As ações epistémicas na construção do novo conhecimento matemático e no desenvolvimento do pensamento algébrico

Epistemic actions in the construction of new mathematical knowledge and in the development of algebraic thinking

Corália Maria Santos Pimenta
Agrupamento de Escolas Gualdim Pais, Portugal
coraliapimenta@gmail.com

Manuel Joaquim Saraiva
Universidade da Beira Interior, Portugal
manuels@ubi.pt

Resumo. Neste artigo discute-se como alunos do 5.º ano de escolaridade constroem um novo conhecimento matemático, a partir de conhecimentos adquiridos em aprendizagens anteriores. Na investigação que suporta este artigo, adotaram-se os modelos teórico *AiC* (*Abstraction in Context*) e teórico e metodológico *RBC+C* (*Recognizing*, *Building-with*, *Constructing*, *Consolidation*) para compreender como decorreu o processo de abstração durante a realização de tarefas com natureza algébrica. Analisou-se como os alunos mobilizaram e reorganizaram conhecimentos e procedimentos matemáticos. Pretendeu-se compreender como surgiram e se relacionaram as ações epistémicas do modelo *RBC+C*, as subcategorias de análise definidas no âmbito desta investigação e que influência tiveram essas relações na construção do novo conhecimento matemático. A nova construção matemática surge associada ao desenvolvimento do pensamento algébrico. Seguiu-se uma abordagem qualitativa e concluiu-se que a relação estabelecida entre as ações epistémicas *Recognizing* e *Building-with* foi essencial para o desenvolvimento da nova construção. A manifestação de *Constructing* e de *Consolidation* revelou que alunos deste nível etário conseguem estabelecer com sucesso algumas relações algébricas, compreender e utilizar linguagem simbólica. Estes alunos, ainda sem conhecimento e domínio algébrico, evidenciaram ganhos matemáticos com a resolução de tarefas com as quais se pretendia promover o pensamento algébrico, reforçando, assim, a corrente da *Early Algebra*.
Palavras-chave: abstração; *Building-with*; *Consolidation*; *Constructing*; *pensamento algébrico*; *Recognizing*.

Abstract. This article discusses how 5th grade students construct new mathematical knowledge, from knowledge acquired in previous learning experiences. We adopted the *AiC* (*Abstraction in Context*) theoretical model and the *RBC+C* (*Recognizing*, *Building-with*, *Constructing*, *Consolidation*) theoretical and methodological model in order to understand how the abstraction process occurred during students' completion of algebraic tasks. We focused on how students mobilized and reorganized mathematical knowledge and procedures to solve the tasks. The aim was to understand how the epistemic actions of the *RBC+C* model and the subcategories of analysis defined in the scope of this research emerged, how they related to each other, and what influence those relationships had in the construction of new mathematical knowledge. In this study, new mathematical construction is associated with the development of algebraic thinking. Following a qualitative approach, we concluded that the relationship between the epistemic actions *Recognizing* and *Building-with* was essential for the development of new mathematical knowledge. The manifestation of the *Constructing* and *Consolidation* epistemic actions revealed that students of this age level can successfully establish some algebraic relations, and they can understand and use symbolic language. These students, who still had no significant knowledge in algebra, evidenced mathematical gains with the resolution of tasks, which intended to promote algebraic thinking, thus reinforcing the *Early Algebra* approach.

Keywords: abstraction; *Building-with*; *Consolidation*; *Constructing*; *algebraic thinking*; *Recognizing*.

Recebido em fevereiro de 2018
Aceite para publicação em abril de 2019

Introdução

Compreender de que forma um aluno constrói um novo conhecimento matemático, como ocorre o processo de abstração durante a realização de uma tarefa, e que influência tem o contexto nessa construção, poderá auxiliar o professor na identificação de dificuldades sentidas pelo aluno que, sendo resolvidas, contribuirão certamente para a promoção da sua aprendizagem. Neste estudo, valorizou-se o processo de abstração dos alunos, considerando tratar-se de uma atividade de reorganização vertical de construções concebidas e de novos significados matemáticos atribuídos por eles, que os conduzem a uma nova construção (Dreyfus, Hershkowitz & Schwarz, 2015; Hershkowitz, Schwartz & Dreyfus, 2001). Procurou-se compreender de que forma evoluiu o processo de abstração, analisando-se a relação estabelecida entre as ações epistémicas (categorias) do modelo *RBC+C* (Dreyfus & Kidron, 2006; Dreyfus et al., 2015), fundamentado na perspetiva da abstração em contexto *AiC* (Dreyfus et al., 2001), bem como pelas subcategorias de análise introduzidas no âmbito desta investigação. As ações epistémicas são entendidas como ações mentais que se desenvolvem durante o processo de abstração e que explicam o aparecimento de uma nova construção mais elaborada e complexa (Pimenta, 2016).

Neste estudo trabalhou-se a aritmética com alunos do 5.º ano do ensino básico com o propósito de promover o desenvolvimento do pensamento algébrico, no sentido de indicações apresentadas pelas propostas defensoras da *Early Algebra* (Carraher & Schliemann, 2007; Kaput, 2008; Kieran, 2004; Mason, 2008). Atendemos ao estudo das relações estabelecidas entre expressões algébricas, procurando compreender como os alunos interpretam o sinal de igual e estabelecem relações numéricas (pensamento relacional) (Carpenter, Jacobs, Franke, Levi & Battey, 2007).

Procuraremos sintetizar algumas características relevantes da teoria *AiC*, do modelo *RBC+C* e da sua relação com o processo de abstração em contexto. Destacaremos também alguns aspetos importantes das perspetivas *Early Algebra*, designadamente no que se refere ao desenvolvimento do pensamento algébrico e, em particular, do pensamento relacional. Pretende-se alcançar uma melhor compreensão do conteúdo da tarefa apresentada, do trabalho desenvolvido pelos alunos e das relações estabelecidas entre ações epistémicas do modelo *RBC+C* e respetivas subcategorias. Neste âmbito, procurar-se-á dar resposta às seguintes questões: Na construção do novo conhecimento matemático, quando os alunos identificam e estabelecem relações numéricas, mobilizam conhecimentos e estendem procedimentos aritméticos a valores desconhecidos, que ações epistémicas do modelo *RBC+C* se podem registar? Como é que elas se relacionam entre si? Como podem ser enquadradas no desenvolvimento do pensamento algébrico?

Quadro teórico

A abstração na construção do novo conhecimento matemático e o processo de ascensão do abstrato ao concreto

O interesse em compreender como se verifica o processo de abstração dos alunos durante a aprendizagem de novos conceitos matemáticos conduziu Hershkowitz e Dreyfus (2001) a relacionar tal processo de abstração com a influência do contexto no processo de construção do novo conhecimento matemático – modelo *AiC*. Neste modelo teórico, o processo de abstração ocorre em três fases: (1) *necessidade,* quando o aluno precisa de construir novo(s) conhecimento(s) para resolver determinado problema; (2) *emergência*, quando uma nova construção, mais elaborada e complexa, é construída verticalmente através da reorganização e integração de novas construções e (3) *consolidação,* sempre que as construções são reutilizadas em novos problemas. O contexto contempla aspetos como o da natureza da tarefa proposta aos alunos, o da sua apresentação e resolução e o dos artefactos que os alunos utilizam.

Este modelo fundamenta-se na perspetiva de Davydov (1990), que afirma que quando os alunos iniciam a exploração de um novo conteúdo, eles começam por identificar uma relação geral, por vezes reconhecida em conteúdos já lecionados, construindo uma abstração substantiva do mesmo. De acordo com esta perspetiva, a nova construção não lhes é apresentada inicialmente na forma de produto final, mas sim como um conceito geral e abstrato, pelo que a apreensão do conhecimento teórico-científico parece transitar do abstrato para o concreto. Nesse sentido, a abstração surge no momento da análise durante o trabalho desenvolvido com os objetos e quando o aluno procura compreender o aspeto geral do problema colocado. Como tal, a abstração parece surgir numa fase inicial que se encontra pouco desenvolvida e que se caracteriza pela observação de semelhanças e diferenças e pelo entendimento das relações essenciais à compreensão e à concretização. Por sua vez, o concreto corresponderá à fase final – síntese – resultando da análise e da representação do objeto, dando origem a uma forma consistente e estruturada do processo de abstração.

No que respeita ao objeto, este será trabalhado no sentido de se estabelecerem conexões internas para gerarem o concreto, de modo que o pensamento teórico a ele associado caminhe no sentido da generalização matemática. Ao aprofundarem o seu conhecimento em relação ao objeto, compreendendo como a relação geral identificada se manifesta em situações particulares, os alunos passarão, então, do processo de abstração à generalização das relações identificadas. De acordo com esta perspetiva, para reproduzir o concreto é indispensável uma abstração inicial que ocorre durante o trabalho desenvolvido com os objetos, através da avaliação das suas características e potencialidades.

Davydov (1990) utilizou a expressão ascensão do abstrato ao concreto para transmitir a ideia de que a construção de um novo conhecimento ocorre por transição do concreto empírico para o concreto pensado (o real com atribuições de significado) resultante do processo de abstração. Durante este processo o aluno incorpora ações mentais, capacidades e procedimentos lógicos, que interligados produzem novos conhecimentos. O trabalho desenvolvido com os objetos torna-se, então, progressivamente mais estruturado e consistente até ascender ao concreto (o raciocínio desenvolvido permite obter um melhor conhecimento dos objetos em estudo). Realça-se que ao utilizar a expressão ascensão do abstrato ao concreto, Davydov (1990) pretende dizer que o pensamento se move no plano abstrato (Pimenta, 2016).

Segundo Hershkowitz et al. (2001), durante o processo de abstração são desenvolvidas ações epistémicas que são essenciais para clarificar a fase da emergência do processo de abstração e dão origem ao modelo epistemológico *RBC*, representado pelas ações epistémicas *Recognizing*, *Building-with*, *Constructing*, designadas por R, B e C, às quais é acrescentada a terceira fase do processo de abstração, a *Consolidation*. Para aqueles autores, as ações epistémicas são desenvolvidas pelos alunos, capacitando-os para o desenvolvimento de estratégias que permitam encontrar uma determinada solução e alcançar objetivos, ajudando-os a realizar a sua tarefa matemática. Tais ações são observáveis, o que nos permite ver como o aluno introduziu, comparou e relacionou conteúdos já adquiridos e como ele construiu novos conhecimentos matemáticos. As ações epistémicas, de acordo com as suas características, contribuem para o desenvolvimento do processo de abstração, pois o seu desenvolvimento e as relações que estabelecem entre si são fundamentais durante a reorganização vertical que promove o novo conhecimento matemático. Esta reorganização vertical de construções concebidas e de novos significados matemáticos atribuídos pelos alunos, que os conduzem a uma nova construção, estará presente no desenvolvimento das ações epistémicas do modelo *RBC+C*. Neste, o processo de abstração ocorre no sentido do que é descrito por Davydov (1990) e pode ser identificado através do desenvolvimento das ações epistémicas R, B e C, que retratam a fase de emergência do modelo *AiC*, e de *Consolidation* (respeitante ao segundo C) que se posiciona na terceira fase do processo de abstração. Segundo os autores deste modelo, as ações epistémicas fornecem uma descrição operacional dos processos de abstração, tornando-os observáveis. São, como tal, entendidas como ações externas mobilizadas pelos alunos e que dão visibilidade ao conhecimento que eles possuem e aos raciocínios que desenvolvem durante a resolução de uma atividade matemática. No presente estudo também aceitamos o facto de as ações epistémicas tornarem o raciocínio mental mais simples, rápido e confiável, à semelhança dos resultados obtidos por Kirsh e Maglio (1994).

No modelo *RBC+C*, *Recognizing* refere-se à perceção que o aluno deverá ter quanto à necessidade de adquirir conhecimentos que permitam a resolução de novas situações, ocorrendo quando reconhece uma construção específica como relevante. *Building-with* retrata a necessidade do aluno atingir determinado objetivo, selecionando estratégias, justificando e apresentando soluções, e engloba a integração e combinação de construções reconhecidas, utilizadas para alcançar determinado objetivo, bem como a utilização de procedimentos matemáticos que tenha reconhecido num contexto anterior. *Constructing* é a ação epistémica central da abstração e consiste na combinação e reorganização de construções pelo processo de matematização vertical, para produzir uma nova construção. Esta refere-se à primeira vez em que a nova construção é expressa através da verbalização ou da ação.

No sentido de aprofundar o conhecimento em relação ao desenvolvimento das ações epistémicas do modelo *RBC+C* e esclarecer algumas dúvidas resultantes da aplicação do mesmo, Dreyfus et al. (2015) esclarecem o significado e as diferenças atribuídas às ações *Building-with* e *Constructing*, destacando que a primeira se refere ao processo de construção e a última somente ao resultado desse processo. Relativamente à construção desenvolvida pelos alunos, identificada através de *Constructing*, aqueles autores realçam que ela não terá de ser obrigatoriamente adquirida, podendo, em si própria, ser uma construção frágil e dependente do contexto. Por sua vez, *Consolidation* só surgirá após o desenvolvimento de *Constructing* e de uma forma independente, reforçando a compreensão e consolidação da nova construção. Os estudos desenvolvidos por aqueles autores permitiram também concluir que o desenvolvimento de *Constructing* depende do desenvolvimento de *Recognizing*, e que *Recognizing* e *Building-with* promovem, em conjunto, o seu desenvolvimento. Por sua vez, *Constructing* não representa a soma das ações *Recognizing* e *Building-with*, mas antes a reorganização vertical do conhecimento que delas advém.

Dreyfus e Kidron (2006) também realçam a dificuldade que, por vezes, se tem em identificar o momento específico em que ocorre determinada construção, problema que pode ser explicado através da ocorrência de diferentes construções paralelas. Sugerem, por isso, a realização de estudos que permitam identificar a relação estabelecida entre as diferentes ações epistémicas do modelo, sugestão que permite realçar a pertinência da presente investigação. Os autores do presente artigo entendem que a definição de subcategorias para as ações epistémicas, à semelhança dos estudos realizados por Dreyfus e Kidron (2006) e Dreyfus et al. (2015), poderá ajudar a compreender melhor as relações estabelecidas entre as diferentes ações epistémicas. Foi com este propósito que foram definidas as subcategorias de *Recognizing*, *Building-with* e

Constructing (ver capítulo da Metodologia), pretendendo-se, assim, dar mais uma contribuição para um melhor esclarecimento sobre a forma como os alunos constroem o pensamento algébrico.

Early Algebra e o desenvolvimento do pensamento algébrico

Estudos diversos foram reforçando a ideia de que a origem de algumas das dificuldades identificadas durante o trabalho algébrico poderiam dever-se ao facto de a aritmética e a álgebra serem trabalhadas como áreas distintas (Guimarães, Arcavi, Gómez, Ponte & Silva, 2006) quando, de facto, se constata que a álgebra estará enraizada na aritmética, dependendo do raciocínio aritmético (Drijvers, 2003). A ideia de que "há algo inerentemente aritmético na álgebra e algo inerentemente algébrico na aritmética" (Radford, 2012, p. 2) e de que a aritmética e a álgebra deveriam ser trabalhadas como duas faces da mesma atividade promoveu o interesse em desenvolver o pensamento algébrico dos alunos mais jovens e, em particular, o sentido do número (Ponte, 2006) e do símbolo (Arcavi, 2006). Sugere-se a resolução de tarefas que incentivem a observação de regularidades e propriedades numéricas, a interpretação e utilização de linguagem simbólica, bem como a generalização de relações identificadas.

Relativamente às dificuldades que podem advir da aprendizagem da álgebra, destacamos, por se relacionarem com o presente estudo, as que se devem à exigência da compreensão conceptual e combinação de representações (Kieran, 2004) ou à mudança de significado das letras e símbolos (Schoenfeld, 2005).

O interesse em preparar os alunos mais jovens para uma aprendizagem bem-sucedida da álgebra contribuiu para o surgimento da *Early Algebra*, que propõe a introdução da álgebra desde os primeiros anos do ensino básico, estimulada transversalmente durante o ensino e a aprendizagem das diferentes temáticas contempladas no currículo (Carraher et al., 2007). De acordo com esta perspetiva, os alunos deverão desenvolver o pensamento algébrico não se limitando a memorizar e a reproduzir procedimentos treinados. À medida que foram sendo realizados e publicados trabalhos de investigação nesta área, foram igualmente delineados com maior clareza os seus pressupostos e transmitidas algumas orientações sobre como promover o desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos mais jovens, com idades compreendidas entre os 6 e os 12 anos. A análise prendeu-se, sobretudo, com a forma como os alunos identificavam e construíam relações, conjeturavam, generalizavam, representavam e justificavam raciocínios desenvolvidos (Kieran, Pung, Schifter & Ng, 2016).

Apesar de não existir uma definição universal que caracterize o pensamento algébrico, a generalização surge como uma das suas componentes mais importantes. Mason (2018) considera que a generalização é o núcleo crucial do pensamento algébrico, mesmo quando não se trabalha com notação alfanumérica, podendo ocorrer entre as crianças mais jovens. Por sua vez, Blanton et al. (2018) consideram que o pensamento algébrico vai para além da generalização, englobando também a representação e a justificação, bem como o uso de notação alfanumérica. Segundo estes investigadores, para que a generalização ocorra dever-se-á: (i) recorrer a quantidades indeterminadas e modos idiossincráticos ou específicos, cultural e historicamente evoluídos, para representar/simbolizar quantidades e operações indeterminadas, bem como (ii) lidar com quantidades indeterminadas de maneira analítica.

Radford (2014) caracteriza o trabalho de promoção do desenvolvimento do pensamento algébrico em três pontos fundamentais: (1) *indeterminação*: através da resolução de problemas envolvendo números desconhecidos; (2) *denotação*: ao trabalhar com números indeterminados que podem ser nomeados ou simbolizados de diferentes formas (gestos, palavras, sinais alfanuméricos, entre outros); (3) *analiticidade*: quando as quantidades indeterminadas são tratadas como se fossem números conhecidos.

A *Early Algebra* foi, desta forma, ganhando expressão para ser trabalhada nos primeiros anos do ensino básico, considerando-se vantajoso estimular o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos. Focamos também a nossa atenção no desenvolvimento do pensamento relacional, como forma de promover o pensamento algébrico, destacando-se que esse pode ser estimulado através da capacidade de *olhar* para as expressões ou equações na sua conceção mais ampla, revelando relações numéricas e propriedades (Carpenter, Franke & Levi, 2003). Acrescentamos que, à semelhança de Mestre (2014), também consideramos que algumas características presentes nas tarefas, como por exemplo a variação das relações numéricas, são essenciais para o desenvolvimento do pensamento relacional, pelo que este é contemplado na tarefa selecionada para este artigo.

Opções e procedimentos metodológicos

Adotou-se uma metodologia qualitativa sustentada no paradigma interpretativo (Bogdan & Biklen, 1994), analisando ao pormenor e descrevendo detalhadamente as ações epistémicas do modelo *RBC+C* que se observaram durante o processo de abstração dos alunos, visando compreender como construíram o novo conhecimento matemático.

O artigo que aqui se apresenta decorre de um estudo que foi desenvolvido na sala de aula (Pimenta, 2016), com uma turma de 31 alunos do quinto ano de escolaridade (9 e 10 anos de idade). Estes estavam organizados essencialmente em pares, havendo grupos de três e de quatro alunos. A primeira autora deste artigo era, também, a professora da turma.

Face à necessidade de analisar pormenorizadamente como eram construídos e aplicados os novos conhecimentos e que relação existia entre as diferentes ações epistémicas do modelo *RBC+C*, selecionaram-se dois alunos da turma, aqui identificados como GI e LP, como alvo de uma recolha de dados mais alargada. Eram dois alunos interessados, empenhados e que expunham de forma aberta e clara, oralmente e por escrito, as ideias e os conhecimentos matemáticos, quer adquiridos anteriormente, quer aqueles em construção. Na sala de aula estabeleciam entre si uma relação empática que se traduzia no envolvimento e na partilha de conhecimentos e raciocínios durante a realização das atividades propostas (Pimenta, 2016).

Foram elaboradas oito tarefas de natureza exploratória, enquadradas no normal funcionamento das aulas, assumidas como um desafio, e com uma natureza investigativa, exigindo a interpretação e a comunicação entre professora e alunos, e entre alunos. Na sua elaboração, atenderam-se a características e orientações dadas pela proposta curricular da *Early Algebra*, bem como ao interesse em estimular o desenvolvimento das ações epistémicas do modelo *RBC+C*. Por esse motivo, os desafios propostos nessas tarefas contemplaram a identificação de regularidades, a compreensão de relações, o entendimento de elementos concetuais, a utilização de linguagem simbólica e a resolução de problemas de natureza algébrica. Consideraram-se, também, situações em que o aluno é solicitado a operar com o "desconhecido" e a trabalhar com quantidades indeterminadas como se tratassem de números conhecidos, pretendendo-se, dessa forma, o desenvolvimento do pensamento analítico (Radford, 2012).

A recolha de dados verificou-se em três fases distintas, coincidindo com as diferentes fases de implementação das tarefas: i) apresentação da tarefa pela professora, ii) resoluções dos alunos, e iii) discussões sobre a tarefa, entre os pares de alunos e entre estes e a professora, e a discussão coletiva entre a professora e os alunos. As tarefas foram apresentadas, resolvidas e discutidas na sala de aula e durante a fase de resolução por parte dos alunos. A professora envolveu-se no processo de construção do novo conhecimento matemático, dialogando e incentivando a comunicação oral e escrita e a partilha de conhecimentos, dúvidas, ideias e convicções. Assim, obtiveram-se registos audiovisuais e escritos em cada um desses momentos.

A análise de dados seguiu três fases distintas:

1.ª) Compilação dos registos escritos e transcrições audiovisuais, codificados por [Li], onde i representa a linha correspondente à transcrição, de modo que L20, por exemplo, foi registada num momento posterior a L10;

2.ª) Clarificação das categorias consideradas e construção das subcategorias, por categoria, pelas quais foram distribuídos os dados empíricos, tendo sido utilizado, como auxiliar, o *software* ATLAS.ti. Nesta fase foi-se fazendo alguma reflexão. Este trabalho foi realizado tarefa a tarefa. Assim, constituíram-se oito blocos de dados, um por tarefa e com a mesma estrutura.

3.ª) Leitura transversal dos resultados registados em cada categoria ao longo de cada tarefa trabalhada, permitindo responder às questões de investigação e enquadrá-las na teoria que a suportou.

Neste artigo, iremos reportar-nos essencialmente à análise da tarefa "Relação de Equilíbrio", que corresponde à última das oito tarefas trabalhadas no estudo mais alargado (Pimenta, 2016).

As categorias e subcategorias de análise resultaram dos pressupostos teóricos, da natureza do pensamento algébrico, bem como das questões de investigação colocadas (Quadro 1). As categorias definidas dizem respeito às ações epistémicas do modelo *RBC+C* adotado (Dreyfus & Kidron, 2006; Dreyfus et al., 2015), tendo adquirido igual denominação: *Recognizing*, *Building-with*, *Constructing* e *Consolidation*. É de notar que a categoria *Consolidation* é interpretada como sendo a aplicação pelos alunos de uma construção recente, ou seja, a aplicação de uma construção adquirida com a resolução das tarefas trabalhadas anteriormente. As subcategorias surgiram como fruto teórico da compreensão das ações epistémicas enquadradas no desenvolvimento do pensamento algébrico, ou seja, resultaram do ajustamento da definição de cada ação epistémica à realidade do estudo apresentado. No Quadro 1 apresentamos as categorias e subcategorias de análise definidas para o presente estudo, bem como os respetivos descritores.

Quadro 1. Categorias e subcategorias de análise e respetivos descritores

Categorias	Subcategorias
Recognizing	*Interpretação*: interpretam dados enunciados, identificam regularidades e relações, reconhecendo essas perceções.
	Pré-requisitos: reconhecem a utilidade de construções adquiridas, selecionando-as para darem resposta. As construções podem resultar de conhecimentos concebidos em aprendizagens anteriores ou da tarefa que estão a resolver. *Consolidation* pode manifestar-se através da seleção de pré-requisitos, quando estes se relacionam com construções alcançadas pela resolução das tarefas anteriores.
	Regularidades: identificam regularidades nos enunciados, tabelas, padrões ou semelhanças.
Building-with	*Estratégias*: mobilizam e aplicam estratégias para representar os dados, o raciocínio, para justificá-lo e obter soluções.
	Soluções: obtêm soluções que dão resposta às solicitações, permitem a obtenção de soluções intermédias, aproximando-os da nova construção.
	Justificação: justificam verbalmente, por escrito, através de desenhos ou esquemas, o raciocínio desenvolvido e as soluções apresentadas.
	Aplicação de construções: integram e combinam uma construção adquirida para atingir determinado objetivo, mesmo que venham a revelar-se "falsos começos" ou "becos sem saída". Quando as construções aplicadas se referem a construções obtidas nas tarefas anteriores estamos na presença de *Consolidation.*
Constructing	*Reorganização*: reorganizam dados, soluções, ideias e construções adquiridas anteriormente para conceberem a nova construção e atingirem o objetivo da tarefa.
	Generalização: generalizam regularidades, estendem relações, propriedades e procedimentos aritméticos a algébricos e resolvem problemas de natureza algébrica.
Consolidation	Processo que ocorre quando os alunos aplicam uma construção recente que pode manifestar-se durante a resolução das tarefas. Este processo segue-se a *Constructing* e está ligado a sucessivos processos de construção promovidos pela sequência de tarefas.

A tarefa Relação de Equilíbrio

Com a tarefa Relação de Equilíbrio (Figura 1) procura-se que os alunos interpretem dados constantes numa balança e no enunciado do problema, incentivando-se a interpretação e utilização de linguagem simbólica e, em particular, do sinal de igual.

1. Observa a figura seguinte, onde se encontra representada uma balança de pratos (cuja massa é desprezável), quatro bonecas iguais (com igual massa) e uma massa marcada com 20 gramas.

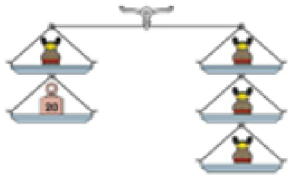


Figura 1. Enunciado da tarefa Relação de Equilíbrio

Pretende-se promover nos alunos a interpretação do significado matemático presente na balança e estabelecer relações com significado, associando o equilíbrio da balança ao sinal de igual. Na Figura 2, a massa atribuída a cada boneca representa um valor desconhecido para o aluno (representado pela letra b), procurando-se constatar se *Consolidation*, respeitante às construções adquiridas nas tarefas aplicadas anteriormente, se manifesta, ou não.

Considera b a massa de cada boneca, expressa em gramas, e dá resposta às questões que se seguem:

a. Representa, através de uma expressão matemática, a massa dos objetos colocados nos pratos do lado esquerdo da balança.
b. Representa, por uma expressão matemática, a massa dos objetos colocados nos pratos do lado direito da balança.

Figura 2. Questões 1.a. e 1.b. da tarefa Relação de Equilíbrio

Os alunos são motivados a utilizar linguagem simbólica para representar os dados. Espera-se, através das duas primeiras questões, que evidenciem habilidade para representar a massa dos objetos, utilizando a expressão $b + 20$ para se referirem à massa constante no lado esquerdo e a expressão $b + b + b$, ou outra equivalente (como $3 \times b$), para representarem a massa colocada no lado direito da balança. Na Figura 3 surgem as restantes questões da tarefa, através das quais se procurarão identificar relações numéricas que os alunos poderão estabelecer.

c. O que acontece à balança se for retirada uma boneca de um dos pratos?
d. O que acontece à balança se for acrescentada uma massa marcada com 2 gramas a um prato da balança, em ambos os lados?

Figura 3. Questões 1.c. e 1.d. da tarefa Relação de Equilíbrio

Através das alíneas c) e d) procura-se focar a atenção dos alunos para situações em que a balança está em equilíbrio/desequilíbrio, para que adquiram maior compreensão acerca das relações numéricas. Espera-se que na alínea c) indiquem que a balança fica em situação de desequilíbrio, caso se retire uma boneca do lado direito. Em relação à questão colocada na alínea d), espera-se que compreendam que a igualdade mantém-se, expressando-a em linguagem matemática. Na última questão, apresentada na Figura 4, solicita-se a atribuição de valor numérico à massa da boneca, que consideramos ser a construção pretendida para esta tarefa. Interessa analisar que competências mobilizarão os alunos para resolver esta equação e que significado atribuem à letra *b*.

e. Qual é a massa de cada boneca?

Figura 4. Questão 1.e. da tarefa Relação de Equilíbrio

Pretende-se, recorrendo ao equilíbrio estabelecido e à representação pictórica, compreender como os alunos determinam o valor da massa e utilizam linguagem matemática simbólica. Através da questão 2, presente na Figura 5, procura-se favorecer a presença da ação epistémica *Consolidation*.

2. Analisa as balanças que se seguem e, considerando que a massa dos pratos das balanças é desprezável, determina a massa dos objetos (bonecos – crocodilo e urso, frascos de igual massa) representados.

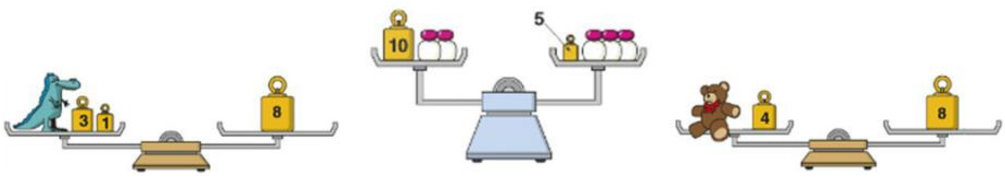


Figura 5. Questão 2 da tarefa Relação de Equilíbrio

O Modelo *RBC+C* em ação

Nas subsecções que se seguem procuraremos evidenciar de que forma se desenvolveu o processo de abstração dos alunos, analisando-se com maior pormenor o desenvolvimento das categorias e subcategorias de análise.

Ação de *Recognizing*

Na fase inicial de análise dos resultados recolhidos procurou-se identificar a presença da ação epistémica *Recognizing*, através do trabalho desenvolvido pelos alunos aquando da leitura dos enunciados e da interpretação do conteúdo matemático presente na balança. Entendia-se que, nesta fase inicial do processo de abstração, seria possível identificar a presença das subcategorias de análise definidas e percecionar que competências matemáticas os alunos reconheceriam como importantes para resolver o desafio que lhe estava a ser colocado.

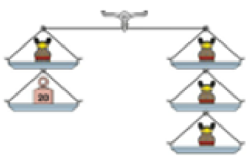
O desempenho demonstrado pelos alunos durante a realização da tarefa permitiu identificar em que momentos surgiram as categorias de análise definidas, como se relacionaram entre si, e que influência tiveram no desenvolvimento da ação epistémica *Recognizing.*

Interpretação no desenvolvimento da ação epistémica Recognizing

O desempenho evidenciado pelos alunos durante a fase inicial de leitura da tarefa e o diálogo que estabeleceram entre si permitiram identificar, como se poderá constatar através do Quadro 2, que a presença da subcategoria *Interpretação* ocorreu na fase inicial do processo de abstração e que os alunos reconheceram construções adquiridas em contextos anteriores como importantes para desenvolverem a nova construção.

Realça-se que o quadro contém apenas parte de alguns dos excertos que foram analisados pormenorizadamente durante o estudo, pretendendo-se, ainda assim, transmitir com a melhor clareza possível, como se manifestou a subcategoria *Interpretação*.

Quadro 2. Interpretação durante *Recognizing*

<table>
<tr><td rowspan="4"></td><td>L14 - GI [… referindo-se à questão 1.a), aos dados do enunciado escrito e aos que figuravam na balança]: Temos 20 gramas mais uma boneca que “pesa” b…</td></tr>
<tr><td>L17 - GI [… referindo-se à questão 1.b) e aos dados que figuravam na tabela]: Temos agora do lado […] direito três bonecas.</td></tr>
<tr><td>L23 - LP [referindo-se à questão 1c)]: […] Se tirares esta boneca aqui [apontou para a boneca do segundo prato do lado esquerdo da balança] este lado [apontou para os pratos da direita] vem para baixo [simulou a situação com o dedo].
L26 - GI: Esse lado, um dos lados fica mais “pesado”, o que acontece à balança é que fica desequilibrada.</td></tr>
<tr><td>L73 - GI: Neste prato [apontando para o prato do lado esquerdo] temos oito gramas também [referindo-se à primeira balança].</td></tr>
</table>

Observa-se que a subcategoria *Interpretação* se manifestou na fase inicial do processo de abstração, durante a leitura dos enunciados, quando os alunos procuravam compreender o que lhes estava a ser pedido [L14, L17]. É de realçar o facto de terem conseguido, através da interpretação da balança, extrair informação matemática que, posteriormente, lhes permitiu dar início à resolução da tarefa [L23]. Por outro lado, constatou-se que a subcategoria *Interpretação* não se expressou apenas através do diálogo verbal estabelecido entre os alunos, mas também através da expressão gestual que eles foram estabelecendo e que, de algum modo, contribuiu para o desenvolvimento do raciocínio.

Nem sempre esta subcategoria promove de uma forma isolada o desenvolvimento da ação epistémica *Recognizing*. Nas subsecções que se seguem vai ser possível identificar o seu envolvimento com outras subcategorias de *Recognizing*.

Interpretação na seleção de Pré-requisitos

A manifestação da subcategoria *Interpretação* foi, durante o processo de leitura e análise do conteúdo matemático presente no enunciado e tabela, acompanhado pelo desenvolvimento da subcategoria *Pré-requisitos*. Ao abstraírem sobre os dados, os alunos mobilizaram conhecimentos adquiridos na resolução das tarefas anteriores, bem como em outras aprendizagens, para darem início à resolução do desafio que lhes foi colocado. Na Figura 6, pretende-se exemplificar uma situação em que *Pré-requisitos* resultou do desenvolvimento de *Interpretação*. Note-se que a L14 do Quadro 2 se refere à interpretação dos dados constantes na balança.

L15 – […] GI escreveu $20 + 1b$ de imediato e sem evidenciar qualquer receio quanto à presença da letra b. [LP também não estranhou a representação de GI].

Figura 6. *Pré-requisitos* durante *Recognizing*

Na Figura 6 constatamos que o aluno GI mobilizou conhecimentos adquiridos em aprendizagens anteriores, tais como a adição e a linguagem simbólica (a interpretação e utilização de linguagem simbólica corresponde a construções alcançadas com a resolução de tarefas aplicadas durante este estudo), para expressar matematicamente o seu raciocínio. Nesta situação particular, observamos que o desenvolvimento da *Interpretação* favoreceu a seleção de *Pré-requisitos* adequados à resolução do desafio e que ambas as subcategorias caracterizaram o desenvolvimento da ação epistémica *Recognizing*. Por sua vez, ao interpretar o significado atribuído à letra *b*, reconhecendo tratar-se de um valor numérico indeterminado, o aluno evidencia o desenvolvimento da subcategoria *Aplicação de uma construção recente*, revelando a presença da ação epistémica *Consolidation*.

Relativamente ao desempenho evidenciado pelos alunos na fase inicial do processo de abstração, quando interpretavam e selecionavam os dados enunciados, realça-se a representação de uma nova balança, desenhada por eles, e que foram utilizando para expressar o seu raciocínio.

A representação pictórica desenhada pelos alunos transmite não só a capacidade de interpretação do significado matemático presente no enunciado das questões, como também originalidade na forma de representar os dados enunciados e os conhecimentos matemáticos mobilizados (Figura 7). Realça-se a presença do símbolo "=", situado na haste da balança, assemelhando-se ao "equilíbrio" presente na resolução de uma equação matemática. A notação "+2" evidencia compreensão do conteúdo matemático expresso na questão "o que acontece à balança se for acrescentada uma massa marcada com 2 gramas a um prato da balança, em ambos os lados?”, para além de capacidade para representar a adição de uma massa de 2g a cada lado da balança.

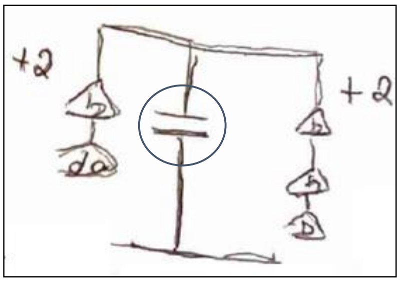
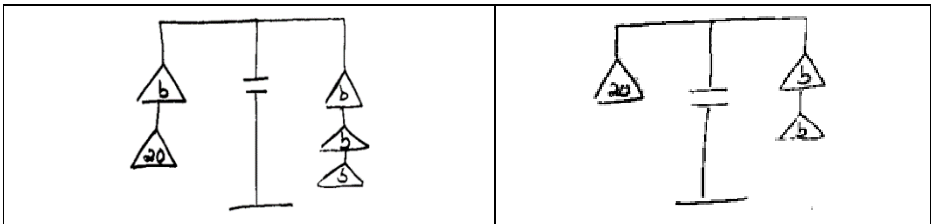


Figura 7. “Equação” pictórica

Regularidades no desenvolvimento de Recognizing

A abstração desenvolvida na fase inicial da resolução da tarefa foi, gradualmente, transitando de uma relação geral, correspondente à interpretação e mobilização de pré-requisitos, para uma fase mais consistente, em que os alunos “experimentaram” procedimentos que os conduzisse à resolução do desafio. Nesse sentido, os alunos procuraram atribuir um valor numérico à massa da boneca, “desenhando” uma nova balança para representarem as relações numéricas que iam estabelecendo. A segunda balança, representada na Figura 8, corresponde à representação pictórica desenhada pelos alunos.



L42- LP [Olhando para o desenho do colega, proferiu, apontando para as “bonecas”…]. Estas duas “bonecas” [apontando] “pesam” vinte gramas...

Figura 8. Relações estabelecidas durante *Recognizing*

Constatamos que os alunos exploraram a representação pictórica (balança), analisando o todo e identificando a parte comum, conseguindo, por isso, constatar que a massa das duas bonecas seria igual a 20 gramas. A subcategoria *Regularidades* esteve presente no equilíbrio observado nas duas representações, pois os alunos compreenderam que ao retirarem igual massa a ambos os pratos da balança ela manteria o equilíbrio. Também é possível observar a relação estabelecida entre o símbolo pictórico (números de bonecas) e o respetivo valor numérico (massa de cada boneca), de modo que para eles, retirar duas bonecas (símbolo pictórico) corresponderia ao que em matemática representaria *subtrair a ambos os membros de uma equação a mesma quantidade*, ou seja, a aplicação do *princípio de equivalência da adição* na resolução de equações. Com efeito, pode-se considerar que os alunos iniciaram a resolução de uma equação pictórica, à semelhança do que é descrito na metodologia *pictoral equations*, explorada nos currículos de Singapura com o objetivo de estimular o desenvolvimento do pensamento algébrico. Destaca-se, ainda, que a representação dos alunos realçou a presença da subcategoria *Regularidades* e favoreceu, não só o desenvolvimento da ação epistémica *Recognizing,* mas também a criação de um processo de resolução para o desafio colocado. Por outro lado, constatou-se que o processo de abstração dos alunos foi caminhando de uma forma mais geral para outra mais particular, no sentido do que foi descrito por Davydov (1990).

Ação de *Building-with*

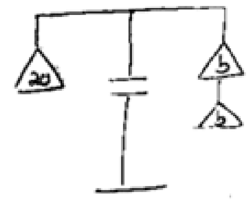
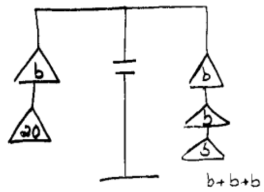
Estratégias e Aplicação de construções no desenvolvimento de Building-with

O desenvolvimento da ação *Building-with* poderá traduzir-se na aplicação de estratégias e conhecimentos, reconhecidos como úteis para a resolução do desafio e identificados durante o desenvolvimento da ação epistémica *Recognizing*, que contribuam para a apresentação de soluções intermédias e que possam justificar os raciocínios desenvolvidos. Entenda-se que, em *Building-with,* os alunos podem representar dados que interpretaram, aplicar pré-requisitos que mobilizaram e estenderem regularidades observadas durante o desenvolvimento da ação *Recognizing*. Assim, a ação *Building-with* resulta do desenvolvimento da ação *Recognizing* e, em particular, das subcategorias de análise *Interpretação*, *Pré-requisitos* e *Regularidades*.

A construção de uma nova balança com informação mais precisa transmite a forma como os alunos interpretaram os dados e aplicaram os conhecimentos adquiridos. No sentido de transmitir com maior clareza de que forma se manifestaram as subcategorias de análise correspondentes à ação epistémica *Building-with*, reunimos alguns dos resultados registados pelos alunos nos Quadros 3a e 3b.

Estes dados revelam que a seleção de *Estratégias* adequadas e a *Aplicação de construções* adquiridas contribuíram para o desenvolvimento do raciocínio dos alunos, favorecendo a *Justificação* de raciocínios e a obtenção de *Soluções* intermédias que os aproximaram da construção pretendida. A Figura 9 ilustra a forma como os alunos utilizaram representações pictóricas para darem resposta à questão "*O que acontece à balança se for acrescentada uma massa marcada com 2 gramas a um prato da balança, em ambos os lados?*" e ajuda a compreender melhor a influência que tiveram as subcategorias *Estratégias* e *Aplicações de construções* no desenvolvimento da ação *Building-with*.

Quadro 3a. Manifestação das subcategorias da ação epistémica *Building-with* nas questões a e b

<table>
<tr><th colspan="2">a. Representa, através de uma expressão matemática, a massa dos objetos colocados nos pratos do lado esquerdo da balança.</th></tr>
<tr><td>L14 - GI [… referindo-se à questão 1.a), aos dados do enunciado escrito e aos que figuravam na balança]: Temos 20 gramas mais uma boneca que “pesa” b. [LP acenou, mostrando concordar] [GI escreveu $20 + 1b$, de imediato, e sem evidenciar qualquer receio quanto à presença da letra b].</td><td>
</td></tr>
<tr><th colspan="2">b. Representa, por uma expressão matemática, a massa dos objetos colocados nos pratos do lado direito da balança.</th></tr>
<tr><td>L17 - GI [… referindo-se à questão 1.b) e aos dados que figuravam na tabela]: Temos agora do lado […] direito três bonecas. O seu “peso” é:
GI e LP: três bonecas.
GI: [mostrando agilidade na exposição das suas ideias]: Podemos escrever $b + b + b$. [LP aceitou com naturalidade…].</td><td>
</td></tr>
<tr><th colspan="2">Subcategorias evidenciadas</th></tr>
<tr><td>Estratégias</td><td>Exploraram os dados matemáticos presentes na primeira balança;
Traduziram a informação numérica e pictórica em linguagem algébrica;</td></tr>
<tr><td>Aplicação de construções</td><td>Interpretaram e utilizaram linguagem simbólica (construções adquiridas) para representarem o seu raciocínio.</td></tr>
<tr><td>Soluções</td><td>Apresentaram soluções intermédias, as expressões algébricas $b + 20$ e $b + b + b$ que, posteriormente, simplificaram estabelecendo a igualdade $b + b + b = 3b$.</td></tr>
<tr><td>Justificação</td><td>A justificação dos raciocínios e das opções tomadas esteve presente no diálogo, nas representações pictóricas e nas expressões algébricas apresentadas.</td></tr>
</table>

Quadro 3b. Manifestação das subcategorias da ação epistémica *Building-with* nas questões c e d

<table>
<tr><th colspan="2">c. O que acontece à balança se for retirada uma boneca de um dos lados do prato?</th></tr>
<tr><td colspan="2">L23 - LP: […] Se tirares esta boneca aqui [apontou para a boneca do segundo prato do lado esquerdo…] este lado [apontou para os pratos da direita] vem para baixo [simulou a situação com o dedo].
L26 - GI: […] um dos lados fica mais pesado, o que acontece à balança é que fica desequilibrada. […] GI [escreveu: Se retirarmos 1b de um dos pratos a balança ficará desequilibrada].</td></tr>
<tr><th colspan="2">d. O que acontece à balança se for acrescentada uma massa marcada com 2 gramas a um prato da balança, em ambos os lados?</th></tr>
<tr><td colspan="2">L30 – GI: […] Nesta colocamos massas de dois gramas […] [começou a desenhar uma balança].
LP [interrompendo]: Fica igual, colocas dois gramas de cada lado.
GI: Vou desenhar para explicar melhor […]. Destacou, também em cada um dos lados, a presença de mais dois gramas, escrevendo +2. (…) acrescentou,…, em linguagem natural, a resposta à questão […].</td></tr>
<tr><th colspan="2">Subcategorias evidenciadas</th></tr>
<tr><td>Estratégias</td><td>Estabeleceram uma relação entre os dados presentes nas balanças e as quantidades a retirar e a colocar em cada um dos lados da balança;
Desenharam uma nova balança para representar os dados;</td></tr>
<tr><td>Aplicação de construções</td><td>Associaram o equilíbrio da balança à igualdade das massas a retirar ou a colocar;
Escreveram em linguagem matemática +2, de modo a representaram a adição de dois gramas a cada lado da balança. Repare-se que este foi o momento em</td></tr>
</table>

	que os alunos aplicaram a interpretação e os conhecimentos reconhecidos durante o desenvolvimento da ação epistémica *Recognizing*; Utilizaram linguagem simbólica para darem resposta à questão.
Soluções	Utilizaram balanças, que aperfeiçoaram, para justificar o seu raciocínio; Apresentaram resposta às questões colocadas.
Justificação	A justificação dos raciocínios e das opções tomadas estiveram presente no diálogo mantido entre os alunos, na representação das balanças e nas soluções apresentadas.

A primeira representação pictórica desenhada pelos alunos (Figura 9) evidencia compreensão dos dados e do equilíbrio existente entre as massas. Revela da parte dos alunos habilidade para integrar conhecimentos adquiridos, pois eles substituíram o equilíbrio representado pictoricamente por uma igualdade entre duas expressões algébricas, fazendo uso de linguagem simbólica. Por sua vez, os alunos utilizaram a letra b para representar o valor numérico indeterminado, associando-o à massa da boneca. Representaram algebricamente as massas presentes nos dois lados da balança, $b + 20$ e $b + b + b$, habilidade que se revelou essencial para o desenvolvimento de *Building-with,* sem a qual a estratégia utilizada – representação pictórica – poderia não ser tão significativa como se veio a revelar.

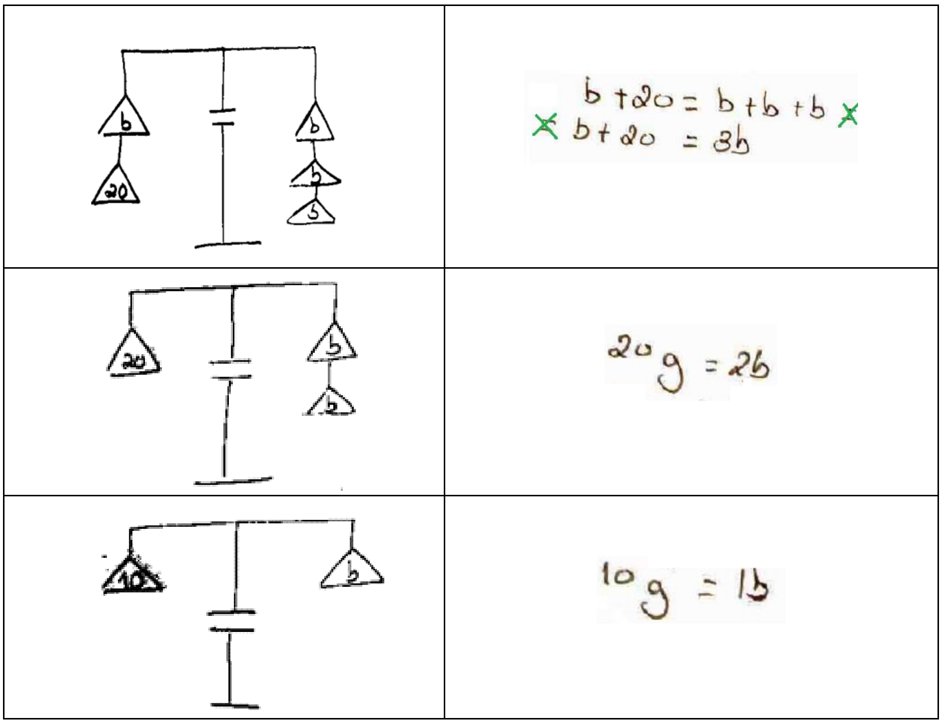


Figura 9. *Building-with* na resolução da tarefa Relação de Equilíbrio

A utilização de linguagem simbólica resultou da experiência que os alunos adquiriram com a resolução de outras tarefas aplicadas durante o estudo e com as quais se pretendia promover o desenvolvimento do pensamento algébrico. Assim, *Consolidation* manifestou-se através do desenvolvimento da subcategoria *Aplicação de construções* e, à semelhança do que já se tinha verificado com *Recognizing*, também foi essencial para o desenvolvimento de *Building-with*.

A segunda representação pictórica (e posteriormente a terceira balança) pode ser entendida como *Estratégias* que fomentaram o raciocínio dos alunos. Porém, foi a associação entre a representação pictórica – *Estratégias* – e a *Aplicação de construções adquiridas* que contribuiu para o desenvolvimento da ação *Building-with* e permitiu que os alunos determinassem o valor concreto de b.

No sentido de Davydov, pode-se interpretar que os alunos partiram de uma forma de abstração mais geral, designadamente da igualdade $b+20=b+b+b$, para outra mais particular, $10=1b$.

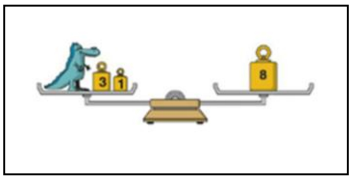
Destaca-se, uma vez mais, que a sequência de balanças representadas sugere a resolução pictórica de uma equação, em que os princípios matemáticos parecem ser aplicados através do desenho. Esta transferência de dados, para linguagem matemática, reforça os pressupostos da *Early Algebra*, pois estes alunos, mais jovens, utilizaram linguagem simbólica com significado para operar com valores desconhecidos. A linguagem algébrica mostrou-se, como tal, acessível aos alunos mais jovens e contribuiu para a resolução da tarefa.

Soluções e Justificação no desenvolvimento de Building-with

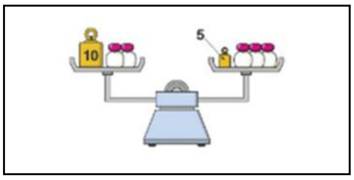
Os dados recolhidos permitiram constatar que o desenvolvimento do processo de abstração, estimulado pela aplicação de estratégias e de construções recentes, favoreceu a justificação de raciocínios e a apresentação de soluções intermédias.

Entenda-se que a exploração do conteúdo matemático presente na primeira balança da Figura 9 permitiu que os alunos aplicassem, através da sua representação pictórica, o que em linguagem matemática natural corresponderia ao *princípio da adição – Se a ambos os membros de uma equação subtrairmos a mesma quantidade (a massa b) obtém-se uma equação equivalente à dada* $(b+20-b=b+b+b-b \Leftrightarrow 20=b+b)$ – na resolução de equações. Por sua vez, a relação estabelecida entre as duas balanças assemelha-se à equivalência de duas equações, pelo que se considera que os alunos utilizaram a representação pictórica como *Estratégia* para resolverem o desafio e, através dela, iniciaram um processo de resolução semelhante ao da resolução de equações. Realce-se que o desenvolvimento da subcategoria *Aplicação de construções* recentes esteve, nesta situação, associada à utilização de linguagem simbólica, e que a apresentação de *Soluções* e *Justificação* para o raciocínio estabelecido foi surgindo à medida que os alunos exploravam as representações pictóricas para integrar e combinar dados e conhecimentos matemáticos.

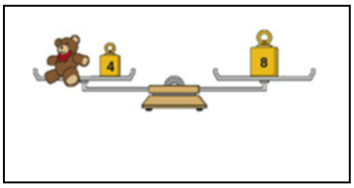
Considere-se a segunda questão, respeitante à massa de diferentes objetos (Figura 10). Procuramos identificar que estratégias os alunos aplicaram para obter os valores numéricos indeterminados, bem como compreender de que forma integraram dados e conhecimentos para alcançar soluções e justificar o seu raciocínio.



GI: Neste prato [apontando para o prato do lado esquerdo] temos oito gramas também. O crocodilo “pesa”… quatro. Podemos escrever que o crocodilo, o “peso” do crocodilo é igual a oito menos quatro. [Escreveu, selecionando a letra c sem dificuldades, escrevendo $c = 8 - 4 = 4$] […]



LP: … queremos saber o “peso” do iogurte. Dez mais dois iogurtes [GI iniciou a escrita] igual […] a cinco mais três iogurte.
[GI escreveu $10 + i + i = 5 + i + i + i$] […].
GI [iniciou o raciocínio]: […] podemos tirar como já fizemos […] tiras estes dois iogurtes [riscou $i + i$] e aqui também [$i + i$] fica só um [escreveu $10 = 5 + i$].



LP: este é fácil, o urso “pesa” 4 gramas e podemos escrever $u = 4$.

Figura 10. *Soluções e Justificação* na resolução da questão 2

Na Figura 10 constata-se que os alunos interpretaram os dados presentes nas balanças, encontrando corretamente os valores numéricos indeterminados. Desse modo, atribuíram os valores das massas, tendo desenvolvido a resolução de uma equação apenas para a segunda situação. O raciocínio estabelecido para descobrir a massa do frasco de iogurte foi semelhante ao utilizado para obter a massa da boneca na primeira questão. No entanto, os alunos não tiveram necessidade de recorrer à representação pictórica para estabelecer o equilíbrio entre massas equivalentes, resolvendo a equação através de um procedimento algébrico.

O princípio da adição voltou a estar presente na simplificação das duas expressões algébricas apresentadas – $10 + i + i$ e $5 + i + i + i$ – pois os alunos “subtraíram” a ambos os lados da balança a mesma quantidade. As soluções intermédias coincidiram com as massas do crocodilo e do urso, determinadas de imediato, com as expressões algébricas e com as duas igualdades: $10 + i + i = 5 + i + i + i$ e $10 = 5 + i$.

As subcategorias *Soluções e Justificação* resultaram da interpretação que os alunos desenvolveram em relação às representações pictóricas e ao desenvolvimento da subcategoria *Aplicação de construções* recentes, que voltou a revelar-se essencial no desenvolvimento da ação epistémica *Building-with*. A subcategoria *Estratégias* não adquiriu a mesma relevância que nas questões anteriores. Realça-se, ainda, a presença de *Consolidation* no desenvolvimento da ação epistémica *Building-with*, onde ela se manifestou através da interpretação dos dados enunciados, das relações presentes nas balanças, ou seja, associada às subcategorias *Interpretação e Regularidades* de *Recognizing*, bem como na aplicação de conhecimentos adquiridos.

Ação de *Constructing*

Reorganização no desenvolvimento de Constructing

A Figura 11 diz respeito a duas construções obtidas pelos alunos, e que resultaram da sua atividade em relação à igualdade de duas expressões algébricas e da organização dos resultados obtidos e apresentados nas seções anteriores.

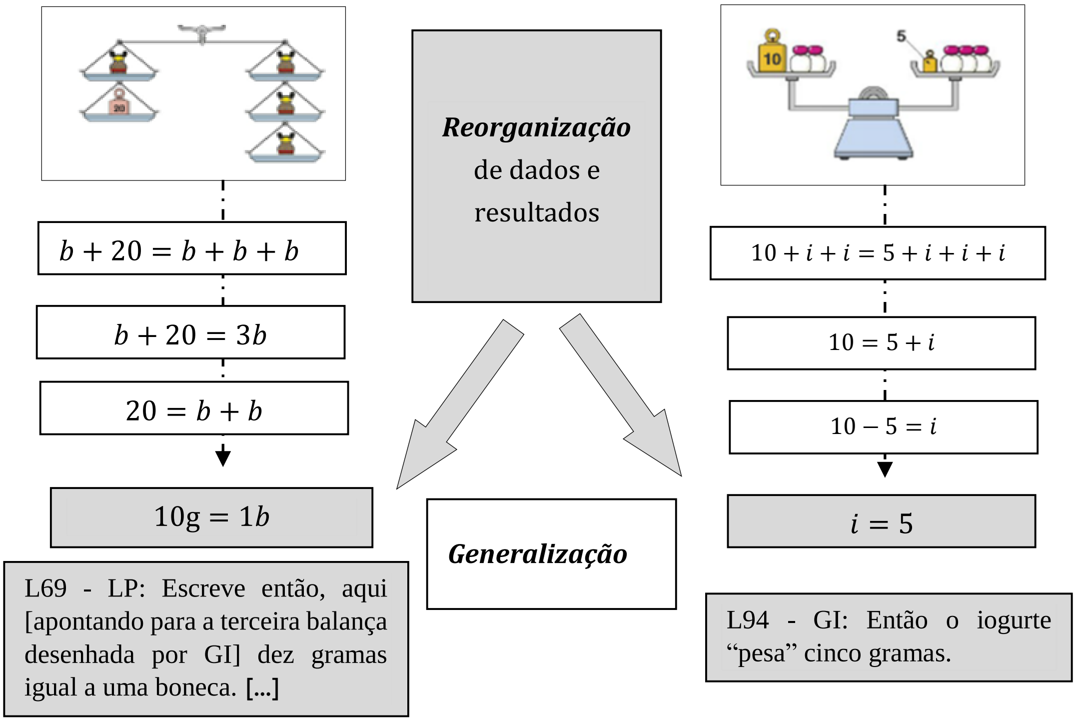


Figura 11. O desenvolvimento da ação epistémica *Constructing*

No desenvolvimento de *Constructing*, a subcategoria *Reorganização* assumiu maior destaque, revelando-se essencial para a construção do conhecimento. Para conseguirem reorganizar dados, conhecimentos e soluções obtidas durante a resolução do desafio, os alunos necessitaram de: (1) interpretar os dados, situação que se evidenciou com o desenvolvimento da ação epistémica *Recognizing*; (2) traduzir em linguagem simbólica os dados presentes nas balanças, dando destaque à ação *Consolidation* e (3) estabelecer relações entre as expressões algébricas apresentadas, com o objetivo de as simplificar até se conseguirem obter as massas dos dois objetos – *Building-with*.

Generalização no desenvolvimento de Constructing

A subcategoria *Generalização* resultou do desenvolvimento da subcategoria *Reorganização* e manifestou-se no final do processo de construção (Figura 12). Resultou da simplificação das expressões algébricas representadas e culminou com a representação, em linguagem matemática, dos valores numéricos correspondentes às massas.

A *Generalização* alcançada pelos alunos correspondeu à extensão de relações numéricas, propriedades e procedimentos que permitiram a obtenção de solução para o desafio colocado. *Constructing* foi alcançada quando os alunos comunicaram em linguagem matemática e, posteriormente, em linguagem simbólica, a massa da boneca e do frasco de iogurte. Nesta situação particular, *Constructing* esteve associada à interpretação, à utilização de linguagem simbólica e à resolução de equações, estando fortemente associada a representações pictóricas, sendo por isso, e no que se refere à resolução de equações, uma construção frágil.

Os resultados apresentados nas secções anteriores evidenciaram que determinadas subcategorias poderiam, a dado momento do processo de abstração, manifestar-se durante o desenvolvimento de uma outra ação que não fosse a sua de origem.

A subcategoria *Interpretação*, correspondente à ação epistémica *Recognizing*, é um desses exemplos, pois para além de se manifestar durante a ação epistémica *Building-with*, contribuiu para o desenvolvimento do pensamento algébrico: *Constructing*. Esta, e outras relações estabelecidas entre subcategorias e categorias, podem ser analisadas com maior pormenor na Figura 12.

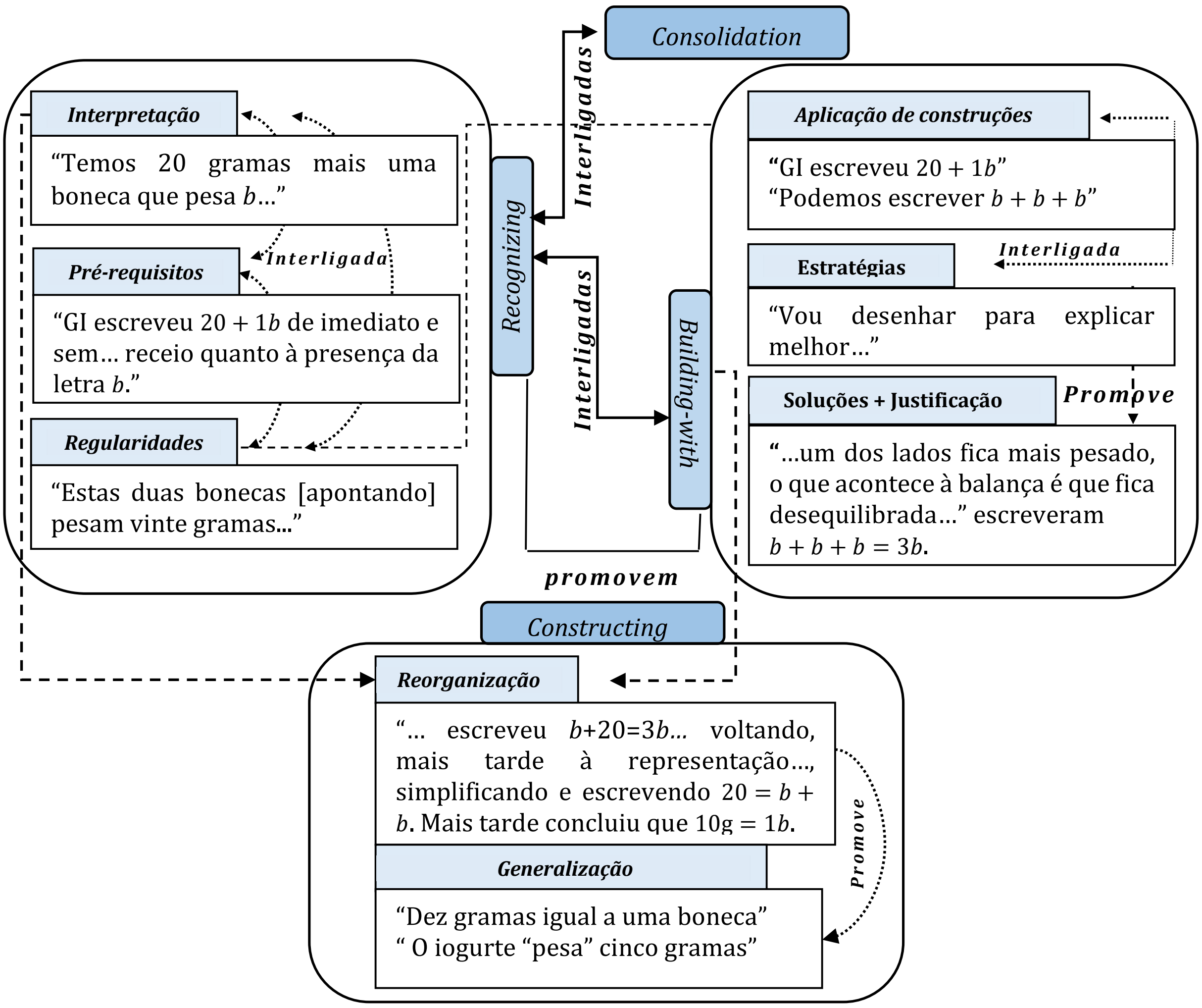


Figura 12. Relação estabelecida entre categorias e subcategorias de análise

Conclusões

Nesta investigação optou-se por recorrer ao modelo *RBC+C* para compreender como é que se desenvolve o processo de abstração na construção do novo conhecimento matemático. Analisou-se o desenvolvimento das diferentes ações epistémicas, com o auxílio das subcategorias construídas nesta investigação, as relações que elas estabeleceram entre si, os contributos que deram para a nova construção e as implicações que tiveram no desenvolvimento do pensamento algébrico.

Recognizing e *Building-with* no desenvolvimento de *Constructing*

A Figura 13 sintetiza o envolvimento e influência das ações *Recognizing*, *Building-with* e *Consolidation* no desenvolvimento do processo de abstração e, consequentemente, no desenvolvimento da ação epistémica *Constructing*.

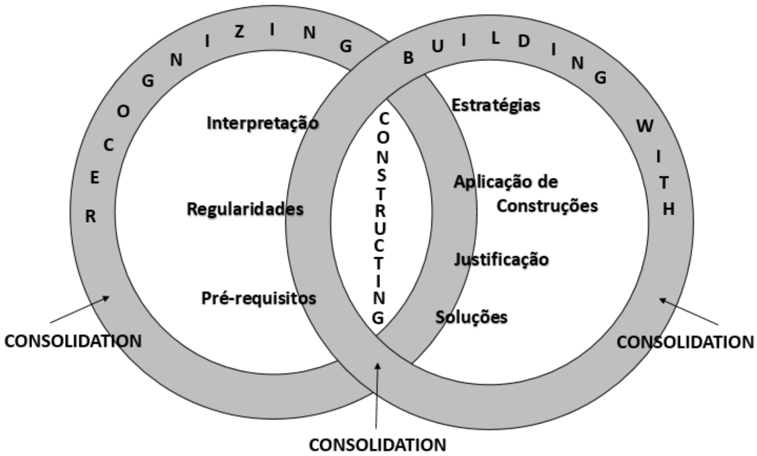


Figura 13. Ações epistémicas e suas relações

O desenvolvimento das ações epistémicas *Recognizing e Building-with* foi influenciado pela manifestação de *Consolidation.* Por sua vez, *Recognizing*, identificada pela coroa circular da esquerda, constitui a fase inicial do processo de abstração e desenvolveu-se através da interpretação dos dados enunciados, da seleção de estruturas adquiridas, através de aprendizagens anteriores, que também dizem respeito à manifestação de *Consolidation*, e da identificação de regularidades. Considera-se que *Recognizing* promoveu o desenvolvimento do pensamento relacional, no sentido em que os alunos desenvolveram capacidade para reconhecerem relações numéricas e utilizar o sinal de igual como indicador de uma relação, interpretando a variabilidade entre expressões algébricas, tal como é referido por Carpenter et al. (2007). *Recognizing* não só promoveu o desenvolvimento da ação *Building-with*, identificada na coroa circular da direita, tal como referido por Dreyfus et al. (2015), como também estabeleceu uma relação de partilha com essa ação, contribuindo para que as soluções que os alunos iam obtendo fossem novamente interpretadas, no sentido de se identificarem regularidades/relações e mobilizarem pré-requisitos.

Conhecida a importância do desenvolvimento de *Recognizing*, é fundamental que os alunos sejam incentivados a explorar em profundidade, na resolução das tarefas matemáticas, os dados enunciados e representados, de modo a poderem identificar regularidades e a estabelecer relações matemáticas com eles.

Consolidation esteve presente na fase inicial do processo de abstração, quando os alunos abstraíam sobre o conteúdo matemático presente nos enunciados e representações pictóricas, no sentido do que é descrito por Davydov (1990), tendo estado associada à identificação e utilização de linguagem simbólica. Ela manifestou-se com o desenvolvimento de *Recognizing* e *Building-with,* respetivamente, na interpretação e utilização de linguagem simbólica. O presente estudo clarifica em que momentos *Consolidation* se manifesta, como influencia o desenvolvimento das ações *Recognizing* e *Building-with* e, consequentemente, como promove o desenvolvimento do pensamento algébrico. O aparecimento de *Consolidation* permitiu realçar o papel do professor e das tarefas na aprendizagem dos alunos, reforçando a ideia de que o conhecimento matemático que o aluno adquire em aprendizagens anteriores é essencial para o desenvolvimento de uma nova construção. Concluiu-se, por isso, que *Consolidation* tem implicações no desenvolvimento da ação epistémica *Recognizing*, designadamente na compreensão dos enunciados e na seleção de conhecimentos adquiridos, que, ao serem aplicados, promovem o desenvolvimento da ação epistémica *Building-with*.

Esta ação epistémica, por sua vez, evidenciou-se através da integração e combinação de construções reconhecidas, estando relacionada com a necessidade de os alunos atingirem determinado objetivo, designadamente o de apresentarem resposta às questões colocadas, selecionando, neste caso particular, estratégias, justificando ideias e apresentando soluções intermédias. Realça-se que o processo de abstração em *Building-with* revelou da parte dos alunos maior conhecimento acerca dos objetos "manipulados", permitindo-lhes obter novos objetos (o concreto pensado, segundo Davydov), de onde poderiam extrair o conhecimento matemático pretendido.

A mobilização de conhecimentos resultantes da interpretação dos dados enunciados, a identificação de regularidades e a seleção de conhecimentos adquiridos manifestou-se com a ação *Recognizing* e promoveu o desenvolvimento de *Building-with*. Por sua vez, as soluções intermédias que foram surgindo em *Bulding-with* voltaram a ser interpretadas pelos alunos, no sentido de se identificarem novas relações que, reorganizadas, promoveram a ação epistémica *Constructing*. Nesse sentido, consideramos que *Building-with* não resultou exclusivamente do desenvolvimento de *Recognizing*, mas que as duas ações envolveram-se mutuamente no desenvolvimento do processo de abstração e, consequentemente da ação *Constructing*, à semelhança do que foi referido por Dreyfus et al. (2015). A ação epistémica *Constructing* manifestou-se quando o trabalho desenvolvido com os objetos (resolução da "equação pictórica") ascendeu ao concreto, no sentido de Davydov (1990), permitindo que os alunos alcançassem o objetivo da tarefa. Realça-se a evolução registada pelos alunos quanto ao uso de linguagem simbólica, mas também na forma como extraíram, combinaram e reorganizaram dados e conhecimentos para alcançarem o novo conhecimento matemático.

O desenvolvimento do pensamento algébrico manifestou-se quando os alunos utilizaram linguagem simbólica e generalizaram relações e regularidades observadas.

Interpretação, Pré-requisitos, Aplicação de construções, Estratégias e Reorganização no desenvolvimento de *Constructing*

Na relação estabelecida entre as diferentes subcategorias de análise, realça-se que *Interpretação* e *Pré-requisitos* foram essenciais para o desenvolvimento da ação *Recognizing*. Mantiveram-se interligadas durante a fase inicial do processo de abstração e contribuíram para o desenvolvimento da subcategoria *Regularidades*, respeitante à categoria *Recognizing*, e da ação *Building-with*. Estiveram, sobretudo, associadas à interpretação e ao reconhecimento do valor indeterminado presente na linguagem simbólica. Permitiram também a aplicação de construções, favoreceram o aparecimento de soluções, a justificação de raciocínios e a reorganização de dados e resultados, na fase final da construção. A manifestação destas subcategorias, em momentos diferenciados do processo de abstração, permitiu concluir com maior clareza, que não há, necessariamente, uma relação sequencial entre as ações *Recognizing* e *Building-with*.

Também as subcategorias *Aplicação de construções* e *Estratégias*, respeitantes a *Building-with*, mantiveram-se interligadas durante o desenvolvimento da sua categoria de origem, favorecendo a justificação de raciocínios e a apresentação de soluções intermédias. *Estratégias* esteve presente nas representações pictóricas que, ora resultaram do desenvolvimento da *Interpretação* e *Pré-requisitos*, ora favoreceram o seu reaparecimento. Observou-se uma forte ligação entre as subcategorias *Interpretação*, *Pré-requisitos*, *Aplicação de construções* e *Estratégias*, subentendendo-se uma estreita ligação entre as ações *Recognizing* e *Building-with*.

Na Figura 14 procuramos explicitar de que forma a atividade matemática evidenciada através do desenvolvimento das subcategorias de análise foi reorganizada no sentido da construção pretendida.

A subcategoria *Reorganização* promoveu o desenvolvimento da ação epistémica *Constructing*. Esta refletiu a habilidade dos alunos para combinaram e reorganizarem conhecimentos adquiridos durante o desenvolvimento de *Recognizing* e de *Building-with*, no sentido de estenderem as regularidades observadas e obterem solução para o desafio colocado. O desenvolvimento da subcategoria *Reorganização* é fundamental para que a construção pretendida ocorra, pelo que todo o esforço investido pelos alunos ao longo do processo de abstração pode ficar comprometido caso eles não consigam combinar e reorganizar os dados, soluções e raciocínios estabelecidos.

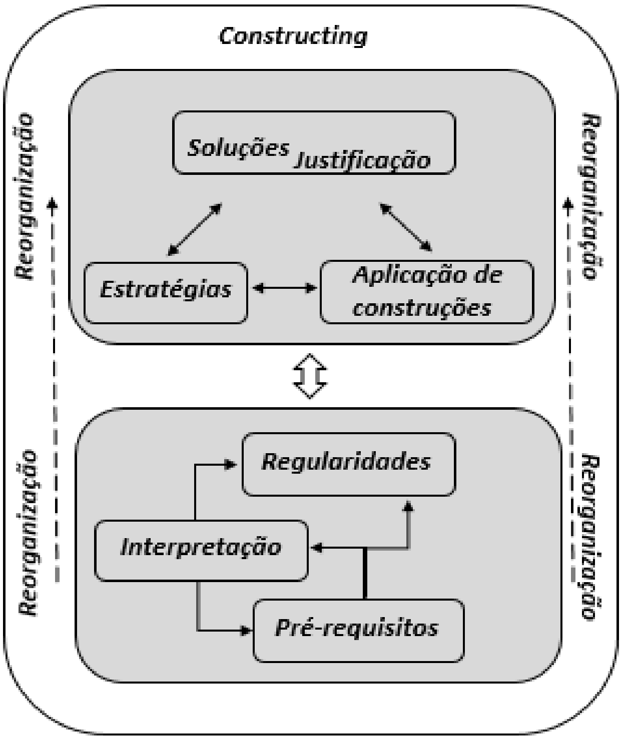


Figura 14. *Reorganização* no desenvolvimento de *Constructing*

A introdução das subcategorias de análise, bem como o seu uso, foi essencial para compreender como se iniciou o processo de abstração, a relação entre as diferentes ações e como os alunos chegaram à nova construção. Foi assim possível clarificar as relações estabelecidas pelas diferentes ações epistémicas e a sua importância para o desenvolvimento da nova construção. As subcategorias definidas também ajudaram a identificar relações entre as ações epistémicas e a melhor compreender a ação e a relevância de *Consolidation* na construção do novo conhecimento matemático, o que consideramos serem contributos para o modelo *RBC+C*. Nesta investigação, as ações epistémicas *Recognizing* e *Building-with* e, em particular as relações estabelecidas entre elas, assumem uma posição central no processo de construção do novo conhecimento matemático, pois revelam-se essenciais para o desenvolvimento de *Constructing*.

O contexto revelou-se igualmente importante quando, através da exploração da representação pictórica, os alunos mobilizaram conhecimentos e desenvolveram processos criativos de resolução que lhes permitiu dar resposta aos desafios colocados, reforçando competências adquiridas com a aprendizagem da aritmética e desenvolvendo formas alternativas de pensar e representar situações indeterminadas, ou seja, algébricas.

Consideramos que a investigação desenvolvida clarifica que a relação estabelecida entre as diferentes ações epistémicas está dependente do contexto, designadamente das tarefas propostas (natureza e conteúdo). Depende, ainda, da mediação estabelecida entre professor e alunos e entre alunos, e que funcionando em sequência ou em interligação, as ações epistémicas são fundamentais para o desenvolvimento do novo conhecimento matemático.

A introdução de subcategorias de análise, construídas em estreita ligação com a natureza do conteúdo matemático a trabalhar com os alunos (no caso, o pensamento algébrico) e com as próprias tarefas propostas, permitiu analisar com maior pormenor características associadas ao desenvolvimento do pensamento algébrico, para além de ajudar a compreender melhor a manifestação e a conexão estabelecidas entre as diferentes ações epistémicas. A relação estabelecida entre as categorias e subcategorias de análise permitiu reforçar as ideias de Blanton et al. (2018), de que o pensamento algébrico vai para além da generalização, englobando também a representação, a justificação e a utilização de notação alfanumérica.

Paralelamente, nesta investigação evidenciou-se que os alunos mais jovens (10 e 11 anos de idade) mobilizam conhecimentos e desenvolvem processos criativos de resolução que lhes permitem dar resposta aos desafios colocados, reforçando competências adquiridas com a aprendizagem da aritmética e desenvolvendo formas alternativas de pensar e representar situações indeterminadas, ou seja, algébricas. Considera-se, como tal, que será igualmente importante procurar compreender melhor a prática profissional do professor, nomeadamente quanto aos aspetos didáticos e aos artefactos a selecionar, quando ele pretende promover o desenvolvimento do pensamento algébrico em alunos mais jovens. A representação pictórica assumiu um papel muito importante na atividade matemática destes alunos. Por isso, será de toda a importância procurar fundamentar melhor o papel das representações no desenvolvimento do pensamento algébrico e, em particular, na resolução de problemas de natureza algébrica. Assim, considera-se benéfico estimular a representação dos dados enunciados, designadamente o incentivo à utilização de equações pictóricas para resolver problemas.

Referências

Arcavi, A. (2006). El desarrollo y el uso del sentido de los símbolos. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos & A. P. Canavarro (Eds.), *Números e Álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores* (pp. 29-48). Lisboa: SEM-SPCE.

Blanton, M., Brizuela, B., Stephens, A, Knuth, E., Isler, I., Gardiner (…), Stylianou, D. (2018). Implementing a framework for Early Algebra. In C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds. The global evolution of an emerging field of research and practic*e (pp. 27-50). Cham, Switzerland: Springer.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Porto: Porto Editora.

Carpenter, T. P., Franke, M. L., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school.* Portsmouth, NH: Heinemann.

Carpenter, P., Jacobs, V., Franke, M., Levi, L., & Battey, D. (2007). Professional development focused on children's algebraic reasoning in elementary school. *Journal for Research in Mathematics Education*, *38*(3), 258-288.

Carraher, D. W., & Schliemann, A. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 669-705). Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Davydov, V. V. (1990). *Types of generalization in instruction: Logical and psychological problems in the structuring of school curricula. Soviet studies in mathematics education* (v. 2). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Dreyfus, T., & Kidron, I. (2006). Interacting parallel constructions: A solitary learner and the bifurcation diagram. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 26*, 295–336.

Dreyfus, T. (2012). Constructing abstract mathematical knowledge in context. In *Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 115-133). Seoul: ICME 12.

Dreyfus, T., Hershkowitz, R., & Schwarz, B. (2015). The nested epistemic actions model for abstraction in context: Theory as methodological tool and methodological tool as theory. In A. Bikner-Ahsbahas, C. Knipping & N. Presmeg (Eds.), *Approaches to qualitative research in mathematics education* (pp. 185-217). Dordrecht, The Netherlands: Springer.

Drijvers, P. (2003). *Learning algebra in a computer algebra environment: Design research on the understanding of the concept of parameter* (Tese de doutoramento não publicada). Utrecht University, Utrecht.

Guimarães, F., Arcavi, A., Gómez, B., Ponte, J. P., & Silva, J. N. (2006). O ensino aprendizagem dos Números e da Álgebra: Que problemas, que desafios? In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos & A. P. Canavarro (Org.), *Números e Álgebra na aprendizagem da matemática e na formação de professores* (pp. 361-379). Lisboa: SEM-SPCE.

Hershkowitz, R., Schwartz, B., & Dreyfus, T. (2001). Abstraction in context: Epistemic actions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *32*(2), 195 - 222.

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. Kaput, D. Carraher & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). New York: LEA & NCTM.

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it*? The Mathematics Educator, 8*(1), 139-151.

Kieran, C., Pang, J., Schifter, D. & Ng, S. F. (Eds.) (2016). *Early Algebra – Research into its nature, its learning, its teaching*. New York: Springer.

Kirsh, D., & Maglio, P. (1994). On distinguishing epistemic from pragmatic action. *Cognitive Science*, *18*(4), 513-549.

Mason, J. (2008). Making use of children's powers to produce algebraic thinking. In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 57-94). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum.

Mason, J. (2018). How early is too early for thinking algebraically? In C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5-to 12-year olds* (pp. 329-350). Hamburgo: ICME13.

Mestre, C. (2014). *O desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos do 4º ano de escolaridade: Uma experiência de ensino.* (Tese de Doutoramento). Universidade de Lisboa, Lisboa.

Pimenta, C. (2016). *A construção do conhecimento no desenvolvimento do pensamento algébrico.* (Tese de Doutoramento). Universidade da Beira Interior, Covilhã.

Ponte, J. P. (2006). Números e álgebra no currículo escolar. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos, & A. P. Canavarro (Eds.), *Números e Álgebra na aprendizagem da matemática e na formação de professores* (pp. 5-27). Lisboa: SEM-SPCE.

Radford, L. (2012). Early algebraic thinking: Epistemological, semiotic, and developmental issues. In *Proceedings of 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 209 - 228). Seoul: ICME12.

Radford, L. (2014). The progressive development of early embodied thinking. *Mathematics Education Research Journal*, *26*, 257-277.

Schoenfeld, A. (2005). Curriculum development, teaching and assessment. In L. Santos, A. P. Canavarro & J. Brocardo (Eds.). *Educação matemática: Caminhos e encruzilhadas* (pp. 13-41). Lisboa: APM.