

# UTILIZAÇÃO REGULAR DO GEOGEBRA NOS PRIMEIROS ANOS DO ENSINO BÁSICO

**Cristina Loureiro**

CIED, Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Lisboa  
cristina@eselx.ipl.pt | ORCID 0000-0001-7343-6444

**Graça Pereira**

Agrupamento de Escola de Alapraia  
mgracabruno@gmail.com | ORCID 0000-0003-0096-7265

**Sandra Dias**

Agrupamento de Escolas Conde de Oeiras  
sandracgdias@gmail.com | ORCID 0000-0002-0004-5300

## Resumo

A utilização regular do GeoGebra nos 1.º e 2.º anos é o assunto do estudo que se apresenta neste texto e a sua pertinência justifica-se pelos contributos que poderá dar para o desenvolvimento profissional dos professores. Esta utilização sistemática tem sido desenvolvida no âmbito de um projeto cujo propósito é o acompanhamento, numa dinâmica de trabalho colaborativo, de experiências de utilização do GeoGebra realizadas por professores dos 1.º e 2.º ciclos do Ensino Básico. Neste artigo são apresentados alguns resultados da experiência que permitiu construir um referencial de utilização regular deste recurso tecnológico. Para o obter foi seguida uma metodologia de análise de descrições de aplicação de tarefas ao longo de um período de tempo alargado. O referencial obtido evidencia a flexibilidade de abordagem dos conteúdos curriculares, o papel das conexões matemáticas internas e a visualização. A descrição reflexiva que se apresenta procura destacar aspetos relevantes das potencialidades de utilização curricular do GeoGebra nos primeiros anos e da sua profunda associação ao desenho das tarefas de aprendizagem e ao conhecimento matemático do professor.

**Palavras-chave:** GeoGebra; Tarefas; Conexões; Flexibilidade; Trabalho Colaborativo.

## Abstract

The regular use of GeoGebra in the 1st and 2nd grades is the subject of the study

presented in this text and its relevance is justified by the contributions it can offer to teachers professional development. This systematic use has been developed within the scope of a project whose purpose is to monitor, in a dynamic of collaborative work, experiences of using GeoGebra carried out by teachers of the 1st and 2nd cycles of Basic Education. This article presents some results of the experience that allowed us to build a framework for the regular use of this technological resource. To obtain this, the methodology followed was to analyze descriptions of tasks applied over an extended period of time. The framework obtained highlights the flexible approach to curricular contents, the role of internal mathematical connections and visualization. The reflective description that is presented seeks to highlight relevant aspects of the potential for curricular use of GeoGebra in the early years and its deep association with the design of learning tasks and with the teacher's mathematical knowledge.

**Keywords:** GeoGebra; Tasks; Connections; Flexibility; Collaborative work.

## Apresentação

*Dinâmico é o contrário de estático. Dinâmico indica ação, energia, e mesmo vibração. A geometria dinâmica é uma geometria ativa, investigativa, levada a cabo com a ajuda de programas de computador interativos.*

King e Schattschneider, 2000, p. 8

Os ambientes de geometria dinâmica constituem um forte desafio para a aprendizagem da matemática. Por um lado, oferecem ferramentas de construção geométrica poderosas e dinâmicas, de grande facilidade de utilização. Por outro, possibilitam um papel significativo e ímpar para a utilização de raciocínios visuais, acessíveis a crianças pequenas. James King e Doris Schattschneider (2000) defendem que “o software de geometria dinâmica pode ser utilizado como um processo de visualização na aula de Matemática e não apenas no ensino da geometria” (p. 11). Segundo estes autores, os alunos podem construir, rever e modificar de forma contínua construções geométricas. Nestes processos ativos de alteração de representações, a visualização é uma ferramenta poderosa da resolução de problemas e na realização de explorações matemáticas. Um dos desafios que estas novas possibilidades colocam é o desenho de tarefas e de situações problemáticas de aprendizagem (Laborde, 1998).

Os programas de geometria dinâmica estão acessíveis há mais de duas décadas, no entanto muitos professores dos primeiros anos, com quem nos temos cruzado em



várias ações de formação realizadas nos últimos anos, expressam frequentemente as suas dificuldades e falta de conhecimento para avançar com a utilização deste recurso nas suas práticas curriculares. Porém, o documento das novas Aprendizagens Essenciais preconiza explicitamente que devem ser proporcionadas aos alunos experiências de aprendizagem com recurso a um ambiente de geometria dinâmica (AGD). Estas indicações são dadas com exemplos concretos de explorações de natureza diversa em todos os anos de escolaridade, a partir do 3.º ano de escolaridade (Canavarro et al., 2021). Consideramos, por isso, útil realizar e divulgar experiências curriculares sobre a utilização de ambientes de geometria dinâmica, procurando contribuir para o desenvolvimento da utilização destes recursos desde os primeiros anos de escolaridade.

De entre os AGD mais conhecidos, o GeoGebra destaca-se por ser um programa de acesso livre, em todos os dispositivos comuns, cujas ferramentas de construção são de utilização muito intuitiva (<https://www.geogebra.org/>). Este programa está organizado em vários ecrãs que permitem que seja transparente a ligação entre as representações geométricas (visuais) e as representações algébricas (analíticas) e, também, o trabalho simultâneo a duas e três dimensões. Além disso, este programa tem constituído um banco de construções que podem ser partilhadas e acedidas livremente (<https://www.geogebra.org/materials>). Este repositório de materiais está em permanente desenvolvimento. Consideramos estas razões intrínsecas às características do ambiente dinâmica como justificativas da opção pela sua utilização nos primeiros anos.

Além destas razões exteriores, a utilização do GeoGebra constitui um interesse especial de trabalho para as autoras deste texto. Este AGD tem sido, desde há vários anos, utilizado regularmente nas nossas práticas letivas e em diversas ações de formação de que temos sido formadoras. Atualmente fazemos parte da equipa de um projeto cujo propósito é o acompanhamento de várias experiências de utilização curricular do GeoGebra no ensino básico — Aproximações à utilização do GeoGebra nos 1.º e 2.º ciclos. O trabalho que agora apresentamos corresponde, assim, a um novo ciclo dos nossos estudos e investigações, em que, para além de alargar as experiências realizadas em sala de aula nos primeiros anos de escolaridade, desde o 1.º ao 6.º ano, pretendemos aprofundar e ampliar a divulgação desta utilização.

O texto é constituído por quatro partes fundamentais. Uma primeira parte, que contextualiza este trabalho no âmbito de um projeto mais alargado que envolve outros professores, e apresenta alguns fundamentos teóricos do projeto. Seguem-se, a

descrição de aspetos metodológicos e a caracterização da prática de utilização da professora responsável por esta experiência regular de utilização do GeoGebra, e depois, na quarta parte, a descrição de dois percursos significativos para o conhecimento sobre esta utilização. Para finalizar apresentamos um conjunto de reflexões, procurando relacionar esta experiência com a orientação do projeto em que se insere.

### **Enquadramento desta Experiência**

O propósito do projeto em que este trabalho se insere é estudar como é que os professores desenvolvem experiências de utilização do GeoGebra integrando-as na sua prática profissional e no seu desenvolvimento profissional. Estas experiências decorrem no âmbito de um grupo colaborativo dinamizado pela coordenadora do projeto. Este projeto tem por base três princípios orientadores: 1) Responsabilização dos professores pelo seu desenvolvimento profissional com forte investimento em áreas de fragilidade do ponto de vista científico, neste caso a Geometria; 2) Valorização de um trabalho colaborativo de partilha e reflexão sobre o desenvolvimento curricular que cada professor ou grupo de professores realiza; 3) Assunção de que os professores aprendem matemática através do ensino. As experiências que são acompanhadas decorrem no âmbito de um grupo colaborativo, dinamizado pela coordenadora do projeto e coautora deste texto. A equipa do projeto *Aproximações* é constituída por um grupo de professores muito interessados em realizar e partilhar experiências curriculares de utilização do GeoGebra em sala de aula. Todos estes professores têm uma larga experiência profissional e são muito empenhados na sua autoformação e no seu desenvolvimento profissional. Todos valorizam práticas de trabalho colaborativo, mesmo quando trabalham sozinhos nas suas escolas. Além disso, são professores que assumem práticas de ensino de orientação construtivista e que reconhecem a importância decisiva das tarefas na aprendizagem da matemática. Acresce ainda que estes professores assumem a Geometria como uma das suas áreas mais frágeis de conhecimento matemático para ensinar.

A equipa do projeto, da qual fazem parte as autoras deste texto, é bastante diversificada e inclui nove professores do 1.º ciclo, ligados a todos os anos de escolaridade, quatro professores do 2.º ciclo e duas educadoras matemáticas. O projeto acompanha todo o decorrer do ano letivo, ao longo do qual decorrem várias sessões de partilha de experiências e materiais e de reflexão conjunta. O projeto iniciou-se no



princípio do ano letivo 2021-22 após a realização de uma ação de formação longa, sobre a utilização do GeoGebra, de que foram formadoras duas das autoras deste texto, e na qual participaram todos os professores que integram a equipa do projeto.

As orientações deste projeto são enquadradas teoricamente por um conjunto diversificado de resultados de investigação dos quais se destaca o desenvolvimento do conhecimento profissional dos professores com especial foco no conhecimento matemático para ensinar. O conhecimento profissional dos professores é reconhecido por vários autores como uma mais-valia fundamental para o desenvolvimento educativo (cf. Stein et al., 1999). Hargreaves e Fullan (2012) estabelecem o conceito de capital profissional e consideram-no como estratégico para transformar o ensino nas escolas. Esta visão estratégica assume que ensinar é uma performance individual e coletiva, que cresce em qualidade ao longo de toda a vida profissional do professor, num processo de desenvolvimento, circulação e reinvestimento profissional. Nesta estratégia de capital social, estes autores identificam duas componentes a construir simultaneamente, a eficácia individual e a coletiva, ligadas por vínculos de responsabilidade que ajudam os membros de uma equipa a melhorar a sua prática. Além disso, defendem que uma colaboração efetiva pode alimentar uma forma de cultura profissional necessária para manter este capital profissional dos professores em desenvolvimento ao longo do tempo (Fullan et al., 2015).

Uma das componentes deste conhecimento profissional é o conhecimento matemático para ensinar. Ron Tzur considera esta componente como um foco de desenvolvimento importante a partir do próprio ensino do professor e define o conceito de Learning Through Teaching Mathematics (LTT), (Tzur, 2010). Com base em várias investigações (Leikin & Zazkis, 2007) e nos seus trabalhos, este investigador defende que os professores podem aprender e reaprender matemática refletindo sobre o trabalho dos alunos em resposta às atividades que para eles planeiam. Considera as tarefas que os professores usam para envolver ativamente os seus alunos na aprendizagem da matemática como uma fonte natural para o seu desenvolvimento profissional e discute a importância da antecipação e da reflexão. Além disso, os novos esquemas matemáticos de que os professores se apropriam permitem potenciar o seu conhecimento matemático para ensinar. Neste enquadramento de melhoria, Ron Tzur evidencia o papel significativo das situações inesperadas, a abertura para as encarar e a importância da reflexão sobre elas com os seus pares e com educadores matemáticos.

Segundo Tzur (2010) há dois tipos de comparações produtivas de conhecimento

matemático para ensinar: tipo 1 - comparação entre as respostas antecipadas e as respostas inesperadas, para uma determinada tarefa; tipo 2 - comparação entre tarefas que o professor já utilizou com um grupo específico de alunos e novas tarefas propostas com um novo objetivo específico. Com base neste referencial, reflexões realizadas num contexto de trabalho colaborativo encaminham-nos para uma possibilidade de utilização de tarefas por professores distintos em momentos curriculares diversos. Além disso, conferem um valor especial à realização de novas tarefas com recurso a novos recursos tecnológicos em que a dimensão do desconhecido é grande e, por isso, as situações inesperadas são muito frequentes.

## **Metodologia**

Nesta fase de desenvolvimento do projeto já foi possível identificar e caracterizar diferentes tipos de utilização do GeoGebra: utilização regular do GeoGebra; utilização pontual para resolução de tarefas isoladas de Geometria, em que os alunos realizam e exploram construções geométricas feitas por si próprios; utilização pontual em tarefas isoladas, recorrendo a construções previamente construídas por outrem e partilhadas. Neste artigo focamo-nos apenas na experiência de utilização regular do GeoGebra, da responsabilidade de apenas uma das professoras participantes no projeto, e selecionamos dois conjuntos de tarefas significativas cuja análise ajudou a construir um referencial de utilização regular.

A professora responsável por esta experiência de utilização regular, segunda autora deste texto, é utilizadora do GeoGebra nas suas aulas há vários anos. No entanto, esta é a primeira experiência de utilização prolongada que a professora realiza e foi iniciada em 2020-21 com os alunos no 1.º ano de escolaridade. A intenção da professora é prolongar esta experiência até ao 4.º ano, completando assim, pela primeira vez, um ciclo completo de aprendizagem.

Para esta professora, a decisão de realizar esta experiência teve por base dois aspetos: um, relacionado com o recurso tecnológico que se previa mais acessível a todos os alunos, graças ao Plano de Transição Digital nas escolas e outro, o mais significativo, o potencial desta ferramenta, tanto a nível do ensino como da aprendizagem da geometria com forte influência na qualidade das aprendizagens dos alunos. Ao longo de quase dez anos de utilização desta ferramenta e, para além dos benefícios a nível da aprendizagem dos conteúdos, são inúmeras as vantagens identificadas por esta professora na sua utilização, entre as quais se destacam: o



envolvimento dos alunos, as interações que estabelecem, o desafio constante que possibilita e, não menos importante, o esbatimento das diferenças no ritmo de aprendizagem, nomeadamente, nos alunos que têm medidas seletivas de apoio à aprendizagem e inclusão. A facilidade na manipulação das ferramentas do GeoGebra aliada à destreza, cada vez maior, dos alunos mais novos, foi outro aspeto que influenciou a decisão de iniciar a experiência no 1.º ano de escolaridade.

Para esta professora, esta experiência constitui assim um novo patamar na utilização do GeoGebra. Decidimos identificá-la com a designação de regular e construir um referencial que permitisse caracterizá-la. Este referencial foi construído numa fase de consolidação da experiência, a meio do seu segundo ano, e teve por base a análise das descrições de realização de um conjunto significativo de tarefas com as crianças. Todas as tarefas tinham sido apresentadas nas sessões de trabalho colaborativo do projeto e os materiais divulgados a toda a equipa. Esta análise foi feita sob a forma de uma entrevista longa entre a coordenadora do projeto, coautora deste texto, e a professora responsável pela experiência. Esta entrevista decorreu em três momentos distintos, cada um deles focado nos seguintes aspetos: utilização de ferramentas GeoGebra, conjunto de tarefas sobre a reflexão (isometria) e conjunto de tarefas sobre sequências de figuras. Do ponto de vista metodológico é importante evidenciar que, antes da entrevista, a entrevistadora conhecia já muito bem as tarefas experimentadas e os episódios mais interessantes e ricos ocorridos durante a realização, porque tinha participado na descrição oral dos relatos feitos pela professora experimentadora e tinha acesso aos materiais pedagógicos. Este conhecimento aponta para uma natureza simultaneamente muito aberta e focada da entrevista. Aberta porque não existe um guião orientador previamente definido, focada porque se fixa numa tarefa ou conjunto particular de tarefas. Do ponto de vista do projeto em referência, consideramos estas entrevistas como diálogos reflexivos sobre as experiências realizadas. Com base na transcrição total dos três momentos da entrevista foram depois selecionados, em conjunto pelas duas (entrevistadora e entrevistada), os itens que constituem o referencial. Na apresentação do referencial cada item é ilustrado com extratos da entrevista realizada. Construimos assim uma caracterização ilustrada pela voz da professora responsável e todas as imagens apresentadas são da sua responsabilidade.

A abordagem metodológica para construir o referencial que apresentamos tem sido seguida também com as outras experiências acompanhadas no âmbito do projeto *Aproximações*. Esta estratégia de reflexão de segunda ordem tem conduzido à elaboração, em coautoria, de textos de análise e de reflexão sobre as experiências

acompanhadas e partilhadas oralmente nas sessões de trabalho dos participantes do projeto (Loureiro & Pereira, 2021, 2022; Loureiro & Dias, 2022).

### Um Referencial de Caracterização

O trabalho curricular da professora sobre a utilização do GeoGebra é orientado por um referencial de oito princípios, constituído por ideias chave, que estão presentes na sua prática profissional. Este referencial deve ser encarado de uma forma evolutiva e aberta.

1. Utilização sistemática do GGB, em momentos fixos da semana, e sem ligação exclusiva a nenhum tema do currículo.
2. Valorização dos conhecimentos dos alunos e da sua capacidade de partilha e desenvolvimento em grupo turma.
3. Utilização de guiões de exploração das ferramentas do GGB como ponto de partida e também como elemento de aprendizagem fundamental.
4. Valorização das intervenções das crianças para o professor definir o percurso de ensino.
5. Valorização do papel do professor e das questões que coloca aos alunos e da dinamização de discussões.
6. Construção de percursos de aprendizagem — sequenciação aberta de tarefas.
7. Perspetiva aberta e flexível do currículo com forte orientação de estabelecimento de conexões internas.
8. Associação da utilização de papel e lápis e de recursos manipuláveis físicos na exploração das tarefas.

Reconhecemos a importância deste referencial para nos ajudar a enquadrar esta utilização do GeoGebra e a melhor compreender as descrições que serão apresentadas. Os excertos do diálogo que levou à sistematização destas ideias são meramente ilustrativos e ajudam a caracterizar cada uma das componentes do referencial.

O primeiro aspeto a destacar é que o GeoGebra é trabalhado ao longo do ano letivo, semanalmente, num tempo de 90 minutos, em que os alunos utilizam *tablets* pessoais e há outros de recurso para algum aluno que não tenha dispositivo pessoal.

O dia do GeoGebra é um dia especial da semana. Os alunos nem falam noutras





aplicações. Já sabem que é o dia do GeoGebra e perguntam logo — professora é para abrir o GeoGebra? E eu sinto que eles estão muito mais autónomos este ano.

(Excerto da entrevista com a professora responsável)

Esta utilização sistemática tem por base a ideia que as crianças deste nível de ensino estão fortemente dependentes do ambiente e dos materiais à sua disposição (Pereira & Serrazina, 2015), a valorização dos conhecimentos dos alunos, a sua capacidade de interação e partilha e o desenvolvimento em grupo turma.

No final da exploração, eu pergunto sempre o que conseguiram fazer com a ferramenta. Eles vão dizendo e há sempre um que conseguiu ir um pouco mais longe. Vamos partilhando e eu registo o que fizeram com aquela ferramenta. Portanto, são eles próprios que vão orientando. Para que haja de facto conhecimento matemático, tem que haver momentos de pausa, momentos de reflexão e, no final, uma síntese daquilo que aprenderam. Há sempre essa síntese do que aprenderam e outra ideia importante é que há muitas coisas que eles aprendem por si.

(Excerto da entrevista com a professora responsável)

A exploração dos alunos, com uma vertente inicial livre é, posteriormente, orientada por um guião de exploração das ferramentas GeoGebra. Este ponto de partida para o conhecimento das possibilidades do programa e das suas ferramentas, sejam de construção geométrica ou outras, é assumido pela professora responsável como um elemento de aprendizagem fundamental, pois o programa incorpora conhecimento matemático que influencia o modo como os alunos constroem os conceitos (Pereira & Serrazina, 2015). A primeira intenção da professora é a orientação dos alunos para a aprendizagem matemática.

Tenho necessidade de elaborar o guião que é, precisamente, para os obrigar a parar naquele envolvimento e naquele entusiasmo todo e pensar naquilo que estão a fazer para dali construir algum conhecimento matemático. Na minha opinião, para eles, o computador e o *tablet* são jogos e, portanto, tudo é jogo, começando a encarar o GeoGebra ou qualquer coisa que façam também como um jogo. Por isso, acham piada, exploram, mexem. Fui sentindo a necessidade de ter algum suporte que os obrigue a parar, a pensar e a registar aquilo que vai acontecendo no computador, porque, se não, o entusiasmo é tanto que aquilo que eu quero que eles aprendam e que eles vejam ou a que estejam atentos passa-

lhes ao lado.

(Excerto da entrevista com a professora responsável)

Na figura 1 apresentamos o exemplo do primeiro guião usado no primeiro ano de escolaridade. Este guião, apresentado e lido pela professora, destaca a obrigatoriedade de registo de descobertas.

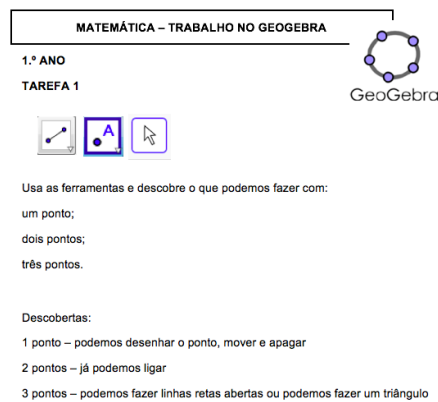


Figura 1 – Exemplo do primeiro guião usado no primeiro ano de escolaridade.

A orientação com que é elaborado cada guião está associada ao valor reconhecido às ferramentas que o GeoGebra coloca à disposição do utilizador e à sua íntima relação com a aprendizagem matemática.

Daí a minha persistência na utilização do GeoGebra como ferramenta de aprendizagem e como aprendizagem propriamente dita. Os alunos constroem conhecimentos com as ferramentas, uma vez que elas incorporam muitos conceitos matemáticos, e com as atividades que realizam com essas ferramentas.

(Excerto da entrevista com a professora responsável)

O fácil acesso e a simplicidade da utilização das ferramentas, além da sua natureza geométrica, promovem a autonomia dos alunos e constituem uma bússola de ensino para o professor. Com base nas explorações livres das crianças, feitas a partir do guião, o professor orienta a sua ação.

À medida que os alunos estão a explorar, vou circulando pelos lugares, vou vendo o que eles estão a fazer, vou ouvindo os seus comentários e vou retirando os aspetos que



considero importantes para aquilo que quero trabalhar com aquela ferramenta. Aconteceu isso com a ferramenta para construir reflexões e, em anos anteriores, também aconteceu com outras ferramentas, como por exemplo, com a circunferência, com a reta paralela, com a perpendicular, com o polígono regular. Apresentei sempre as ferramentas. Os alunos iam explorando livremente e eu ia vendo o que faziam e o que comentavam.

(Excerto da entrevista com a professora responsável)

O acompanhamento sistemático das explorações dos alunos constitui uma valorização do papel do professor e aponta uma atenção muito especial às questões que coloca, tanto na fase de resolução como na dinamização das discussões em grande grupo.

*Uau!* A Rita fez uma grande exclamação. Ficou muito admirada ao ver que clicando ali (na reta) aparecia a figura do outro lado. E quando ouvi é o reflexo não disse nada, deixei-os continuar. Fui passando por eles e perguntei: — *Então isso é o reflexo do quê? — É aquela figura que está aqui refletida, é como quando nós estamos ao espelho* – explicou. Depois foram relacionando o que faziam com o que acontecia no ecrã do *tablet*. No final da aula já abri o diálogo a todos os alunos, para ver se todos tinham visto acontecer aquilo que a Rita tinha identificado. A Rita foi a primeira que, ao experimentar, viu a reflexão acontecer.

(Excerto da entrevista com a professora responsável)

Mas o professor tem de os ir questionando também, porque se não houver uma intervenção no sentido de os orientar e, sobretudo, questionar, as coisas passam ao lado. Eles veem, mas se não se perguntar o que é e porque é que é, nem sequer refletem sobre o que veem acontecer, nem se constrói dali um conhecimento, que eles interiorizem como algo importante e algo que aprenderam.

(Excerto da entrevista com a professora responsável)

O desenvolvimento do trabalho é, assim, feito com base em percursos de aprendizagem constituídos por sequências abertas de tarefas. A partir de uma exploração de uma ferramenta e com base na manipulação e exploração dos alunos, o professor vai elaborando novas tarefas, fazendo uma gestão adaptada às aprendizagens que os alunos vão desenvolvendo. Aprendizagens essas que não se focam, apenas, nos objetivos e conteúdos específicos de um ano de escolaridade, mas envolvem o desenvolvimento de capacidades, conhecimentos e atitudes, numa lógica

de ciclo e de âmbito transversal. Esta dinâmica de trabalho, além de envolver fortemente os alunos na definição do percurso, permite aprofundar as aprendizagens de acordo com as suas capacidades.

E depois na tarefa seguinte podemos ver como pensei o guião a partir destas ideias e comentários da exploração livre. Eu nunca tinha feito este tipo de exploração da simetria de reflexão. E embora a dupla perspectiva da simetria fosse muito clara para mim, não tinha a expectativa que eles chegassem tão longe. Foi um trabalho que acabou por contemplar várias tarefas para que as aprendizagens fossem ficando consistentes.

(Excerto da entrevista com a professora responsável)

Este trabalho corresponde a uma assunção muito aberta do currículo do 1.º ciclo, valorizando a natureza flexível da sequenciação dos conteúdos, as muitas possibilidades das conexões internas na matemática e as aprendizagens ligadas às capacidades transversais, como é o caso da visualização.

De facto, a geometria dinâmica permitiu-me ir além do prescrito para o 1.º ano, relativamente às questões abordadas, e permitiria trabalhar muitas outras coisas. Houve outro aspeto que também foi muito interessante. Tem a ver com as potencialidades da visualização. Como o GeoGebra permite mudar o estilo e a cor dos vértices, isso ajudou-os muito a observar e a comparar as figuras. Se não fosse a geometria dinâmica e as suas possibilidades, duvido que miúdos tão pequenos conseguissem ficar despertos e conseguissem apropriar-se, ainda que informalmente, destas propriedades da reflexão.

(Excerto da entrevista com a professora responsável)

O GeoGebra não é assumido como o único recurso utilizado nesta prática. A sua utilização é associada ao recurso a registos de papel e lápis e também a diversos recursos manipuláveis físicos. Nos exemplos agora apresentados essa ligação está patente nos registos que os alunos fizeram. Em outras tarefas exploradas com o GeoGebra tem havido mesmo associação com recursos manipuláveis físicos, como por exemplo, as barras articuladas para construir polígonos ou os blocos padrão.

Parece-nos interessante estabelecer um paralelo entre alguns aspetos deste referencial desta prática de utilização do GeoGebra e as orientações metodológicas das Aprendizagens Essenciais para a Matemática no Ensino Básico (Canavarro et al., 2021). Neste paralelo destacamos a valorização das conexões internas e dos recursos



utilizados.

Os dois percursos de aprendizagem que iremos descrever decorreram durante o período da pandemia Covid-19, no ano letivo 20/21 e por isso, algumas tarefas foram realizadas, durante o segundo confinamento, em alguns momentos de ensino a distância, através da plataforma *Google Classroom*. A apresentação das tarefas ocorria em momentos síncronos, onde o esclarecimento e compreensão do que os alunos tinham de fazer assumia especial relevância. Posteriormente, em momentos assíncronos e, sob a orientação dos pais, os alunos realizavam a tarefa de acordo com as indicações, publicando, na plataforma, foto da resolução. Foi necessário fazer alguns momentos síncronos extra para responder a dúvidas que os alunos, através dos pais, colocavam. Na aula seguinte, novamente em momento síncrono, a professora partilhava alguns trabalhos que eram apresentados e discutidos com todos.

Segundo a professora, a experiência e o gosto pelo GeoGebra levou à sua utilização através da *Google Classroom*, pois embora fosse uma experiência nova para estes alunos, esta estratégia didática já tinha sido usada, no primeiro confinamento, com alunos do 4.º ano, em momentos de trabalho autónomo e em momentos síncronos. Esta utilização revelou-se uma ótima ferramenta para a continuidade da exploração de conteúdos de geometria e outros, onde a manipulação de materiais assumia especial importância. Houve mesmo que substituir os manipuláveis físicos pelos manipuláveis digitais, sem os quais teria sido impossível trabalhar os conteúdos com o mesmo envolvimento e compreensão a que os alunos estavam habituados, no ensino presencial. Este foi outro aspeto que influenciou a decisão de iniciar o trabalho com o GeoGebra logo no início do 1.º ano. Olhando para trás, é possível perceber quão importante foi este recurso nesta nova modalidade de ensino (E@D), não só no ensino e aprendizagem da matemática, mas também no apoio em tarefas de leitura e escrita onde, através da função do arrastamento, possibilitou a realização de tarefas de associação imagens-palavra, que eram elaboradas e disponibilizadas na *Google Classroom*.

### **Da Reflexão às Figuras com Simetria de Reflexão**

Este percurso de aprendizagem, desenvolvido no 1.º ano, partiu de uma tarefa realizada no E@D sobre “Volta, meia volta e quarto de volta”. Ouvindo, em momentos de apresentação/discussão coletiva dos trabalhos, os comentários e ideias dos alunos como “a imagem está virada para o lado contrário”, a professora decidiu avançar para o

desenvolvimento de tarefas onde essa ideia pudesse ser aprofundada. Optou pelas isometrias, usando a ferramenta do GeoGebra “reflexão em relação a um eixo”. Foram realizadas 4 tarefas no 1.º ano – da reflexão de um objeto (triângulo) até à identificação da isometria e propriedades da transformação geométrica, que foram continuadas no 2.º ano – das propriedades da reflexão, isometria, à simetria de reflexão — com a realização de mais duas.

### *Tarefa 1 – O que acontece ao triângulo?*

A tarefa, apresentada em aula síncrona, iniciou-se pela introdução de uma nova ferramenta do GeoGebra, polígono rígido, e pela comparação das funções desta com a outra já conhecida, polígono. Ambas as ferramentas permitem construir um polígono com um número de lados à escolha do utilizador. O que as distingue é que no caso do polígono rígido, como o próprio nome indica, depois de construído não é possível alterar as suas dimensões, só é possível rodá-lo ou fazê-lo deslizar no plano. Seguiu-se a observação do documento do GeoGebra (Figura 2) e foi dada aos alunos a possibilidade de analisarem os triângulos e relacionarem as diferentes posições com movimentos do próprio corpo, sendo validado pela observação da apresentação dinâmica da professora. No final, um aluno explicou a imagem, utilizando as expressões: quarto de volta, meia volta e volta completa.

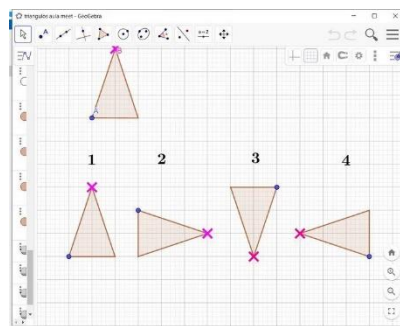


Figura 2 – Documento do GeoGebra.

### *Tarefa 2 – Exploração orientada da ferramenta "reflexão em relação a um eixo".*

A ferramenta foi apresentada, pela professora, no quadro interativo e à medida que a apresentava, os alunos iam acompanhando. Foi escolhido um triângulo para começar, porque era a figura que vinha sendo trabalhada em tarefas anteriores desde o início do ano. A professora desenhou um triângulo isósceles, fez uma reta e os alunos



acompanhavam, passo a passo. Seguiu-se a seleção da figura, e aí surgiu alguma dificuldade, pois nem todos sabiam como o fazer. No entanto, a interação é um aspeto muito importante nesta dinâmica de trabalho e os que já sabiam ajudavam os outros. Ultrapassada esta dificuldade, a professora explicou que deviam clicar na reta e observar o que acontecia (Figura 3). Os alunos viram a imagem refletida e foi aí que surgiram os primeiros comentários — *Ah! É o reflexo! Faz reflexo! Quando clico aqui (na reta) faz reflexo!* Depois foram experimentando e viram que havia algo que se mantinha. Mexiam no objeto e a imagem tinha um determinado comportamento. Ao mexerem na reta tinha outro comportamento. E falavam destas coisas. Foram dois blocos (cerca de noventa minutos) dedicados à exploração livre, pois não terminam as tarefas todos ao mesmo tempo. Enquanto uns conseguem fazer logo e acompanhar, outros nem por isso. Então uns ajudaram os outros e quando um número grande de alunos conseguiu fazer esta parte da tarefa, avançamos. Neste momento de exploração livre, o questionamento da professora sobre o que acontecia, porque acontecia, como tinham feito... esteve sempre presente e os comentários dos alunos reforçados e/ou colocados em discussão.



Figura 3 – Exemplo de exploração por uma criança.

### *Tarefa 3 – Exploração livre da ferramenta "reflexão em relação a um eixo"*

Na aula seguinte, foi retomada a tarefa de exploração livre da ferramenta. Os alunos desenharam figuras muito variadas e exploraram a reflexão dessas figuras (Figuras 4 a 6).



Figuras 4 e 5 – Desenho de figuras e exploração da sua reflexão pelos alunos.

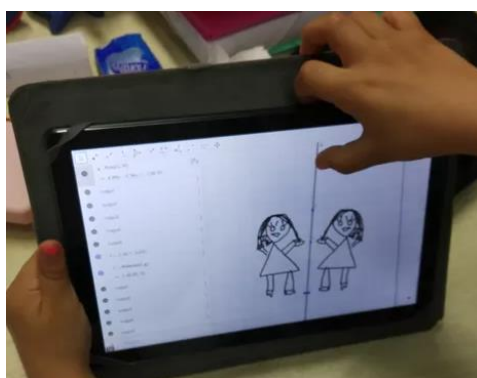


Figura 6 - Desenho de figuras e exploração da sua reflexão pelos alunos.

O sentido da descoberta e a vontade de experimentar são muito fortes nas crianças e, depois da representação de diferentes polígonos, vários alunos fizeram desenho livre. Moviam, arrastavam e tentavam repetir os movimentos que tinham experimentado com as figuras. Comentavam sobre o que viam acontecer e, no caso do desenho da figura 6, a aluna tentou fazer com a boneca o que um colega tinha feito com duas figuras. Esta aluna fez duas bonecas (sendo uma a reflexão da outra) e conseguiu sobrepor. Foi aqui que, na opinião da professora, ficou bastante vincada a questão de a imagem ser congruente ao objeto, tendo esta construção ajudado a reforçar bem essa ideia pois ao tentar sobrepor, a aluna concluiu que as bonecas coincidiam e, por isso, a imagem era mesmo igual.

Durante a experimentação e quando algum aluno fazia um comentário sobre o que estava a acontecer, esse comentário era colocado em discussão coletiva para que todos pudessem focar-se e observar as propriedades da reflexão, que estavam a interiorizar. Esta focagem da atenção para o que veem acontecer no ecrã do computador ou *tablet* é de especial importância, uma vez que a grande interação com





as figuras dinâmicas e a rapidez com que acontece, dificulta o acesso do professor a essas interações e ao conhecimento das aprendizagens realizadas pelos alunos.

No final destas explorações livres com recurso à ferramenta reflexão foram registadas as aprendizagens realizadas e que os alunos explicitaram:

- Quando movemos o triângulo, o que está refletido move-se no sentido contrário.
- Quando movemos a reta só move o reflexo.
- Se tentarmos mover o triângulo refletido, não dá.
- Quando fazemos a reflexão o triângulo fica à mesma distância da reta.
- A reta é como um espelho.
- Quando juntamos a reflexão com o triângulo, fica uma figura só. (Ainda com a reta no meio).
- Quando refletimos o triângulo, aparece do outro lado um triângulo igual. Só muda a posição.

As duas últimas conclusões são as mais significativas para a compreensão da reflexão como isometria e para a compreensão da simetria da figura. Como é referido ao longo do texto, o GeoGebra é um recurso poderosíssimo que influencia tanto o modo como se aprende como o modo como se ensina e, quando usado na resolução de tarefas mais exploratórias, como as aqui apresentadas, os alunos surpreendem-nos e vão muito mais além do que nós às vezes achamos ser possível.

Tratando-se de um 1.º ano, o facto de eles terem percebido que a distância da imagem e do objeto à reta é a mesma foi para a professora uma surpresa. Sobretudo porque eles chegaram lá sem lhes ser especificamente pedido, contrariamente a outras situações em que se lhes foca a atenção em determinado aspeto. E esta conclusão surgiu muito naturalmente, durante a conversa entre eles, quando estavam a aproximar e a afastar o objeto e a mover a reta para sobrepor objeto e imagem. O facto de terem tido isso em atenção, quando representaram no quadriculado, ou terem verificado que havia representações erradas devido a esse facto, foi surpreendente, pois não é muito habitual. Quando eles moviam a figura já observavam que o objeto vai num sentido e a outra figura, a imagem, vai em sentido contrário. Este facto de darem atenção à variação da distância à reta foi um aspeto, não esperado pela professora que mesmo sabendo que é uma das propriedades da reflexão, não teria abordado caso eles não tivessem descoberto naquela aula.

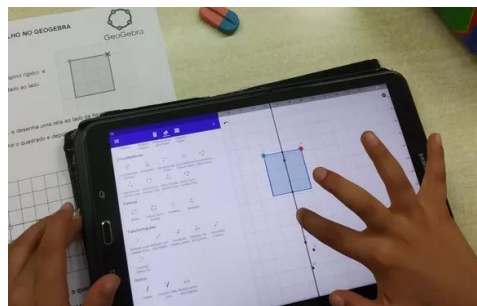
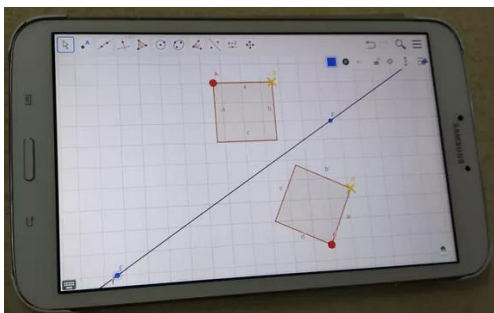
Na realização desta tarefa, surgiu outro aspeto muito significativo quando eles

tentaram sobrepor o objeto e a imagem e juntaram, sobre a reta, o ponto do objeto e o ponto da imagem. Muitos deles disseram que ali parecia uma figura só, com a reta no meio. A reta ficava no meio das duas figuras e sobre a reta ficavam pontos que coincidem, como o ponto azul da figura 8. A manipulação do eixo, arrastando com ele o objeto imagem, ajudou-os a experimentar o que aconteceria quando levassem a imagem a coincidir com o objeto. Foi assim que eles chegaram à simetria de uma figura e, neste caso, o quadrado foi muito importante porque permitiu que eles levassem a imagem a sobrepor-se ao objeto. Com os triângulos que representaram, que não tinham simetria, não poderia ter acontecido.

A partir desta apropriação dos alunos e das duas últimas aprendizagens acima registadas, (quando juntamos a reflexão com o triângulo, fica uma figura só, ainda com a reta no meio; quando refletimos o triângulo, aparece do outro lado um triângulo igual, só muda a posição), surgiu a decisão de lhes propor a tarefa 4 “Será mesmo igual?”, no sentido de aprofundar e avançar para a compreensão da simetria da figura.

#### *Tarefa 4 – Será mesmo igual?*

Esta tarefa tinha como propósito a confirmação da congruência de figuras, o objeto e a sua imagem, e foi usado o “polígono rígido”, pois este permite a sobreposição das figuras sem que elas se desmanchem pelo arrastamento (Figuras 7 e 8). Dessa forma, os alunos conseguem confirmar a congruência do objeto e da sua imagem, obtida pela reflexão. Com o quadrado foi fácil... Mais uma vez surgiu a discussão: “os vértices sobrepostos estão ao contrário”... “é mesmo assim porque senão não era reflexão”.



Figuras 7 e 8 – Utilização do “polígono rígido”.

O problema foi quando desenharam um trapézio sem nenhum eixo de simetria como mostra a figura 9. O diálogo com este aluno permite evidenciar a percepção que este aluno tem de que este quadrilátero tem alguma falha de simetria por comparação



com outros quadriláteros, como é o caso do retângulo.

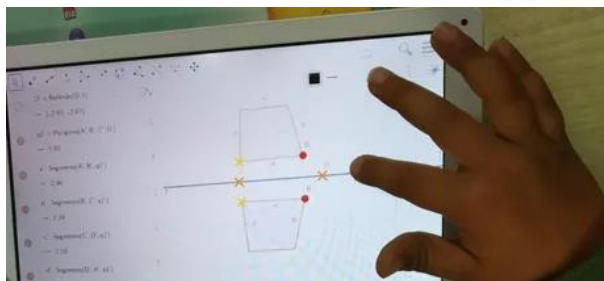


Figura 9 – Desenho de um trapézio.

Aluno — Este não dá para sobrepor.

Professora — Porquê?

Aluno — Porque não tem os lados todos iguais... ai não é por isso... porque fiz com o retângulo e deu para sobrepor.

Professora — E então?

Aluno — Tinha de rodar a imagem, mas não consigo... porque quando rodo um o outro também roda... e não se consegue.

É neste tipo de situações que a professora afirma sentir os miúdos a compreender e a apropriarem-se das relações geométricas. A visualização é muito forte e, associada ao dinamismo que o ambiente permite, dá vida a essas relações. As manipulações não são feitas ao acaso, pois há intenção por parte das crianças de observar o que acontece. No caso do quadrado, o aluno moveu o eixo até ele coincidir com um dos lados do quadrado objeto (Figura 8). E claro, foi vendo o quadrado imagem a aproximar-se até que os lados coincidiram. No caso do trapézio retângulo levar à coincidência foi impossível (Figura 9).

Este percurso continuou mais tarde, já no 2.º ano, com a realização de tarefas sobre a reflexão de um círculo. Embora o objetivo inicial da tarefa não tenha sido a reflexão, mas antes o conhecimento da circunferência e suas propriedades, foi durante o momento de exploração livre que, observando o trabalho de um aluno que fizera a reflexão e movia o(s) raio(s), a professora recorda ter considerado pertinente retomar o assunto para poder avançar para a simetria de reflexão. Tratando-se de alunos tão pequenos, a retoma de percursos já experimentados faz todo o sentido, pois é mais uma oportunidade de aprendizagem para os alunos que ainda não a realizaram e de consolidação para os outros. Além disso, serve de âncora para aprofundamento e novas aquisições. Estes percursos serão retomados mais à frente no estudo dos eixos de

reflexão dos polígonos regulares, na construção de rosáceas, pavimentações... e/ou na aprendizagem de outros temas onde se considerem pertinentes.

Em todo este trabalho há um potencial que cria uma série de situações, que se não fosse a geometria dinâmica não aconteceriam. Esta compreensão da transformação geométrica e suas consequências para a compreensão das propriedades de uma figura não aconteceria com papel e lápis. Segundo a professora, mesmo que os alunos experimentassem com recortes, com o borrão de tinta ou com dobragens nunca conseguiriam ver aquilo que conseguem ver no ecrã do computador. A reflexão não faz parte do programa do 1.º ano e não teria sido trabalhada se não fosse com recurso ao GeoGebra. Na sua opinião, ela própria aprendeu a partir desta exploração. Ampliou o seu conhecimento sobre as propriedades da reflexão, sobre as quais nunca tinha pensado de forma tão completa, e compreendeu melhor as implicações didáticas deste conhecimento para o estudo de propriedades de simetria de uma figura. A utilização do GeoGebra tem este potencial, o professor também aprende geometria quando o está a utilizar com os alunos.

### **A Sequência de Figuras com Ligação Algébrica**

Com o propósito de estabelecer conexões matemáticas internas, foram realizadas tarefas no âmbito das sequências e regularidades a partir da tarefa 1 - *O que acontece ao triângulo?*

Após a realização de algumas experiências sobre padrões e a compreensão do que é um padrão, foi retomada a tarefa dos triângulos. Partindo do trabalho com a meia volta e quarto de volta e, sistematizando a ideia "4 quartos de volta formam uma volta completa", foi proposta a tarefa seguinte. O padrão é formado pelas 4 figuras da rotação do triângulo, em quartos de volta, até dar a volta completa (Figura 10). Os alunos tinham de descobrir a Fig. 6, a Fig. 10 e a Fig. 14. Foi-lhes sugerido que tentassem descobrir a Fig. 14 sem recorrer à representação no GeoGebra.



MATEMÁTICA – TRABALHO NO GEOGEBRA

Padrões e sequências

GeoGebra

Observa as imagens construídas com a ferramenta [polígono rígido]

Fig. 1    Fig. 2    Fig. 3    Fig. 4    Fig. 5    Fig. 6

1 - Se continuares a repetir o padrão qual será o triângulo que aparece na figura 6?  
(Podes fazer no GeoGebra e representar aqui)

Figura 10 - Tarefa proposta.

A descoberta das Fig. 6 e Fig. 10 não foi difícil, ao contrário da explicação de como pensaram para descobrir a Fig. 14. Alguns alunos descobriram a regularidade (Figuras 11 a 13), mas outros tiveram de desenhar todas as figuras e só "descobriram" a regularidade na discussão coletiva. Outros, desenharam até à figura 10 e perceberam que era de 4 em 4, não tendo necessidade de desenhar até à 14. Foi só no momento coletivo de apresentação/discussão de estratégias que a regularidade ficou clara, havendo mesmo a necessidade de representar as catorze figuras.

Figuras 11, 12 e 13 – Descoberta da regularidade pelos alunos.

Na resolução apresentada na figura 12, o aluno estabelece a relação da regularidade escrevendo-a por extenso: *5 é igual a 1, 6 é igual a 2, 10 é igual a 2, 14 é igual a 2*. A mesma ideia é representada esquematicamente sobre a reta numérica por outro aluno (Figura 11) e através de expressões numéricas por um outro (Figura 13).

Os alunos realizaram, ainda, uma segunda tarefa com o objetivo de avançarem no caminho da generalização da regularidade. Individualmente, tinham de reconhecer o padrão e descobrir a Fig. 9 e justificar a veracidade da forma que representaria a Fig. 18.

As resoluções apresentadas nas figuras 14 e 15 mostram duas soluções. Em ambas, os alunos explicitam claramente o raciocínio que fizeram, mas no segundo caso o aluno escreve mesmo a lei de formação relacionando a sequência numérica com a

seqüência de figuras. Estas tarefas, além de envolverem capacidades de raciocinar e comunicar matematicamente, ampliaram a compreensão das ideias e conhecimentos dos alunos, permitindo a articulação de temas de geometria e álgebra.

MATEMÁTICA - TRABALHO NO GEOGEBRA

Padrões e seqüências

Observe as imagens construídas com a ferramenta (polígono rígido)

Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3 Fig. 4 Fig. 5 Fig. 6

1. Na seqüência que observaste, há três figuras que se repetem sempre pela mesma ordem.  
Se continuáres a repetir o padrão qual será a imagem que aparece na figura 9?  
(Podes fazer no Geogebra e representar aqui)

2. Explica por que razão a figura 18 desta seqüência é um triângulo?

MATEMÁTICA - TRABALHO NO GEOGEBRA

Padrões e seqüências

Observe as imagens construídas com a ferramenta (polígono rígido)

Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3 Fig. 4 Fig. 5 Fig. 6

1. Na seqüência que observaste, há três figuras que se repetem sempre pela mesma ordem.  
Se continuáres a repetir o padrão qual será a imagem que aparece na figura 9?  
(Podes fazer no Geogebra e representar aqui)

2. Explica por que razão a figura 18 desta seqüência é um triângulo?

3	6	9	12	15	18
$\triangle$	$\triangle$	$\triangle$	$\triangle$	$\triangle$	$\triangle$

porque esta a ordem de 3 a 3

Figuras 14 e 15 – Resoluções da segunda tarefa.

A inclusão destas tarefas no trabalho com o GeoGebra foi mais uma oportunidade de consolidar aprendizagens anteriores, nomeadamente, os conceitos de volta, meia volta e quarto de volta ou uma nova possibilidade de aprendizagem para quem ainda não a tinha realizado. Proporcionou, também, o desenvolvimento do pensamento algébrico, através da identificação do padrão de repetição, da descrição da regularidade presente e da descoberta de termos não visíveis de uma seqüência.

A utilização do GeoGebra nestas tarefas ilustra o potencial deste recurso tecnológico para o desenvolvimento de situações em que as conexões internas da matemática são valiosas. Utilizações desta natureza permitem-nos refletir e avaliar aprendizagens das áreas de competência do perfil do aluno, como por exemplo, o pensamento crítico e criativo, o desenvolvimento da autonomia e o saber tecnológico.

### Algumas Reflexões Finais

Os dois exemplos de percursos apresentados foram escolhidos por duas razões. Por um lado, os percursos integram tarefas em que a utilização de um ambiente de geometria dinâmica transforma totalmente a orientação do ensino e da aprendizagem. Por outro, os dois exemplos constituem ilustrações significativas das oito ideias



constituintes do referencial apresentado.

No primeiro percurso, cujo tema é totalmente interno à geometria, os conteúdos trabalhados ultrapassam bastante os conteúdos passíveis de trabalhar com crianças tão pequenas sem este recurso tecnológico, como foi explicitado pela professora responsável. No segundo percurso, em que se liga a geometria com a álgebra e se contempla a iniciação ao raciocínio algébrico, torna-se evidente a valor das ferramentas do ambiente dinâmico e as mais-valias proporcionadas pelo novo papel que a visualização pode ter na resolução de tarefas sobre regularidades e padrões. Consideramos este papel como novo por ser dinâmico, associável a outros tipos de raciocínio e muito eficiente na utilização. A rapidez com que uma figura pode ser construída, replicada ou movida não tem comparação com a utilização de recursos não digitais.

Ambos os percursos dão conta de abordagens novas que procuram aproveitar ao máximo o poder dos ambientes dinâmicos. Se dispomos destes ambientes tão amigáveis, com os quais as crianças se familiarizam tão rapidamente e que oferecem ferramentas tão acessíveis e poderosas, não faz sentido ignorá-los. Muito pelo contrário, importa experimentá-los e estudar as suas possibilidades e as implicações do seu poder transformador.

Como se evidenciou, os percursos apresentados são abertos e podem ser retomados em outro momento de aprendizagem no mesmo ano ou em outro ano de escolaridade. Além disso, uma tarefa que inicia um percurso pode também dar origem a outro percurso totalmente diferente. Esta dupla assunção de abertura, tanto dos percursos de aprendizagem como do currículo, constitui uma mais-valia para a realização de experiências curriculares de utilização do GeoGebra. É importante experimentar tarefas, com intencionalidades claras, mas também com grande abertura para dar atenção às possibilidades de aprendizagem que oferecem. Em nosso entender, o binómio Tarefas — GeoGebra ajuda-nos a conhecer as potencialidades de um ambiente de geometria dinâmica muito amigável e a valorizar as características mais favoráveis das tarefas a propor. É impensável dissociar tarefas de recursos no planeamento, na execução e na avaliação.

Esta utilização regular, que aqui procurámos caracterizar e descrever, constitui um contributo muito significativo para o projeto *Aproximações* e para o desenvolvimento profissional dos professores que constituem a sua equipa. As dinâmicas de partilha de experiências, em que estas situações já foram alvo de grande discussão, têm-nos

permitido concluir que estes exemplos de tarefas não estão associados a nenhum ano de escolaridade. São tarefas que podem ser adaptadas a outros anos de escolaridade, que são passíveis de organizar em percursos distintos dos apresentados, com grupos de alunos com características muito distintas e por outros professores. A dinâmica colaborativa do projeto tem permitido avançar com novas experiências a partir das mesmas situações de ensino. “Vou experimentar esta tarefa com os meus alunos” tem sido um dos comentários frequentes entre os professores da equipa do projeto, totalmente dissociado do ano de escolaridade em que agora estão a trabalhar.

Destacamos também a importância das discussões matemáticas baseadas na descrição e análise das resoluções dos alunos para as tarefas propostas. Esta reflexão partilhada sobre a aprendizagem matemática dos professores através do seu ensino ou do ensino de outros professores, ganha também sentido, como tão bem valoriza Ron Tzur (2010). Reconhecemos que o binómio Tarefas — GeoGebra nos tem permitido experimentar tarefas inacessíveis aos nossos alunos sem este recurso e realizar discussões matemáticas muito interessantes a partir das suas resoluções. Afirmamos, por isso, claramente que a utilização curricular de ferramentas tecnológicas poderosas como o GeoGebra coloca o professor em confronto com o seu conhecimento matemático para ensinar. Este é talvez o maior desafio que temos enfrentado no projeto *Aproximações* e também uma das vivências que maior entusiasmo tem proporcionado aos professores participantes.

### Referências Bibliográficas

- Canavarro, A.P., Mestre, C., Gomes, D., Santos, E., Santos, L., Brunheira, L., Vicente, M., Gouveia, M. J., Correia, P., Marques, P., & Espadeiro, R.G. (2021). *Aprendizagens Essenciais de Matemática no Ensino Básico*. ME-DGE. <https://www.dge.mec.pt/noticias/aprendizagens-essenciais-de-matematica>
- Fullan, M., Rincon-Gallardo, S., & Hargreaves, A. (2015). Professional capital as accountability. *Education Policy Analysis Archives*, 23(15). <http://dx.doi.org/10.14507/epaa.v23.1998>.
- Hargreaves, A., & Fullan, G. (2012). *Professional Capital – Transforming teaching in every school*. Teachers College Press.
- King, J., & Schattschneider, D. (2000). *Geometria Dinâmica*. Associação de Professores de Matemática.
- Laborde, C. (1998). Visual phenomena in the teaching/learning of geometry in a





- computer-based environment. In C. Mammana, & V. Villani (Eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21<sup>st</sup> Century* (pp. 113-120). Kluwer Academic Publishers.
- Leikin, R., & Zazkis, R. (2007). A view on the teachers' opportunities to learn mathematics through teaching. In J. H. Woo, H. C. Lew, K. S. Park, & D. Y. Seo, (Eds.). *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol.1, pp. 121-150). PME.
- Loureiro, C., & Pereira, G. (2021). Da reflexão à construção de figuras com simetria de reflexão. *Educação e Matemática*, 161, 23-25.
- Loureiro, C., & Pereira, G. (2022). Propriedades da Reflexão (Isometria) e sua utilidade ao alcance das crianças. *Educação e Matemática*, 163, 29-32.
- Loureiro, C., & Dias, S. (2022). Uma outra face da utilização do GeoGebra. *Educação e Matemática*, 164, 23-25.
- Pereira, M. G., & Serrazina, M. L. (2015). Propriedades e relações entre quadriláteros: contributos do geoplano e do GeoGebra. *Quadrante*, XXIV(1), 30-57.
- Stein, M. K., Smith, M. S., & Silver, E. A. (1999). The development of professional developers: Learning to assist teachers in new settings in new ways. *Harvard Educational Review*, 69(3), 237-269.
- Tzur, R. (2010). How and what might teachers learn through teaching mathematics: Contributions to closing an unspoken gap. R. Leikin, & R. Zazkis (Eds.), *Learning Through Teaching Mathematics*, Mathematics Teacher Education 5. Springer. [http://doi.org/10.1007/978-90-481-3990-3\\_3](http://doi.org/10.1007/978-90-481-3990-3_3)