CONCEÇÕES E PRÁTICAS NA FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES SOBRE TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS

António Guerreiro

Escola Superior de Educação e Comunicação, Universidade do Algarve
aguerrei@ualg.pt

Resumo

Neste artigo, pretendo apresentar um conjunto de ideias resultantes da abordagem das transformações geométricas, numa superfície plana, a partir das conceções e práticas de futuros professores, no âmbito da unidade curricular de Transformações Geométricas, do mestrado em Ensino do 1.º ciclo do ensino básico e de matemática e ciências naturais no 2.º ciclo do ensino básico, Escola Superior de Educação e Comunicação, Universidade do Algarve, integrando exemplos de simetrias, em rosáceas, frisos e padrões na natureza e na arte. A metodologia utilizada na recolha e análise dos dados assume uma natureza interpretativa, com recurso aos registos áudio de todas as aulas, às tarefas matemáticas realizadas, às notas do professor e às produções dos futuros professores, no contexto das aulas e dos trabalhos realizados autonomamente. Os dados apontam para uma redescoberta, por parte dos futuros professores, do conceito de simetria, envolvendo diversos tipos de simetria, em rosáceas, frisos e padrões, incluindo a análise de situações menos comuns como segmentos de reta, rosáceas distintas da *forma circular*, frisos e padrões com reflexões deslizantes *encobertas*. O reforço do conhecimento matemático resultou de uma diversidade de exemplos de simetrias, em rosáceas, frisos e padrões, através de um novo olhar matemático sobre a natureza e a arte, tendo em atenção o trabalho em sala de aula com alunos do 2.º ciclo do ensino básico.

Palavras-chave: Transformações geométricas; Conceções e práticas; Formação de professores; Ensino superior.

Abstract

In this paper, I intend to present a set of ideas resulting from an approach to geometric transformations, on a flat surface, originating from the future teachers' conceptions and practices, within the curricular unit of Geometric Transformations of the master's degree in Teaching in the first cycle of basic education and teaching of mathematics and sciences in the second cycle of basic education, School of Education and Communication, University of Algarve, integrating examples of symmetries, in rosettes, friezes and patterns in nature and art. The methodology used in the collection and analysis of data takes an interpretative stance. The data was collected using the audio records of all classes, the mathematical tasks that were carried out, the teacher's notes and the future teachers' output, produced either in the context of the classroom, or as assignments carried out autonomously. Data show that these future teachers rediscovered the concept of symmetry, involving various types of symmetry, in rosettes, friezes and patterns, and were able to make an analysis of less common situations, such as segments of straight line, rosettes (other than those with a circular shape), friezes and patterns with hidden slid reflections. The consolidation of the mathematical knowledge resulted from a diversity of examples of symmetries, in rosettes, friezes and patterns from a new mathematical stance of nature and art, considering the work done in the classroom with students of the second cycle of basic education.

Keywords: Geometric transformations; Conceptions and practices; Teacher training; Higher education.

Abertura: Contextualização e Propósito

As transformações geométricas no plano são um dos conteúdos do currículo de matemática, nos primeiros anos de escolaridade, sustentadas por representações gráficas sem grande formalização, habitualmente em torno da construção de figuras com eixo de simetria e identificação de eixos de simetria em figuras planas. O currículo de matemática, no 2.º ciclo do ensino básico, integra as isometrias do plano, com incidência especial na identificação e construção do "transformado de uma dada figura através de isometrias" (ME, 2018, aprendizagens essenciais, 6.º ano, p. 9) e do reconhecimento de "simetrias de rotação e de reflexão em figuras, em contextos matemáticos e não matemáticos, prevendo e descrevendo os resultados obtidos" (*idem*, *ibidem*).

Bastos (2007) defende que as transformações geométricas

> *"devem ser trabalhadas em conjunto porque é na comparação das suas propriedades – pontos fixos, orientação dos originais e das imagens e outras – e nas composições e relações entre elas que reside a tal estrutura que devemos ir progressivamente revelando aos alunos, ao longo da escolaridade". (p. 27)*

Em acordo com as aprendizagens essenciais, em articulação com o perfil do aluno, a lecionação deste tópico não se deve restringir a modelos puramente matemáticos, mas deve também resultar da utilização de contextos não matemáticos, como por exemplo da natureza e da arte, de modo a desenvolver nos alunos a capacidade de reconhecerem e valorizarem a matemática como elemento do património cultural da humanidade (ME, 2018), com o propósito de "abordar os conteúdos de cada área do saber, associando-os a situações e problemas presentes no quotidiano da vida do aluno ou presentes no meio sociocultural e geográfico em que se insere, recorrendo a materiais e recursos diversificados" (ME, 2017, p. 31).

O estudo sobre as transformações geométricas, de acordo com a investigação, constitui uma falha na formação dos docentes, atendendo a que os "futuros professores não parecem estar preparados para ensinar transformações geométricas" (Gomes, 2012, p. 241). Barroso e Galvão (2017), referindo um estudo de Harper (2003), salientam que "embora o estudo das transformações geométricas seja um tópico importante no currículo de matemática dos EUA, há evidências de que tanto os alunos como os futuros professores não entendem os conceitos de reflexão, rotação e translação" (pp. 454-455). Em concordância com os estudos anteriores, Fernandes, Rebelo e Simões (2017) destacam que mesmo os professores que possuem conhecimentos sobre as transformações geométricas sentem-se inseguros na abordagem deste tópico matemático.

A inclusão da unidade curricular *Transformações Geométricas* no mestrado em Ensino do 1.º ciclo do ensino básico e de matemática e ciências naturais no 2.º ciclo do ensino básico, da Escola Superior de Educação e Comunicação, Universidade do Algarve, destinado à formação de professores dos anos iniciais, resultou da necessidade de reforçar os conhecimentos dos futuros professores relativos ao ensino da geometria, particularmente em torno das transformações geométricas no plano.

Neste artigo irei abordar as ideias matemáticas de simetria, em rosáceas, frisos e padrões, a partir das conceções dos futuros professores no decorrer das aulas de mestrado, abordando de forma integrada as figuras planas finitas e infinitas em uma e em duas direções distintas, tendo por propósito realçar as conceções explícitas e as perspetivas subsequentes que resultaram numa alteração das ideias matemáticas iniciais dos futuros professores e de mim próprio, docente da unidade curricular.

Metodologia: Natureza, Participantes e Recolha e Análise de Dados

A metodologia adotada assume um *design* de investigação qualitativo e interpretativo (Bogdan & Biklen, 1994), com o intuito de interpretar, compreender e explicar significados, tendo em consideração as experiências dos participantes. Este estudo ocorreu durante a lecionação da unidade curricular referida no primeiro semestre dos anos letivos de 2016/17 e de 2017/18, respetivamente com seis e quatro futuros professores, detentores de uma licenciatura em Educação Básica, identificados com nomes fictícios e com o ano de lecionação.

Na licenciatura em Educação Básica, os futuros professores frequentaram cinco unidades curriculares na área científica da matemática, envolvendo as subáreas dos números, geometria, medida, álgebra, estatística e probabilidades. Assim sendo, os futuros professores tinham uma formação global no contexto da matemática para o ensino nos primeiros anos de escolaridade.

A recolha de dados emergiu de uma observação direta e indireta, consubstanciada nos registos áudio de todas as aulas, autorizados pelos participantes, nas tarefas matemáticas realizadas, nas notas do professor e nas produções dos futuros professores, no contexto das aulas e dos trabalhos realizados autonomamente. As gravações e restantes dados foram analisados e organizados com o intuito de ilustrar as conceções e as práticas dos participantes no contexto escolar (Goetz & LeCompte, 1984).

Simetria: Conceções, Definição e Prática

As simetrias abordadas nos primeiros anos de escolaridade reduzem-se à reconstrução de uma figura a partir da sua *metade*, através da reflexão em relação a um eixo vertical ou horizontal. Esta é a conceção de simetria um dos futuros professores que tinha lecionado, em contexto de supervisão, no 1.º ciclo do ensino básico: “Dei as simetrias [1.º ciclo] (…) foi só mesmo desenhar de um lado para o outro” [Isabel, 2016].

As conceções dos futuros professores limitavam o conceito de simetria circunscrito à simetria axial: “Segundo um eixo, uma linha no centro da imagem (…) quando sobrepostos tem de haver coincidência total dos pontos” [Sandra, 2016]. Questionados sobre as simetrias do quadrado, os futuros professores identificaram as quatro simetrias axiais do quadrado, associadas às suas duas diagonais e às duas mediatrizes dos pares de lados paralelos: “[As] transformações que tu podes fazer para obter a mesma figura (…) Só conseguimos colocar o espelho em quatro posições” [Hélia, 2016].

Quando os futuros professores foram interrogados sobre a simetria de um quadrado, após as rotações de um quarto de volta, de meia volta e de três quartos de volta, com centro no ponto de interseção das suas diagonais, eles observaram que “estamos a rodar em relação a um ponto e não a um eixo” [Amélia, 2016], reconhecendo que a imagem no seu todo se mantem inalterada. Este confronto originou uma questão de uma das futuras professoras: “Para ser simétrica tem de ser em relação a um eixo ou não?” [Hélia, 2016], salientando a pressão cultural existente pela redução da simetria à reflexão axial.

Ao questionar os futuros professores sobre o significado de simetria de reflexão, em confronto com o entendimento, por parte dos mesmos, das orientações curriculares. O conceito de simetria, associado à mesma distância, surgiu como uma questão central: “Tem de ser sempre a partir de um eixo de simetria (…). É a que está à mesma distância do eixo. (…). Os pontos estão todos à mesma distância” [Anabela, 2017]. Ao questionar os futuros professores sobre o que significava simetrias de rotação, gerou-se alguma indefinição entre simetria rotacional e rotação – “A rotação é exatamente a mesma figura, mas com graus. Se agarrou na figura original e se aplicou um determinado ângulo … para uma nova figura” [Anabela, 2017].

A dificuldade em definir, de modo claro, os conceitos surge em ambos os casos, quer a partir da concretização das simetrias num quadrado físico quer a partir da denominação de um conceito, expresso nas orientações curriculares, realçando a pouca à-vontade dos futuros professores em relação ao conceito de simetria. Esta interrogação despoletou a necessidade de apresentar a definição de simetria em figuras planas.

A simetria em figuras planas “consiste numa transformação que mantém a figura invariável na medida em que, depois de submetida a essa transformação, mantém, globalmente, o seu aspeto inicial, embora alguns dos seus pontos possam ser deslocados em consequência da mesma" (Devlin, 2002, p. 152), ou, de outro modo, "uma simetria de uma figura é um movimento rígido que deixa a figura exatamente na mesma" (Farmer, 1999, p. 43), em que "um movimento rígido do plano é qualquer maneira de mover todos os pontos do plano de modo que (i) a distância relativa entre pontos permaneça a mesma; (ii) a posição relativa dos pontos permaneça a mesma" (Farmer, 1999, p. 27).

Esta definição de *tudo ficar na mesma* tem implicações no *ato de nada fazer*, a "operação de não fazer nada é uma simetria da figura" (Farmer, 1999, p. 44), considerando esta ação consubstanciada na rotação trivial de ângulo zero e na translação trivial associada ao vetor nulo. Deste modo, assume-se que "uma figura finita é uma figura que não tem nenhuma simetria de translação não trivial" (Farmer, 1999, p. 45), admitindo obrigatoriamente uma simetria rotacional trivial. As figuras que só admitem a simetria de rotação nula, ou qualquer múltiplo de volta inteira, são consideradas assimétricas (Carvalho, Santos, Silva & Teixeira, 2016).

A sistematização do conceito de simetria axial e de simetria rotacional resultou num reconhecimento, por parte dos futuros professores, que as suas conceções sobre as simetrias divergiam da definição, "[as definições] são mais completas do que as ideias que nós tínhamos (…) aquilo que aprendemos e fizemos na escola" [Sandra, 2016], em resultado de práticas letivas muito associadas às simetrias axiais e pouco exploradas no que respeita às simetrias rotacionais, confundindo por vezes transformações geométricas com simetrias axiais ou rotacionais. Estudos recentes corroboram estes dados, salientando que muitos professores consideram como simetria de reflexão a transformação reflexiva que ocorre entre duas imagens mediadas por um eixo (Fernandes, Rebelo & Simões, 2017) e que nos programas e manuais escolares "há uma ênfase na simetria e na reflexão axial, em detrimento às outras transformações isométricas como a translação e a rotação" (Barroso & Galvão, 2017, p. 458). Sendo certo que o conceito de simetria evoluiu para a "noção de invariância, independentemente se esta é obtida por uma reflexão ou por outra transformação geométrica" (Carvalho, Santos, Silva & Teixeira, 2016, p. 142).

A partir da definição de simetria em figuras planas ocorreu a exploração de situações extremas e a reflexão sobre a simetria de rotação de uma figura com uma rotação de zero graus. Perante o questionamento do número de simetrias de um segmento de reta, os futuros professores começaram por identificar uma simetria de reflexão segundo um eixo perpendicular ao segmento no seu ponto médio (mediatriz) e uma simetria de rotação de meia volta em torno do ponto médio do segmento: "Tem simetria de reflexão e em termos de rotação, se nós fizermos assim (roda com centro no ponto médio) só uma, só tem uma simetria, não vamos contar com o zero" [Sandra, 2016]. A identificação da simetria axial com eixo coincidente ao segmento de reta e a simetria rotacional de volta inteira não surgiu de modo imediato, mas em resultado da exploração da definição de simetria e da noção de dimensão zero das linhas em geometria.

A identificação das simetrias axiais e rotacionais de um polígono regular, após a discussão inicial em torno do quadrado, transformou-se num mero exercício. Contudo, a generalização do círculo como um polígono regular de *infinitos* lados não foi pacífica: "Quantas simetrias axiais e rotacionais tem um círculo? As simetrias axiais e rotacionais são exatamente as mesmas" [Sandra, 2016]; "Se calhar não é infinito" [Hélia, 2016]; "Já não é um polígono regular, aquilo pode já não se verificar!" [Ricardo, 2016]. O questionamento em relação às próprias conceções dos futuros professores gerou um aprofundamento do conhecimento matemático e a não assunção óbvia, apesar da sua evidência, do círculo como uma figura simétrica com reflexões em qualquer diâmetro e rotações à volta do centro em qualquer ângulo.

A exploração de simetrias axiais e rotacionais gerou um reconhecimento em diversos contextos como por exemplo na natureza ou na arte. A discussão sobre o conceito de simetria axial numa *imagem*, neste caso num objeto tridimensional representável numa figura bidimensional, a partir da observação e manuseamento de feijões frade (ver Figura 1), pode constituir uma tarefa matemática inicial para os alunos do 2.º ciclo do ensino básico, através de questionamento e discussão, à sua descrição e representação esquemática, salientando a simetria axial como uma característica especial.

Figura 1: Feijão frade.

Esta mesma abordagem inicial sobre a simetria axial poderá partir da observação de *metades verticais* de alguns frutos como no caso dos morangos (ver Figura 2), das peras ou das maçãs, explorando a sua simetria axial e a simetria rotacional trivial.

Figura 2: Metade vertical de um morango.

De igual modo, a partir de *metade horizontal* de uma laranja (ver Figura 3) ou de um kiwi, podemos explorar o conceito de simetria rotacional.

Figura 3: Metade horizontal de uma laranja.

A discussão sobre os conceitos de simetria axial e rotacional a partir de contextos não matemáticos pode possibilitar a integração da matemática e das ciências naturais, neste caso particular a partir dos alimentos, no 1.º e 2.º ciclos do ensino básico. Esta abordagem didática a partir de artefactos naturais ou culturais é defendida pelos futuros professores como uma forma dos alunos autonomamente construírem o seu conhecimento matemático: "um trabalho que poderia ser realizado com os alunos, desde a recolha de fotografias, à sua análise" [Amélia, 2016].

A identificação de transformações geométricas numa gravura do pintor Nassos Daphnis [1914-2010] (ver Figura 4), nomeadamente das duas rotações, meia volta e volta inteira, constituiu um desafio para alunos do 2.º ciclo do ensino básico e para os futuros professores deste nível de ensino, pela sua natureza de não admitir nenhuma simetria de reflexão e não apresentar uma forma tipicamente circular.

Figura 4: Gravura de Nassos Daphins (1978).

Num estudo realizado no 2.º ciclo do ensino básico (Baptista, Guerreiro & Lopes, 2015), alguns alunos identificaram na gravura uma simetria de meia volta com centro no ponto de interseção das diagonais do quadrado:

> *"Catarina: Não há reflexão, porque os octógonos estão ao contrário. Mas, há uma rotação… O [primeiro] octógono pode dar uma volta de 180º e ficar igual ao outro"* (ver Figura 5).

Figura 5: Registo de Catarina [Rotação].

> *"Tiago: Sim. Mas, a seguir, temos de fazer uma translação [do octógono], para ficarem [ambos] na mesma posição…*
>
> *Catarina: Não é preciso… [Os octógonos] ficam, logo, iguais.*
>
> *Tiago: Ficam iguais, mas temos de os juntar, não?*
>
> *Catarina: Já não estou a perceber nada...*
>
> *Professor: Esperem... Onde é que marcaste o centro da rotação, Catarina?*
>
> *Catarina: No meio!*
>
> *Professor: No meio do quê?*
>
> *Catarina: No meio da pintura toda...". (pp. 40-41)*

A discussão em torno da mesma gravura, por futuros professores do 2.º ciclo do ensino básico, gerou igualmente algumas dúvidas sobre a natureza das transformações geométricas existentes na figura plana finita. Os futuros professores imaginaram uma composição de reflexões, “[a primeira gravura] reflete e reflete nos dois eixos [para dar a segunda gravura]” [Anabela, 2017], ou uma rotação, “ela [a gravura] só roda” [Dário, 2017].

Na busca de entendimento, uma das alunas questiona-se sobre a possibilidade de envolver as translações nesta transformação, “Não se pode fazer translações?” [Anabela, 2017], imaginando a figura com dois octógonos independentes, contrariando o conceito de movimento rígido, ao pressupor a sobreposição dos octógonos. A discussão é finalizada com a identificação das duas simetrias de rotação: “Duas [simetrias de rotação], de 180º e de 360º” [Carolina, 2017].

Rosáceas: Definição e Representações

A análise de diversas figuras planas finitas gerou a existência de dois grupos: apenas simetrias de rotação, “[um grupo de figuras] tinham duas rotações” [Anabela, 2017], e simetrias de rotação e de reflexão, em igual número, “o outro grupo [de figuras] tinha o mesmo número de rotações e de reflexões” [Anabela, 2017]. Esta categorização facilitou a construção da definição de rosáceas cíclicas e diedrais. As figuras que admitem repetições dentro de uma região limitada do plano, em torno de um ponto, isto é, que admitem simetrias rotacionais, mesmo que não tenham simetrias axiais, denominam-se de rosáceas. No caso de terem apenas simetrias rotacionais, as rosáceas são grupos cíclicos; no caso de terem, em igual número, simetrias axiais e rotacionais são grupos diedrais (Bellingeri, Dedò, di Sieno & Turrini, 2003).

Numa rosácea, os eixos de simetria, quando existem, passam todos pelo centro de rotação (único) de todas as simetrias rotacionais. A definição parece esbarrar na situação da existência de uma única simetria de reflexão: “Para terem reflexões têm de ter rotações também, nunca podem ter só reflexões?” [Anabela, 2017], por dificuldade em se assumir que qualquer figura finita tem, no mínimo, uma simetria de rotação trivial. Claro que a existência, numa figura plana finita, de uma única simetria de reflexão e, necessariamente, da rotação trivial, caracteriza uma figura assimétrica.

A abrangência do conceito de rosácea a diferentes formas de figuras planas finitas confronta a associação das rosáceas à forma circular, a qual parece condicionar as perspetivas dos futuros professores em relação à classificação de outras formas em rosáceas. A propósito da discussão em torno das simetrias da letra S (naturalmente que depende do tipo de letra), os futuros professores identificaram-na como uma rosácea cíclica: “[O S] tem 180 [meia volta]. Só tem rotacional” [Sandra, 2016]. Este mesmo confronto com as conceções de rosácea ocorreu a propósito da gravura do pintor Nassos Daphnis (ver Figura 4) utilizada para ilustrar um exemplo de rotação por meia volta sem reflexões: “Já viram, não tem aspeto de rosácea [cíclica] [Carla, 2016].

O estudo das figuras planas finitas como rosáceas, cíclicas e diedrais, constitui uma ferramenta poderosa para classificação de figuras finitas, de distintas formas, sejam figuras geométricas como polígonos regulares ou irregulares ou outras figuras existentes na geometria, na arte e na natureza. A utilização de contextos da natureza, com vista à classificação das rosáceas em cíclicas e diedrais, poderá resultar da observação de plantas, particularmente da sua flor (ver Figura 6), neste caso uma rosácea diedral com três simetrias de reflexão e três simetrias de rotação.

Figura 6: Iris.

Algumas outras flores representam uma rotação cíclica, isto é, admitem simetrias de rotação sem simetrias de reflexão, como no caso da vinca-de-Madagáscar (ver Figura 7), com pétalas assimétricas (Weyl, 2017/1952).

Figura 7: Vinca-de-Madagáscar.

O questionamento em relação às conceções anteriores dos futuros professores gerou um aprofundamento do conhecimento matemático e o reconhecimento de simetrias axiais e rotacionais em diversos contextos matemáticos e não matemáticos.

Frisos: Definição, Representações e Deslocações Ritmadas

Os frisos são "padrões com simetria de translação numa direção" (Farmer, 1999, p. 59), "potencialmente infinitos, pelo menos numa certa direção" (Weyl, 1952, 2017, p. 60). A caracterização do friso como motivo unidimensional é obviamente um conceito, pois "é claro que os verdadeiros ornamentos de frisos não são estritamente unidimensionais, mas a sua simetria, (…), utiliza apenas a sua dimensão longitudinal" (Weyl, 2017/1952, p. 56).

O friso deve ser entendido como algo infinito numa dimensão, o que verdadeiramente não existe, apenas é concebido como hipótese. Neste sentido, partir da natureza poderá constituir uma limitação para a classificação dos frisos nas sete categorias existentes do ponto de vista da matemática. A centopeia (ver Figura 8) é entre os animais aquele que poderá desencadear uma interessante discussão sobre a forma repetível do seu corpo.

Figura 8: Centopeia.

Ao imaginar o *caminhar* da centopeia, podemos constituir o friso dessa caminhada, originando, assim, um percurso tendencialmente infinito. A existência de friso na natureza é ilustrada por Weyl (2017/1952) ao referir que "o rebento de (…) uma *Angraecum distichum* (ver Figura 9) podem servir de exemplo. [Neste] (…) caso, a translação é acompanhada por reflexão de deslocamento longitudinal" (p. 59-60).

Figura 9: *Angraecum distichum* (Orquídea).

O estudo dos frisos deve atender à célula do friso, mas também ao facto do friso constituir um objeto rígido, o qual deverá ser assumido como um todo, não permitindo classificações associadas a rotações de amplitudes distintas de meia volta ou de volta inteira. Trata-se de uma "repetição unidimensional no *tempo* a intervalos iguais é o princípio musical do *ritmo*" Weyl (2017/1952, p. 60).

O estudo das simetrias, que deixam o friso globalmente invariante, em que existe uma dimensão potencialmente infinita, no qual se deve ter "em mente que a faixa [friso] é tratada como se fosse um objeto rígido. Assim, a translação, rotação, reflexão ou reflexão deslizante aplicam-se a toda a faixa, e não só às pequenas figuras que a compõem" (Farmer, 1999, p. 60). A rotação e a translação são isometrias diretas, movimento rígido no plano, respetivamente com e sem ponto fixo, e a reflexão e a reflexão deslizantes são isometrias opostas, respetivamente com e sem ponto fixo, dado que os seus movimentos rígidos *saem* das duas dimensões do plano (Carvalho, Santos, Silva & Teixeira, 2016).

Apesar do friso dever ser sempre entendido como um todo (ver Figura 10), a classificação dos frisos nas sete categorias deve atender à existência da célula do friso (ver Figura 11), motivo que reconstrói o friso apenas por translações, e ao motivo mínimo do friso (ver Figura 12), motivo que reconstrói o friso por reflexões, reflexões deslizantes (composições comutativas de reflexão com translação, em que a direção do vetor da translação é paralela à direção do eixo de reflexão), rotações e translações.

Figura 10: Friso tendencialmente infinito unidimensional (Friso Grego Antigo).

Figura 11: Possível célula do friso.

Figura 12: Motivo mínimo do friso.

A identificação da célula do friso e a constatação da existência de reflexões verticais, horizontais e rotações de meia volta, não apresentam dificuldades significativas. Recordo que uma rotação de um quarto de volta ou de três quartos de volta, por exemplo, da célula, originava uma rotação do friso na perpendicular em relação ao original, dado tratar-se de um objeto rígido, o que não reproduziria a invariância global do friso, não sendo assim uma simetria. A classificação de frisos sem reflexões horizontais, mas com reflexões deslizantes (ver Figura 13), de entre os sete tipos de frisos, geraram maior discussão por se tratar de um friso que desliza em dois tempos.

Figura 13: Friso com reflexão deslizante (calçada de Lisboa).

Os futuros professores identificaram com facilidade a reflexão vertical e a ausência de reflexão horizontal, “acho que tem um eixo vertical (…) e depois não tem eixo horizontal" [Isabel, 2016], "tem uma reflexão vertical (…) e também há de ter uma rotação de 360º" [Anabela, 2017], mas mostraram maior dificuldade na identificação da reflexão deslizante, "tem uma horizontal deslizante (…) vai para baixo e desliza um bocadinho" [Carla, 2016], "uma reflexão [vertical] e uma reflexão deslizante" [Anabela, 2017]. A identificação da célula do friso é um auxiliar importante na classificação dos frisos, contudo o friso é um todo e não é reduzível à reprodução de uma figura finita plana (apenas com reflexões verticais e horizontais e rotações) por translações. Os frisos com reflexões deslizantes têm ao mesmo tempo uma deslocação vetorial relativa à translação e uma deslocação vetorial relativa à reflexão deslizante.

Existem outros frisos que, não tendo necessariamente reflexões deslizantes, constituem uma dificuldade expressa da classificação do friso (ver Figura 14), sem atender à irregularidade da faixa de fundo, em função da *escolha* da célula.

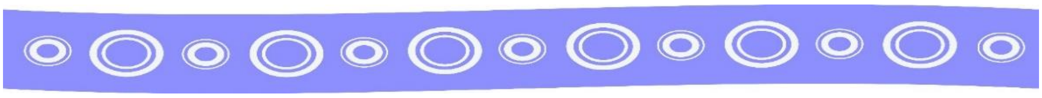

Figura 14: Friso com reflexões verticais, horizontais e meia volta.

Os futuros professores começaram por identificar apenas uma reflexão horizontal, "não tem reflexão vertical, tem horizontal e não tem rotação" [Sandra, 2016], "não tem nada, só tem horizontal" [Anabela, 2017], em resultado das dimensões distintas dos círculos (ou das circunferências) e da escolha da célula constituída por um círculo pequeno e um círculo grande, ou reconhecer apenas reflexões verticais, "tem vertical [Amélia, 2016]". A identificação da célula do friso gerou um maior conhecimento sobre o mesmo, "uma [circunferência] inteira e duas metades, assim já tem" [Hélia, 2016], gerando uma correta classificação do friso, "para mim tem tudo" [Carla, 2016].

Os futuros professores reconheceram a existência de reflexões verticais considerando o friso uma única peça, um objeto rígido, assumindo, neste caso, por eixos verticais os diâmetros de ambas as circunferências perpendiculares à direção do deslocamento vetorial. A consideração da célula, abstraída do friso, "eu pensava que era para esquecermos o friso e pensar só na nossa célula" [Anabela, 2017], nestes caso em que admite dois eixos verticais *distintos*, pode gerar uma incorreta classificação, como no caso de se optar por uma célula constituída por um círculo pequeno e um círculo grande.

Os futuros professores classificaram diferentes tipos de frisos e desenvolveram atividades de geração de novas composições de frisos, a partir de um friso existente, por variação das regras dos grupos de simetrias (Pires, Silva, Alves, Dametto & Vecchia, 2013). Esta abordagem foi desenvolvida por uma futura professora a partir de frisos dos gradeamentos dos balcões de varandas de estilo pombalino (século XVIII), destacando a importância da relação com os artefactos culturais na construção do conhecimento matemático:

> *“Este olhar diferente para diversos elementos nomeadamente gradeamentos, azulejos, portões, portas, máscaras, tecidos, entre outros, tanto em contexto de sala de aula como fora desta, foi um aspeto fundamental e potenciador de aprendizagens, uma vez que todos eles permitiam momentos de análise e de discussão permitindo uma aprendizagem constante”.* [Carla, 2016]

Uma diferente abordagem é começar por identificar se existe meia volta (simetria de rotação de 180º), rodando a figura (imaginar a figura de *pernas ao ar*), verificar se a sua configuração não se altera e, após a identificação ou não da meia volta, discutir a existência de reflexões verticais, horizontais ou deslizantes (Teixeira, 2014). Decorrente da análise dos frisos, os futuros professores identificaram a existência de meia volta, rodando a figura, através da verificação da manutenção da configuração global e, após a identificação ou não da meia volta, discutiram a existência de reflexões verticais, horizontais ou deslizantes.

O estudo dos frisos deve atender à célula, mas também ao facto do friso constituir um objeto rígido, o qual deverá ser assumido como um todo, evitando classificações, possíveis na figura plana finita da célula, associadas a rotações de amplitudes distintas de meia volta e, naturalmente, de volta inteira. Os futuros professores manifestaram maiores dificuldades nos frisos com reflexões deslizantes ou os que admitem distintos eixos de reflexão vertical por requerem igualmente um olhar global atendendo à rigidez da sequência de imagens.

Padrões: Definição, Representações e Rotações Iniciais

Os padrões (ou papel de parede) “com simetrias de translação em duas direções diferentes” (Farmer, 1999, p. 65) são motivos (célula de malha), repetidos em duas direções distintas, cujos vetores das translações estruturam uma rede retangular, quadrada ou rômbica (Veloso, 2012). A identificação de padrões conjuga a identificação da célula da malha, tendo presente o pavimento como um objeto rígido que se movimenta globalmente, em torno de movimentos rotacionais.

Deste modo, começar por discutir como será possível *rodar o pavimento* de um *favo de mel* (ver Figura 15) para que *tudo fique na mesma*, constitui um desafio inicial na classificação de padrões, com mosaicos hexagonais (Frabetti, 2016).

Figura 15: Favo de mel.

Os padrões criados pelo homem, na sua conjugação com a natureza e o cultivo agrícola (ver Figura 16), poderão ser um ponto de partida para uma abordagem significativa dos padrões, enquadrada em conteúdos das ciências naturais.

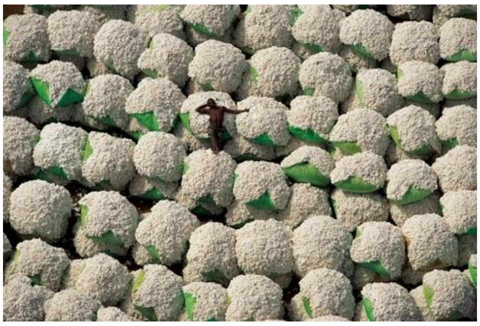

Figura 16: Algodão, A Terra vista do Céu, fotógrafo Yann Arthus-Bertrand.

A integração das imagens neste estudo sobre simetrias também pode motivar os alunos a redescobrirem a sua localidade, do ponto de vista da natureza e do ponto de vista social e artística, constatando que vivemos num mundo geométrico. Como referem os futuros professores, “é fácil trazer a matemática que nos rodeia para dentro da sala de aula, é necessário olhar ao nosso redor e arranjar estratégias para que os alunos adquiram aprendizagens significativas” [Ana, 2017], sendo que “os alunos compreenderem a realidade que os envolve é uma das condições para compreender a aplicabilidade da matemática e para facilitar o processo ensino-aprendizagem das transformações geométricas” [David, 2017].

Numa investigação de Viseu, Menezes e Almeida (2013) com professores do 1.º ciclo do ensino básico, os “professores do estudo reconhecem a noção de figura padrão de uma pavimentação mas não identificam as transformações geométricas necessárias para pavimentar o plano” (p. 175), quando solicitados a delimitar a unidade padrão na pavimentação (ver Figura 17) e a referir como se obtém a pavimentação.

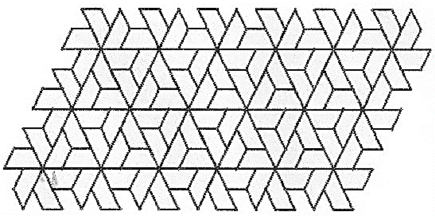

Figura 17: Pavimentação (Viseu et al, 2013, p. 163).

Os futuros professores identificaram como figura padrão um trapézio, a figura composta por seis trapézios (hélice/flor) ou o triângulo (composição de três trapézios), tal como no caso dos professores, e o losango (dois triângulos com seis trapézios), como célula de malha. Estes reconstruíram o padrão a partir de translações em duas direções (horizontal e oblíqua), a partir da hélice e do losango, denotando um conhecimento da estrutura de um padrão. Contudo, apresentaram alguma dificuldade ao delimitar a dimensão dos vetores de translação:

> *“Anabela: – Do centro de uma* [flor/hélice] *até ao centro da outra? Não é do centro até ao fim? Eu só quero andar o bocadinho que elas estão encaixadas.*
>
> *Professor: – Elas* [as flores/hélices] *têm de se deslocar até sobreporem-se na próxima. Eu estava a falar do centro, mas pode ser de uma ponta a outra.*
>
> *Anabela: – Mas eu fiz do centro a uma ponta.*
>
> *Professor: – A deslocação do centro para a ponta, quer dizer que o centro vai para a ponta.*

Anabela: – Pois não, tem de ser até ao centro. [2017]”

Porém, no questionamento sobre a identificação da célula da malha de padrões de azulejos de inspiração árabe, sem atender às cores, os futuros professores revelaram dificuldades na comunicação matemática especifica a propósito do padrão representado (ver Figura 18): “Um quadrado (…) tem como vértice o centro das flores (…) o centro do quadrado é o centro da flor” [Isabel, 2016] – “Um vértice nas coisinhas azuis (…), essas coisinhas azuis fora da flor (…) e vai ter ao outro vértice da coisinha azul da flor que está ao lado” [Ricardo, 2016].

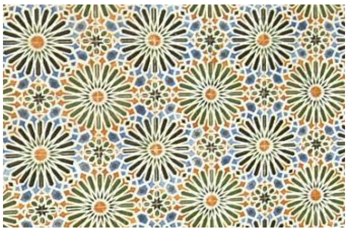

Figura 18: Padrão (Gare Silves).

Figura 19: Plano da célula da malha.

A tentativa de identificar uma célula de malha menor originou a identificação da região do plano contido na célula da malha (ver Figura 19), a partir do qual se constrói o padrão com outras simetrias para além das translações:

“Carla: – Tenho uma peça pequenina (…) dois vértices no centro das flores e dois vértices nas estrelinhas alternadamente.

Professor: – Será que reproduz?

Carla: – Não reproduz nada (…) tem de ser refletido. [2016]”

Neste caso, o motivo mínimo deste padrão ou unidade básica para todas as simetrias, sem atender às cores, seria um quarto do azulejo (ver Figura 19), triângulo retângulo isósceles com a hipotenusa num dos lados do quadrado e o vértice oposto na interseção das diagonais do quadrado. De igual modo, os padrões que ilusoriamente traduzem tridimensionalidade (ver Figura 20), originaram uma incorreta identificação da malha retangular, quadrada ou rômbica: “Fiz um paralelepípedo e depois repete-se. Do meio até ao meio” [Anabela, 2017].

Figura 20: Pavimento bidimensional com ilusão ótica tridimensional.

A classificação dos dezassete tipos de padrões deve ter em conta todo o pavimento, começando-se por identificar “a menor simetria de rotação medida como fração de uma volta completa” (Farmer, 1999, p. 85), a existência de reflexões e os centros de rotação. A presença dos dezassete tipos de pavimentação na decoração geométrica do Alhambra, em Granada, manifesta a crença da existência da unidade dentro da multiplicidade (Pérez Gómez, 2004), numa visão integradora das possíveis pavimentações geométricas.

O estudo das transformações geométricas resultou num treinar do olhar matemático, sobre o mundo, para estes futuros professores, “treinar o olhar torna-se uma ferramenta quase essencial para despertar a curiosidade e o interesse simultâneo em assuntos que à partida nada teriam em comum” [Hélia, 2016], o que originou um olhar distinto sobre a produção cultural da sociedade, como referem Lopes, Alves e Ferreira (2015), “a percepção de padrões simétricos em traços arquitetónicos e nas artes é reflexo da produção cultural de uma sociedade” (p. 570). Esta perspetiva foi assumida pelos futuros professores, “partir desse elemento particular da arquitetura algarvia [chaminés algarvias], não só permite uma maior contextualização do trabalho, como ao mesmo tempo é dada uma relevância aos aspetos culturais, que muitas vezes são esquecidos ou colocados de parte” [Sandra, 2016].

A identificação de padrões decorre da conjugação da identificação da célula da malha, tendo presente o pavimento como um objeto rígido que se movimenta globalmente, em torno de movimentos rotacionais, de um sexto de volta, de um quarto de volta, de um terço de volta, de meia volta e de volta inteira. Os futuros professores manifestaram dificuldades na classificação de padrões, especialmente quando estes têm centros de rotação para além dos eixos de reflexão.

Fecho: Destaques

A redução das conceções dos futuros professores às tradicionais simetrias axiais duma figura plana ilustrou a necessidade de formação complementar sobre transformações geométricas. As práticas matemáticas constantes de transformação de uma figura através de simetrias de reflexão parecem sobrepor-se ao conceito de simetria, ofuscando as simetrias de rotação e de translação.

A análise de situações extremas, como as relacionadas com segmentos de reta, origina um aprofundamento do conceito de simetria e de rosácea e uma valorização do conhecimento matemático. A exploração de rosáceas distintas da *forma circular* constituiu uma abordagem que reforçou o conhecimento da definição e da identificação de rosáceas cíclicas e diedrais em contextos naturais e artísticos, valorizando o olhar matemático sobre a natureza e os artefactos culturais.

Os frisos com dois movimentos de translação (translação e reflexão deslizante) e com dois eixos de reflexão vertical apresentaram dificuldades acrescidas aos futuros professores na sua classificação. O estudo global dos frisos deve atender ao movimento rígido e global das imagens, como forma de não incorrer na redução do friso a uma possível célula, figura plana finita, a qual poderá admitir simetrias de rotações inexistentes no friso como uma peça única.

A identificação da possível célula da malha dum padrão e a respetiva comunicação das suas características constituiu um entrave à identificação dos padrões, devendo valorizar um olhar global sobre o padrão. Neste sentido, a discussão sobre as características do padrão deverá se iniciar pela identificação de simetrias de rotação e, posteriormente, de reflexão e de reflexão deslizante.

O reforço do conhecimento matemático dos futuros professores resultou de uma diversidade de exemplos de simetrias, em rosáceas, frisos e padrões. A exploração de rosáceas distintas entre as flores ou de frisos em animais ou plantas, bem como de padrões no habitat ou no cultivo, pode constituir um ponto de partida e de ligação entre os dois conhecimentos, através da integração de objetivos das aprendizagens essenciais da matemática e das ciências naturais baseadas no perfil dos alunos.

Referências Bibliográficas

Bellingeri, P., Dedò, M., di Sieno, S. & Turrini, C. (2003). *O ritmo das formas*. Lisboa: Atractor.

Barroso, I. & Galvão, M. E. (2017). Um estudo sobre os conhecimentos dos professores de matemática para o ensino das transformações geométricas. *In Libro de actas do VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática,* CB 974 (pp. 452-460). Madrid, España: Federación Iberoamericana de Educación Matemática.

Bastos, R. (2007). Transformações Geométricas. *Educação e Matemática*, 94, 23-27.

Batista, D.; Guerreiro, A. e Lopes, A. (2015). Arte Contemporânea no Ensino das Transformações Geométricas. *Educação e Matemática,* 131*,*38-44.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Porto: Porto editora.

Carvalho, A., Santos, C. P., Silva, J. N., & Teixeira, R. C. (2016). Pisando Arte e Matemática em Lisboa. *Convocarte – Revista de Ciências da Arte*, 2, 136-159.

Devlin, K. (2002). *Matemática: A ciência dos padrões*. Porto: porto Editora.

Farmer, D. W. (1999). *Grupos e Simetria. Um guia para descobrir a matemática*. Lisboa: Gradiva.

Fernandes, C., Rebelo, M. P., & Simões, C. (2017). Ensino de simetrias através da arte, da cultura e do património: uma formação de professores do 1.º ciclo. *In Libro de actas do VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática,* CB 260 (pp. 257-266). Madrid, España: Federación Iberoamericana de Educación Matemática.

Frabetti, C. (2016). *A matemática da natureza. A natureza da matemática*. Porto: Cofina Media.

Goetz, J. & LeCompte, M (1984). Analysis and Interpretation of Data. *Ethnography and Qualitative Design in Educational Research*. (pp. 164-207). *Orlando*: Academic Press, Inc.

Gomes, A. (2012). Transformações geométricas: conhecimentos e dificuldades de futuros professores. *In Pinto, H., Jacinto, H., Henriques, A., Silvestre, A. & Nunes, C. (Orgs.), Atas do XXIII seminário de investigação em educação matemática* (pp. 233-244). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Lopes, L., Alves, G., Ferreira, A. (2015). A Simetria nas Aulas de Matemática: uma proposta investigativa. *Educação & Realidade*, *40*(2), 549-572.

ME – Ministério da Educação (2017). *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória*. Lisboa: ME.

ME – Ministério da Educação (2018). *Aprendizagens Essenciais – Ensino Básico – Matemática (6.º ano)*. Lisboa: ME.

Pérez Gómez, R. (2004). Un matemático pasea por la Alhambra. In *Semana Europea para la Ciencia y la Tecnología 2004* (pp. 31–48).

Pires, J., Silva, A., Alves, C., Dametto, A. & Vecchia, L. (2013). Padrões de Simetrias e Recursão em Ladrilhos Hidráulicos e Bandeiras: Exercícios Didáticos e Construção de Conhecimento Sobre Patrimônio Histórico. *XVII Conference of the Iberoamerican Society of Digital Graphics: Knowledge-based design.* Valparaíso: UTFSM.

Teixeira, R. C. (2014). As simetrias que podemos encontrar num passeio em calçada. *Atlântico Expresso* (15 de dezembro), 17

Veloso, E. (2012). *Simetria e Transformações Geométricas*. Lisboa: APM

Viseu, F., Menezes, L. & Almeida, J. (2013). Conhecimento de geometria e perspetivas de professores do 1º ciclo do ensino básico sobre o seu ensino. *Revemat*. *08*(1), 156-178.

Weyl, H. (2017/1952). *Simetria*. Lisboa: Gradiva.