma raiz simples da equação $f(x) = 0$ é ponto fixo da função iteradora (8). Além disso, partindo de uma aproximação x_0 suficientemente próxima de z , a sucessão definida por $x_{k+1} = t_n(x_k)$ converge supralinearmente para z , para qualquer $n \geq 0$.

Demonstração. De (3) e atendendo às igualdades em (6), obtém-se

$$\begin{aligned} B_n(z) &= A_0 f^{(1)}(z) + A_1 f^{(1)}(z) + \dots + A_n f^{(1)}(z) \\ &= f^{(1)}(z) \sum_{i=0}^n A_i. \end{aligned}$$

Uma vez que, por hipótese, a soma dos pesos da regra de quadratura é igual à constante c_n , resulta

$$B_n(z) = c_n f^{(1)}(z), \quad (11)$$

donde se conclui que $B_n(z) \neq 0$, pois assumimos que z é zero simples da função f . Atendendo à definição (8), obtém-se

$$t_n(z) = z - c_n c_n^{-1} \left(f^{(1)}(z) \right)^{-1} \times f(z) = z.$$

Fica por conseguinte mostrado que um zero simples de f é ponto fixo da função iteradora t_n . Além disso, por (9), conclui-se que a função auxiliar H_n é nula no ponto fixo,

$$H_n(z) = 0. \quad (12)$$

Derivando ambos os membros de (10), resulta a expressão

$$B_n^{(1)}(x) H_n(x) + B_n(x) H_n^{(1)}(x) = -c_n f^{(1)}(x). \quad (13)$$

Assim, atendendo a (12), de (13) obtém-se a igualdade,

$$B_n(z) H_n^{(1)}(z) = -c_n f^{(1)}(z).$$

Substituindo na expressão anterior o valor de $B_n(z)$ dado em (11), vem

$$c_n f^{(1)}(z) H_n^{(1)}(z) = -c_n f^{(1)}(z),$$

ou seja, levando em consideração (9),

$$H_n^{(1)}(z) = -1 \Leftrightarrow t_n^{(1)}(z) - 1 = -1 \Leftrightarrow t_n^{(1)}(z) = 0.$$

A última igualdade implica que o processo iterativo gerado pela função t_n converge localmente para z e que a convergência é supralinear. \square

Adoptada uma função iteradora t_0 , de convergência supralinear, a Proposição 2.1 é fundamental porquanto nos permite construir funções iteradoras baseadas em regras de quadratura cuja ordem de convergência é pelo menos 2, ou seja com ordem de convergência pelo menos igual à do método de Newton para zeros simples. Além disso, uma vez definidos convenientemente os nós da regra de quadratura B_n , poderemos construir métodos baseados em funções iteradoras como na Definição 2.1, de ordem de convergência superior à do método de Newton. Acresce que uma modificação na função f , tal como indicado no parágrafo a seguir, nos permitirá inclusive lidar com o caso de um zero múltiplo, obtendo-se igualmente funções iteradoras t_n de ordem de convergência arbitrária, desde que se defina convenientemente a iteradora de base t_0 , de modo a garantirmos que esta converge supralinearmente para o zero z em causa.

2.1 Zeros múltiplos

Modificações de uma dada função f para a qual o método de Newton não dá resultados satisfatórios é uma técnica usada frequentemente (ver, por exemplo, [1], [9] e respectivas referências). Por exemplo, sendo t_0 a função de Newton aplicado a uma função f para a qual z é um zero múltiplo, considere-se

$$F(x) = t_0(x) - x = -\frac{f(x)}{f^{(1)}(x)}.$$

É fácil mostrar-se que o ponto z é zero simples para $F(x)$. Por conseguinte, a Proposição 2.1 é válida para o caso de zeros múltiplos desde que se comece por considerar o método de Newton t_0 actuando sobre a função F no lugar da função original f (ver Exemplo 4.3).

3 Funções iteradoras de Newton, trapézios e Simpson em \mathbb{R}

Nos parágrafos a seguir particularizamos as funções iteradoras t_0 , t_1 e t_2 , em \mathbb{R} , para regras de quadratura bem conhecidas. A primeira resulta imediatamente da regra do rectângulo à esquerda (única regra de Newton-Cotes aberta aqui considerada), a segunda de t_0 e da regra dos trapézios; finalmente a função iteradora t_2 depende de t_1 e da regra de Simpson. Note-se que o processo recursivo adoptado permite-nos garantir ordem de convergência pelo menos 3 para t_1 e ordem de convergência pelo menos 4, para t_2 , caso t_0 possua ordem de convergência $p \geq 2$.

Na Tabela 1 são dados os pesos A_i e a constante c_n usados na definição das funções iteradoras de Newton-Cotes t_n , para n desde 0 a 7, (não consideramos $n \geq 8$, pois os pesos A_i podem assumir valores negativos dando origem a fórmulas eventualmente numericamente instáveis (ver, por exemplo [4], p. 534).

3.1 Função iteradora de Newton-rectângulo

Para $n = 0$, a *regra do rectângulo à esquerda* utiliza como único nó o extremo inferior do intervalo de integração. Assim, esta regra aplicada a $\int_x^z f^{(1)}(t) dt$ escreve-se

$$Q_0(f^{(1)}) = (z - x) f^{(1)}(x).$$

n	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	$c_n = \sum_{i=0}^n A_i$
0	1								1
1	1	1							2
2	1	4	1						6
3	1	3	3	1					8
4	7	32	12	32	7				90
5	19	75	50	50	75	19			288
6	41	216	27	272	27	216	41		840
7	751	3577	1323	2989	2989	1323	3577	751	17280

Tabela 1: $Q_n(f^{(1)}) = (z - x)/c_n \sum_{i=0}^n A_i f^{(1)}(\xi_i(x))$.

Neste caso a soma dos pesos da regra é $c_0 = 1$ e a função $B_0(x)$ dada por (3) tem a forma $B_0(x) = f^{(1)}(\xi_0(x)) = f^{(1)}(x)$. Sendo z um zero simples da função f , como $\xi_0(z) = z$, pela Proposição 2.1, o método iterativo gerado por

$$t_0(x) = x - c_0 B_0^{-1}(x) f(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \quad (14)$$

converge para um ponto fixo $t_0(z) = z$, e a convergência é localmente supra-linear. A aplicação $t_0(x)$ coincide com a função iteradora de Newton para funções reais.

3.2 Função iteradora de Newton-trapézios

Para $n = 1$, a *regra dos trapézios* utiliza como nós os extremos do intervalo de integração. Adoptemos a seguinte definição recursiva do passo $h_1(x)$,

$$h_1(x) = t_0(x) - x \Rightarrow h_1^{(1)}(x) = t_0^{(1)}(x) - 1, \quad h_1^{(2)}(x) = t_0^{(2)}(x), \quad (15)$$

onde $t_0(x) = x - (f^{(1)})^{-1} f(x)$. A regra dos trapézios aplicada a $\int_x^z f^{(1)}(t) dt$, com nós $\xi_0(x) = x$ e $\xi_1(x) = x + h_1(x)$, escreve-se

$$Q_1(f^{(1)}) = \frac{z - x}{c_1} B_1(x) = \frac{z - x}{2} [f^{(1)}(x) + f^{(1)}(x + h_1(x))].$$

Assim a função iteradora (8) tem a forma

$$\begin{aligned} t_1(x) &= x - c_1 B_1^{-1}(x)f(x) = x - \frac{2f(x)}{f^{(1)}(x) + f^{(1)}(x + h_1(x))} = \\ &= x - \frac{2f(x)}{f^{(1)}(x) + f^{(1)}\left(\frac{f(x)}{f^{(1)}(x)}\right)}. \end{aligned} \quad (16)$$

Note-se que a aplicação $t_1(x)$ é da forma

$$t_1(x) = x - \frac{f(x)}{\frac{f^{(1)}(x) + f^{(1)}\left(\frac{f(x)}{f^{(1)}(x)}\right)}{2}}. \quad (17)$$

A expressão (17) significa que o “passo” de $t_1(x)$, isto é $|H_1(x)| = |t_1(x) - x|$, se obtém através da média aritmética entre o declive da recta tangente ao gráfico de $y = f(x)$, no ponto x , e o declive da recta tangente ao mesmo gráfico, no ponto $\bar{x} = t_0(x) = x - f(x)/f^{(1)}(x)$, sendo \bar{x} resultado da aplicação da iteradora de Newton $t_0(x)$.

Associado à função (16) registemos o processo iterativo

$$\begin{aligned} h_k &= t_0(x_k) - x_k = -f(x_k)/f^{(1)}(x_k) \\ x_{k+1} &= x_k - \frac{2f(x_k)}{f^{(1)}(x_k) + f^{(1)}(x_k + h_k)}, \quad k = 0, 1, \dots, \end{aligned} \quad (18)$$

o qual será designado por método de Newton-trapézios.

Proposição 3.1. *Supondo que a função real f é suficientemente regular numa vizinhança de um zero simples z , escolhida uma aproximação inicial x_0 suficientemente próxima de z , o método de Newton-trapézios (18) converge para z e a respectiva convergência é, pelo menos, de ordem 3.*

Demonstração. Os nós de quadratura são $\xi_0(x) = x$ e $\xi_1(x) = x + h_1(x) = t_0(x)$. Assim $\xi_0(z) = \xi_1(z) = z$. A Proposição 2.1 é aplicável, pelo que z é ponto fixo superatractor da função t_1 , isto é, $t_1(z) = z$ e $t_1^{(1)}(z) = 0$.

Atendendo a que

$$B_1(x) = f^{(1)}(x) + f^{(1)}(x + h_1(x)) = f^{(1)}(x) + f^{(1)}(t_0(x)) \implies B_1(z) = 2f^{(1)}(z),$$

tem-se

$$\begin{aligned} B_1^{(1)}(x) &= f^{(2)}(x) + f^{(2)}(x + h_1(x)) (1 + h_1^{(1)}(x)) \\ &= f^{(2)}(x) + f^{(2)}(t_0(x)) (1 + t_0^{(1)}(x) - 1). \end{aligned}$$

Assim, dado que $t_0^{(1)}(z) = 0$, obtém-se

$$B_1^{(1)}(z) = f^{(2)}(z).$$

A expressão (13) escreve-se,

$$B_1^{(1)}(x) H_1(x) + B_1(x) H_1^{(1)}(x) = -2 f^{(1)}(x),$$

donde,

$$B_1^{(2)}(x) H_1(x) + 2 B_1^{(1)}(x) H_1^{(1)}(x) + B_1(x) H_1^{(2)}(x) = -2 f^{(2)}(x).$$

Dado que para $x = z$ se tem $H_1(z) = 0$ e $H_1^{(1)}(z) = t_1^{(1)}(z) - 1 = -1$, resulta

$$-2 f^{(2)}(z) + 2 f^{(1)}(z) H_1^{(2)}(z) = -2 f^{(2)}(z).$$

Uma vez que z é um zero simples de f , obtém-se,

$$H_1^{(2)}(z) = 0 \iff t_1^{(2)}(z) = 0.$$

Por conseguinte o método (18) converge localmente para o zero z da função f , com ordem de convergência pelo menos cúbica. \square

3.3 Os métodos de Newton-trapézios e de Halley

Como vimos, a função de Newton-trapézios (16) recorre à função $B_1(x)$, a qual resulta da respectiva regra de quadratura,

$$\begin{aligned} B_1(x) &= f^{(1)}(x) + f^{(1)}(x + h_1(x)) \\ &= f^{(1)}(x) + f^{(1)}\left(x - f(x)/f^{(1)}(x)\right), \end{aligned} \quad (19)$$

já que usámos como “passo” $h_1(x) = t_0(x) - x = -f(x)/f^{(1)}(x)$. Tal como todos as funções t_n dadas por (8), a aplicação t_1 apenas usa informação sobre a função f e a sua primeira derivada. Nada impede todavia que possamos definir novas funções iteradoras baseadas nas quadraturas de Newton-Cotes, as quais usem informação suplementar envolvendo derivadas de ordem superior da função f . Por exemplo, se substituirmos a função $f^{(1)}(x + h_1(x))$ pelo seu desenvolvimento de Taylor, de primeira ordem, em torno do ponto x , obtém-se:

$$f^{(1)}(x + h_1(x)) \simeq f^{(1)}(x) + f^{(2)}(x) h_1(x).$$

Substituindo em (19), resulta a aproximação de $B_1(x)$,

$$\tilde{B}_1(x) = 2 f^{(1)}(x) + f^{(2)}(x) h_1(x).$$

A correspondente função iteradora é da forma

$$\begin{aligned}\tilde{t}_1(x) &= x - 2\tilde{B}_1^{-1}(x)f(x) = \\ &= x - \frac{2f(x)}{2f^{(1)}(x) - \frac{f^{(2)}(x)f(x)}{f^{(1)}(x)}}.\end{aligned}\quad (20)$$

A aplicação \tilde{t}_1 é a bem conhecida função iteradora do método de Halley [12], [15], [21], ([7], p. 257). Note-se que $\tilde{B}_1(z) = 2f^{(1)}(z)$. Consequentemente, os mesmos argumentos usados na prova da Proposição 3.1 podem ser invocados se substituirmos nessa prova a função $B_1(x)$ pela sua aproximação $\tilde{B}_1(x)$. Sob as hipóteses referidas na Proposição 3.1, conclui-se, portanto, que o método iterativo de Halley possui convergência local pelo menos cúbica, confirmando-se assim indirectamente, por via de regras de quadratura, um resultado bem conhecido sobre este célebre método.

Finalmente, embora tenhamos concluído anteriormente que ambos os métodos de Newton-trapézios e de Halley possuem ordem de convergência local pelo menos cúbica, note-se que o primeiro é computacionalmente mais vantajoso porquanto apenas faz intervir informação sobre a função f e a sua primeira derivada.

3.4 Função iteradora de Newton-Simpson

Para $n = 2$, a regra de Simpson aplicada a $\int_x^z f^{(1)}(t) dt$ escreve-se

$$\begin{aligned}Q_2(f^{(1)}) &= \frac{z-x}{c_2} B_2(x) = \\ &= \frac{z-x}{6} \left[f^{(1)}(x) + 4f^{(1)}(x+h_2(x)) + f^{(1)}(x+2h_2(x)) \right].\end{aligned}\quad (21)$$

Na expressão (21) o passo $h_2(x)$ é obtido recursivamente através da função iteradora de Newton-trapézios $t_1(x)$, definida em (16),

$$h_2(x) = \frac{t_1(x) - x}{n} = \frac{t_1(x) - x}{2}.\quad (22)$$

No ponto z são os seguintes os valores das derivadas de h_2 :

$$\begin{aligned}h_2^{(1)}(x) &= \frac{t_1^{(1)}(x) - 1}{2} \implies h_2^{(1)}(z) = -1/2 \\ h_2^{(2)}(x) &= \frac{t_1^{(2)}(x)}{2} \implies h_2^{(2)}(z) = 0.\end{aligned}\quad (23)$$

A aplicação

$$t_2(x) = x - c_2 B_2^{-1}(x) f(x) \quad (24)$$

recebe a designação de função iteradora de Newton-Simpson. O correspondente método iterativo, para $k = 0, 1, \dots$, escreve-se

$$h_2(x_k) = \frac{t_1(x_k) - x_k}{2} \quad (25)$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{6 f(x_k)}{f^{(1)}(x_k) + 4 f^{(1)}(x_k + h_2(x_k)) + f^{(1)}(x_k + 2 h_2(x_k))}.$$

Proposição 3.2. *Supondo que a função real f é suficientemente regular numa vizinhança de um zero simples z , escolhida uma aproximação inicial x_0 suficientemente próxima de z , o método de Newton-Simpson (25) converge para z e a respectiva convergência é, pelo menos, de ordem 4.*

Demonstração. Atendendo a (21), temos que $B_2(z) = c_2 f^{(1)}(z) \neq 0$ e

$$B_2^{(1)}(x) = f^{(2)}(x) + 4 f^{(2)}(x + h_2(x)) (1 + h_2^{(1)}(x)) + f^{(2)}(x + 2 h_2(x)) (1 + 2 h_2^{(1)}(x)) \quad (26)$$

Como $h_2(z) = 0$, de (23) obtém-se

$$B_2^{(1)}(z) = f^{(2)}(z) + 4 f^{(2)}(z) (1 - 1/2) + f^{(2)}(z)(1 - 1) = 3 f^{(2)}(z) = \frac{c_2}{2} f^{(2)}(z). \quad (27)$$

Derivando a expressão em (26), resulta

$$B_2^{(2)}(x) = f^{(3)}(x) + 4 \left[f^{(3)}(x + h_2(x)) \left(1 + h_2^{(1)}(x)\right)^2 + f^{(2)}(x + h_2(x)) h_2^{(2)}(x) \right] + 2 f^{(3)}(x) h_2(x) \left(1 + 2 h_2^{(1)}(x)\right)^2 + f^{(2)}(x + 2 h_2(x)) h_2^{(2)}(x). \quad (28)$$

Como $h_2(z) = 0$, $h_2^{(1)}(z) = -1/2$ e $h_2^{(2)}(z) = 0$, obtém-se da expressão anterior,

$$B_2^{(2)}(z) = f^{(3)}(z) + 4 f^{(3)}(z) \times (1/4) = 2 f^{(3)}(z) = \frac{c_2}{3} f^{(3)}(z). \quad (29)$$

Considerando a função $H_2(x) = t_2(x) - x$, de (24) obtém-se,

$$B_2(x) H_2(x) = -c_2 f(x).$$

Derivando sucessivamente, tem-se

$$B_2^{(1)}(x) H_2(x) + B_2(x) H_2^{(1)}(x) = -c_2 f^{(1)}(x), \quad (30)$$

$$B_2^{(2)}(x) H_2(x) + 2 B_2^{(1)}(x) H_2^{(1)}(x) + B_2(x) H_2^{(2)}(x) = -c_2 f^{(2)}(x), \quad (31)$$

e

$$B_2^{(3)}(x) H_2(x) + 3 B_2^{(1)}(x) H_2^{(2)}(x) + 3 B_2^{(2)}(x) H_2^{(1)}(x) + B_2(x) H_2^{(3)}(x) = -c_2 f^{(3)}(x). \quad (32)$$

Dado que $H_2(z) = 0$ e $B_2(z) = c_2 f^{(1)}(z) \neq 0$, resulta de (30) que $H_2^{(1)}(z) = -1$, isto é, $t_2^{(1)}(z) = 0$, pelo que o respectivo método possui ordem de convergência pelo menos dois, como já sabemos pela Proposição 2.1.

De (31), obtém-se

$$2 B_2^{(1)}(z) H_2^{(1)}(z) + B_2(z) H_2^{(2)}(z) = -c_2 f^{(2)}(z),$$

ou seja,

$$-2 B_2^{(1)}(z) + B_2(z) H_2^{(2)}(z) = -c_2 f^{(2)}(z).$$

Atendendo a (27), resulta

$$-c_2 f^{(2)}(z) + B_2(z) H_2^{(2)}(z) = -c_2 f^{(2)}(z).$$

Dado que $B_2(z) \neq 0$, obtém-se $H_2^{(2)}(z) = 0$, isto é, $t_2^{(2)}(z) = 0$, o que significa ser o método (25) de ordem de convergência pelo menos três.

Finalmente, como $H_2^{(1)}(z) = t_2^{(1)} - 1 = -1$ e $H_2^{(2)}(z) = t_2^{(2)}(z) = 0$, pelo que de (32) resulta,

$$3 B_2^{(2)}(z) H_2^{(1)}(z) + B_2(z) H_2^{(3)}(z) = -c_2 f^{(3)}(z),$$

ou seja,

$$-3 B_2^{(2)}(z) + B_2(z) H_2^{(3)}(z) = -c_2 f^{(3)}(z).$$

Levando em consideração (29), obtém-se

$$-c f^{(3)}(z) + c f^{(1)}(z) H_2^{(3)}(z) = -c_2 f^{(3)}(z).$$

Por conseguinte, $H_2^{(3)}(z) = 0 \iff t_2^{(3)}(z) = 0$. Conclui-se, portanto, que o método (25) possui ordem de convergência local pelo menos quatro. \square

Para uma função multivariada $f : D \subset \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d$, a função iteradora do método de Newton-Simpson escreve-se

$$\begin{aligned} h_2(x) &= \frac{t_1(x) - x}{2}, & x \in \mathbb{R}^d \\ t_2(x) &= x - 6 [J_f(x) + 4J_f(x + h_2(x)) + J_f(x + 2h_2(x))]^{-1} f(x), \end{aligned} \quad (33)$$

onde t_1 é a função iteradora do método de Newton-trapézios em \mathbb{R}^d .

Observação 3.1. Deixa-se como exercício a verificação de que se em (22) usarmos a função iteradora t_0 na definição de $h_2(x)$, ou seja, se em vez de considerarmos $h_2(x) = (t_1(x) - x)/2$, fizermos $h_2(x) = (t_0(x) - x)/2$, o método daí resultante é apenas de terceira ordem de convergência e não de quarta ordem. Tal justifica a definição recursiva que adoptamos para o “passo” do método de Newton-Simpson e funções iteradoras subsequentes.

Para abreviar passamos a designar por método de Newton, método dos trapézios e método de Simpson, os métodos iterativos resultantes respectivamente de t_0 , t_1 e t_2 .

3.5 Ordem de convergência das funções iteradoras de Newton-Cotes em \mathbb{R}

Tal como nos casos dos métodos dos trapézios e de Simpson, no caso geral, a ordem de convergência de t_n , para $n \geq 1$, depende de n e da ordem de convergência de t_0 . Os lemas a seguir serão depois usados na prova do resultado principal, o Teorema 3.2, respeitando à ordem de convergência da função iteradora t_n .

Supomos que para $n \geq 1$, o ponto z é um zero simples da função real f , função esta diferenciável pelo menos até à ordem n numa vizinhança de z , sendo t_n a função iteradora de Newton-Cotes fechada $t_n(x) = x - c_n B_n(x)^{-1} f(x)$, tal que $B_n(x) = \sum_{i=0}^n A_i f^{(1)}(x + i h_n(x))$, onde $h_n(x)$ é o passo e a soma dos coeficientes da regra é designada por $c_n = \sum_{i=0}^n A_i$.

Lema 3.1. O passo $h_n(x) = \frac{t_{n-1}(x) - x}{n}$ da função iteradora $t_n(x)$, em $x = z$, satisfaz as igualdades,

$$\begin{aligned} (i) \quad & h_n(z) = 0 \\ (ii) \quad & h_n^{(1)}(z) = -1/n \\ (iii) \quad & h_n^{(j)}(z) = -\frac{t_{n-1}^{(j)}(z)}{n} \quad j = 2, 3, \dots, n. \end{aligned} \quad (34)$$

Demonstração. Da Proposição 2.1 sabemos que t_{n-1} possui convergência supralinear. Assim, $t_{n-1}(z) = z$ e $t_{n-1}^{(1)}(z) = 0$, donde se obtém imediatamente as igualdades (i) a (iii), atendendo à definição de h_n . \square

Os coeficientes A_i que entram na expressão da função $B_n(x)$ são pesos de uma regra de quadratura fechada de Newton-Cotes e, por isso, satisfazem as igualdades que constam do lema a seguir.

Lema 3.2. *Sendo A_0, A_1, \dots, A_n os nós de quadratura de uma regra de Newton-Cotes fechada, com $n + 1$ nós, são válidas as igualdades (i_1) a (i_n) seguintes:*

$$\begin{aligned} (i_1) \quad & \frac{A_1 + 2A_2 + \dots + nA_n}{n} = \frac{c_n}{2} \\ (i_2) \quad & \frac{A_1 + 2^2A_2 + \dots + n^2A_n}{n^2} = \frac{c_n}{3} \\ & \vdots \\ (i_n) \quad & \frac{A_1 + 2^nA_2 + \dots + n^nA_n}{n^n} = \frac{c_n}{n+1}, \end{aligned} \tag{35}$$

onde $c_n = \sum_i^n A_i$.

Demonstração. Os pesos A_i de uma regra de quadratura interpolatória, como é o caso das regras de Newton-Cotes fechadas, são invariantes por mudança de intervalo de integração. Além disso, os pesos são simétricos, isto é $A_i = A_{n-i}$, para $i = 0, 1, \dots, n$.

Assim, se no intervalo $[0, n]$ e para os $n + 1$ nós equidistantes $x_i = i$, para $i = 0, 1, \dots, n$, aplicarmos o método dos coeficientes indeterminados (ver por exemplo, [10]), usando a base canónica dos polinómios de grau menor ou igual a n , os pesos de uma regra de Newton-Cotes fechada, no suporte considerado, $Q_n(\psi) = A_0\psi(0) + A_1\psi(1) + \dots + A_{n-1}\psi(n-1) + A_n\psi(n)$, são solução do sistema de equações lineares,

$$\begin{aligned} A_0 + A_1 + \dots + A_n &= n \\ A_1 + 2A_2 + 3A_3 + \dots + nA_n &= n^2/2 \\ A_1 + 2^2A_2 + 3^2A_3 + \dots + n^2A_n &= n^3/3 \\ &\vdots \\ A_1 + 2^nA_2 + 3^nA_3 + \dots + n^nA_n &= n^{n+1}/(n+1). \end{aligned}$$

Igualando a c_n o membro direito da primeira equação do sistema anterior e substituindo nas equações seguintes, resultam sucessivamente as igualdades (i_1) a (i_n) em (35). \square

As igualdades em (35) são usadas na demonstração do seguinte lema.

Lema 3.3. Dado $n \geq 1$, seja z um zero simples da função real f , diferenciável pelo menos até à ordem n numa vizinhança de z , t_0 a função de Newton e t_n a função iteradora de Newton-Cotes fechada $t_n(x) = x - c_n B_n(x)^{-1} f(x)$, tal que $B_n(x) = \sum_{i=0}^n A_i f^{(1)}(x + i h_n(x))$, onde $h_n(x) = (t_{n-1}(x) - x)/n$ e $\sum_{i=0}^n A_i = c_n$.

Se t_{n-1} for de ordem de convergência pelo menos n , isto é,

$$t_{n-1}(z) = z \quad e \quad t_{n-1}^{(1)}(z) = t_{n-1}^{(2)}(z) = \dots = t_{n-1}^{(n-1)}(z) = 0, \quad (36)$$

então, a função B_n e as suas n primeiras derivadas, no ponto $x = z$, satisfazem respectivamente as igualdades

$$\begin{aligned} (i) \quad & B_n(z) = c_n f^{(1)}(z) \\ (ii) \quad & B_n^{(j)}(z) = \frac{c_n}{j+1} f^{(j+1)}(z), \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (37)$$

Demonstração. Começemos por notar que

$$B_n(x) = B_n^{(0)}(x) = \sum_{i=0}^n A_i f^{(1)}(x + i h_n(x)).$$

Atendendo a que $h_n(z) = 0$ (ver (34)), conclui-se que

$$B_n(z) = \sum_{i=0}^n A_i f^{(1)}(z) = c_n f^{(1)}(z).$$

Fica assim provada a igualdade (i) em (37). Passemos à demonstração para qualquer j natural. Começemos por provar que

$$B_n^{(j)}(x) = \sum_{i=0}^n A_i \left[f^{(j+1)}(x + i h_n(x)) (1 + i h_n^{(1)}(x))^j + \dots \right], \quad j = 1, 2, \dots \quad (38)$$

onde os termos omitidos no segundo membro de (38) contêm derivadas de h_n de ordem superior à primeira.

Para $j = 1$, tem-se

$$B_n^{(1)}(x) = \sum_{i=0}^n A_i \left[f^{(2)}(x + i h_n(x)) (1 + i h_n^{(1)}(x)) \right].$$

Suponhamos que a igualdade (38) é verdadeira para $j = 1, \dots, k$. Mostremos a sua validade para $j = k + 1$. Aplicando a hipótese de indução anterior, resulta

$$B_n^{(k+1)}(x) = \left(B_n^{(k)}(x) \right)^{(1)} = \sum_{i=0}^n A_i \left[f^{(k+1)}(x + i h_n(x)) (1 + i h_n^{(1)}(x))^k + \dots \right]^{(1)}.$$

Ou seja,

$$B_n^{(k+1)}(x) = \sum_{i=0}^n A_i \left[f^{(k+2)}(x + i h_n(x))(1 + i h_n^{(1)}(x))^{k+1} + f^{(k+1)}(x + i h_n(x)) k(1 + i h_n^{(1)}(x))^{k-1} h_n^{(2)}(x) + \dots \right].$$

Uma vez que no segundo membro da expressão anterior o termo que contém $f^{(k+1)}$ inclui a segunda derivada de h_n , esse termo pode ser omitido, donde

$$B_n^{(k+1)}(x) = \sum_{i=0}^n A_i \left[f^{(k+2)}(x + i h_n(x))(1 + i h_n^{(1)}(x))^{k+1} + \dots \right]. \quad (39)$$

Por conseguinte, usando indução matemática, a igualdade (39) permite-nos concluir que a expressão (38) é válida para qualquer $j \in \mathbb{N}$.

Se na equação (38) considerarmos o limite, quando x tende para z , obtém-se

$$B_n^{(j)}(z) = \sum_{i=0}^n A_i f^{(j+1)}(z)(1 - i/n)^j, \quad (40)$$

já que $h_n(z) = 0$, $h_n^{(1)}(z) = -1/n$ e $h_n^{(j)}(z) = 0$, para $j \geq 2$.

Falta provar que

$$\sum_{i=0}^n A_i \left(1 - \frac{i}{n}\right)^j = \frac{c_n}{j+1}. \quad (41)$$

Rescrevendo (35) na forma

$$\sum_{i=0}^n A_i \left(\frac{i}{n}\right)^j = \frac{c_n}{j+1}, \quad j = 1, \dots, n,$$

e atendendo à simetria $A_{n-i} = A_i$, obtém-se

$$\sum_{i=0}^n A_i \left(\frac{n-i}{n}\right)^j = \frac{c_n}{j+1},$$

expressão equivalente à igualdade (41), que pretendíamos provar. Substituindo na equação (40), obtém-se (37) (ii) pelo que o lema fica demonstrado. \square

Teorema 3.1. *Seja z um zero simples da função real f , continuamente diferenciável até à ordem $p \geq 1$ e t_0 uma função iteradora inicial de ordem 2 de convergência local.*

Para $n \geq 1$, se a função iteradora de Newton-Cotes t_n , definida recursivamente a partir de t_0 , tiver ordem de convergência local $p \geq 2$, então a função iteradora imediata, isto é, t_{n+1} , possui ordem de convergência pelo menos $p + 1$.

Demonstração. Por hipótese tem-se,

$$t_n(z) = z, \quad t_n^{(1)}(z) = t_n^{(2)}(z) = \dots = t_n^{(p-1)}(z) = 0 \quad \text{e} \quad t_n^{(p)}(z) \neq 0.$$

Pretende-se mostrar que

$$t_{n+1}(z) = z, \quad t_{n+1}^{(j)}(z) = 0, \quad \text{para} \quad 1 \leq j \leq p.$$

Para a função iteradora $t_{n+1}(x) = x - c_{n+1} B_{n+1}^{-1}(x) f(x)$, seja $H_{n+1}(x) = t_{n+1}(x) - x$. Assim,

$$B_{n+1}(x) H_{n+1}(x) = -c_{n+1} f(x). \quad (42)$$

Dado que por hipótese z é um zero simples, $f^{(1)}(z) \neq 0$, e como por (37) (i) se tem $B_{n+1}(z) = c_{n+1} f^{(1)}(z)$, conclui-se de (42), visto que $B_{n+1}(z) \neq 0$,

$$H_{n+1}(z) = 0, \quad \text{logo} \quad t_{n+1}(z) = z, \quad (43)$$

e

$$\begin{aligned} (i) \quad & H_{n+1}^{(1)}(z) = t_{n+1}^{(1)}(z) - 1 \\ (ii) \quad & H_{n+1}^{(j)}(z) = t_{n+1}^{(j)}(z), \quad j \geq 2. \end{aligned} \quad (44)$$

Apliquemos à função H_{n+1} a regra de Leibniz para as derivadas de um produto. Para $1 \leq k \leq p$ são válidas as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} (i_1) \quad & B_{n+1}^{(1)} H_{n+1}(x) + B_{n+1}(x) H_{n+1}^{(1)}(x) = -c_{n+1} f^{(1)}(x) \\ (i_2) \quad & B_{n+1}^{(2)} H_{n+1}(x) + \binom{2}{1} B_{n+1}^{(1)}(x) H_{n+1}^{(1)}(x) + B_{n+1}(x) H_{n+1}^{(2)}(x) = -c_{n+1} f^{(2)}(x) \\ (i_3) \quad & B_{n+1}^{(3)} H_{n+1}(x) + \binom{3}{1} B_{n+1}^{(2)}(x) H_{n+1}^{(1)}(x) + \\ & + \binom{3}{2} B_{n+1}^{(1)}(x) H_{n+1}^{(2)}(x) + B_{n+1}(x) H_{n+1}^{(3)}(x) = -c_{n+1} f^{(3)}(x) \\ & \vdots \\ (i_p) \quad & \sum_{i=0}^p \binom{p}{i} B_{n+1}^{(p-i)}(x) H_{n+1}^{(i)}(x) = -c_{n+1} f^{(p)}(x). \end{aligned} \quad (45)$$

Ao substituímos x por z , atendendo a (43), em (45) (i_1) a (i_p) são nulos os termos contendo $H_{n+1}(z)$. Ora, por (37) (i), sabemos que $B_{n+1}(z) = c_{n+1} f^{(1)}(z)$.

Assim, substituindo em (45) (i_1) , obtém-se

$$c_{n+1} f^{(1)}(z) H_{n+1}^{(1)}(z) = -c_{n+1} f^{(1)}(z),$$

logo,

$$H_{n+1}^{(1)}(z) = -1, \quad (46)$$

e, atendendo a (44),

$$t_{n+1}^{(1)}(z) = 0. \quad (47)$$

Levando em consideração (46), a igualdade (45) (i_2) passa a ser

$$B_{n+1} H_{n+1}^{(2)}(z) = -c_{n+1} f^{(2)}(z).$$

Ora, por (37) (i), $B_{n+1}(z) = c_{n+1} f^{(1)}(z)$, logo atendendo a (46), obtém-se

$$-2 B_{n+1}^{(1)}(z) + c_{n+1} f^{(1)}(z) H_{n+1}^{(2)}(z) = -c_{n+1} f^{(2)}(z),$$

e, por (37) (ii),

$$-2 \frac{c_{n+1}}{2} f^{(2)}(z) + c_{n+1} f^{(1)}(z) H_{n+1}^{(2)}(z) = -c_{n+1} f^{(2)}(z).$$

Donde,

$$H_{n+2}^{(2)}(z) = 0. \quad (48)$$

logo,

$$t_{n+2}^{(2)}(z) = 0. \quad (49)$$

Assim, atendendo a (46) e (48), para $x = z$, a igualdade (45) (i_3) passa a ser

$$-3 B_{n+1}^{(2)}(z) + B_{n+1}(z) H_{n+1}^{(3)}(z) = -c_{n+1} f^{(3)}(z).$$

De (37) (ii) e (i), resulta

$$-3 \frac{c_{n+1}}{3} f^{(3)}(z) + c_{n+1} f^{(1)}(z) H_{n+1}^{(3)}(z) = -c_{n+1} f^{(3)}(z).$$

Logo,

$$H_{n+1}^{(3)}(z) = 0 \iff t_{n-1}^{(3)}(z) = 0. \quad (50)$$

De igual modo, atendendo a (50) e ao Lema 3.3 pode concluir-se usando argumentos idênticos aos anteriores que desde a quarta à última igualdade em (45), se tem

$$H_{n+1}^{(j)}(z) = 0 \iff t_{n-1}^{(j)}(z) = 0, \quad 4 \leq j \leq p.$$

Por conseguinte, a função iteradora t_{n+1} é de ordem de convergência pelo menos $p + 1$. \square

Teorema 3.2. *Fixado $n \geq 1$ a função iteradora de Newton-Cotes fechada, t_n , possui ordem de convergência pelo menos $2 + n$, sendo $p = 2$ a ordem de convergência da função iteradora de Newton.*

Demonstração. Seja z um zero múltiplo da função f e $q = 1$ a ordem de convergência local do método de Newton aplicado a f . Tal como se referiu no parágrafo 2.1, substituindo a função f pela função $F(x) = -[f^{(1)}(x)]^{-1} f(x)$, sabe-se que z é zero simples para esta função. Assumindo que se adopta para função inicial a função F e que a expressão respectiva de t_0 é $t_0(x) = x - [F^{(1)}(x)]^{-1} F(x)$, sabemos da Proposição 2.1 que a função iteradora t_0 possui convergência supralinear, isto é, a ordem de convergência p de t_0 é tal que $p \geq 2$.

De igual modo se conclui que caso z seja zero simples para a função f , e t_0 o método de Newton aplicado a essa função, se tem $p \geq 3$.

Recorrendo ao Teorema 3.1, sendo p_1 a ordem de convergência da função iteradora t_1 , tem-se $p_1 \geq p + 1 \geq 3$. Usando repetidamente o mesmo resultado, conclui-se por indução que a ordem de t_k satisfaz as desigualdades

$$p_k \geq p_{k-1} + 1 \geq k + 2, \quad \text{para } k = 1, 2, \dots,$$

e por conseguinte fica provada a afirmação do Teorema 3.2. \square

4 Exemplos

Processos iterativos de ordem de convergência local elevada podem ser úteis nos casos em que no método de Newton a escolha de valores iniciais x_0 “suficientemente próximos” da raiz z é muito restritiva. A título ilustrativo, apresentamos nomeadamente um exemplo onde é usada a função \tanh (Exemplo 4.1). O gráfico desta função assemelha-se a um “S” alongado, obrigando a que se escolham aproximações iniciais x_0 da solução num intervalo relativamente pequeno (fora desse intervalo a função possui derivada de módulo próximo de zero, inviabilizando o método de Newton). No entanto, para este caso, funções iteradoras como as de Newton-trapézios e de Newton-Simpson (de ordens de convergência local respectivamente 3 e 4), bem como outras iteradoras de Newton-Cotes de ordens de convergência superior, é possível escolher-se valores iniciais x_0 num intervalo mais alargado (valores iniciais esses para os quais o método de Newton nem sequer é convergente).

Exemplo 4.1. Na Figura 1 está representado, no intervalo $I = [-5, 6]$, o gráfico da função

$$f(x) = \tanh(x - 1).$$

A equação $f(x) = 0$ possui uma única raiz $z = 1$ nesse intervalo. A função f é continuamente diferenciável até à ordem que se quiser. Acontece que

devido à forma em “S” alongado do gráfico da função, por exemplo para $x \in A = [-5, -0.9]$ ou $x \in B = [2.9, 6]$, o passo do método de Newton $|f(x)/f'(x)| > 11$. Por conseguinte, se escolhermos uma aproximação inicial da raiz, $x_0 \in A$ ou $x_0 \in B$, as iteradas subsequentes do método de Newton escapam ao intervalo I .

Neste caso particular, acontece que para a função f a respectiva função iteradora de Newton possui ordem de convergência cúbica, uma vez que $t_0(1) = 1$, $t_0^{(1)}(1) = t_0^{(2)}(1) = 0$ e $t_0^{(3)}(1) \neq 0$, ou seja excepcionalmente a ordem de convergência do método de Newton é 3. Pode verificar-se que a ordem de convergência do método dos trapézios t_1 é $q = 3$, enquanto o método de Simpson t_2 possui ordem de convergência $q = 5$.

Entre outras, a função iteradora de Newton-Simpson, por ser de ordem de convergência superior ao método de Newton, permite-nos que escolhamos aproximações iniciais x_0 mais afastadas de z do que no caso do método de Newton.

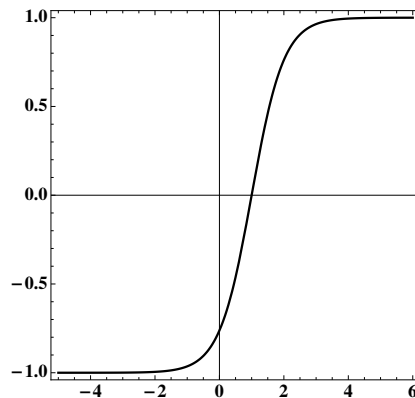


Figura 1: $f(x) = \tanh(x - 1)$, $-5 \leq x \leq 6$.

Na Tabela 2 comparam-se os valores das derivadas sucessivas de cada uma das funções iteradoras, no ponto fixo $z = 1$.

Na Figura 2 são mostrados os gráficos das funções $y = x$, $y = t_0(x)$ (Newton), $y = t_1(x)$ (trapézios) e $y = t_2(x)$ (Simpson). Note-se que apesar do método dos trapézios ser, neste caso, da mesma ordem de convergência que o método de Newton, o gráfico de t_1 numa vizinhança de $z = 1$, mantém-se

t_i	$t_i^{(0)}$	$t_i^{(1)}$	$t_i^{(2)}$	$t_i^{(3)}$	$t_i^{(4)}$	$t_i^{(5)}$	ordem
t_0	1	0	0	-4	0	-16	3
t_1	1	0	0	-1	0	14	3
t_2	1	0	0	0	0	82/3	5

Tabela 2: Comparação de ordens de convergência dos métodos de Newton (t_0), trapézios (t_1) e Simpson (t_2) (Exemplo 4.1).

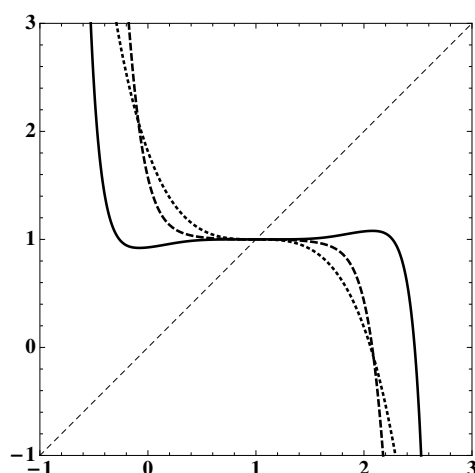


Figura 2: Exemplo 4.1: funções iteradoras t_0 (pontilhado), t_1 (tracejado), e t_2 (cheio).

“achatado”² até uma distância de z superior à do gráfico da iteradora de Newton t_0 .

Analogamente, visto que o gráfico de t_3 (a traço cheio) apresenta assíntotas verticais em posições mais afastadas do ponto fixo $z = 1$ do que no caso das restantes funções iteradoras, concluímos graficamente que podemos escolher aproximações iniciais x_0 mais afastadas de z do que as possíveis para o método de Newton, e com elas calcularmos aproximações precisas de z , efectuando um pequeno número de iterações de t_3 . Quer isto dizer que a “bacia de atracção” ([17], p. 43) do método de Simpson é maior do que a correspondente bacia do método de Newton. Note-se que métodos iterativos

²O termo “achatado” é aqui utilizado no sentido geométrico intuitivo, como sinónimo de “quase constante”. Deixamos para o futuro uma caracterização numérica mais precisa deste termo.

cuja bacia de atracção sejam maiores do que as do método de Newton poderão ser usados com vantagem, por exemplo, no contexto da optimização numérica sem restrições, assunto que abordaremos noutra trabalho.

Partindo de $x_0 = 2.0$, efectuaram-se 4 iterações dos métodos de Newton, trapézios e Simpson. Na Figura 3 compara-se graficamente o erro de cada uma das iteradas (cálculos realizados no sistema *Mathematica* em precisão máquina, isto é, com aproximadamente 16 dígitos decimais significativos). Note-se que, logo a partir da primeira iteração, o erro absoluto do método de Simpson diminui muito mais rapidamente do que nos outros dois métodos.

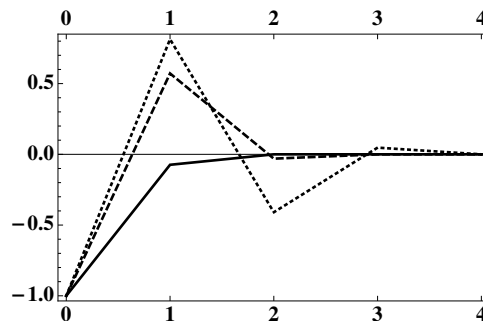


Figura 3: $x_0 = 2.0$ (Exemplo 4.1), erro para 4 iterações de t_0 (ponteados), t_1 (tracejado), e t_2 (cheio).

Para melhor se apreciar o ganho de precisão de uma função iteradora de ordem 5 de convergência, como é o caso da função de Newton-Simpson, por comparação com t_0 e t_1 , mostra-se na Figura 4 o número s de algarismos significativos aproximados (isto é, $s = -\log_{10}(|z - x_k|)$) para as duas primeiras iteradas de cada um dos métodos mencionados, para $x_0 = 2.0$. Ganhos de precisão ainda mais dramáticos podem ser obtidos com funções iteradoras de Newton-Cotes de ordens de convergência superior. Por exemplo, para t_4 , de ordem de convergência $q = p + n = 3 + 4 = 7$ (pode verificar-se que a primeira derivada não nula é $t_4^{(7)}(1) \simeq -4.9$), definida por

$$\begin{aligned} h_4(x) &= (t_3(x) - x)/4 \\ B_4(x) &= 7 f^{(1)}(x) + 32 f^{(1)}(x + h_4(x)) + 12 f^{(1)}(x + 2 h_4(x)) + \\ &\quad + 32 f^{(1)}(x + 3 h_4(x)) + 7 f^{(1)}(x + 4 h_4(x)) \\ t_4(x) &= x - 90 B_4^{-1}(x) f(x). \end{aligned}$$

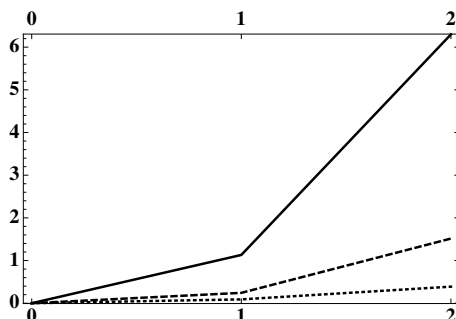


Figura 4: $x_0 = 2.0$ (Exemplo 4.1), número de algarismos significativos (aproximados) para 2 iterações de t_0 (ponteado), t_1 (tracejado), e t_2 (cheio).

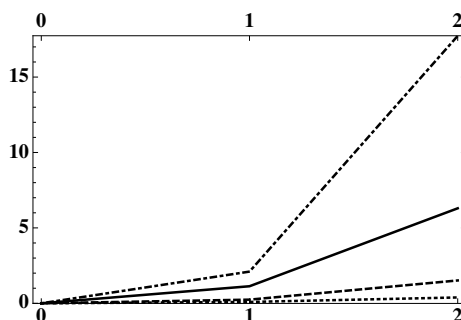


Figura 5: Exemplo 4.1: $x_0 = 2.0$, número de algarismos significativos para 2 iterações de t_0 (ponteado), t_1 (tracejado), t_2 (cheio) e t_4 (tracejado-ponteado).

a segunda iterada do método iterativo correspondente possui mais de 17 dígitos significativos (ver Figura 5).

É interessante observarmos numericamente o efeito de *uma única iteração* de cada um dos métodos iterativos de Newton-Cotes, t_0 a t_7 , e de alguns métodos $t_{ij} = t_i(t_j(x))$, que resultam da composição dos métodos considerados. Para o efeito, escolheu-se um ponto inicial $x_0 = 1.1$, o qual podemos considerar “suficientemente próximo” de $z = 1$, no sentido de que a distância a z é 10^{-1} e todos os métodos t_0 a t_7 convergem para z . O ganho de precisão após um iterada é descrito na Tabela 3, onde é discriminado o número s de algarismos significativos do resultado e a ordem q teórica de cada um dos métodos.

t_i	t_0	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7
s	3.2	3.8	5.6	7.8	10.2	11.1	13.5	14.5
q	3	3	5	5	7	7	9	9

Tabela 3: 1 iteração com $x_0 = 1.1$ (Exemplo 4.1). $s =$ número aproximado de dígitos significativos. $q = 3 + n - 1$ (n ímpar) ou $q = 3 + n$ (n par).

t_{ij}	t_{21}	t_{32}	t_{43}	t_{54}	t_{65}	t_{76}
s	19.5	30.8	57.5	75.2	104.7	127.3
q	15	25	35	49	63	81

Tabela 4: 1 iteração com $x_0 = 1.1$ (Exemplo 4.1). $s =$ aprox. número de dígitos significativos. $q(t_{ij}) =$ ordem $t_i \times$ ordem t_j .

t_{ij}	t_{12}	t_{23}	t_{34}	t_{45}	t_{56}	t_{67}
s	17.7	39.5	53.4	80.9	98.8	135.4
q	15	25	35	49	63	81

Tabela 5: 1 iteração com $x_0 = 1.1$ (Exemplo 4.1). $s =$ aprox. número de dígitos significativos. $q(t_{ij}) =$ ordem $t_i \times$ ordem t_j .

Nas Tabelas 4 e 5 são comparados os valores de s para as funções iteradoras compostas aí indicadas. Constata-se que o número de algarismos significativos após uma iteração de t_{ij} é distinto do número correspondente da iteração t_{ji} .

Note-se que usámos programação dinâmica no código *Mathematica* das funções de Newton-Cotes. Assim, uma vez calculados os valores $x_1 = t_6(x_0)$, o valor de $t_{76}(x_0) = t_7(x_1)$ é obtido com um pequeno esforço computacional. Porém, o ganho de precisão no resultado é enorme porquanto passamos de 14.5 dígitos de precisão de x_1 (ver Tabela 3), para os 127.3 dígitos de $t_{76}(x_0)$ (ver Tabela 4).

Exemplo 4.2. Um caso extremo de “mau comportamento” do método de Newton ocorre quando, para um qualquer valor inicial $x_0 \neq z$, as sucessivas iteradas $x_{k+1} = t_0(x_k)$ se afastam do ponto fixo z . Trata-se, portanto de um ponto fixo *repulsor*, como por exemplo o zero real (único) $z = 0$ da função [1], [20],

$$f(x) = x^{1/3}.$$

A função derivada $f^{(1)}$ não está definida em $z = 0$ e

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f^{(1)}(x) = +\infty.$$

Dado que $t_0(x) = x - f(x)/f^{(1)}(x) = -2x \implies t_0^{(1)}(0) = -2$, o ponto fixo $z = 0$ é repulsor.

Tal como sugerido no parágrafo 2.1, basta começarmos por considerar a equação equivalente $F(x) = 0$, com $F(x) = t_0(x) - x = -3x$, para que as correspondentes funções iteradoras t_i produzam a solução exacta, isto é $t_i(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$, para $i \geq 0$. Tal significa que se passou de uma função f extremamente “mal comportada” (se a ela aplicarmos as iteradoras de Newton-Cotes), para uma função F extremamente “bem comportada” se usarmos esta função como *input* das aplicações t_i para $i \geq 0$, já que $t_i(x_0) = z, \forall x_0 \in \mathbb{R}$.

Exemplo 4.3. A função real

$$f(x) = \sin(x) - x,$$

possui um único zero real $z = 0$. No entanto, este zero é múltiplo, porquanto $f(0) = 0$ e $f^{(1)}(0) = 0$. Por conseguinte, o método de Newton possui ordem de convergência local $p = 1$. A Tabela 6 mostra que se efectuarmos

t_i	t_0	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7
s	1.18	1.27	1.28	1.35	1.41	1.45	1.49	1.52

Tabela 6: $f(x) = \sin(x) - x$. Uma iteração com $x_0 = 0.1$.

t_i	t_0	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7
s	4.2	4.8	7.6	9.6	13.1	14.2	17.7	18.7
q	2	2	4	4	6	6	8	8

Tabela 7: $F(x) = \frac{x - \sin(x)}{1 - \cos(x)}$ (Exemplo 4.3). Uma iteração com $x_0 = 0.1$. Ordem de convergência teórica $q = 2 + n - 1$ (n ímpar) ou $q = 2 + n$ (n par).

uma iteração dos métodos t_0 a t_7 , partindo de $x_0 = 0.1$, os métodos de Newton-Cotes comportam-se aproximadamente como o método de Newton, não oferecendo por isso nenhuma vantagem computacional relativamente ao método de Newton. Tal como se indicou na Secção 2.1, se substituírmos a função f , pela função

$$F(x) = t_0(x) - x = -f(x)/f'(x) = \frac{x - \sin(x)}{1 - \cos(x)},$$

a qual pode prolongar-se continuamente ao ponto $x = 0$ (sendo $F(0) = 0$). Uma vez que $z = 0$ é *zero simples* de F , o método de Newton aplicado a esta função possui convergência quadrática, pois $F(0) = 0$, e

$$F^{(1)}(0) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{F(\delta) - F(0)}{\delta} = -\frac{1}{3} \neq 0.$$

Assim, se aplicarmos as funções iteradoras t_0 a t_7 , tomando F para função de teste, obtêm-se os resultados da Tabela 7.

Exemplo 4.4. Seja

$$f(x) = x^{11} + 4x^2 - 10.$$

Visto que na função polinomial f o termo em x^{11} é muito dominante, o gráfico da função sugere a existência de um zero múltiplo (ver Figura 6). Tal não é o caso, pois o polinómio anterior possui uma única raiz real positiva simples $z \simeq 1.1$, pelo que o método de Newton possui ordem de convergência local $p = 2$.

Na Figura 7 comparam-se os gráficos das funções iteradoras de Newton, t_0 , com as funções t_6 , t_7 e com a composta t_{76} . Esta última função apresenta um

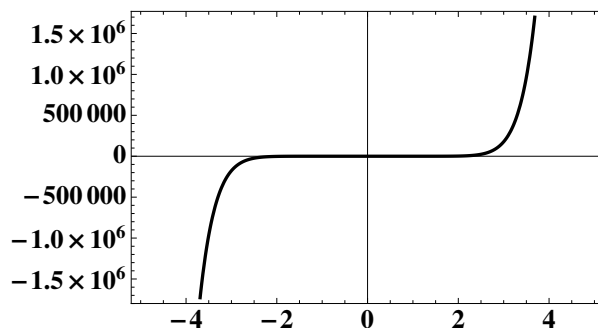


Figura 6: $f(x) = x^{11} + 4x^2 - 10$.

gráfico aproximadamente horizontal numa larga vizinhança do ponto fixo z , indicando que poderemos usar essa função iteradora partindo de um valor x_0 afastado de z , e calcular uma aproximação de z de alta precisão, efectuando apenas algumas iterações de t_{76} . Por exemplo, fazendo $x_0 = 2$, e efectuando três iterações do método de Newton, o resultado possui aproximadamente 0.5 dígitos significativos. No entanto, após o mesmo número de iterações, o resultado de t_{76} possui cerca de 2410 algarismos significativos (ver Tabela 8).

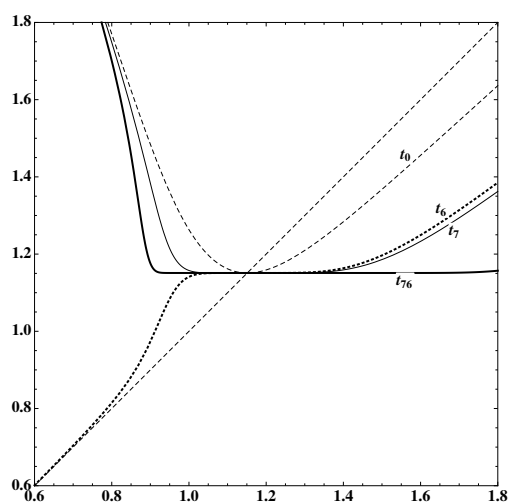


Figura 7: $f(x) = x^{11} + 4x^2 - 10$. Comparação de algumas funções iteradoras com a função iteradora t_{76} .

t_i	t_0	t_6	t_7	t_{76}
s	0.5	5.3	7.6	2410.6

Tabela 8: $x_0 = 2$ (Exemplo 4.4). Comparação do número de algarismos significativos após três iterações.

Observação 4.1. Sabe-se que para métodos de ordem de convergência supralinear, o erro da k -ésima iterada do método, $e_k = z - x_k$, pode ser bem aproximado pela diferença $x_{k+1} - x_k$. Por exemplo, o valor do número aproximado de algarismos significativos, s , inscrito na última coluna da Tabela 8, pode ser confirmado indirectamente através dos seguintes cálculos, a partir de $x_0 = 2$ e efectuando apenas mais uma iteração de t_{76} :

$$\begin{aligned} x_1 = t_{76}(x_0) &\implies e_0 \simeq x_1 - x_0 \simeq -0.799781 \\ x_2 = t_{76}(x_1) &\implies e_1 \simeq x_2 - x_1 \simeq -0.0491500 \\ x_3 = t_{76}(x_2) &\implies e_2 \simeq x_3 - x_2 \simeq -2.50444 \times 10^{-44} \\ x_4 = t_{76}(x_3) &\implies e_3 \simeq x_4 - x_3 \simeq -2.75873 \times 10^{-2411}. \end{aligned}$$

Referências

- [1] A. Ben-Israel, Newton's method with modified functions, *Contemporary Math.* 204, (1997), 39-50.
- [2] H. Brass and K. Petras, *Quadrature Theory: The Theory of Numerical Integration on a Compact Interval*, AMS, Washington, 2011.
- [3] A. Cordero and J. R. Torregrosa, Variants of Newton's method for functions of several variables, *Appl. Math. Comput.* 183, (2006), 199-208.
- [4] G. Dahlquist and Å. Björck, *Numerical Methods in Scientific Computing*, Volume I, SIAM, Philadelphia, 2008.
- [5] J. E. Dennis and J. J. Moré, A characterization of superlinear convergence and its application to quasi-Newton methods, *Mat. Comput.* 28, (1974), 549-560.
- [6] M. Frontini and E. Sormani, Third order methods for quadrature formulae for solving systems of nonlinear equations, *Appl. Math. Comput.* 149, (2004), 771-782.

-
- [7] W. Gautschi, *Numerical Analysis, An Introduction*, Birkhäuser, Boston, 1997.
- [8] E. Isaacson and H. B. Keller, *Analysis of Numerical Methods*, John Wiley and Sons, New York, 1966.
- [9] M. M. Graça, Removing multiplicities in C by double newtonization, *Appl. Math. Comput.* 215(2), (2009), 562-572.
- [10] M. M. Graça and M. E. Sousa-Dias, A unified framework for the computation of polynomial quadrature weights and errors, *arXiv:1203.4795v2*, (2012), March.
- [11] M. A. Hafiz and M. M. Bahgat, An efficient two-step iterative method for solving systems of nonlinear equations, *J. Math. Res.* 4, No. 4, (2012), 28-34.
- [12] E. Halley, A new exact and easy method for finding the roots of equations generally and without any previous reduction, *Phil. Roy. Soc. London* 18, (1964), 136-147.
- [13] C. T. Kelley, *Iterative Methods for Linear and Nonlinear Equations*, SIAM, Philadelphia, 1995.
- [14] V. I. Krylov, *Approximate Calculation of Integrals*, Dover, New York, 2005.
- [15] A. Melman, Geometry and convergence of Halley's method, *SIAM Rev.* 39 (4), (1997), 728-735.
- [16] N. A. Mir, N. Rafiq and N. Yasmin, Quadrature based three-step iterative method for nonlinear equations, *Gen. Math.* 18, No. 4, (2010), 31-42.
- [17] W. C. Rheinboldt, *Methods for Solving Systems of Nonlinear Equations*, SIAM, 2nd ed., Philadelphia, 1998.
- [18] R. Thukral, New sixteenth-order derivative-free methods for solving nonlinear equations, *Amer. J. Comput. Appl. Math* 2(3), (2012), 112-118.
- [19] J. F. Traub, *Iterative Methods for the Solution of Equations*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1964.

- [20] N. Ujević, A method for solving nonlinear equations, *Appl. Math. Comput.* *174*, (2006), 1416-1426.
- [21] L. Yau and A. Ben-Israel, The Newton and Halley Methods for Complex Roots, *Amer. Math. Monthly* *105*, (1998), 806-818.
- [22] S. Weerakoom and T. G. I. Fernando, A Variant of Newton's Method with Accelerated Third-Order Convergence, *Appl. Math. Lett.* *13*, (2000), 87-93.
- [23] S. Wolfram, *The Mathematica Book*, Wolfram Media, fifth ed., 2003.

A EQUAÇÃO $ax = xb$ EM CERTAS ÁLGEBRAS DE COMPOSIÇÃO STANDARD DE TIPO II

P. D. Beites

CMA-UBI e Departamento de Matemática
Universidade da Beira Interior
R. Marquês d'Ávila e Bolama
6201-001 Covilhã, Portugal
e-mail: pbeites@ubi.pt

A. P. Nicolás

IMUVa e Departamento de Matemática Aplicada
Universidad de Valladolid
Paseo de Belén
7011 Valladolid, España
e-mail: anicolas@maf.uva.es

Resumo: Este trabalho mostra como a Álgebra Linear pode contribuir para a discussão da equação $ax = xb$ em contexto de Álgebra Não Associativa, concretamente em álgebras de composição standard de tipo II associadas a uma álgebra de quaterniões e a uma álgebra de octoniões. Caracterizam-se ainda algumas soluções.

Abstract: This work shows how Linear Algebra may contribute to the discussion of the equation $ax = xb$ in Nonassociative Algebra context, concretely in standard composition algebras of type II associated to a quaternion algebra and to an octonion algebra. Furthermore, some solutions are characterized.

palavras-chave: Álgebra de composição; equação linear.

keywords: Composition algebra; linear equation.

1 Introdução

Na classe das álgebras de composição são bem conhecidas as que possuem identidade, pelo que são de dimensão finita, [5]. Estas, estando definidas sobre um corpo de característica diferente de dois, pelo Teorema de Hurwitz generalizado em [4], são isomorfas a uma das seguintes álgebras: o corpo base; uma extensão quadrática separável do corpo base; uma álgebra de quaterniões generalizada; uma álgebra de octoniões generalizada.

Um estudo bastante completo sobre álgebras de composição sem identidade, mas satisfazendo uma condição adicional (ou a associatividade da norma, ou a identidade flexível, ou uma identidade de Moufang, ou a associatividade das terceira e/ou da quarta potências, ou grau dois), foi apresentado em trabalhos da autoria de Cuenca-Mira, Elduque, Myung, Okubo, Osborn, Pérez-Izquierdo e Sánchez-Campos. Todos os detalhes podem ser consultados em [2] e referências aí citadas.

Mais recentemente, em [1], através da topologia de Zariski, provou-se que a identidade $x^2y = n(x)y$ caracteriza as álgebras de composição standard de tipo II. Por outras palavras, se A é uma álgebra de composição de dimensão arbitrária, sobre um corpo de característica diferente de dois, que satisfaz $x^2y = n(x)y$, então A é standard de tipo II.

No presente trabalho, consideram-se as álgebras (não associativas) de composição standard de tipo II associadas a uma álgebra de quatérnios e a uma álgebra de octonions. Nas referidas primeiras álgebras, toma-se a equação linear $ax = xb$ e, recorrendo a resultados da Álgebra Linear, por um lado, discute-se a mesma e, por outro lado, caracterizam-se algumas soluções.

2 Preliminares

Sejam F um corpo tal que $\text{char}(F) \neq 2$ e A uma álgebra sobre F , com multiplicação denotada por justaposição.

A álgebra A é uma *álgebra de composição* se está munida de uma forma quadrática não degenerada (a *norma*) $n : A \rightarrow F$ que é *multiplicativa*, ou seja, para quaisquer $x, y \in A$, $n(xy) = n(x)n(y)$. A forma n ser não degenerada significa que a forma bilinear simétrica associada $n(x, y) = \frac{1}{2}(n(x+y) - n(x) - n(y))$ é não degenerada.

Uma álgebra de composição unital, isto é, uma álgebra de composição com identidade designa-se por *álgebra de Hurwitz*. Numa álgebra de Hurwitz $(U, *)$ com identidade e , a aplicação definida por $x \mapsto \bar{x} = n(x, e)e - x$ é uma *involução*, designada por *conjugação usual*, e, para qualquer $x \in U$, $n(x)e = \bar{x} * x = x * \bar{x}$. Da identidade $\bar{x} * x = n(x)e$ pode obter-se, por linearização, $\bar{x} * y + \bar{y} * x = 2n(x, y)$.

As álgebras de Hurwitz são o ingrediente principal para construir, em dimensão finita, álgebras de composição sem identidade. De facto, dada uma álgebra de Hurwitz com multiplicação $*$, norma n e ϕ, ψ duas isometrias de n , então a multiplicação

$$xy = \phi(x) * \psi(y) \tag{1}$$

define uma nova álgebra de composição com a mesma norma n mas, em geral, não unital, [5]. Reciprocamente, dadas uma álgebra de composição A , de dimensão finita, com multiplicação denotada por justaposição e norma n , para qualquer elemento a com $n(a) \neq 0$, os operadores de multiplicação esquerda e direita, L_u e R_u , onde $u = \frac{a^2}{n(a)}$, são isometrias de n . Logo, a nova multiplicação

$$x * y = (R_u^{-1}(x))(L_u^{-1}(y))$$

providencia uma álgebra de Hurwitz com norma n e identidade u^2 , [5]. Como a dimensão de qualquer álgebra de Hurwitz é finita e igual a 1, 2, 4 ou 8, então a dimensão de qualquer álgebra de composição com dimensão finita é também igual a 1, 2, 4 ou 8.

De acordo com [3], sobre um corpo algebricamente fechado, a modificação da multiplicação $*$ de uma álgebra de Hurwitz $(A, *)$ como em (1) conduz a uma nova álgebra de composição, relativamente à mesma forma quadrática n , com “menos graus de simetria” exceto para as multiplicações definidas por

$$(I) x * y \quad (II) \bar{x} * y \quad (III) x * \bar{y} \quad (IV) \bar{x} * \bar{y},$$

onde $x \mapsto \bar{x}$ denota a involução usual de $(A, *)$. As novas álgebras são chamadas *álgebras de composição standard* do correspondente *tipo*, ou seja, I, II, III, IV, respetivamente, *associadas a* $(A, *)$. Se a dimensão de A é 1, então todas as álgebras de composição são o corpo base F . Em dimensões superiores, as álgebras de composição standard de diferentes tipos não são isomorfas, [3].

3 Associada a \mathbb{H}

Daqui em diante, pode-se assumir, estendendo escalares se necessário, que F é algebricamente fechado. Seja $(\mathbb{H}, *)$ a álgebra de quaterniões sobre F com base $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ e tabela de multiplicação dada por

$$e_1 * e_1 = e_2 * e_2 = e_3 * e_3 = e_1 * e_2 * e_3 = -e_0,$$

onde e_0 é a identidade. Considere-se agora \mathcal{H} , a álgebra de composição standard de tipo II associada a $(\mathbb{H}, *)$, sobre F . A sua multiplicação, denotada por justaposição, é dada por

$$xy := \bar{x} * y.$$

Considere-se ainda a tabela seguinte.

	e_0	e_1	e_2	e_3
e_0	e_0	e_1	e_2	e_3
e_1	$-e_1$	e_0	$-e_3$	e_2
e_2	$-e_2$	e_3	e_0	$-e_1$
e_3	$-e_3$	$-e_2$	e_1	e_0

Tabela 1: Tabela de multiplicação de \mathcal{H} , onde e_0 é a sua identidade esquerda.

Seja $a = \sum_{i=0}^3 a_i e_i \in \mathcal{H}$. Denotem-se por $l(a)$ e $r(a)$, respetivamente, as matrizes coordenadas da multiplicação esquerda por a e da multiplicação direita por a . Então, calculando ax e xa , tem-se

$$l(a) = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ -a_1 & a_0 & a_3 & -a_2 \\ -a_2 & -a_3 & a_0 & a_1 \\ -a_3 & a_2 & -a_1 & a_0 \end{bmatrix} \text{ e } r(a) = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & -a_0 & -a_3 & a_2 \\ a_2 & a_3 & -a_0 & -a_1 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & -a_0 \end{bmatrix}.$$

Teorema 3.1. *Sejam a e b elementos não nulos de \mathcal{H} . A equação linear*

$$ax = xb \tag{2}$$

tem, pelo menos, uma solução não trivial se e só se $n(a) = n(b)$ ou $a + b$ é isotrópico.

Demonstração. A equação linear (2) em \mathcal{H} pode ser escrita, de modo equivalente, como

$$(l(a) - r(b))X = 0_{4 \times 1}, \tag{3}$$

que é uma equação matricial linear sobre F . Logo, (2) tem uma solução não trivial se e só se (3) a possui. Tal é equivalente a $\det(l(a) - r(b)) = 0$, onde, efetuando cálculos,

$$\det(l(a) - r(b)) = (n(a) - n(b))n(a + b). \quad \square$$

Corolário 3.2. *Sejam a e b elementos não nulos de \mathcal{H} .*

1. *Se $n(a + b) \neq 0$ e $n(a) = n(b)$ então as soluções de (2) são os múltiplos escalares de $a + b$.*

2. Se $n(a + b) = 0$ e $n(a) = n(b)$ então os múltiplos escalares de $a + b$ são soluções de (2).
3. Se $n(a + b) = 0$ e $n(a) \neq n(b)$ então as soluções não triviais de (2) são elementos isotrópicos não pertencentes ao subespaço gerado por $a + b$.

Demonstração. 1. A equação (2) pode ser escrita como $\bar{a} * x = \bar{x} * b$. Então $\bar{a} * (a + b) = \bar{a} * a + \bar{a} * b = n(a)e_0 + \bar{a} * b$, enquanto $\overline{a + b} * b = \bar{a} * b + n(b)e_0$. Logo, tendo em conta que $n(a) = n(b)$, $a + b$ é uma solução de (2). Por outro lado, se x é uma solução de (2) ortogonal a b então $n(x, b) = 0$. Logo, $\bar{x} * b + \bar{b} * x = 0$, pelo que $\bar{a} * x = \bar{x} * b = -\bar{b} * x$ e, conseqüentemente, $\overline{a + b} * x = 0$. Como $n(a + b) \neq 0$ então $n(\overline{a + b}) = n(a + b) \neq 0$ e existe $(\overline{a + b})^{-1}$. Pela associatividade de $(\mathbb{H}, *)$, conclui-se que $x = 0$. Portanto, a interseção do subespaço das soluções de (2) com o espaço, de dimensão 3, ortogonal a b é trivial. Conclui-se que o subespaço das soluções tem dimensão 1.

2. Se $n(a) = n(b)$ então, para cada $\gamma \in F$, $\gamma(a + b)$ é solução de (2). De facto, $\bar{a} * (\gamma(a + b)) = \gamma(n(a)e_0 + \bar{a} * b) = \gamma(n(b)e_0 + \bar{a} * b) = \gamma(\overline{a + b}) * b$.

3. Pelo Teorema 3.1, seja z uma solução não trivial de (2). Então $az = zb$, ou seja, $\bar{a} * z = \bar{z} * b$. Assim, $n(z)[n(a) - n(b)] = 0$ e, atendendo a que $n(a) \neq n(b)$, tem-se $n(z) = 0$. Portanto, z é isotrópico. Por último, tendo novamente em conta que $n(a) \neq n(b)$, os elementos isotrópicos $\alpha(a + b)$, onde $\alpha \in F \setminus \{0\}$, não são soluções de (2). De facto, se $a(\alpha(a + b)) = (\alpha(a + b))b$, então $\alpha n(a)e_0 + \alpha \bar{a} * b = \alpha \bar{a} * b + \alpha n(b)e_0$, obtendo-se a contradição $n(a) = n(b)$. \square

4 Associada a \mathbb{O}

Como na secção anterior, suponha-se que F é algebricamente fechado. Seja $(\mathbb{O}, *)$ a álgebra dos octonions sobre F com base $\{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$ e tabela da multiplicação dada por

$$e_i * e_i = -e_0 \text{ para } i \in \{1, \dots, 7\},$$

sendo e_0 a identidade, e pelo plano de Fano da Figura 1, onde a ordenação cíclica de cada três elementos sobre a mesma linha é mostrada pelas setas. Considere-se agora \mathcal{O} , a álgebra de composição standard de tipo II associada a $(\mathbb{O}, *)$, sobre F . A sua multiplicação, denotada por justaposição, é dada por

$$xy := \bar{x} * y.$$

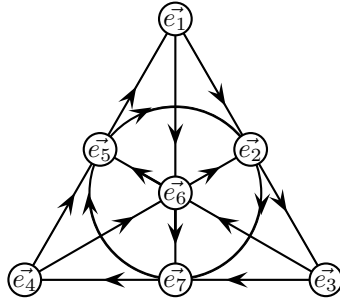


Figura 1: Plano de Fano para \mathcal{O} .

Considere-se ainda a tabela subsequente.

	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_0	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	$-e_1$	e_0	$-e_3$	e_2	$-e_5$	e_4	$-e_7$	e_6
e_2	$-e_2$	e_3	e_0	$-e_1$	$-e_6$	e_7	e_4	$-e_5$
e_3	$-e_3$	$-e_2$	e_1	e_0	e_7	e_6	$-e_5$	$-e_4$
e_4	$-e_4$	e_5	e_6	$-e_7$	e_0	$-e_1$	$-e_2$	e_3
e_5	$-e_5$	$-e_4$	$-e_7$	$-e_6$	e_1	e_0	e_3	e_2
e_6	$-e_6$	e_7	$-e_4$	e_5	e_2	$-e_3$	e_0	$-e_1$
e_7	$-e_7$	$-e_6$	e_5	e_4	$-e_3$	$-e_2$	e_1	e_0

Tabela 2: Tabela de multiplicação de \mathcal{O} , onde e_0 é a sua identidade esquerda.

Seja $a = \sum_{i=0}^7 a_i e_i \in \mathcal{O}$. Então as matrizes coordenadas da multiplicação esquerda por a e da multiplicação direita por a são dadas, respetivamente, por

$$l(a) = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 \\ -a_1 & a_0 & a_3 & -a_2 & a_5 & -a_4 & a_7 & -a_6 \\ -a_2 & -a_3 & a_0 & a_1 & a_6 & -a_7 & -a_4 & a_5 \\ -a_3 & a_2 & -a_1 & a_0 & -a_7 & -a_6 & a_5 & a_4 \\ -a_4 & -a_5 & -a_6 & a_7 & a_0 & a_1 & a_2 & -a_3 \\ -a_5 & a_4 & a_7 & a_6 & -a_1 & a_0 & -a_3 & -a_2 \\ -a_6 & -a_7 & a_4 & -a_5 & -a_2 & a_3 & a_0 & a_1 \\ -a_7 & a_6 & -a_5 & -a_4 & a_3 & a_2 & -a_1 & a_0 \end{bmatrix}$$

e

$$r(a) = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 \\ a_1 & -a_0 & -a_3 & a_2 & -a_5 & a_4 & -a_7 & a_6 \\ a_2 & a_3 & -a_0 & -a_1 & -a_6 & a_7 & a_4 & -a_5 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & -a_0 & a_7 & a_6 & -a_5 & -a_4 \\ a_4 & a_5 & a_6 & -a_7 & -a_0 & -a_1 & -a_2 & a_3 \\ a_5 & -a_4 & -a_7 & -a_6 & a_1 & -a_0 & a_3 & a_2 \\ a_6 & a_7 & -a_4 & a_5 & a_2 & -a_3 & -a_0 & -a_1 \\ a_7 & -a_6 & a_5 & a_4 & -a_3 & -a_2 & a_1 & -a_0 \end{bmatrix}.$$

Teorema 4.1. *Sejam a e b elementos não nulos de \mathcal{O} . A equação linear*

$$ax = xb \tag{4}$$

tem, pelo menos, uma solução não trivial se e só se $n(a) = n(b)$ ou $a + b$ é isotrópico.

Demonstração. A demonstração que estabelece este resultado é análoga à do Teorema 3.1. Fazendo o cálculo de $\det(l(a) - r(b))$ com recurso ao MapleTM, obtém-se $(n(a) - n(b))(n(a + b))^3$. \square

Corolário 4.2. *Sejam a e b elementos não nulos de \mathcal{O} .*

1. *Se $n(a + b) \neq 0$ e $n(a) = n(b)$ então as soluções de (4) são os múltiplos escalares de $a + b$.*
2. *Se $n(a + b) = 0$ e $n(a) = n(b)$ então os múltiplos escalares de $a + b$ são soluções de (2).*
3. *Se $n(a + b) = 0$ e $n(a) \neq n(b)$ então as soluções não triviais de (4) são elementos isotrópicos não pertencentes ao subespaço gerado por $a + b$.*

Demonstração. Pode ser elaborada de forma semelhante à demonstração do Corolário 3.2 embora, no que se refere a 1., seja necessário utilizar a identidade subsequente:

$$\text{para qualquer } z \in \mathbb{O} \text{ com } n(z) \neq 0, z^{-1} * (z * w) = (z^{-1} * z) * w.$$

Efetivamente, contrariamente ao que sucede com a álgebra $(\mathbb{H}, *)$ dos quaterniões, a álgebra $(\mathbb{O}, *)$ dos octoniões não é associativa. \square

Agradecimentos

A investigação do primeiro autor decorreu no âmbito das atividades do Centro de Matemática e Aplicações da Universidade da Beira Interior, sendo financiada pela Fundação para a Ciência e a Tecnologia (Portugal), projeto PEst-OE/MAT/UI0212/2011. O segundo autor foi financiado pelo Ministério de Educación y Ciencia (Espanña), projeto MTM2010-18370-C04-01.

Referências

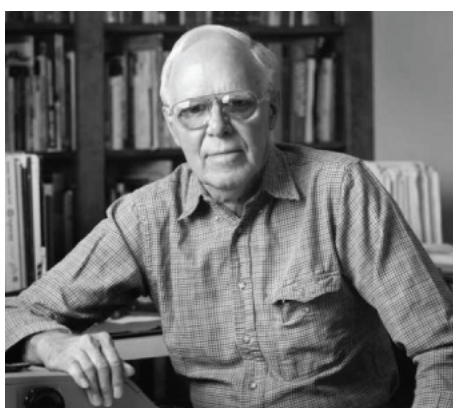
- [1] P. D. Beites e A. P. Nicolás, “Standard composition algebras of types II and III”, (2014), submetido.
- [2] J. A. Cuenca-Mira e E. Sánchez-Campos, “Composition algebras satisfying certain identities”, *J. Algebra*, Vol. 306, No. 2 (2006), pp. 634–644.
- [3] A. Elduque e J. M. Pérez-Izquierdo, “Composition algebras with large derivation algebras”, *J. Algebra*, Vol. 190, No. 2 (1997), pp. 372–404.
- [4] N. Jacobson, “Composition algebras and their automorphisms”, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, Vol. 7, No. 1 (1958), pp. 55–80.
- [5] I. Kaplansky, “Infinite-dimensional quadratic forms admitting composition”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, Vol. 4, No. 6 (1953), pp. 956–960.
- [6] F. S. Leite, “The geometry of hypercomplex matrices”, *Linear Multilinear Algebra*, Vol. 34, No. 2 (1993), pp. 123–132.
- [7] Maple 15 (2011). Maplesoft, a division of Waterloo Maple Inc., Waterloo, Ontario.

Matemática Recreativa

Editores:

Jorge Picado e Paula Mendes Martins

CINCO TRIBUTOS A MARTIN GARDNER



Resumo: Martin Gardner é uma das personalidades de culto na área da matemática recreativa. Inspirou e deliciou gerações de leitores com maravilhosas diversões matemáticas, truques de magia e desafios com números num recreio de ideias que apresentou, durante 25 anos, na sua coluna *Mathematical Games*, na revista *Scientific American*. Na altura em que se comemoram¹ os 100 anos do seu nascimento, pedimos a cinco matemáticos portugueses

¹<https://twitter.com/MGardner100th>

que nos falassem um pouco sobre Martin Gardner. Apresentamos aqui os seus testemunhos.

Abstract: Martin Gardner is one of the great personalities in the area of recreational mathematics. He inspired and delighted generations of readers with wonderful mathematical diversions, magic tricks and number puzzles on the playground of ideas presented during 25 years, in his *Mathematical Games* column at *Scientific American*. At the time the world celebrates² the centennial of his birth year, we have asked five portuguese mathematicians to tell us something about Martin Gardner. Here are their testimonials.

palavras-chave: Martin Gardner; Matemática Recreativa.

keywords: Martin Gardner; Recreational Mathematics.

1 A Propósito do Centenário do Nascimento do Grande Mestre da Divulgação Matemática

António Machiavelo (Universidade do Porto)

Não me recordo da altura exacta em que pela primeira vez li um artigo de Martin Gardner. Sei que estava nos últimos anos do ensino secundário, provavelmente no 11^o ano. Sei também que o li num exemplar da revista francesa *Pour la Science* e que foi em casa de um amigo meu, cujo pai, que tinha uma biblioteca que me deslumbrava, assinava essa versão francesa da *Scientific American*.

A leitura de cada um dos artigos de Gardner era um prazer. São artigos extraordinariamente bem escritos, numa linguagem precisa e clara, e sempre com alguma perspectiva nada banal sobre um tópico também ele pouco banal. Contêm muitos temas de reflexão e de exploração que me ocupavam e deleitavam durante dias, por vezes semanas ou mesmo meses.

Muito pouco tempo depois, descobri alguns dos seus livros. Os primeiros que adquiri foram «*haha*», ou *l'éclair de la compréhension mathématique* e «*La magie des paradoxes*», ambos editados na *Bibliothèque Pour la Science*, duas pequenas obras com ilustrações simples mas encantadoras. Seguiram-se vários outros livros, através dos quais conheci os hexaflexágonos e o jogo da vida de Conway, assim como fiquei a conhecer as fracções egípcias e a conjectura de Erdős-Straus, que toda a fracção da forma $\frac{4}{n}$, com $n > 4$, pode ser escrita como soma de não mais de três fracções unitárias (i.e. de denominador igual a 1), só para dar três exemplos.

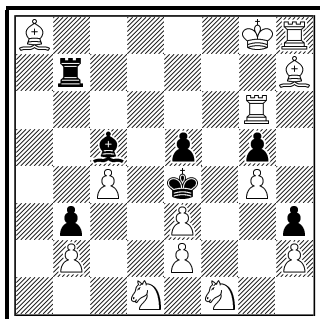
²<https://twitter.com/MGardner100th>

Mais tarde li a sua novela semi-autobiográfica «*The Flight of Peter Fromm*» e fiquei a conhecer o papel importante que Gardner desempenhou no movimento céptico norte-americano e o seu envolvimento na criação do *Committee for the Scientific Investigation of Claims of the Paranormal* (CSICOP), actualmente *Committee for Skeptical Inquiry* (CSI), assim como a sua obra seminal «*Fads and Fallacies in the Name of Science*» de 1952. Deliciei-me também com alguns dos seus ensaios publicados em duas obras cuja leitura vivamente recomendo a quem não as conheça ainda: *The Whys of a Philosophical Scrivener*, de 1983, e *The Night is Large*, de 1996. Foi ainda com enorme prazer que descobri dois contos, *No-Sided Professor* e *Left or Right*, escritos por Gardner em 1947 e 1951, respectivamente, reimpressos numa obra editada por Rudy Rucker, recheada de contos de ficção matemática, um género infelizmente muito raro: «*Mathnauts: Tales of Mathematical Wonder*».

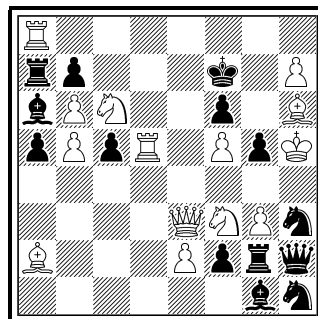
Ao longo dos anos tenho muitas vezes revisitado os seus livros que muito influenciaram o modo como vejo a matemática e o mundo, que me continuam a encantar e que, estou certo, encantarão ainda muitas gerações de seres humanos. Martin Gardner foi, é, e para sempre será, um dos mestres incontestáveis da divulgação matemática.

Apesar de ser muito difícil seleccionar um favorito entre os problemas e temas tratados por Gardner, decidi escolher para esta celebração do centenário do seu nascimento um problema não-standard de xadrez que me intrigou imenso quando pela primeira vez o vi no seu «*New Mathematical Diversions*» (edição revista publicada pela *The Mathematical Association of America*; problema 8 do capítulo 19). Trata-se de um problema composto por Karl Faber, ilustrado no diagrama da esquerda na figura abaixo, cujo objectivo é descobrir o único lance que não dá xeque-mate em um lance!

Em homenagem ao gosto que Gardner também tinha em questões menos usuais baseadas no jogo do xadrez, compus um pequeno puzzle xadrezístico que me atrevo a imaginar que Gardner apreciaria. Trata-se de descobrir quantos xeques-mate as brancas podem dar na posição ilustrada no diagrama da direita na figura abaixo.



Não dar xeque-mate em um



Um quadrado de xeques-mate

Para o resolver basta apenas conhecer (bem) as regras do xadrez. Curiosamente, a resposta é um número que é um quadrado perfeito. É relativamente fácil encontrar um número de xeques-mate que é um cubo perfeito, mas mostrar que de facto há um quadrado deles envolve algum raciocínio lógico que não é inteiramente banal. Espero que os leitores deste *Boletim* apreciem este pequeno desafio.

2 Martin Gardner: O homem que trouxe mais matemática a mais milhões

Carlos Pereira dos Santos (CELC, Universidade de Lisboa)

Em Outubro de 2014, sensivelmente a altura em que se escreve este texto, faz 100 anos que nasceu o divulgador de matemática norte-americano Martin Gardner (21 de Outubro de 1914 - 22 de Maio de 2010). Não é fácil descrever Gardner; não se pode dizer que tenha sido um matemático (não tinha uma formação avançada na área), não se pode dizer que tenha sido um escritor, não se pode dizer que tenha sido um cronista típico. Gardner era sobretudo um grande apaixonado por um grande número de temáticas a que dedicava atenção com grande interesse, curiosidade e método. O facto de não ser especialista num tópico muito particular, mas entusiasta por vários assuntos como matemática, magia, arte, jogos, puzzles, religião, ciência, ficção, literatura, pseudociência, filosofia, etc., talvez seja uma das principais razões para o sucesso da sua obra.

A vertente em que mais se notabilizou relaciona-se com a matemática recreativa e sua divulgação. De 1956 a 1981 publicou a coluna “Mathematical

Games” na prestigiada *Scientific American*. A sua secção tornou-se muito popular desde o início.

Matemática recreativa é um termo de difícil definição. Relaciona-se com a análise de problemas não-*standard* ou com a análise de problemas conhecidos através de abordagens pouco comuns. Mas o melhor é mesmo não a tentar definir. As definições tendem a fechar, e a matemática recreativa, na sua génese, é aberta. Embora possa servir de ponte para a descoberta de conceitos muito importantes, a utilidade não é a sua preocupação: engenho, imaginação e beleza é o que importa. Há quem diga de forma muitíssimo simplista que a matemática recreativa é o assunto que engloba puzzles e jogos matemáticos. No entanto, a sua abrangência é bastante mais vasta.

Historicamente sabemos que o nascimento e desenvolvimento de algumas áreas da matemática estão profundamente ligados à matemática recreativa - probabilidade, teoria de grafos, teoria de números, etc. Sendo assim, a matemática recreativa também pode facilmente resvalar para o que a sociedade em geral usualmente designa de “muito sério”. Muitos matemáticos profissionais confessaram ter ganho o seu gosto pela matemática lendo os artigos de Martin Gardner na *Scientific American*. E isso, em si mesmo, é realmente muito sério. Como Richard Guy, um enorme matemático, disse uma vez,

Gardner brought more math to more millions than anyone else.

A razão para tal prende-se com o facto da matemática tratar fundamentalmente de ideias. É claro que, na sua natureza, a matemática tem associado a si um método. Além disso, tem muitas especificidades operacionais e formalismo próprios. Mas o que é realmente entusiasmante e capaz de tirar o sono a uma pessoa é a elegância das suas ideias.

As ideias matemáticas, devido ao tratamento abstracto de que são alvo, aparecem nos mais variados contextos, úteis, inúteis, na vida de ricos, de pobres, na literatura, ciência, vida quotidiana, etc. O que nos cativa de forma mais intensa são as ideias e não outra coisa qualquer. Mas para deixar essa marca nas pessoas, nada como escolher contextos surpreendentes, bem-humorados, estéticos e culturais. Foi isso que Gardner compreendeu em todo o seu esplendor. Os seus artigos, além de extremamente cuidados e carregados de ideias elegantes e sofisticadas, são enquadrados de forma inteligente e variada. Por vezes, motivos aparentemente muito distintos são ligados através da matemática e isso marca no leitor a enorme importância da disciplina, que é capaz de coisa tão poderosa.

Os textos que Martin Gardner assinou tornaram-se clássicos. Destacamos o Jogo da Vida de John Conway, Pavimentações de Penrose, Artes Visuais de Escher, Charadas Lógicas de Raymond Smullyan, Fractais de Mandelbrot, versão anotada do Alice no País das Maravilhas de Lewis Carroll, para não falar de Magia, Pseudociência ou centenas (literalmente centenas) de outros tópicos.

A título de exemplo, mostraremos o jogo *Jam* retirado do livro/colectânea de artigos *Mathematical Carnival*. Embora seja um jogo bastante simples e aparentemente “insosso”, há uma característica nele que o torna especial. É o porquê desse facto que debateremos de forma muito breve.

Neste jogo, são colocadas 9 cartas de 1 a 9 em linha em cima de uma mesa (o Ás é o 1). Dois jogadores alternam tirando uma carta dessa linha. O primeiro a coleccionar um subconjunto de três cartas cuja soma seja 15 ganha. É comum em Teoria de Jogos os jogadores chamarem-se Alice e Bob. Em homenagem à atenção dada por Gardner à magnífica obra de Carroll, consideremos um jogo opondo Alice a Bill *the Lizard* (não há Bob na obra de Carroll...). A sequência de jogadas neste jogo ilustrativo é a seguinte:

Bill 5 - Alice 3 - Bill 2 - Alice 6 - Bill 4 - Alice 9 - Bill 6

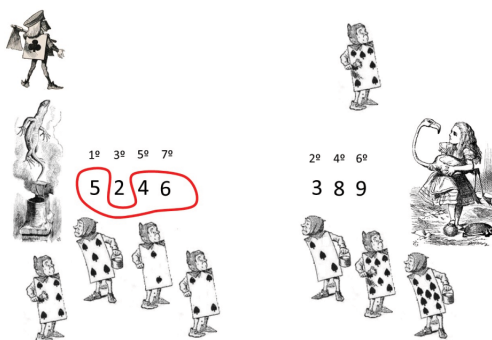


Figura 1: Derrota de Alice contra Bill *the Lizard*.

O 1 e o 7 não foram utilizados. O lagarto ganhou pois obteve o subconjunto $\{4, 5, 6\}$ cuja soma é 15.

Mudando radicalmente de assunto, mencionamos os *Quadrados Mágicos*, temática também tratada por Gardner. Um quadrado mágico consiste numa arrumação $n \times n$ dos n^2 primeiros números naturais de forma a que a soma mágica, na horizontal, vertical ou diagonal seja sempre igual.



Figura 2: *Lo-Shu*, *Melancholia I*, detalhe no *Melancholia I*.



Figura 3: *Sagrada Família*, detalhe na *Sagrada Família*, quadrado mágico 3×3 .

Estas arrumações aparecem aqui e ali em temas místicos e artísticos. Uma antiga lenda chinesa (*Lo-Shu*) falava de uma tartaruga que vinha à tona de água com um quadrado mágico na carapaça. A informação relativa à soma mágica era sagrada e orientadora sobre o número de oferendas a enviar através do rio *Lo*. Também num quadro de Dürer, o *Melancholia I*, pode ver-se um quadrado mágico 4×4 cuja soma é 34. Já na mais recente *Sagrada Família*, Gaudi apresenta um quadrado mágico “falso” com números repetidos de forma a que a soma seja agora 33, a idade da morte de Jesus Cristo.

Muita matemática pode ser feita em torno dos quadrados mágicos: análise da soma mágica, número de disposições diferentes, etc. Mas uma utilização surpreendente de um quadrado mágico pode ser ilustrada voltando ao jogo entre a Alice e o Bill *the Lizard*.

A Alice e o Bill estiveram simplesmente a jogar o popular *Jogo do Galo* sobre um quadrado mágico! Quem conhece minimamente este jogo sabe que o primeiro lance da Alice foi um erro. Uma pessoa, ao perceber esta correspondência entre os dois jogos, tem uma sensação de autêntica *revelação*. E o jogador que pratique o jogo do quinze e que seja simultaneamente conhecedor deste segredo tem óbvia vantagem.

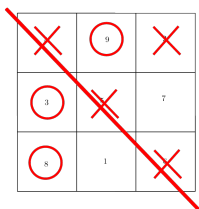


Figura 4: Derrota de Alice contra Bill *the Lizard* revisitada.

Martin Gardner tinha um refinado gosto para este tipo de abordagem. O seu leitor, além de viajar através de notas artísticas e culturais, contacta com engenhosas ideias matemáticas. Em muitos casos, qualquer pessoa está apta para desfrutar da ideia (como acontece neste exemplo). E, no que diz respeito a leitores matemáticos, são abertos ricos campos de exploração (neste exemplo, está subjacente a ideia de isomorfismo de jogos como sendo um isomorfismo de grafos). Todos ficam satisfeitos, podendo ter pensamentos de vários graus de sofisticação. Era assim Martin Gardner. Ainda é, provavelmente não morrerá.

3 Martin Gardner: A razão e o bom gosto

Jorge Nuno Silva (Universidade de Lisboa)

Martin Gardner (21.10.1914-22.05.2010) foi o maior divulgador da matemática de sempre. Ao longo da sua vida escreveu perto de duzentos livros sobre vários temas, da matemática à filosofia, passando pela magia. Em todos podemos apreciar a sua cristalina, alguns diriam erótica, racionalidade. Em Gardner o que surpreende e maravilha é sempre o prazer, o prazer de pensar. Por isso a matemática foi um dos seus campos de eleição, embora nunca tenha frequentado nenhuma aula desta disciplina, para além do ensino secundário.

Ao longo dos seus 25 anos de existência, de 1957 a 1981, a sua coluna “Mathematical Games”, na *Scientific American*, constituiu o maior expoente da divulgação matemática. Alguns resultados, e alguns matemáticos, foram aí expostos por Gardner pela primeira vez. A correspondência que encetou com muitos dos grandes vultos do século passado revelou-se muito enriquecedora, permitindo grande originalidade, alcance e correcção aos trabalhos publicados. Estreitou relações com Piet Hein, Conway, Knuth, Diaconis, Graham, Harary, Golomb, Penrose e muitos outros. O sucesso desta publi-

cação não pode ser sobrestimado. Como Graham disse, “Gardner transformou milhares de crianças em matemáticos e milhares de matemáticos em crianças”.

Este sucesso não se limitou ao meio matemático, foram inúmeros os leigos que ganharam gosto por temas matemáticos com a leitura de Gardner. Como Richard Guy escreveu, “Gardner brought more math to more millions than anyone else”.

A sua paixão pela matemática recreativa levou-o a defender a sua utilização na sala de aula, como método para cativar os alunos. Numa das suas entrevistas conta como, ainda muito novo, foi surpreendido pela professora de matemática quando investigava o Jogo do Galo. Foi repreendido: “aqui na aula só nos ocupamos de assuntos matemáticos”. A sua opinião, muitos anos depois, continuava a ser a de que o Jogo do Galo é um óptimo instrumento didáctico, que permite leccionar sobre vários temas curriculares de uma forma agradável.

Interessado em magia desde cedo, publicou muitos artigos e livros nesta matéria, mantendo-se sempre um elemento activo da respectiva comunidade. O reconhecimento a Martin Gardner é geral, mas dos matemáticos e dos mágicos ele recebe um carinho especial.

Desde 1993 que se realiza regularmente em sua honra, em Atlanta, nos EUA, um encontro sobre Matemática Recreativa e Magia. Trata-se do Gathering for Gardner (G4G) que recentemente realizou a sua undécima edição (G4G11), em Março de 2014.



Um encontro de índole semelhante começa a ganhar corpo na Europa, realizando-se nos anos ímpares em Portugal. O Recreational Mathematics Colloquium I (RMC I) aconteceu na Universidade de Évora em 2009, assim como o RMC II, este em 2011. A Universidade dos Açores acolheu o RMC III, em 2013. O próximo é já em janeiro de 2015, no Pavilhão do Conhecimento, em Lisboa (<http://ludicum.org/ev>).

A vida de Martin Gardner é celebrada por todo o mundo anualmente em 21 de outubro. O evento global —Celebration of Mind—junta milhares de entusiastas na partilha de pérolas, novas e velhas, da matemática recreativa e de magia.



Em Portugal temos participado neste movimento e este ano honramos o 100º aniversário de Gardner. No dia 21 de outubro de 2014, no Pavilhão do Conhecimento, faremos a nossa festa, que partilharemos, em directo, mediante ligação electrónica, com os nossos amigos em Israel. No dia 24 será a vez do Museu Nacional de História Natural e da Ciência acolher a nossa tertúlia!

O autor destas linhas, apreciador de Gardner desde cedo, essencialmente devido aos seus textos na *Scientific American*, não foi empurrado por ele para os estudos matemáticos. Esses acabaram por acontecer mais tarde, um pouco ao acaso e por ter conhecido um professor ímpar, extraordinário, mas isso são contas de outro rosário... O que Martin Gardner me deu foi a possibilidade de usar a mente com prazer. E fê-lo da forma mais eficaz: pelo exemplo!

Este será um entre outros testemunhos. Não vou escolher um tema preferido, outros o farão. Li e releio Martin Gardner regularmente. Participo em todos os eventos relevantes, nomeadamente em Portugal e nos Estados Unidos. A minha proposta é outra.

Para o público matemático que me lê, proponho uma reflexão. Gardner, como referi acima, foi um divulgador excepcional. A correcção científica dos seus textos é primorosa. Como se pode explicar isso, sabendo que nunca frequentou um semestre que fosse para além da escola secundária?

Creio, sinceramente, que podemos ganhar muito, na nossa dimensão docente, com esta reflexão.

4 Martin Gardner e a Matemática recreativa

José Carlos Santos (Universidade do Porto)

Os quinze livros de Martin Gardner sobre «Jogos matemáticos» são o *canon*: clássicos intemporais que valem sempre a pena ler e reler.

Donald Knuth

Em que consiste a Matemática recreativa? Não me vou alongar neste

tema, tanto mais que já existe o excelente texto [4] sobre este tópico, mas quero abordar algumas ideias erradas que provavelmente ocorrem na mente da maior parte das pessoas quando são expostas à expressão «Matemática recreativa»: de que se trata de Matemática fácil, superficial, sem interesse ou talvez mesmo que não mereça designar-se por Matemática. É claro que pode ser isso tudo. Considere-se, por exemplo, o seguinte problema:

Uma pessoa cria galinhas e coelhos no seu quintal. No total, os seus animais têm trinta e três cabeças e noventa e seis patas. Quantos animais tem de cada tipo?

Quem saiba um mínimo de Matemática (ao nível do início do Ensino Secundário) não terá dificuldade em resolver este problema algebricamente: se se representar por g o número de galinhas e por c o número de coelhos, então o problema anterior traduz-se no sistema de equações:

$$\begin{cases} g + c = 33 \\ 2g + 4c = 96, \end{cases}$$

cuja solução é $g = 18$ e $c = 15$.

De facto, este problema não é tão trivial quanto poderá parecer à primeira vista, pois uma criança que ainda não saiba traduzir o problema num sistema de equações (nem resolver o sistema) poderá achá-lo desafiante e resolvê-lo, por exemplo, do seguinte modo:

Como há 33 galinhas e coelhos, o número de patas de galinhas e de patas *traseiras* de coelhos é igual a 66. Mas sei que há 96 patas no total, pelo que há 30 patas *diantes* de coelhos e, portanto, 15 coelhos. Como há 33 cabeças, há 18 galinhas.

Frequentemente, problemas de Matemática recreativa podem ser resolvidos com pouca ou até nenhuma criatividade, recorrendo em vez disso à paciência necessária para testar um grande número de possibilidades. Por exemplo, considere-se a seguinte simplificação:

$$\frac{64}{16} = \frac{\cancel{6}4}{\cancel{1}6} = \frac{4}{1} = 4.$$

Acontece que, de facto, $64/16 = 4$. Um problema agora que se pode pôr é o seguinte:

Encontrar todos os pares de números com dois algarismos para os quais uma simplificação como a anterior é válida.

Embora seja conveniente pensar um pouco antes de se começar a procurar os pares de números nestas condições, é forçoso admitir que a componente matemática deste problema é de interesse reduzido.

Frequentemente, aquilo que passa por Matemática recreativa não é mais do que uma maneira lúdica de apresentar problemas matemáticos comuns. Um exemplo, retirado de [3], é o seguinte:

Num charco há um nenúfar, cujo caule está na vertical e cuja extremidade mais elevada se encontra a dez centímetros acima da superfície. Se se empurrar o nenúfar o mais possível para o lado sem que o caule se quebre, a extremidade mais elevada do nenúfar fica à superfície da água quando estiver a vinte e um centímetros do local de onde o caule saía originalmente da água. Qual é a profundidade do charco?

A resposta (17,05 cm) pode ser obtida recorrendo ao teorema das cordas³, que afirma que se A , B , C e D são pontos de uma circunferência e que se as cordas $[AB]$ e $[CD]$ se intersectam num ponto P , então $AP \cdot PB = CP \cdot PD$. Em alternativa, pode-se resolver o problema recorrendo ao teorema de Pitágoras. Em qualquer dos casos, a Matemática envolvida é bastante elementar e pouco estimulante.

É aqui que Martin Gardner se distinguiu particularmente. Os seus textos de Matemática recreativa são modelos do género, pois, para além de serem efectivamente recreativos, conseguem combinar Matemática interessante e estimulante, para além de, frequentemente, se tratar de Matemática recente na altura em que os textos foram escritos. Naturalmente, a elevada qualidade da escrita de Gardner também deve ser salientada. Um exemplo notável pode ser visto em [2, cap. 14]. Perto do fim da sua vida, Euler escreveu um notável texto de Matemática recreativa chamado *Recherches sur une nouvelle espèce de quarrés magiques*, onde menciona o seguinte problema:

Será possível dispor trinta e seis oficiais de seis patentes distintas e de seis regimentos distintos num quadrado da forma 6×6 de forma que em cada linha e em cada coluna haja somente um oficial de cada patente e somente um oficial de cada regimento?

Euler não conseguiu resolver o problema, mas conjecturou que a resposta é negativa (e tinha razão, mas isso só foi demonstrado em 1901) e que, mais geralmente, o problema análogo para n^2 oficiais de n patentes e n regimentos distintos não tem solução quando n for par mas não for múltiplo de 4.

³Esta é a solução fornecida pelo autor.

O texto de Gardner acima referido explica como foi provado recentemente (relativamente à altura em que o texto foi escrito) que, com excepção do caso $n = 6$, Euler estava errado. De facto, o problema tem solução sempre que n é um número par maior do que 6 que não seja múltiplo de 4.⁴

Pessoalmente, creio que de todas as ideias matemáticas das quais tomei conhecimento através de Martin Gardner, aquela na qual pensei mais vezes é o paradoxo de Simpson, sobre o qual Gardner disserta (sem lhe dar qualquer nome) em [1]. É um paradoxo estatístico, que parte da seguinte situação: uma amostra M de indivíduos está dividida em várias sub-amostras M_1, M_2, \dots, M_n . Suponha-se que é feita uma análise estatística a cada uma das sub-amostras e que essa análise revela uma certa tendência em *todas* elas. É de esperar que a mesma tendência seja detectada se se fizer a mesma análise estatística a toda a população M , certo? Errado! Em certos casos, a tendência inverte-se! Gardner ilustra o paradoxo com a história imaginária de uma especialista em estatística que se inscreve em dois clubes de encontros e que quer conhecer um homem interessado num encontro sem compromissos. Constata que em ambos os clubes há uma maior proporção de homens interessados em encontros sem compromissos entre aqueles que têm bigode do que entre aqueles que não têm e, por isso, quando descobre que vai haver um encontro conjunto dos membros de ambos os clubes, parte do princípio de que o mesmo continua a ser verdade no conjunto formado pelos homens dos dois clubes. Mas, por prudência, resolve fazer os cálculos e, para sua grande surpresa, descobre que, pelo contrário, ao se unirem os dois clubes, passa a ser mais provável que seja um homem sem bigode a não estar interessado num relacionamento sério do que um homem com bigode!

Depois de se ler uma coisa destas, como é possível não ficar viciado em Martin Gardner?

Referências

- [1] M. Gardner, *Aha! gotcha: Paradoxes to puzzle and delight*, W. H. Freeman, 1982.
- [2] M. Gardner, *New mathematical diversions (revised edition)*, Mathematical Association of America, 1995.
- [3] S. Loyd, *100 puzzles matemáticos*, Publicações Europa-América, 1998.

⁴Além disso, o problema também tem solução se n for ímpar ou múltiplo de 4, como Euler provou.

- [4] A. Machiavelo, *Algumas observações sobre a Matemática recreativa*, Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática **58** (2008) pp. 67–89.

5 Quando a Matemática mudou

José Paulo Viana (Escola Secundária de Vergílio Ferreira, Lisboa)

Já não sei bem quando foi. 1974? 1975? Mas foi em Paris. Na livraria *La Joie de Lire*? Ou numa das inúmeras bancas à beira do Sena que vendem livros usados? O que interessa é que, de repente, encontrei um livro com um título que logo me atraiu: *Nouveaux Divertissements Mathématiques* (Novos Divertimentos Matemáticos).

Quando comecei a lê-lo, a adesão foi imediata. Ali estava uma matemática diferente da que conhecia. Cada capítulo começava com um problema intrigante ou com um teorema invulgar ou com um jogo pouco conhecido ou com uma magia matemática ou sei lá o quê. Seguia-se uma análise, normalmente não rotineira, da questão inicial e depois partia-se por caminhos inesperados, indo cada vez mais longe ou testando variantes ou acrescentando complementos. Uma verdadeira festa. Aquela forma de abordar a Matemática correspondia perfeitamente ao que eu gostava de fazer. Ah! ignorante que eu era, não conhecia o autor, Martin Gardner.

Nessa altura, em Portugal, não havia nada dele publicado (aliás, não havia quase nada no que se refere à divulgação matemática). Bem procurei, mas nada encontrei. Ao fim de algum tempo, o melhor que conseguia era ir à biblioteca de uma universidade ou do Ministério da Educação e ler a coluna que ele escrevia regularmente na revista *Scientific American*. Era sempre uma delícia! Como as fotocópias, apesar de caras, já existiam nessa altura, levava comigo uma cópia do artigo para poder pensar melhor em casa nas inúmeras questões que lá eram levantadas.

Como o título daquele meu primeiro livro se referia a *Novos Divertimentos*, isso queria dizer que havia outros divertimentos anteriores e, portanto, outros livros. Tinha de ir à procura deles lá fora. Assim, a partir daí, cada vez que ia ao estrangeiro, trazia um novo livro dele. Por curiosidade, fui ver o que tenho cá em casa e encontrei seis vindos de França, quatro da Espanha e três dos Estados Unidos. Felizmente, em 1990, a Gradiva começa a publicar os seus livros (o primeiro foi *Ah, Descobri!*) e agora já há bastantes disponíveis para os leitores portugueses.

Foi através de Martin Gardner que fiquei a conhecer vários truques de

magia matemática, que bem úteis me têm sido. Mas, claro, o melhor de tudo são os problemas (ou, mais precisamente, o olhar que Martin tinha sobre eles). Os meus preferidos estão lá quase todos. Um dos mais fascinantes é o dos triângulos "pentólogos", referido em *O Circo Matemático*:

Se dois triângulos são geometricamente iguais, então têm obrigatoriamente seis elementos iguais: os três lados de um são iguais aos três lados do outro, e o mesmo acontece com os três ângulos. Será possível existirem dois triângulos diferentes, embora tenham cinco elementos iguais?

Primeiro, parece impossível. Pensamos, damos umas voltas, voltamos a pensar e, Ah! descobrimos uma solução. Ficamos entusiasmados, pensamos mais um bocado e, de repente, percebemos que é possível ir mais longe e mais longe...

Obrigado, Martin.



Martin Gardner iterado, por Bruce Torrence

Retrato de Martin Gardner produzido colorindo peças individuais numa pavimentação de Penrose de papagaios e dardos. Gardner apresentou ao mundo estas pavimentações na sua coluna em janeiro de 1977. Estas pavimentações nunca são periódicas, mas esta, em particular, exhibe uma simetria rotacional pentagonal. Foi feita com o *Mathematica* usando sete iterações de um pentágono formado por cinco papagaios (ver <https://flic.kr/p/9TSaJm>).

História da Matemática

Editor:
Luís Saraiva

IVOR GRATTAN-GUINNESS¹

(23 DE JUNHO DE 1941 – 12 DE DEZEMBRO DE 2014)

Luís Saraiva

CMAF – Universidade de Lisboa



Oberwolfach, Workshop “The History of Differential Equations, 1670-1950”, Novembro de 2004. Da esquerda para a direita: João Caramalho Domingues, Ivor Grattan-Guinness, Enid Grattan-Guinness e Luís Saraiva.

¹Neste texto não é utilizada a nova reforma ortográfica.

É difícil escrever a quente sobre uma individualidade que faleceu, e que foi não só um grande historiador da Matemática, uma figura marcante no panorama da investigação nesta área nos últimos 40 anos, como também um amigo de longa data, uma pessoa cujos percursos múltiplas vezes se cruzaram com os meus, e, igualmente, com o de outros colegas portugueses. Em particular, ele foi o orientador da tese de doutoramento de João Caramalho Domingues, meu colega no Secretariado do SNHM.

Em relação à sua ligação com Portugal, Ivor Grattan-Guinness começou por participar no Colóquio comemorativo dos 200 anos do falecimento de José Anastácio da Cunha, realizado em Lisboa em 1987, tendo o seu texto “Da Cunha’s calculus in its time” sido incluído nas Actas publicadas em 1990 pela Imprensa Nacional/Casa da Moeda. Foi com ele que, após a conclusão do Encontro, alguns dos futuros fundadores do SNHM reuniram para definir os parâmetros que haveriam de nortear o SNHM na sua existência. As suas opiniões foram devidamente escutadas, e o modo de funcionamento do SNHM beneficiou da sua experiência e conselho.

Grattan-Guinness veio a Portugal várias vezes. Participou em três dos encontros nacionais do SNHM: no 4º, realizado em Coimbra em Abril de 1990, no 10º, que teve lugar no Monte da Caparica em Janeiro de 1998, e no 21º, celebrando os 20 anos do SNHM, que teve lugar no Porto em Março de 2008, em que ele e o Professor Jean Dhombres foram homenageados, pelo papel decisivo que tiveram na estruturação e nos começos do SNHM. Esteve igualmente em Portugal, para participar noutros encontros ou realizar conferências. Em 1990, com subsídio conjunto da Academia das Ciências de Lisboa e da Royal Society de Londres realizou um impressionante conjunto de 14 conferências em Lisboa, Coimbra, Évora e Braga, com a colaboração de vários departamentos das Universidades de Lisboa, Coimbra, Évora e Minho. Foi o que chamámos com carinho (e admiração) o “Grattan-Guinness Express Tour”. Em Junho de 2001 participou no Encontro internacional realizado em Lisboa “History of Differential Equations”. Veio a Portugal outras vezes para realizar conferências. Entre outras, lembro uma que fez sobre as ligações entre matemática e música, em que analisou este tema em obras de Mozart e de Beethoven.

Conheci Ivor Grattan-Guinness, em Marselha, no 1º Encontro Franco-Italiano de História da Matemática, realizado em 1987 uns meses antes da sua vinda a Lisboa para participar no Encontro Internacional sobre José Anastácio da Cunha. Nesse tempo eu estava a dar os primeiros passos em história da matemática, era a minha segunda saída de Portugal em Encon-

tros nesta área. A minha formação universitária, mais britânica do que francesa, imediatamente me levou a falar com este investigador, o único inglês presente no Encontro. Fascinou-me a personalidade de Grattan-Guinness, a extensão do conhecimento profundo que denotava de forma completamente natural, sem qualquer tipo de ostentação, da história da matemática, dando-me inclusivamente informação que eu não conhecia de fontes internacionais sobre a obra de Anastácio da Cunha. Nunca esquecerei a primeira vez que lhe falei, num passeio organizado às calanques de Marselha, o seu ar pouco convencional estava absolutamente de acordo com a sua personalidade de pensador livre, não enfeudado a nenhuma organização ou escola de pensamento. Foi algo que o caracterizou a vida inteira, nunca ostentou pertencer a qualquer academia ou ter tido qualquer prémio, antes me pareceu sempre reservado e algo desconfiado em relação a tudo o que fosse academias ou qualquer tipo de institucionalização da investigação. Embora tipicamente britânico, foi sempre extremamente crítico da história inglesa e da acção dos ingleses no mundo. Era uma pessoa de grande generosidade, com uma concepção abrangente do que é a comunidade dos historiadores da matemática, partilhando sem qualquer hesitação toda a informação que tinha, muitas vezes indicando terceiros quando ele próprio não podia dar as indicações pedidas. E a sua memória era colossal, era capaz de, perante uma pergunta de informação bibliográfica, dizer não só o local onde se podia encontrar o documento, mas igualmente a sua localização exacta (andar, sala, e, por vezes, gaveta). Mas a sua grande qualidade de investigador e a sua relevância na comunidade internacional nunca lhe fizeram perder a sua simplicidade e facilidade de comunicação. Lembro-me, entre outros episódios reveladores, de um jantar em casa de um amigo comum em que o vi deitado no chão jogando ao berlinde com o filho de 9 anos desse nosso amigo.

Sobre a sua obra de investigador deixo lugar ao excelente texto de Karen Parshall a seguir transcrito, na tradução portuguesa que fiz. Incluí igualmente a resposta dada então por Ivor Grattan-Guinness (também traduzida por mim), pois acho que ela permite inferir indicações preciosas sobre este historiador directamente pelo seu discurso. Não há nada como dar a palavra ao próprio. Para quem não o conheceu pessoalmente, este texto fornece alguns elementos importantes sobre a pessoa e sobre o historiador. Desde a generosidade de partilha de conhecimento, matemático ou não, às suas próprias motivações para ter enveredado no caminho da história da matemática, à sua homenagem a Kenneth O' May e a Karl Popper, à ironia corrosiva na análise das situações, que quem privou com ele muito bem co-

nhece, à homenagem à sua esposa Enid, sua companhia e apoio constante nestes últimos 50 anos.

Ivor Grattan-Guinness era uma pessoa extraordinária, mas extraordinária significa aqui de grande dimensão humana, para além de grande valor como investigador. Na vida todos conhecemos pessoas melhores e piores, umas que nada nos dizem, outras com quem aprendemos alguma coisa, e finalmente outras que marcam a nossa vida. Para mim Ivor Grattan-Guinness está neste último grupo. Custa-me saber que não o voltarei a ver e falar com ele, mas como todos os que vão desaparecendo e são importantes para nós, algo dele permanecerá sempre vivo na minha memória, sentimento, e, espero, prática científica.

Cerimónia de Atribuição da Medalha e Prémio Kenneth O. May a Ivor Grattan-Guinness

Texto de Karen Parshall, lido por Craig Fraser, presidente da Comissão Executiva da International Commission on the History of Mathematics, na cerimónia da atribuição da Medalha e do Prémio Kenneth O. May, durante a realização do 24º Congresso Internacional de História da Ciência, da Tecnologia e da Medicina, que teve lugar em Manchester, Inglaterra, de 22 a 28 de Julho de 2013.

Ivor Grattan-Guinness terminou o curso de Matemática na Universidade de Oxford em 1962, o Master of Science em Filosofia da Ciência na London School of Economics em 1966, e o Master of Arts na Universidade de Oxford em 1967, antes de concluir o seu doutoramento, seguido de um prestigiante Doctor of Science, em história da ciência na Universidade de Londres, em 1969 e em 1978, respectivamente. Entrou para docente da Universidade de Middlesex, tornando-se Professor Emérito de História da Matemática e da Lógica em 2002 na mesma Universidade, tinha então 60 anos.

O primeiro livro de Grattan-Guinness, *The development of the Foundations of Mathematical Analysis from Euler to Riemann* (1970) baseou-se na sua tese de doutoramento e reflecte o seu interesse profundo e a sua contribuição para a história dos fundamentos da Matemática, bem como a da Análise Matemática. Neste estudo Grattan-Guinness evidencia as características que passaram a ser as marcas de qualidade da sua investigação: uma penetrante leitura das fontes primárias essenciais num vasto leque de

línguas, e abrangentes sínteses das ideias matemáticas. Este trabalho, com uma análise extensiva da matemática de Cauchy e dos seus predecessores imediatos, também foi útil para focar a sua atenção na cena francesa do começo do século XIX, um vasto tema que dominou a sua investigação durante duas décadas.

Os primeiros frutos desses trabalhos apareceram em 1972, com a publicação com Jerome Ravetz de *Joseph Fourier 1768-1830*. Para além de ser uma visão panorâmica da vida e obra de Fourier e uma edição crítica da monografia de 1807 sobre a propagação do calor que Fourier apresentou ao Institut de France, este livro salienta não somente o meio matemático parisiense, e mais geralmente o meio científico do qual Fourier faz parte, mas igualmente desenvolve aquilo que mais tarde denominará “applicable mathematics”. Desenvolveu ambos os temas, bem como os relativos à educação matemática e aos seus locais de prática, constantemente em expansão, na sua magistral obra em 3 volumes *Convolutions in French Mathematics, 1800-1840: From the Calculus and Mechanics to Mathematical Analysis and Mathematical Physics*, publicado pela Birkhäuser Verlag em 1990.

A capacidade de Grattan-Guinness em sintetizar e esclarecer grandes áreas do conhecimento matemático é igualmente evidenciado em *The Norton History of the Mathematical Sciences: The Rainbow of Mathematics* (1998), no qual o tema é nada menos que *todas* as ciências matemáticas. Esta distinção é importante: as *ciências matemáticas* e não apenas *matemática*. No dizer de Victor Katz, “Grattan-Guinness torna absolutamente claro que o uso da matemática noutros campos, incluindo a economia, a estatística, a engenharia, a hidráulica, a balística, a astronomia, a mecânica, a óptica, etc, foi um factor muito importante no seu desenvolvimento, e escrever uma história da matemática sem incluir as suas aplicações seria altamente enganador”.

Amplas sínteses também caracterizam *The Search for Mathematical Roots, 1870-1940* (2000), embora neste caso o assunto seja, como o subtítulo do livro o indica, “lógicas, teorias dos conjuntos, e os fundamentos da matemática de Cantor através de Russell até Gödel”. Outro *tour de force* histórico e um que teve origem na sua investigação com uma bolsa Leverhulme de 1995 a 1997, este estudo traça o desenvolvimento complexo de uma multiplicidade de sistemas de lógica matemática num largo espectro de contextos nacionais – da Itália à Alemanha, a Inglaterra, aos Estados Unidos e à Polónia – bem como os mais amplos contextos filosóficos nos quais estas teorias se desenvolveram.

A sua produção académica até hoje é caracterizada não só por uma investigação profunda das ciências matemáticas nos seus diversos contextos nacionais, mas igualmente pela produção de obras de referência de alta qualidade com o objectivo de unir as diferentes comunidades de historiadores da ciência, historiadores da matemática, e matemáticos. Um organizador e editor dotado, e aparentemente incansável, Grattan-Guinness organizou, e superintendeu as contribuições de cerca de cerca 130 académicos para a obra em dois volumes *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences* (1994) , bem como a colectânea de mil páginas *Landmark Writings in Western Mathematics 1640-1940* (2005) com extenso comentário histórico.

Também trabalhou para a mais ampla comunidade académica como editor do jornal *Annals of Science* de 1974 a 1981, e como o editor fundador de *History and Philosophy of Logic*. Estas, e muitas outras contribuições para o domínio da história da ciência tinham já sido reconhecidas aquando da sua eleição como *membre effectif* da Académie internationale d'histoire des sciences. Hoje estamos satisfeitos por recompensar Ivor Grattan-Guinness com a mais alta honra em história da matemática, o Prémio e a Medalha Kenneth O'May, atribuída pelos seus trabalhos académicos e pela dedicação a este campo ao longo de toda a sua vida.

(Tradução de Luís Saraiva)

Quatro vezes com sorte

I. Grattan-Guinness

Em resposta à atribuição da medalha e prémio Kenneth O. May, Budapeste, 2009

1. Estou muito contente de estar aqui a receber esta medalha, porque estou muito contente de estar aqui! “Teve muita sorte”, disse o cirurgião depois de me ter operado de emergência ao coração no começo de Setembro em 2008. Já tinha tido sintomas moderados ou avisos, e contudo quando tive o meu primeiro ataque cardíaco não o reconheci como tal. Sabia que algo estava errado e tinha de ver o médico, mas desloquei-me na minha bicicleta... A moral desta absurda história é inflexível: tenham melhor conhecimento do vosso corpo físico do que eu tinha do meu, porque, se não o tiverem, e não forem tão felizes quanto eu, então não viverão para o lamentar.

2. Estou muito contente de estar aqui a receber a medalha May. Penso que ele e eu começámos a ter um interesse sério na história da matemática sensivelmente na mesma altura, a meio dos anos 60. Ele abordou um campo que viu que estava em estagnação há muito tempo, mas que possivelmente estava a começar a progredir. Em 1970 estava a pensar em reanimar esta Comissão, e em especial usá-la para lançar um jornal neste campo que não só publicasse artigos mas também servisse como uma fonte para o número crescente de membros consultar. Perguntou a opinião a muitas das figuras mais proeminentes nesta área; e, felizmente para mim, também a pediu a alguns dos jovens que tinham começado a surgir neste campo. A opinião geral era que a ideia era atractiva, mas que o seu sucesso não era óbvio. Por fim, May decidiu-se ir para a frente. Esta decisão levou à escolha do nome do jornal: depois de alguma correspondência internacional erudita sobre o uso do caso ablativo em latim, acordou-se no nome *Historia Mathematica*. O primeiro volume apareceu em 1974, e eu ocupei-me de algumas das suas secções nos primeiros anos.

A intuição de May provou-se correcta: pois 35 anos mais tarde o jornal continua forte, e é um prazer especial para mim ver dois dos meus antigos estudantes de doutoramento na Middlesex University, Niccolo Guicciardini e Adrian Rice, envolvidos hoje na sua administração.

3. Nos anos 60 era extremamente inabitual ver alguém com interesse na investigação em história da matemática. As motivações de May derivavam, em parte, da educação matemática, e em parte, de questões envolvendo bibliografia e recuperação de informação. A minha própria motivação veio inteiramente de uma reacção negativa à educação matemática. Tirei um curso de matemática em três anos na Universidade de Oxford, mas podia igualmente ter feito estudos religiosos; perante mim desfilava uma sequência de deveras impressionantes teorias matemáticas, mas, em primeiro lugar, porque é que as necessitámos estudar? Porque é que eram ensinadas de modo tão claramente insatisfatório? Para além disso, donde é que vieram? Certamente ninguém se sentou numa 5^a feira à tarde e inventou, por exemplo, a teoria dos grupos no modo que nos era ensinado. As 3as feiras de manhã no meu primeiro ano eram especialmente desconcertantes. A aula do curso de cálculo servia-nos inúmeras derivações dos epsilons (“Wall-to-wall epsilontics”) e a teoria dos limites; mas era seguida imediatamente por uma de hidrodinâmica, com cuboides infinitesimais deslizando sob várias condições. Ambos os cursos obviamente utilizavam o cálculo, mas

em formas completamente diferentes. Havia duas espécies de cálculo? Fora sempre assim? Porque é que cada curso não referia o cálculo utilizado pelo outro? Compreendi que estas questões que tinha colocado a mim próprio não eram em si matemáticas, mas de algum modo filosóficas; e não fazia a mínima ideia como as abordar. Então encontrei um filósofo pouco convencional chamado Karl Popper, e fiz um curso de Masters no seu departamento da London School of Economics. A falta de convencionalismo em Popper era perfeito para o que eu queria, na medida que me ia ensinando heresia após heresia:

- A vida é sempre uma resolução de problemas de algum tipo, e está-se sempre a teorizar;
- Até a ciência envolve suposições, e o objectivo aqui deve ser testar rigorosamente as teorias; falsificá-las, ou, pelo menos, criticá-las de algum modo;
- O crescimento do conhecimento é mais importante que qualquer particular estado em que esteja;
- Vamos descobrir os fundamentos do conhecimento, não partimos deles;
- As raízes dos problemas filosóficos estão fora da filosofia;
- Na epistemologia procuram-se não as raízes do conhecimento mas sim as da ignorância;
- O futuro está aberto, não somente subjectivamente mas também objectivamente.

Para além de todas estas heresias, com os cursos de lógica veio um bónus. Ele aí sublinhou como fundamental a distinção entre lógica e metalógica, e de facto entre teoria e metateoria em geral. Cada um devia pensar explicitamente em termos de diferentes níveis. Popper quase não disse uma palavra sobre matemática; mas tinha-me equipado fortemente com meios para poder abordar as questões posteriores aos meus estudos religiosos. De facto, haviam agora dois contextos: não só a história da matemática (onde escolhi analisar o cálculo, por causa dessas 3as feiras de manhã), mas também a história da lógica. Havia até uma meta-questão de bónus, de grande interesse: porque eram a matemática e a lógica tão diferentes uma da outra? Normalmente não discuto este contexto, uma vez que sei que historiadores de todas as áreas não gostam muito de filosofia: mas eu tenho uma enorme dívida para com Popper, e quero afirmá-la nesta ocasião. Uma

colecção dos meus ensaios em livro, chamado *Routes of Learning*, vai aparecer este ano na John Hopkins University Press, e eu deliberadamente escolhi vários artigos nos quais estas questões são explicitamente tratadas. Tive muita sorte em ter estas percepções logo no início da minha carreira.

4. Um dos conselhos mais sexistas de Popper aos alunos era a conjugação dos imperativos “Encontra um bom problema e encontra uma boa esposa”. Graças ao seu ensino a minha primeira procura foi realizada com êxito, de facto por duas vezes; e enquanto estudante também obedeci à segunda instrução. Estou muito feliz pela Enid poder estar aqui esta tarde, pois ela não só me suportou em todos estes 45 anos, mas também me ajudou em muitos aspectos práticos e de secretariado. Salvar o mundo do pior dactilógrafo do mundo (continuo a sê-lo) só por si merece uma medalha. Tive sorte pela quarta vez.

(Tradução de Luís Saraiva)

TERÁ BUFFON REALMENTE LANÇADO AGULHAS?

Ehrhard Behrends

Mathematisches Institut
Freie Universität Berlin
e-mail: behrends@math.fu-berlin.de

Jorge Buescu

Departamento de Matemática
FCUL & CMAF
e-mail: jbuescu@ptmat.fc.ul.pt

Resumo: O problema da agulha de Buffon permite obter aproximações ao valor de π através da realização de experiências físicas ou computacionais no espírito do Método de Monte Carlo. É muito frequente a atribuição desta ideia ao próprio Buffon. Mostra-se neste artigo que não só não existe qualquer registo histórico neste sentido como é extremamente improvável que Buffon tenha alguma vez considerado uma abordagem experimental ao problema da agulha. Essa concepção errada deriva provavelmente de um mal-entendido histórico que se identifica a partir dos textos originais.

1 A experiência da agulha de Buffon

Georges-Louis Leclerc, Conde de Buffon (1707–1788), é famoso pela seguinte “experiência”:

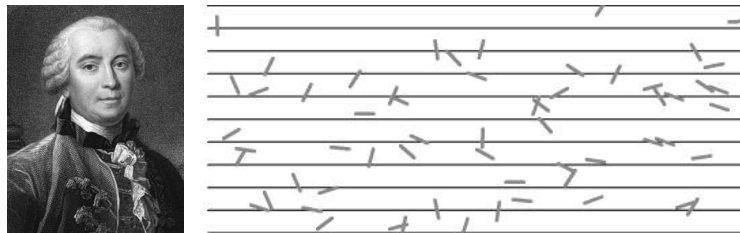
Suponhamos que estamos numa sala cujo chão é constituído por tábuas paralelas. Designemos a distância entre as tábuas por a . Tomemos uma agulha, ou um objecto semelhante, de comprimento $2r$ menor do que a . Esta condição assegura que, se deixarmos cair a agulha no chão, ela atravessará quando muito uma linha que divide tábuas diferentes.

A probabilidade de que esse acontecimento ocorra (isto é, que a agulha, ao cair no chão, não fique totalmente contida no interior de uma única tábua) é então $P = 4r/\pi a$. Esta fórmula contém a constante π – proporcionando-nos, portanto, a possibilidade de calcular esta constante por via “experimental”. Será necessário, evidentemente, atirar a agulha um “grande número de vezes”,

que designaremos por n . Se a agulha atravessar a linha divisória entre duas tábuas k vezes ao fim de n tentativas, então a frequência relativa k/n deverá ser uma boa aproximação de P ; resolvendo a equação anterior em ordem a π obtemos $\pi = 4r/Pa$, pelo que a aproximação obtida conduzirá a um valor aproximado de π . *Voilà!*

É claro que, em vez de agulhas e de um soalho de tábuas, podemos utilizar simplesmente papel e fósforos ou alfinetes; a única restrição é que a distância entre as linhas seja maior do que o comprimento da agulha (ou do objecto correspondente que esteja a ser utilizado).

É geralmente aceite que a experiência da agulha de Buffon representa a primeira aplicação do Método de Monte Carlo da História da Matemática; ou seja, a primeira vez em que se utiliza um método aleatório para resolver, de forma aproximada, um problema computacional. Estes métodos podem ser utilizados com grande sucesso, por exemplo, para calcular integrais definidos em domínios multidimensionais ou para resolver inúmeros problemas de contagem.



Buffon e a “experiência da agulha”.

2 Os factos

A família de Buffon enriqueceu por via de herança e, assim, ainda na sua juventude, Buffon tornou-se financeiramente independente. Como muitos dos seus contemporâneos, deixou-se fascinar pelo acelerado progresso das ciências naturais no século XVIII. Na verdade, os seus interesses eram universais. Os seus estudos conduziram-no a conceber uma enciclopédia em cinquenta volumes, *Histoire naturelle, générale et particulière*, dos quais foram publicados os primeiros trinta e seis. A partir de 1739, foi o administrador dos jardins reais de Paris (“Jardin Royal”, hoje “Jardin des Plantes”). Ainda hoje chegam até nós ecos destas suas funções: é no quinto *arrondissement*, na extremidade sul do Jardin des Plantes, próximo do Campus de Jussieu, que se situa a Rue Buffon.



La Rue Buffon.

Havia planos para esta rua desempenhar um papel importante em Novembro de 2013, como parte de uma acção para a divulgação da Matemática. A Comissão RPA (“Raising Public Awareness”) da European Mathematical Society (EMS) reuniu-se nesse mês em Paris, e surgiu a ideia de “reconstituir” a experiência de Buffon, simbolicamente, na própria Rue Buffon. As condições não podiam ser mais propícias: a Matemática correspondente pode ser facilmente compreendida por um público leigo – não sendo, por outro lado, completamente trivial – e, com contactos apropriados e alguma preparação profissional, seria razoável esperar uma boa cobertura mediática, realizando assim uma acção significativa para a divulgação da Matemática.

No entanto, este projecto acabou por ser cancelado. Quando alguns membros da Comissão entraram em contacto com o historiador da Matemática parisiense Bernard Bru para esclarecer pormenores sobre a experiência da agulha de Buffon, aperceberam-se de que não existem quaisquer registos históricos no sentido de Buffon ter concebido uma ligação entre as suas deduções teóricas e um cálculo aproximado de π , nem no sentido de alguma vez ter realizado, ou sequer proposto, a sua famosa “experiência”. Estamos assim, pois, perante uma interessante manifestação do facto de a verdade histórica e “o conhecimento geralmente aceite” terem por vezes pouca relação entre si. Iremos passar a analisar mais pormenorizadamente as razões desta curiosa discrepância entre factos e idealizações.

Começamos por enumerar os seguintes factos documentalmente comprovados.

1. Em Maio de 1733, Buffon submeteu à Académie Royale des Sciences (da qual se tornaria membro em 1734) um artigo em que, entre outros problemas geométricos, calculava correctamente a probabilidade de um objecto filiforme de comprimento $2r$, atirado de forma aleatória, intersectar uma de várias linhas paralelas separadas por uma distância constante a (com $2r < a$):

Sur un plancher qui n'est formé que de planches égales & parallèles, on jette une Baguette d'une certaine longueur, & qu'on

suppose sans largeur. Quand tombera-t-elle franchement sur une seule planche?¹ ([2], pp. 44).

Depois de deduzir a sua fórmula, Buffon sublinha que ela pode ser utilizada para determinar o valor de a para o qual a probabilidade de o pau cair no interior de uma única tábua é 50%: “Il y a donc une certaine largeur de la planche qui rendroit le pari ou le jeu égal, & c’est ce que M. le Clerc a déterminé par une aire de Cycloïde avec beaucoup d’élégance au jugement de l’Académie”² ([2], pp. 45).

O resumo da apresentação de Buffon à Academia está publicado em [2] na secção de Geometria; o seu manuscrito original parece, contudo, nunca ter sido publicado [7].

2. Mais de quarenta anos depois, Buffon voltou a este problema de forma mais extensa em 1777, no seu “Éssai d’Arithmétique morale”, contido na *Histoire naturelle*. A sua leitura revela claramente que a motivação principal para as suas investigações residia no cálculo de probabilidades para jogadores:

Je suppose que, dans une chambre dont le parquet est simplement divisé par des points parallèles, on jette en l’air une baguette, et que l’un des joueurs parie que la baguette ne croisera aucune des parallèles du parquet, et que l’autre au contraire parie que la baguette croisera quelques-unes des ces parallèles; on demande le sort de ces deux joueurs. (On peut jouer ce jeu sur un damier avec une aiguille à coudre ou une épingle sans tête).³ ([3], pp. 411ff.)

3. No intervalo de mais de 40 anos entre estas duas referências escritas, as únicas que se lhe conhecem sobre esta questão, Buffon realizou de facto uma investigação experimental — não relativa ao problema da agulha, mas

¹Tradução livre: “Sobre um soalho formado por tábuas iguais e paralelas deixa-se cair um pau com um certo comprimento, e que se suporá sem espessura. Quando cairá ele sobre uma única tábua?”

²Tradução livre: “Existe, portanto, uma certa largura das tábuas que faz com que esta aposta, ou jogo, seja justo, e foi isso o que M. LeClerc determinou por meio da área de uma ciclóide, de forma muito elegante na opinião desta Academia”.

³Tradução livre: “Suponho agora que, numa sala cujo soalho se encontra simplesmente dividido por linhas paralelas, se atira um pau ao ar, e um jogador aposta que o pau não cruzará nenhuma das linhas paralelas do soalho, ao passo que o outro, pelo contrário, aposta que o pau cruzará uma dessas linhas paralelas. Pede-se então a probabilidade de sucesso de cada jogador (pode jogar-se este jogo num tabuleiro de damas com uma agulha de coser ou com alfinetes sem cabeça).”

sim àquele que é hoje conhecido como Paradoxo de S. Petersburgo. Sucintamente, este baseia-se num jogo em que se lança repetidamente ao ar uma moeda equilibrada até cair com a face voltada para cima. Se este acontecimento se verificar no k -ésimo lançamento, o jogador ganha 2^k ducados. É fácil verificar que o valor esperado do prémio é infinito, pelo que seria de esperar que o valor justo que um jogador tem de pagar para o jogar fosse, também ele, infinito.

Buffon descreve o jogo em [3], no início da página 394. Na página 399, afirma ter realizado estudos experimentais relacionados com este problema:

J'ai donc fait deux mille quarante-huit expériences sur cette question, c'est-à-dire j'ai joué deux mille quarante-huit fois ce jeu, en faisant jeter la pièce par un enfant.⁴

4. Laplace considerou, no seu tratado de 1812 sobre Teoria de Probabilidades [9], o problema da agulha — não atribuindo a sua origem a Buffon mas referindo explicitamente, tanto quanto se sabe pela primeira vez, a possibilidade de utilizar os cálculos teóricos para determinar uma aproximação experimental para π . De facto, depois de determinar a probabilidade de uma linha ser cortada pela agulha, escreve Laplace:

Si l'on projette un grand nombre de fois ce cylindre, le rapport du nombre de fois où le cylindre rencontrera l'une des divisions du plan au nombre total des projections sera, à très peu près, la valeur de $4r/(a\pi)$, ce qui fera connaître la valeur de la circonférence 2π .⁵ ([9], pp 366).

5. O problema da agulha de Buffon parece ter despertado interesse por experiências reais a partir de meados do século XIX. O primeiro estudo experimental documentado data de 1850 e foi realizado por Rudolf Wolf (1816–1893) [13], então professor na Universidade de Berna. Curiosamente, Wolf tomou conhecimento do resultado por via indirecta, através da enciclopédia *Un million de faits* de Lallane (1843), que não referia a sua origem. Wolf ignorava pois na altura que o problema era devido a Buffon. Augustus de Morgan refere em 1859 ([11], pp. 283-4) que um certo Mr. Ambrose Smith realizou a experiência em 1855 com 3204 lançamentos e um estudante seu

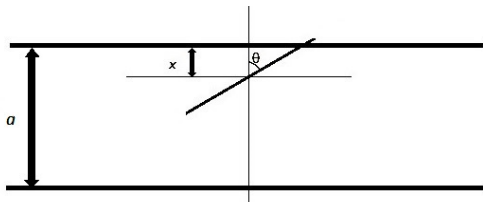
⁴Tradução livre: “Realizei 2048 experiências relativas a esta questão, isto é, joguei este jogo 2048 vezes, utilizando uma criança para atirar a moeda ao ar.”

⁵Tradução livre: “Se se lançar ao ar este cilindro um grande número de vezes, o quociente entre o número total de vezes em que o cilindro corta uma das linhas e o número total de lançamentos terá aproximadamente o valor $4r/a\pi$, o que permitirá determinar o valor da circunferência 2π .”

com 600 lançamentos. O astrónomo americano Asaph Hall (que, curiosamente, atribui o problema a Laplace) descreve [6] um conjunto de experiências com mais de meio milhar de lançamentos cada uma, realizado em 1864 pelo seu amigo Capitão O. C. Fox, imobilizado por um ferimento de guerra.

3 Dos factos à ficção

A demonstração do resultado teórico de Buffon em linguagem moderna é simples. Suponhamos, como até aqui, que a agulha tem comprimento $2r < a$, em que a é a distância entre tábuas. Designemos por x a distância entre o centro da agulha e a tábua mais próxima e por θ o ângulo entre a agulha e a perpendicular à direcção das tábuas.



Demonstração do resultado de Buffon.

É geometricamente claro que as condições para que a agulha intersecte duas tábuas são $x \leq r$ e $\cos \theta \leq \frac{x}{r}$. Integrando sobre os possíveis valores de x , obtemos o resultado de Buffon:

$$P = \frac{2}{a} \int_0^r \frac{2}{\pi} \arccos\left(\frac{x}{r}\right) dx = \frac{4r}{\pi a}.$$

Como já referido e admirado por Fontenelle, o método de Buffon não parece ter sido este mas o de calcular a área por baixo de um troço de cicloide [7].

Quanto aos dados obtidos de forma experimental, a análise é mais subtil. A primeira pergunta a fazer é a seguinte: qual a precisão que podemos esperar de experiências deste tipo? A teoria afirma que o melhor que se pode obter são resultados do seguinte tipo. Se lançarmos a agulha n vezes e ela cruzar uma linha k vezes, utilizando a razão k/n para calcular uma aproximação a π , então com uma certa probabilidade p o resultado estará numa certa vizinhança ϵ de π . Podemos então escolher um valor de p próximo de 1 e um valor de ϵ (pequeno), obtendo majorações para o erro cometido utilizando, por exemplo, a desigualdade de Chebyshev. Infelizmente, para valores de p razoavelmente elevados e de ϵ não demasiado grandes, os cálculos revelam que o valor de n é astronomicamente elevado e

a convergência extraordinariamente lenta. O método da agulha de Buffon não é, pois, adequado para obter informação sobre os algarismos de π .

Vale a pena salientar, a este propósito, os resultados das experiências relatadas em 1901 por Lazzarini, que afirmou, após ter efectuado uma experiência com 408 lançamentos, obter uma aproximação para o valor de π correcta até à sexta casa decimal ([8], p. 120). Artigos recentes de Gridgeman [5] e Badger [1] contrariam esta afirmação, classificando-a como extraordinariamente improvável e atribuindo-a a uma presumível manipulação dos dados.

Nos dias de hoje, evidentemente, a experiência da agulha de Buffon pode ser muito facilmente simulada por computador, sem necessidade de experiências físicas, existindo até inúmeras aplicações para o efeito disponíveis na Web.

Em notável contraste com o registo histórico, subsiste na comunidade matemática uma impressão generalizada de que Buffon teria não apenas considerado a possibilidade de determinar uma aproximação ao valor de π por meio de uma “experiência” como, de facto, a teria mesmo chegado a realizar. Descrevem-se a seguir alguns exemplos concretos dessa impressão.

1. O problema de Buffon é frequentemente tratado em livros de texto sobre Probabilidades e Métodos Estocásticos. Em livros a este respeito tanto em inglês como em alemão, o primeiro autor não encontrou um único em que transpareça a mais pequena dúvida sobre a afirmação de que “Buffon desejava calcular uma aproximação a π com a sua experiência” (esta observação é, infelizmente, também aplicável ao livro do primeiro autor *Elementare Stochastik*, Springer Spektrum, 2012).

2. Estes autores de livros de texto encontram-se em boa companhia: mesmo em livros sobre História das Probabilidades se afirma, sem citar quaisquer fontes, que Buffon realizou de facto estas experiências. Eis dois exemplos:

- “It was originally performed with a needle” ([8], p. 75).
- “Many investigators (including Buffon) used this result for the experimental determination of π ” ([10], p. 120).

Muitos outros livros de História das Probabilidades são omissos sobre a ligação de Buffon à aproximação experimental de π , deixando a questão totalmente em aberto.

De acordo com Bernard Bru, toda esta situação resulta de um mal-entendido histórico. As experiências efectivamente realizadas e descritas por Buffon sobre o Paradoxo de S. Petersburgo terão sido, com o passar do tempo, erradamente extrapoladas como abrangendo *também* experiências relativas à aproximação de π através do problema da agulha. A partir de

certa altura estes “factos” foram sendo acriticamente repetidos, sem verificação das fontes originais.

3. A Internet não é grande ajuda nesta questão. Nas páginas do Mac Tutor History of Mathematics (<http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/history/>), que os autores visitam frequentemente e têm em elevada consideração, afirma-se o seguinte sobre Buffon: “His most notable contribution to mathematics was a probability experiment which he carried out calculating π by throwing sticks over his shoulder onto a tiled floor and counting the number of times the sticks fell across the lines between the tiles.”

Há alguns anos, a situação descrita pelo Mac Tutor era ainda mais curiosa: afirmava-se que Buffon teria lançado, não paus (“sticks”), mas pães (“white loaves of bread”). Não é necessária muita imaginação para compreender o aparecimento deste erro. O termo “baguette” utilizado por Buffon nos seus textos originais foi interpretado, na tradução para o inglês, como sendo relativo ao familiar pão francês de forma alongada (*la baguette de pain*). No entanto, “la baguette” tem vários significados possíveis em francês, incluindo simplesmente “pau”, que faz consideravelmente mais sentido (e ainda mais se considerarmos que o próprio Buffon, como acima notado, sugeria substituí-lo por uma agulha ou um alfinete sem cabeça). Na altura, o primeiro autor notificou o administrador do Mac Tutor a este propósito e, pouco depois, o erro foi corrigido.

4. Não deixa de ser interessante verificar que este curioso erro de tradução parece, contudo, ter integrado parte do folclore em torno da hipotética experiência de Buffon. Ed Waymire afirma, por exemplo, a propósito de uma generalização do resultado de Buffon ([15], p. 550):

- (um colega) “(...) was wondering if I knew what would happen if Buffon had tossed a noodle in place of a needle (actually Buffon tossed baguettes)”.

Vale a pena observar que a “experiência” de Buffon pode ser generalizada em vários sentidos. Eis alguns exemplos:

- O que acontece se o comprimento da agulha for maior do que a distância entre as tábuas? Esta questão foi analisada e resolvida por Laplace em [9]. Para abordagens mais recentes, veja-se por exemplo Diaconis [4]).
- Podem substituir-se as agulhas por superfícies bidimensionais, como por exemplo bases de copos? É possível, evidentemente, deduzir fórmulas para a probabilidade, mas o facto de π ocorrer ou não na fórmula depende da geometria da superfície. Assim, por exemplo, bases quadradas são adequadas para calcular aproximações para π , ao passo que bases circulares não o são.

- Como se altera a situação se substituirmos a agulha por um segmento curvo no plano? A este propósito, consulte-se por exemplo Ramaley [12] ou Waymire [15].

4 Conclusão

Em conclusão, podemos afirmar que Buffon formulou e resolveu matematicamente o célebre problema da agulha. Por outro lado, não existe qualquer registo histórico de que Buffon alguma vez tenha realizado experiências relativas a este problema; pelo contrário, o contexto e o desenvolvimento posteriores sugerem fortemente que tal nunca tenha ocorrido. Apenas no caso, bastante implausível, de ser descoberta documentação até hoje desconhecida poderia esta hipótese adquirir alguma credibilidade.

Em contrapartida, o problema da agulha de Buffon tem uma extraordinária importância histórica: foi o primeiro problema de um novo território, a Teoria da Probabilidade Geométrica, e nesse sentido rasgou horizontes para novas ideias matemáticas, que ainda hoje frutificam. Klain e Rota afirmam que o resultado de Buffon é “(...) the theorem leading into the heart of Geometric Probability” ([14], p. 3).

Tudo isto confere, assim, uma curiosa dualidade à figura de Buffon. Se, por um lado, parece fora de questão encarar Buffon como um precursor do Método de Monte Carlo *avant la lettre*, o facto de o problema da agulha, que ele formulou e resolveu, marcar de certa forma a fundação da Probabilidade Geométrica é razão suficiente para Buffon merecer a nossa admiração e um lugar na História da Matemática. Recomendamos assim a futuros autores de textos de Probabilidades ou Análise Estocástica que se abstenham de associar Monsieur Buffon ao lançamento físico de paus, agulhas, pedaços de pão ou objectos semelhantes.

Agradecimentos. Os autores estão muito reconhecidos aos seus colegas Bernard Bru (Paris) e Eberhard Knobloch (Berlim) pela sua ajuda em esclarecer as questões mais delicadas do trabalho aqui descrito.

Referências

- [1] L. Badger, Lazzarini’s Lucky Approximation of π . *Math. Mag.* **67** (1994), 2, pp. 83–91.
- [2] Fontenelle, B., Mairan, J., Fouchy, J. e Condorcet, J. (eds.), resumo da comunicação apresentada por Buffon à Académie Royale des Sciences.

- Histoire de l'Académie Royale des Sciences – Année 1733, 43–45. Paris, Imprimerie Royale, 1735.
- [3] G. L. Leclerc de Buffon, Essai d'Arithmétique morale. Histoire naturelle, générale et particulière, Supplément 4, 46-123, 1777.
- [4] P. Diaconis, Buffon's Problem with a Long Needle. *J. of Applied Probability* **13**, 1976, pp. 614–618.
- [5] N. T. Gridgeman, Geometric probability and the number π . *Scripta Math.* **25** (1960), 183–95.
- [6] A. Hall, On an experimental determination of π .
- [7] P. Holgate, Buffon's Cycloid. *Biometrika* **68**, 1981, pp. 712–716.
- [8] A. C. King, C. B. Read, *Pathways to Probability*. 1963.
- [9] P.-S. Laplace, *Théorie Analytique des Probabilités*. 1812. Oeuvres complètes, tome VII. Paris, Gauthier-Villars, 1886.
- [10] L. Maistrov, *Probability Theory: A historical sketch*. 1974.
- [11] Augustus de Morgan, *A budget of paradoxes*. Cosimo Classics, NY, 2007; 1st edition 1872.
- [12] J. F. Ramaley, Buffon's Noodle Problem. *American Mathematical Monthly* **76**, 1969, pp. 916–918.
- [13] H. Riedwyl, Rudolf Wolf's contribution to the Buffon needle problem (an early Monte Carlo experiment) and application of least squares. *The American Statistician* **44** (1990) 44, 2, 138–139.
- [14] D. Klain, G.-C. Rota, *Introduction to Geometric Probability*. Lezione Lincee, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [15] Ed Waymire, Buffon noodles. *Amer. Math. Monthly* **101** (1994), 6, 550–559.

O presente artigo é uma versão revista e ampliada de um outro a publicar em *Newsletter of the European Mathematical Society*.

Problemas

Editor:
Jorge Nuno Silva

NOTAS SOBRE O PROBLEMA ANTERIOR E HARRY POTTER VAI ÀS COMPRAS

Jorge Nuno Silva

Os leitores são convidados a enviar, para eventual publicação, soluções, comentários, propostas de problemas, etc. Essa correspondência deve ser enviada para a SPM, ao cuidado do editor desta secção. Há livros da Gradiva para sortear entre as soluções recebidas em cada número.

Relembremos o problema do número anterior.

Como aumentar os seus rublos

Vladimir Arnold é autor de um famoso livro de problemas de nível avançado, *Arnold's Problems*, Springer 2004. Inspirado nos seminários que dirigiu em Moscovo nos anos 1960, primeiro, e em Paris após 1990, a obra contém problemas que têm nortado muito trabalho de investigação.

Hoje proponho o primeiro desses problemas. Na sua versão original, Arnold pergunta se é possível, por dobragens, aumentar o perímetro de uma

nota de um rublo. Refraseando: pode, por dobragens sucessivas a partir de um rectângulo, obter-se um polígono de maior perímetro?

O conceito de dobragem, no nosso contexto, diz respeito a uma linha recta que intersecte a figura original.

A pergunta pode enunciar-se para um polígono geral, não necessariamente convexo. Por exemplo, para o “rectângulo defectivo” da figura.



Se considerarmos a dobragem habitual, a resposta é negativa. Se relaxarmos as restrições desta transformação, a resposta deixa de ser simples. Uma discussão das várias possibilidades apareceu num artigo de Ivan Yaschenko (“Make your dollar bigger now!”, *Mathematical Intelligencer* **20** (2), 1998, 38–40).

Harry Potter vai às compras

Harry Potter desloca-se a Hogsmeade, mais precisamente a uma loja em Diagon Alley, com a intenção de comprar uma vassoura, uma boa vassoura para a prática do Quidditch. Harry munuiu-se de quantidade ilimitada de Galleons de ouro, de Sickles de prata e de Knuts de bronze. Relembremos que 1 Galleon = 17 Sickles, 1 Sickle = 29 Knuts.

De quantas formas pode Harry pagar uma vassoura que custa n Sickles usando todas as possíveis combinações de moedas? Seja essa sucessão a_n .

Para $z \in \mathbb{C}$, determine

$$\sum_n a_n z^n \quad \text{e} \quad \lim \frac{a_n}{n^2}.$$

Notícias

SPM comemorou 74 anos no dia 12 de Dezembro

Para celebrar o seu 74.º aniversário, a Sociedade Portuguesa de Matemática realizou um Porto de Honra no dia 12 de Dezembro, no Museu de História Natural e da Ciência da Universidade de Lisboa (MUHNAC), Rua da Escola Politécnica 56/58, Lisboa.

O aniversário da SPM teve como pano de fundo uma homenagem a José Sebastião e Silva, no ano em que se comemora o centenário do seu nascimento. O Museu abriu as portas aos sócios da SPM, e a todos os que quiseram juntar-se a esta dupla celebração. Os participantes foram convidados para um Porto de Honra, no átrio do MUHNAC, como forma de assinalar os 74 anos da SPM.

[Mais em <http://www.spm.pt/arquivo/1292>]

Olimpíadas Portuguesas de Matemática

A primeira eliminatória das Olimpíadas Portuguesas de Matemática (OPM) decorreu a 12 de Novembro em centenas de Escolas de todo o País. As provas foram realizadas por estudantes dos 6.º e 7.º anos (Categoria Júnior), 8.º e 9.º anos (Categoria A) e 10.º, 11.º e 12.º anos (Categoria B). No mesmo dia realizou-se também a prova única das Pré-Olimpíadas (5.º ano).

No dia 14 de Janeiro de 2015 terá lugar a segunda eliminatória da competição, na qual serão apurados a nível regional os 90 estudantes que, entre 19 e 22 de Março, disputarão a final nacional na Escola Secundária Dr. Augusto César da Silva Ferreira, em Rio Maior. Os alunos mais novos terão a oportunidade de pôr à prova os seus dotes matemáticos nas Mini-Olimpíadas, dirigidas aos 3.º e 4.º anos. A prova única realizar-se-á pela primeira vez no mês de Janeiro de 2015.

As OPM são organizadas pela Sociedade Portuguesa de Matemática em parceria com o Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra, com o objetivo de desenvolver o conhecimento da matemática, o treino do raciocínio e o gosto pelos desafios matemáticos. A SPM conta com o apoio do Ministério da Educação e Ciência, do Ciência Viva, da Fundação Calouste Gulbenkian e da Pathena

[Mais em <http://www.spm.pt/olimpiadas/>]

Prémio Pessoa 2014 atribuído a Henrique Leitão

Henrique Leitão foi galardoado com o *Prémio Pessoa 2014*. O Investigador e Historiador de Ciência foi premiado pelo trabalho que tem vindo a desenvolver no campo da Ciência, tendo o júri destacado a exposição “360º - Ciência Descoberta”, realizada na Fundação Calouste Gulbenkian em 2013, e da qual foi Comissário.

Henrique Leitão desenvolve investigação no Centro Interuniversitário de História das Ciências e da Tecnologia, o qual ajudou a fundar em 2003, e leciona na Secção Autónoma de História e Filosofia das Ciências, na Universidade de Lisboa.

[Mais em <http://www.spm.pt/arquivo/1301>]

José Sebastião e Silva (1914-1972)

No âmbito das comemorações do centenário do nascimento de José Sebastião e Silva, figura incontornável do panorama matemático português do século XX, a Universidade de Lisboa, em parceria com outras entidades, apresenta um ciclo de tertúlias dedicado ao Professor. A página dedicada ao centenário do nascimento de José Sebastião e Silva está disponível em <http://www.sebastiaoasilva100anos.org/> A programação resumida das comemorações pode ser consultada em <http://www.spm.pt/arquivo/1287>.

No âmbito destas comemorações, a SPM, em parceria com o Centro de Matemática e Aplicações Fundamentais, recuperou as obras deste grande matemático português, cujos três volumes se encontram agora à venda na Loja SPM. Os títulos estão disponíveis nas instalações da SPM, ou na página da Loja, em <http://www.spm.pt/catalogo/tag/novidades>.

Prémio Pedro Matos e a Matemática nas Artes

Estão abertas as pré-inscrições para o Prémio Pedro Matos, um concurso nacional destinado a estudantes do ensino secundário, que nesta 7.^a edição terá como tema “Matemática nas Artes”. As candidaturas ao concurso podem ser apresentadas individualmente ou em grupo, do qual poderá ainda fazer parte um professor do ensino secundário, enquanto orientador.

A pré-inscrição deverá ser efetuada *online* até 15 de Março de 2015, e a entrega dos trabalhos deverá ocorrer até dia 27 de Maio de 2015.

[Mais em <http://www.premiopedromatos.ipleiria.pt/>]

6.º Campeonato De Jogos De Matemática Al-Andaluz

Destinado aos alunos dos 1.º, 2.º e 3.º ciclos do Ensino Básico e do Ensino Secundário de todo o Algarve, contando com uma categoria destinada a alunos com necessidades educativas especiais, o Campeonato de Jogos de Matemática Al-Andaluz terá a sua 6.ª edição no actual ano lectivo. Numa primeira fase, as escolas deverão seleccionar os alunos que participarão na final, que decorrerá no dia 20 de Fevereiro de 2015, no Agrupamento de Escolas Poeta António Aleixo, em Portimão.

Nesta edição, o campeonato será organizado pela Delegação Regional Sul e Ilhas da SPM, pelo núcleo do Algarve da Associação de Professores de Matemática e pela Associação Ludus.

Mais em <https://sites.google.com/a/silvessul.com/cjm-al-andaluz/>.

Circo Matemático

Magia, maravilha, entretenimento... e tudo isto usando a Matemática. É assim este circo tão especial. Com cordas, cartas ou dados, um conjunto de artistas mostram como é possível fazer magia recorrendo à Matemática, a Matemagia. Tão divertido quanto pedagógico, numa aplicação da matemática a ambientes divertidos e descontraídos.

Neste ano lectivo, as sessões do circo estão de volta ao Museu Nacional de História Natural e da Ciência. Recebem-se grupos escolares, do 1º, 2º e 3º ciclos do Ensino Básico ou do Ensino Secundário, e público em geral.

Mais em http://www.mnhnc.ulisboa.pt/portal/page?_pageid=418,1603985&_dad=portal&_schema=PORTAL