



Artigo

O Pensamento Geométrico de Alunos do 4.º ano: Análise através da Teoria de van Hiele

Mariana Fernandes

Instituto Politécnico de Santarém
mariana_a_fernandes@hotmail.com

Nelson Mestrinho

Instituto Politécnico de Santarém
nelson.mestrinho@ese.ipsantarem.pt | ORCID 0000-0001-7712-3381

Resumo

O desenvolvimento do pensamento geométrico é um processo gradual, que se opera por etapas, sendo as representações que as crianças fazem do espaço o resultado da exploração e manipulação do ambiente espacial. A exploração das formas, dos seus componentes e atributos permite às crianças adquirir uma compreensão progressivamente mais completa das ideias geométricas. Dina e Pierre van Hiele propuseram que o pensamento geométrico dos alunos se desenvolve por níveis hierárquicos e progressivamente mais sofisticados, sendo cada um deles marcados por uma linguagem e forma de raciocinar próprias. Investigações mais recentes, alargaram o trabalho dos van Hiele à caracterização do pensamento dos alunos que se encontram na transição entre níveis, estendendo-o também, do estudo das formas geométricas no plano, ao estudo dos sólidos geométricos. Para que o professor possa ajudar os seus alunos a progredir na compreensão do espaço é necessário que seja capaz de reconhecer os indicadores dos diferentes níveis de pensamento geométrico, de modo a ajustar as suas práticas aos objetivos de aprendizagem estabelecidos. Este estudo, realizado num contexto de prática de ensino supervisionada numa turma de 4.º ano de escolaridade, teve por objetivo identificar nas produções dos alunos, no decurso da realização de uma sequência didática, elementos que permitam



compreender os níveis do seu pensamento geométrico. A sequência em causa estruturou-se de acordo com as cinco fases do modelo ensino de van Hiele e focou-se nos objetivos de aprendizagem traçados pelos documentos de orientação curricular em vigor para o tópico Sólidos Geométricos. Através da análise das produções dos alunos, concluiu-se que estes se encontram em diferentes estágios intermédios de desenvolvimento do seu pensamento geométrico, entre o nível visual e o nível descritivo/analítico. Foram também identificados elementos implícitos e explícitos característicos destes dois níveis de van Hiele nos raciocínios e respostas dos alunos. Estes resultados, para além da sua concordância com os de outros estudos, realçam a relevância da teoria de van Hiele como ferramenta de trabalho do professor que ensina Matemática nos primeiros anos de escolaridade.

Palavras-chave: Desenvolvimento do pensamento geométrico; Ensino da geometria no 1.º ciclo do ensino básico; Geometria no espaço; Teoria de van Hiele.

Abstract

The development of geometric thinking is a gradual process that unfolds in stages, with the representations children make of space being the result of their exploration and manipulation of the spatial environment. The exploration of shapes, their components, and attributes allows children to gain an increasingly comprehensive understanding of geometric ideas. Dina and Pierre van Hiele proposed that students' geometric thinking develops through hierarchical and progressively more sophisticated levels, each marked by its own language and mode of reasoning. More recent research has extended the work of van Hiele to characterize the thinking of students in transition between levels, and also expanded it from the study of plane geometric figures to the study of three-dimensional shapes. In order to help students advance in their understanding of space, teachers need to be able to recognize indicators of the different levels of geometric thinking so they can adapt their practices to the established learning goals. This study, conducted within the context of a supervised teaching practice in a 4th-grade class, aimed to identify, through students' work during a didactic sequence, elements that would help understand the levels of their geometric thinking. The sequence in question was structured according to the five phases of the van Hiele teaching model and focused on the learning goals outlined in the current curriculum guidelines for the topic of Geometric Solids. Through the analysis of students' work, it was concluded that they are at different intermediate stages in the development of their geometric thinking, ranging from the visual level to the descriptive/analytic level. Implicit and explicit elements characteristic of these two van Hiele levels were also identified in the students' reasoning and responses. These findings, in addition to aligning with those of other studies, highlight the relevance of the van Hiele theory as a valuable tool for teachers of Mathematics in the early years of schooling.



Keywords: Development of geometric thinking; Spatial geometry; Teaching geometry in elementary school; van Hiele theory.

Introdução

A aprendizagem da Geometria proporciona às crianças uma excelente oportunidade para relacionar a Matemática com o mundo real (Freudenthal, 1973), constituindo-se como um meio privilegiado de desenvolvimento da intuição, visualização espacial e do pensamento matemático (Abrantes et al., 1999). Ao analisar as Aprendizagens Essenciais de Matemática do 1.º CEB, no domínio da Geometria e Medida, encontra-se a referência explícita a este desenvolvimento do raciocínio espacial, para a compreensão do espaço em que os alunos se movem, salientando-se a importância dos diferentes conteúdos enquanto ferramentas de análise da realidade (Canavarro et al., 2021a).

O desenvolvimento do pensamento geométrico e a aprendizagem sobre o espaço é reconhecidamente um processo gradual, que se opera por etapas (Clements, 2003). A investigação desenvolvida por Piaget e Inhelder (1967) demonstrou que a aprendizagem da geometria vai sendo construída através de uma organização progressiva de ideias geométricas, de acordo com uma ordem lógica bem definida. As noções geométricas vão-se desenvolvendo ao longo do tempo, tornando-se cada vez mais integradas e sintetizadas, sendo as representações que as crianças fazem do espaço o resultado da exploração e manipulação do ambiente espacial. A exploração das formas, dos seus componentes e atributos permite às crianças adquirir uma compreensão progressivamente mais completa das ideias geométricas (Clements & Battista, 1992). No seguimento destas ideias, Pierre e Dina van Hiele propuseram que o pensamento geométrico dos alunos se desenvolve por níveis de pensamento, progressivamente mais sofisticados e hierarquizados, dependendo essa progressão unicamente do ensino. Cada etapa neste desenvolvimento estaria marcada por uma determinada linguagem e forma de pensar (Clements, 2003).

No que se refere à aprendizagem das formas geométricas tri e bidimensionais no 1.º CEB, espera-se que os alunos progridam no seu conhecimento partindo do reconhecimento visual dos



sólidos e figuras planas, passando pela descrição das suas características e consequente classificação, até à compreensão de relações hierárquicas entre famílias tanto de sólidos geométricos como de figuras planas (Canavarro et al., 2021a, b, c, d). Esta sequenciação, assim expressa nos documentos de orientação curricular atualmente em vigor em Portugal, deixa clara uma hierarquização na sofisticação do pensamento geométrico dos alunos. Para que o professor do 1.º CEB possa organizar eficazmente o trabalho em sala de aula é essencial reconhecer os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico dos seus alunos.

Tendo como ponto de partida a prática de ensino da Geometria no 1.º CEB, em particular da oportunidade de trabalhar com uma turma do 4.º ano de escolaridade conceitos e representações relativos às formas geométricas no Espaço, pretende-se neste estudo responder à seguinte questão: Que indicadores do nível de pensamento geométrico dos alunos de 1.º CEB é possível identificar a partir da sua atividade no decurso da implementação de uma sequência didática? O objetivo desta investigação é identificar nas produções dos alunos, no decurso da realização de uma sequência didática, elementos que permitam compreender e caracterizar o nível do seu pensamento geométrico. O enquadramento teórico deste estudo baseia-se na teoria de van Hiele e será abordado na secção seguinte.

Enquadramento teórico

Pensamento geométrico e raciocínio espacial

A geometria é uma rede complexa e interligada de conceitos, formas de raciocínio e sistemas de representação. É usada para conceptualizar e analisar ambientes espaciais físicos e imaginários. O raciocínio geométrico consiste na criação e uso de sistemas conceptuais formais para investigar a forma e o espaço (Battista, 2007). Subjacente a grande parte do pensamento geométrico está o raciocínio espacial. Este consiste num conjunto de processos cognitivos, através dos quais representações mentais de objetos espaciais, relações e transformações, são construídas e manipuladas. Integra a capacidade de “ver”, inspecionar e refletir acerca de objetos espaciais, imagens, relações e transformações (Battista, 2007; Clements & Battista, 1992). Desta forma, o



raciocínio espacial fornece um *input* para o raciocínio geométrico informal e disponibiliza ferramentas cognitivas essenciais para a análise geométrica formal (Clements & Battista, 1992).

Desenvolvimento do pensamento geométrico e Teoria de van Hiele

Pierre e Dina van Hiele desenvolveram uma teoria segundo a qual os alunos evoluem na aprendizagem da geometria através de níveis de pensamento progressivamente mais sofisticados, partindo de um nível visual até a níveis mais complexos de descrição, análise, abstração e dedução (Clements & Battista, 1992). Esta teoria pressupõe que: i) a aprendizagem é um processo descontínuo, caracterizado por níveis de pensamento discretos e qualitativamente diferentes; ii) Os níveis são sequenciais e hierárquicos, sendo que a progressão entre eles não depende da idade ou do amadurecimento biológico mas antes do ensino, organizado de modo que os alunos percorram determinadas etapas de modo a alcançarem a compreensão; iii) Os conceitos adquiridos implicitamente num nível tornam-se explicitamente compreendidos no nível seguinte; e iv) Em cada nível existe uma forma de pensar e uma linguagem próprias, sendo que a estrutura linguística é um fator crucial na progressão entre níveis (Clements, 2003).

Teoria de van Hiele e classificação dos níveis de desenvolvimento

O modelo apresentado pelos van Hiele contempla a existência de cinco níveis de desenvolvimento e as suas características básicas. O nível visual, inicia-se com o pensamento não-verbal. Neste nível os alunos identificam e operam com formas geométricas pela sua aparência. Reconhecem as figuras como elementos visuais, apoiando-se em protótipos comuns, ou seja, as figuras são distinguidas pela sua forma, pelo seu aspeto como um todo, sem estabelecer relações entre a forma e as partes que a compõem. Ao classificarem figuras, tendem a valorizar características imprecisas ou irrelevantes, como por exemplo a orientação, deixando de fora atributos relevantes. No segundo nível, nível descriptivo/analítico, as figuras são caracterizadas pelas suas propriedades. Os alunos percebem que as figuras são formadas por partes e dotadas de propriedades, que vão sendo estabelecidas através de experiências que envolvem observação, medição e representação, desenho e construção e manipulação de modelos. Os alunos vão descobrindo que determinadas combinações de propriedades caracterizam classes de figuras, no



entanto, neste nível, não reconhecem ainda relações entre classes. Já no terceiro nível, o nível abstrato/relacional (ou de dedução informal), as propriedades são ordenadas logicamente. Os alunos usam as propriedades que já conhecem para formular definições, distinguindo entre conjuntos de condições necessárias e suficientes para um conceito, compreendendo e até apresentando argumentos lógicos. Neste nível, entendem as inclusões de classes de figuras, estabelecendo classificações hierárquicas entre formas e sendo capazes de fornecer argumentos informais que justifiquem tais classificações. Conseguem descobrir propriedades das classes de figuras por dedução informal, sentindo necessidade de ir organizando essas propriedades. Sendo a organização lógica das ideias uma primeira manifestação de verdadeira dedução, a este nível, o raciocínio lógico dos alunos ainda se sustenta na manipulação e exploração, não entendendo a dedução como método de estabelecimento de verdade em Geometria. O quarto nível, de dedução formal, os alunos adquirem a compreensão dos termos primitivos, dos axiomas, das definições, dos teoremas, fazendo sentido tanto da sua demonstração como da sua necessidade enquanto elemento de validação. Conseguem construir as suas próprias demonstrações, validando as proposições que são apresentadas, sendo capazes de deduzir uma propriedade de outra através de uma sequência de asserções que logicamente justificam uma conclusão enquanto consequência de um conjunto de pressupostos. O último nível corresponde ao de raciocínio rigorosamente dedutivo. Neste nível os alunos raciocinam formalmente sobre estruturas matemáticas, permitindo-lhes justificar e demonstrar afirmações realizadas acerca dessas estruturas. Além disso, os alunos conseguem operar em diversos sistemas axiomáticos, não dependendo de uma conceptualização de base visual ou da intuição para formular e demonstrar proposições (Battista, 2007; Clements, 2003; López & Masot, 2018; van Hiele, 1999).

Como se percebe desta descrição, para cada nível existe um conjunto de ideias ou elementos inerentes, uns explícitos e outros implícitos, sendo que os elementos que são implícitos num nível tornam-se explícitos no nível seguinte. A tabela 1 resume os elementos explícitos e implícitos relativos aos três primeiros níveis.

Tabela 1

Elementos explícitos e implícitos em cada um dos três primeiros níveis de van Hiele. Fonte: López e Mesot (2018).



| | | Elementos explícitos | Elementos implícitos |
|---------|--|--|----------------------|
| Nível 1 | Figuras e modelos | Componentes e propriedades das figuras | |
| Nível 2 | Componentes e propriedades das figuras | Relações e propriedades das figuras | Definição |
| | | | Classificação |
| Nível 3 | Relações e propriedades das figuras | | |
| | Definição | Demonstração formal de proposições | |
| | Classificação | | |

Os níveis apresentados pelos van Hiele na sua teoria tinham como referência conceitos relacionados com polígonos, pois que a maioria dos resultados importantes da sua pesquisa foram feitos a partir deste tópico da geometria. Deste modo, os níveis de van Hiele são identificados com boa precisão para os temas de geometria no plano (Gutiérrez, 1992). No entanto, Gutiérrez e colaboradores (1991) estabeleceram descritores específicos da geometria no espaço para os níveis de um a quatro de van Hiele:

- Nível 1 (Visual e tátil, baseado na experiência física ou de reconhecimento) – os sólidos são avaliados pela sua aparência. Os alunos consideram os objetos tridimensionais como um todo, deste modo, reconhecem e nomeiam sólidos. Além disso, conseguem distinguir visualmente um determinado tipo de sólido geométrico de outro. Neste nível não se considera explicitamente os componentes ou as propriedades para identificar ou nomear um sólido.
- Nível 2 (Análise ou descritivo) – os sólidos são identificados pelos seus componentes (faces, arestas, etc.) e são portadores de propriedades (paralelismo, regularidade, etc.). Os alunos descrevem de maneira informal as formas tridimensionais pelas suas propriedades. No entanto, ainda não está desenvolvida neles a capacidade de relacionar logicamente as propriedades entre si, nem de classificar logicamente sólidos ou famílias de sólidos. As propriedades dos sólidos são descobertas através da experimentação.
- Nível 3 (Dedução informal) – Os alunos classificam logicamente famílias de sólidos (classes de prismas ou de sólidos arredondados, poliedros regulares, etc.). No nível 3 as



definições (condições necessárias e suficientes) são significativas. Estes compreendem significados equivalentes para o mesmo conceito. Apresentam argumentos informais para as deduções e podem seguir-se algumas provas formais dadas por um professor ou manual, contudo apenas se efetuam autonomamente inferências simples.

- Nível 4 (Dedução formal) – Os alunos compreendem a função dos diferentes elementos de um sistema axiomático (axiomas, definições, termos primitivos e termos teóricos). Também efetuam provas formais.

A tabela 2 resume os processos de raciocínio matemático de cada nível, utilizados para distinguir os diferentes níveis de van Hiele.

Tabela 2

Processos de raciocínio matemático de cada nível de van Hiele. Fontes: Gutiérrez e Jaime (1998); Jaime e Gutiérrez (2016).

| Processos de raciocínio | Nível 1 | Nível 2 | Nível 3 | Nível 4 |
|--------------------------|--|---|--|---|
| Reconhecimento | Propriedades físicas | Propriedades matemáticas | _____ | _____ |
| Utilização de definições | _____ | São utilizadas definições com uma estrutura simples | Qualquer definição é utilizada | São aceites definições equivalentes |
| Formulação de definições | Lista de propriedades físicas | Lista de propriedades matemáticas | Conjunto de propriedades necessárias e suficientes | A equivalência das definições é demonstrada |
| Classificação | Exclusiva, com base em atributos físicos | Exclusiva, com base em atributos matemáticos | Pode alternar entre inclusiva e exclusiva | _____ |
| Demonstração | _____ | Verificação com exemplos | Provas lógicas informais | Provas matemáticas formais |

*Propriedades dos níveis do pensamento geométrico*

Os investigadores Adela Jaime e Angel Gutiérrez (Jaime & Gutiérrez, 2016) também sistematizaram um conjunto de propriedades globais dos níveis de pensamento geométrico. Estas propriedades clarificam, mas também atualizam, aqueles que eram os pressupostos iniciais da teoria de van Hiele, constituindo uma ferramenta importante para analisar as atividades de ensino nas aulas de geometria e compreender melhor as razões pelas quais os alunos resolvem os problemas da forma como o fazem:

- Linguagem específica – Cada nível de raciocínio possui uma linguagem própria. Isso significa que duas pessoas que utilizam raciocínios de níveis diferentes frequentemente não conseguem entender-se.
- Sequência – Não é possível alterar a ordem de progressão dos níveis, nem saltar níveis. Cada nível implica um aperfeiçoamento das capacidades de raciocínio do nível anterior. Para alcançar um novo nível de raciocínio, é necessário ter atingido os níveis inferiores.
- Continuidade – A transição de um nível de raciocínio para o seguinte não ocorre de forma rápida, mas sim de maneira lenta, contínua e progressiva. Existem períodos de transição durante os quais os alunos exibem comportamentos correspondentes a dois níveis consecutivos, geralmente em função da dificuldade ou complexidade dos problemas que tentam resolver.
- Localidade – Uma pessoa pode estar em diferentes níveis de raciocínio ao trabalhar em diferentes áreas da geometria. Isto é particularmente evidente quando se inicia o estudo de um novo tema que ainda não foi explorado.
- Escalonamento – Em cada nível, os elementos a serem trabalhados são os núcleos que constituem o nível anterior. No nível 2, o trabalho consiste em decompor o todo (nível 1) em partes. No nível 3, o foco está em estabelecer relações entre essas partes (nível 2). No nível 4, procura-se organizar as relações (nível 3) de modo formal, utilizando as regras de um sistema axiomático. No nível 5 (de rigor), trabalha-se com as regras de vários sistemas axiomáticos (nível 4) para comparar ou relacionar as geometrias geradas.



Gaus de aquisição de níveis de aprendizagem

A partir da teoria de van Hiele surgiram alguns estudos que tiveram o objetivo de determinar o nível de pensamento dos alunos. Os resultados desses estudos levaram alguns investigadores a considerar que o percurso de um nível para o seguinte é um processo gradual contínuo, e não discreto como proposto por van Hiele (ver propriedade Continuidade, na secção anterior). Desta forma, surgiu a necessidade de aprofundar o estudo da transição entre níveis. Um desses estudos foi realizado por Gutiérrez e colaboradores (1991), que apresentaram um método para identificar os alunos que se encontravam na transição entre níveis. Este método tem como pressupostos: i) que se deve considerar a capacidade de os alunos usarem cada um dos níveis de van Hiele (em vez de assumir que estão apenas num) e ii) que a continuidade dos níveis de van Hiele significa que a aquisição de um determinado nível não acontece instantaneamente ou muito rapidamente, mas que pode demorar alguns meses ou anos (Gutiérrez et al., 1991).

A fim de captar esta transição gradual de um nível de van Hiele para o seguinte, Gutiérrez e colaboradores (1991) propuseram uma gradação nessa transição, dividindo cada nível em períodos que representam diferenças fundamentais no grau de aquisição de um dado nível. Inicialmente os alunos não demonstram qualquer capacidade para raciocinar num novo nível. Não têm consciência da existência ou necessidade de métodos específicos de raciocínio. O grau de aquisição do novo nível é nulo. Ao começarem a perceber esses métodos e a sua importância, tentam aplicá-los. No entanto, devido à falta de experiência, fazem algumas tentativas para trabalhar no nível novo, mas têm pouco ou nenhum sucesso nas atividades. Assim, acabam por voltar ao nível de raciocínio anterior. Nesta fase, o grau de aquisição do novo nível é baixo. Com o aumento da experiência, os alunos entram numa fase de aquisição intermédia do nível novo. Utilizam os métodos do nível anterior de forma contínua e precisa, mas, devido à falta de domínio, recorrem aos métodos do nível inferior quando enfrentam dificuldades, embora tentem depois retornar ao nível superior. Este período é caracterizado por oscilações frequentes entre os dois níveis de raciocínio. À medida que ganham mais experiência, o raciocínio é progressivamente consolidado. Os alunos passam a usar predominantemente os métodos correspondentes ao nível novo, mas ainda cometem alguns erros ou, ocasionalmente, voltam ao nível inferior. Este é um período em que o grau de aquisição do nível



novo é elevado, mas ainda incompleto. Os alunos alcançam a plena aquisição do nível novo quando dominam completamente esse modo de pensar e o aplicam sem dificuldades (Gutiérrez et al., 1991).

Avaliação da aquisição dos níveis

Para atribuir aos alunos um grau de aquisição específico dentro de cada nível de van Hiele, Gutiérrez e colaboradores (1991) propuseram um procedimento de avaliação e critérios para avaliar as respostas dos alunos. Estes autores partiram do pressuposto de que é mais importante observar o tipo de raciocínio dos alunos do que a sua capacidade para resolver corretamente determinados problemas dentro de um tempo específico. Além disso, consideraram que uma resposta parcialmente correta (ou até totalmente incorreta) também pode fornecer informações importantes. Embora uma resposta incorreta possa, por si só, oferecer pouca informação, no entanto o caso é diferente quando é analisada em conjunto com outras respostas. Ao classificar cada resposta, os autores tiveram em conta tanto os níveis de van Hiele refletidos nas respostas como a precisão matemática. No entanto, não atribuíram o mesmo valor a uma resposta completamente errada, a uma parcialmente errada ou a uma resposta correta. Avaliaram cada resposta considerando o(s) nível(eis) de raciocínio refletido(s), bem como a sua precisão matemática e completude (Gutiérrez et al., 1991). As respostas foram classificadas de acordo com a tipologia apresentada na tabela 3.

**Tabela 3**

Critérios de classificação dos tipos de resposta. Fonte: Gutiérrez et al. (1991)

| Tipos | Critérios de classificação |
|--------|--|
| Tipo 0 | Nenhuma resposta ou respostas podem ser codificadas. |
| Tipo 1 | Respostas que indicam que o aluno não atingiu um determinado nível, mas que não dão qualquer informação sobre um nível inferior. |
| Tipo 2 | Respostas erradas e insuficientemente elaboradas que dão alguma indicação de um determinado nível de raciocínio; |
| Tipo 3 | Respostas corretas, mas insuficientemente elaboradas que dão alguma indicação de um dado nível de raciocínio; Respostas que contêm muito poucas explicações, processos de raciocínio incorretos ou resultados muito incompletos. |
| Tipo 4 | Respostas corretas ou incorretas que refletem claramente características de dois níveis consecutivos de van Hiele e que contêm processos de raciocínio claros e justificações suficientes. |
| Tipo 5 | Respostas incorretas que refletem claramente um nível de raciocínio; Respostas que apresentam processos de raciocínio completos, mas incorretos; Respostas que apresentam processos de raciocínio corretos que não conduzem à solução do problema apresentado. |
| Tipo 6 | Respostas corretas que refletem claramente um determinado nível de raciocínio, mas que são incompletas ou insuficientemente justificadas. |
| Tipo 7 | Respostas corretas, completas e suficientemente justificadas que refletem claramente um determinado nível de raciocínio. |



Estes autores especificaram ainda, de forma mais concreta, o que indica cada resposta (Gutiérrez et al., 1991):

- As respostas dos tipos 0 e 1 não indicam qualquer nível específico. No entanto, há uma diferença entre elas: as respostas do tipo 1 sugerem que um determinado nível não foi atingido – ou seja, não houve qualquer aquisição desse nível.
- As respostas dos tipos 2 e 3 sugerem o início da aquisição de um nível – uma aquisição baixa. Em ambos os casos, as respostas são bastante incompletas e geralmente muito breves. Devido ao seu carácter incompleto, o avaliador não consegue identificar claramente um nível específico com base no raciocínio do aluno, apenas percebendo indícios vagos desse nível.
- O tipo 4 refere-se a respostas em que o aluno utiliza dois níveis de raciocínio, mas nenhum deles se destaca claramente – aquisição intermédia. Este tipo de resposta caracteriza os alunos que estão numa fase intermédia de transição entre dois níveis, pois, embora tenham consciência da importância de usar métodos de raciocínio de nível superior, ainda recorrem aos métodos do nível inferior. Em termos de rigor matemático e exaustividade, este tipo de resposta assemelha-se às dos tipos 5, 6 e 7.
- Os tipos 5 e 6 correspondem a respostas em que o aluno demonstra claramente o uso predominante de um nível específico de raciocínio, embora, ocasionalmente, possam surgir traços de um nível inferior – aquisição elevada. Estas respostas mostram que o aluno está numa fase avançada de transição entre dois níveis, com diferentes graus de aquisição do nível superior.
- Por fim, o tipo 7 indica que o aluno adquiriu completamente um determinado nível, sendo capaz de resolver toda a atividade, utilizando apenas os métodos de raciocínio característicos desse nível – aquisição completa.

Fases de aprendizagem

Para além dos níveis, a teoria de van Hiele inclui um modelo para a organização do processo de ensino-aprendizagem que se desenvolve de acordo com cinco fases. Na primeira fase, informação/inquérito, os alunos entram em contacto com o domínio em estudo na qual são



realizadas observações e formuladas questões, introduzindo-se alguns tópicos do conteúdo e algum vocabulário. Na segunda fase, orientação guiada, tarefas cuidadosamente sequenciadas são apresentadas e realizadas de forma que os conceitos e as relações entre eles possam emergir das explorações realizadas, recorrendo-se a materiais devidamente enquadrados na atividade. É nesta fase que os alunos, orientados pelo professor, manipulam, medem, dobram, etc., familiarizando-se com as estruturas que as tarefas envolvem, nomeadamente o vocabulário, símbolos, propriedades e relações. Na fase da explicitação, a terceira, o professor introduz a terminologia específica, encoraja as crianças a usarem-na na discussão acerca do seu trabalho e ainda motivam a escrevê-la. Nesta fase, vão construindo conhecimento, tendo como base as suas experiências anteriores. Os alunos podem expressar e discutir a sua visão emergente acerca das estruturas observadas, tornando-se conscientes das conceptualizações dos temas trabalhados. Na quarta fase, orientação livre, o professor apresenta tarefas mais complexas, com vários passos de resolução ou tarefas que possam ser resolvidas de diferentes formas. Assim, permite, que as crianças se tornem mais hábeis relativamente ao que já sabem. Os alunos começam a saber estruturar o seu raciocínio, organizando a informação que vão descobrindo, obtendo e reconhecendo como se aplicam essas relações. Na quinta e última fase, de integração, os alunos têm oportunidade de refletirem acerca do que aprenderam, criando, por exemplo, as suas próprias atividades. O professor auxilia a construção de uma síntese de ideias fundamentais e de conceitos que os alunos já dominam (Clements & Battista, 1992; López & Masot, 2018).

A organização das fases de aprendizagem segundo a teoria de van Hiele fornece um referencial para o ensino eficaz da Geometria (Howse & Howse, 2015). Um estudo realizado por Oliveira e Leivas (2017) permitiu concluir que as atividades realizadas, seguindo o modelo de ensino de van Hiele, foram produtivas comparativamente com os resultados obtidos sem a aplicação desta estratégia. De acordo com este estudo, os alunos também demonstraram satisfação e interesse pelos conteúdos abordados, tendo referido ainda que gostariam que o método fosse aplicado noutras ocasiões (Oliveira & Leivas, 2017).



Metodologia

Opções metodológicas

Sendo o objetivo da investigação identificar elementos do pensamento dos alunos a partir das suas produções, como resultado da realização de uma sequência didática, assume-se que este estudo se enquadra no paradigma interpretativo. De acordo com Erickson (1986) a expressão “investigação interpretativa” abrange abordagens com interesse no significado dado pelos investigadores como resultado de um processo de interpretação. Assim, no paradigma interpretativo, o objeto da investigação interpretativa são as ações, tendo em conta o significado que estas assumem nos seus próprios contextos (Erickson, 1986).

Participantes

A intervenção e a recolha de dados decorreram durante a realização de um período de prática de ensino supervisionada no 1.º CEB. Os participantes do estudo foram 21 alunos que integravam uma turma de 4.º ano, com idades compreendidas entre os nove e os dez anos, sendo 13 intervenientes do sexo feminino e oito do sexo masculino. Estes alunos foram divididos em grupos homogéneos, tendo por base o seu nível de desempenho observável nas diversas atividades de sala de aula no domínio da matemática, com quatro ou três elementos por grupo. A participação destas crianças foi autorizada por escrito pelos respetivos encarregados de educação, tendo sido dado conhecimento a todos os envolvidos de que as produções dos alunos seriam analisadas para efeitos do estudo. Foi também garantido o anonimato, o consentimento dos participantes nas atividades, assim como preservada a sua identidade.

A sequência didática e a sua implementação

A sequência didática foi estruturada com base nas cinco fases do modelo de aprendizagem da teoria de van Hiele e foi implementada ao longo de uma sessão de trabalho com duração de aproximada de 2 horas, distribuídas ao longo de uma manhã. Na tabela 4 apresenta-se resumidamente a estrutura desta sequência, indicando-se as fases de aprendizagem, segundo o



modelo de van Hiele, as tarefas propostas e referência aos objetivos de aprendizagem (Canavarro et al., 2021c, d).

Tabela 4*Estrutura da sequência didática*

| Fases de Aprendizagem | Tarefas | Objetivos |
|-----------------------|---|--|
| Informação | Observação de representações de sólidos geométricos. Indicação daqueles identificados pelos alunos como prismas ou como pirâmides. Apresentação de uma formulação acerca do que se entende por prisma e por pirâmide. | Descrever características dos prismas e das pirâmides e distinguí-los. |
| Orientação guiada | Construção de modelos de sólidos (prismas e pirâmides). Contagem de faces, arestas e vértices e preenchimento de uma tabela com os dados obtidos. Observação intuitiva dos elementos da tabela, em busca de eventuais propriedades de prismas e pirâmides. | Formular e testar conjecturas que envolvam relações entre as faces, vértices e arestas de prismas ou de pirâmides regulares. |
| Explicitação | Observação sistemática dos elementos da tabela de modo a dar respostas a questões orientadoras. | |
| Orientação livre | Seleção, de entre os modelos construídos, de um de um prisma e outro de uma pirâmide e obtenção das suas planificações. Determinação, para estes poliedros, de planificações alternativas às anteriores | Construir planificações de prismas e pirâmides, utilizando diferentes tipos de recursos. |
| Integração | Resolução de um conjunto de itens focados nos conceitos estudados ao longo da sequência, nomeadamente, a caracterização dos prismas e das pirâmides com base em propriedades, a compreensão das relações entre os seus elementos e de como essas concorrem para a definição de cada uma das famílias, o conceito de planificação de um poliedro e a relação entre a sua forma tridimensional, a forma dos elementos bidimensionais que constituem a sua superfície e como estes se associam entre si. | |

Na primeira parte da atividade (informação) foram apresentados no enunciado de uma ficha de trabalho representações de vários sólidos geométricos, desenhados em diferentes posições,

tendo-se solicitado aos alunos que as observassem atentamente e de seguida indicassem as que correspondiam a representações de prismas e as que correspondiam representações de pirâmides. De seguida, deveriam explicar, por palavras suas, o que entendiam por prisma e por pirâmide. Esta parte da atividade foi realizada individualmente, sendo que as restantes etapas foram concretizadas em grupos de três ou quatro crianças.

A segunda parte da atividade (que agrupa as fases de orientação guiada e explicitação) começou com a distribuição, pelos seis grupos, da segunda ficha de trabalho, assim como do material manipulável a ser utilizado (Figura 1).

Figura 1

Material manipulável



Solicitou-se aos alunos que construíssem modelos de determinados sólidos geométricos (pirâmides e prismas triangular, quadrangular, pentagonal e hexagonal) e, de seguida, prenchessem uma tabela relativas a estas duas famílias de sólidos, na qual indicaram o número de lados do polígono da base de faces, vértices e arestas. Seguidamente, os alunos responderam a questões que os pudessem ajudar a explorar propriedades e regularidades observáveis na tabela.

Na terceira parte (orientação livre), foi solicitado aos alunos que escolhessem dois sólidos, um prisma e uma pirâmide, e encontrassem e desenhassem uma planificação para cada um deles. Os alunos poderiam partir dos modelos construídos na fase anterior, desmanchá-los e guiarem-se pelo contorno da figura obtida. Em seguida, foram questionados se conseguiriam obter alguma



planificação diferente para os mesmos sólidos e, se a resposta fosse afirmativa, os alunos apresentariam a representação de uma planificação alternativa.

Na quarta e última parte (integração), como forma de sistematização e integração dos conceitos, foi distribuída uma nova ficha de trabalho composta por três itens. No primeiro, era pedido que os alunos assinalassem afirmações verdadeiras e falsas. No segundo, os alunos tinham de identificar com quais polígonos se poderia construir a planificação de um sólido. No terceiro, foi dada uma figura representando um sólido (pirâmide quadrangular) e de entre três hipóteses tinham de escolher aquela que produzia uma identificação correta, explicando as razões pelas quais as outras duas não identificavam o sólido corretamente.

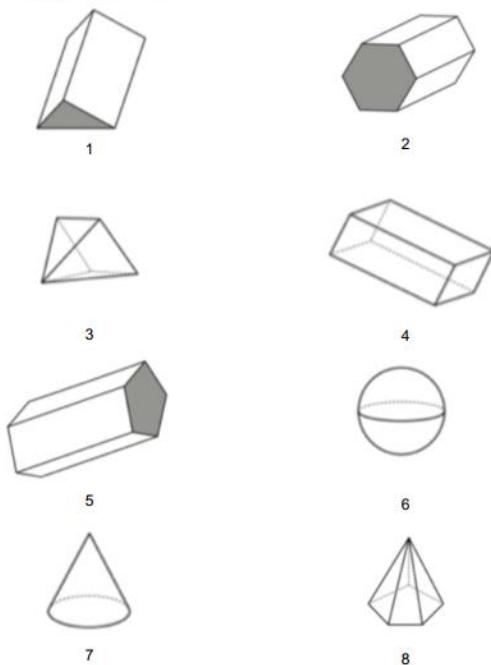
Apresentação e Discussão dos Resultados

1.ª Parte - Informação

Na primeira parte do guião de trabalho, era pedido aos alunos que reconhecessem numa imagem com desenhos de vários sólidos geométricos apresentados em diferentes posições (Figura 2) quais correspondiam a representações de prismas (questão 1.1) e quais correspondiam a representações de pirâmides (questão 1.2). De seguida, deveriam explicar, por palavras suas, o que entendiam por prisma (questão 2) e por pirâmide (questão 3).

À exceção de três alunos, todos conseguiram identificar os prismas na figura. Na identificação das pirâmides a maioria também respondeu corretamente, contudo houve mais alunos a responder incorretamente. Um aluno não indicou a pirâmide quadrangular (3 da figura 2) como pirâmide e outro não assinalou a pirâmide pentagonal (8 da figura 2) como correspondendo a esta categoria. Três alunos classificaram o cone como sendo uma pirâmide.

A identificação dos sólidos na figura tem subjacente elementos explícitos do nível visual. A dificuldade no reconhecimento de prismas e pirâmides entre as diversas imagens pode revelar que os alunos interpretam essas apoiando-se em protótipos, não procurando ainda relações entre a forma e os seus elementos. Um exemplo disto é a classificação do cone como sendo uma pirâmide, dada a sua posição, com o vértice oposto, e numa posição elevada, em relação à base.

Figura 2*Representações de sólidos geométricos***1.ª Parte**
1. Observa os seguintes sólidos.

Relativamente às respostas às questões 2 e 3, foram classificadas em quatro tipos (de um a quatro), de acordo com a tipologia descrita no quadro teórico e resumida na tabela 3. As respostas foram classificadas de acordo com o grau de correção, complexidade e tipo de linguagem utilizado.

No tipo 1, incluíram-se respostas que indicaram que o aluno não atingiu um determinado nível de raciocínio, contudo não deram informação sobre um nível inferior (Gutiérrez et al., 1991). Um exemplo de resposta de tipo 1 é “um prisma é um sólido geométrico que tem duas bases” (Figura 3). Cinco alunos deram respostas que se inseriram nesta categoria.

**Figura 3***Exemplo de resposta de tipo 1 (caracterização dos prismas)*

2. Explica por palavras tuas o que é um prisma.

Um prisma é um sólido geométrico que tem 2 bases.

Outro exemplo, agora em relação às pirâmides, é “uma pirâmide é um sólido que tem uma base e/ou só tem um vértice” (Figura 4). Quatro alunos deram respostas que se incluíram neste tipo.

Figura 4*Exemplo de resposta de tipo 1 (caracterização das pirâmides)*

3. Explica por palavras tuas o que é uma pirâmide.

Uma pirâmide é um sólido que tem 1 base e só tem um vértice.

Quanto às respostas de tipo 2, incluíram-se respostas erradas e insuficientemente elaboradas que dão alguma indicação de um determinado tipo de raciocínio; respostas que contêm explicações, processos de raciocínio ou resultados incorretos e reduzidos (Gutiérrez et al., 1991). Na explicação do que era um prisma, as respostas de seis alunos incluíram-se neste tipo. Considerou-se de tipo 2 respostas que fizessem referência ao facto destes sólidos apresentarem duas bases (“em cada lado” paralelas) ou faces laterais retangulares (Figura 5).

**Figura 5**

Exemplos de respostas de tipo 2 (caracterização dos prismas)

2. Explica por palavras tuas o que é um prisma.

Um prisma é um sólido que tem 1 base em cada lado.

2. Explica por palavras tuas o que é um prisma.

Um prisma é um sólido geométrico com 2 bases quadrado e retangular.

Em relação à explicação do que era uma pirâmide considerou-se como respostas de tipo 2 o facto deste tipo de sólidos ter uma base e das faces laterais convergirem num vértice, assim como as que fazem a referência à forma das faces laterais triangulares (Figura 6). Percebe-se uma tentativa muito incompleta de descrever o sólido com base nas suas propriedades – elementos implícitos do nível visual. As respostas de oito alunos inseriram-se neste tipo.

Nas respostas que se classificaram como sendo do tipo 3, consideram-se as respostas corretas, mas insuficientemente elaboradas que dão alguma indicação de um dado nível de raciocínio, respostas que contém muito poucas explicações, processos de raciocínios incorretos ou resultados muito incompletos (Gutiérrez et al., 1991).

**Figura 6**

Exemplos de respostas de tipo 2 (caracterização das pirâmides)

3. Explica por palavras tuas o que é uma pirâmide.

Uma pirâmide é um sólido que tem uma base e termina num vértice.

3. Explica por palavras tuas o que é uma pirâmide.

Uma pirâmide é um sólido geométrico formado por triângulos.

Na explicação do que se entendia como prismas, considerou-se como sendo de tipo 3 as respostas que incluíram o facto de ter duas bases e as faces laterais retangulares. Também se englobaram nesta categoria as respostas que referiram as formas específicas das faces laterais e o facto de a forma das bases poder variar (Figura 7). Oito alunos deram respostas identificadas com este tipo.

Figura 7

Exemplos de respostas de tipo 3 (caracterização dos prismas)



2. Explica por palavras tuas o que é um prisma.

Uma prisma é um sólido com duas bases e as suas faces são retângulos.

2. Explica por palavras tuas o que é um prisma.

Um prisma é um sólido que as faces são todas retângulos e só a forma geométrica é que mui-

Na pergunta relativa à explicação do que eram pirâmides, consideraram-se de tipo 3 as respostas que referiram as formas das faces laterais, a base e da convergência das faces laterais num vértice oposto à base (Figura 8). Sete alunos deram respostas que se incluíram neste tipo.

Figura 8

Exemplo de resposta de tipo 3 (caracterização das pirâmides)

3. Explica por palavras tuas o que é uma pirâmide.

Uma pirâmide é um sólido que tem todos os lados triangulares e que tem só uma base.

Nestas respostas de tipo 3 verificou-se que houve uma maior aproximação ao pensamento de nível descriptivo/analítico, na medida em que é mais evidente a identificação de componentes e



propriedades dos sólidos. As respostas, embora não estejam suficientemente elaboradas, estão mais completas do que as anteriores. Há uma tentativa de enunciar pelo menos duas propriedades dos sólidos que estão a caracterizar – elementos implícitos do nível visual.

Por fim, no tipo 4 incluiu-se respostas corretas e incorretas que refletiram claramente características de dois níveis consecutivos de van Hiele e que continham processos de raciocínio claros e justificações suficientes (Gutiérrez et al., 1991). Dois alunos deram respostas deste tipo, tanto para a explicação do que eram prismas, como para a explicação do que eram pirâmides.

Assim, na resposta relativa à explicação do que eram prismas incluíram-se as referências às bases do prisma serem iguais e as faces laterais serem retangulares. Também se classificou neste tipo a alusão à base ser um polígono arbitrário (Figura 9).

Figura 9

Exemplo de resposta de tipo 4 (caracterização dos prismas)

2. Explicá por palavras tuas o que é um prisma.

Um prisma é um sólido geométrico com duas bases iguais e com as faces retangulares.

2. Explicá por palavras tuas o que é um prisma.

Um prisma é um sólido com duas bases de qualquer polígono e faces em retângulos.



Relativamente à resposta da explicação do que era uma pirâmide incluiu-se neste tipo a que fazia referência às faces laterais serem todas triangulares e convergirem num vértice. Além disso, também neste tipo foi considerada a que aludiu ao facto de a base ser um polígono (Figura 10).

Figura 10

Exemplo de resposta de tipo 4 (caracterização das pirâmides)

3. Explica por palavras tuas o que é uma pirâmide.

Uma pirâmide é um sólido geométrico que tem as faces todas triangulares e as suas faces encontram-se todas no mesmo vértice.

3. Explica por palavras tuas o que é uma pirâmide.

Uma pirâmide é um sólido com uma base de qualquer polígono e faces em triângulos que terminam num vértice.

O facto de ser referido que as bases são iguais (prismas) e haver uma especificação de que todas as faces laterais são triangulares e convergem num vértice (pirâmides) já evidencia uma pormenorização das propriedades do sólido, face às respostas dadas no nível anterior. A referência às bases serem polígonos, também demonstra que a linguagem já está mais desenvolvida face aos tipos anteriores.



2.ª Parte – Orientação guiada e explicitação

Na segunda parte da atividade, os alunos em grupo construíram modelos de sólidos geométricos, com figuras de polígonos e elásticos que as prendiam (Figura 11).

Figura 11

Construção de modelos de sólidos geométricos



De seguida, preencheram uma tabela em que registaram o número de lados do polígono da base, o número de faces, vértices e arestas (fase de orientação dirigida). Depois de preenchida, os alunos deveriam procurar regularidades na tabela e responder a algumas questões com informação que conseguiam extrair ou induzir da tabela, nomeadamente se poderiam existir prismas com vértices em número ímpar, se existia uma pirâmide com mais faces do que vértices e se poderiam encontrar uma pirâmide e um prisma com o mesmo número de vértices. Todos os grupos completaram a tabela corretamente, e alguns alunos perceberam que nela existiam regularidades. Esta parte foi realizada em grupo e corrigida em grande grupo de modo que os alunos pudessem partilhar as suas respostas e raciocínios (fase da explicitação).

Como esta parte foi corrigida para toda a turma as respostas dos alunos no guião contemplaram as que foram dadas pelo seu grupo e depois as conclusões retiradas da partilha na turma. Deste modo, as respostas não evidenciam diferenças entre os alunos de cada grupo. No entanto, destacaram-se algumas observações realizadas nesta parte da atividade. Uma aluna, inicialmente, estava com dificuldade em visualizar as arestas do sólido construído, pois conforme ia virando as faces contava novamente as arestas para confirmar. Esta ação revela que a aluna ainda

demonstrava dificuldade em fixar um elemento do sólido para a partir dele proceder às contagens necessárias, indiciando pensamento do nível visual. Enquanto a maioria dos alunos sentiu necessidade de construir todos os sólidos para verificar as suas características a registar na tabela, três grupos, mais especificamente mobilizados por um dos seus membros, começaram a perceber as regularidades que se verificaram nos elementos em estudo. Assim, não necessitaram de construir todos os sólidos para completar a tabela, apenas o fizeram para verificar, revelando um pensamento de nível descriptivo/analítico, com elementos tanto explícitos como implícitos. Contudo, a generalidade dos alunos teve muita dificuldade em perceber e descrever as regularidades encontradas - elementos explícitos do nível visual.

3.ª Parte – Orientação livre

A terceira parte da atividade correspondeu à orientação livre. Começou por discutir-se em grande grupo o que os alunos entendiam por planificações de sólidos, constatando-se que todos tinham uma noção clara deste conceito. O momento seguinte foi dedicado à representação de planificações de dois dos sólidos considerados anteriormente (um prisma e uma pirâmide). Mais tarde deveriam encontrar e representar planificações alternativas dos mesmos sólidos. Os alunos conseguiram facilmente encontrar uma planificação dos sólidos recorrendo à desconstrução dos modelos construídos (Figura 12).

Figura 12

Do modelo do sólido à sua planificação





Porém quando lhes foi pedido para desenharem planificações alternativas para os mesmos sólidos, vários grupos demonstraram dificuldade em encontrá-las, sendo necessário recomendar que voltassem a montar o modelo e a proceder a uma nova desconstrução, desagregando agora elementos diferentes.

Todos os grupos de alunos representaram as planificações dos dois sólidos escolhidos e também encontraram planificações alternativas, diferentes das primeiras. Contudo as representações foram diferentes de grupo para grupo, sendo estas classificadas em três categorias emergentes, conforme as tabelas 5 e 6.

Tabela 5

Categorização das representações das planificações dos sólidos (planificação inicial)

| Grupos | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| a) Representam a planificação pelo seu contorno, sendo identificáveis os elementos que a compõem. | X | | X | X | | |
| b) Representam apenas o contorno exterior da planificação. | | | X | | | |
| c) Representam os elementos que compõem a planificação, mas os contornos apresentam as “abas” da figura contornada. | | X | | | X | |

Tabela 6

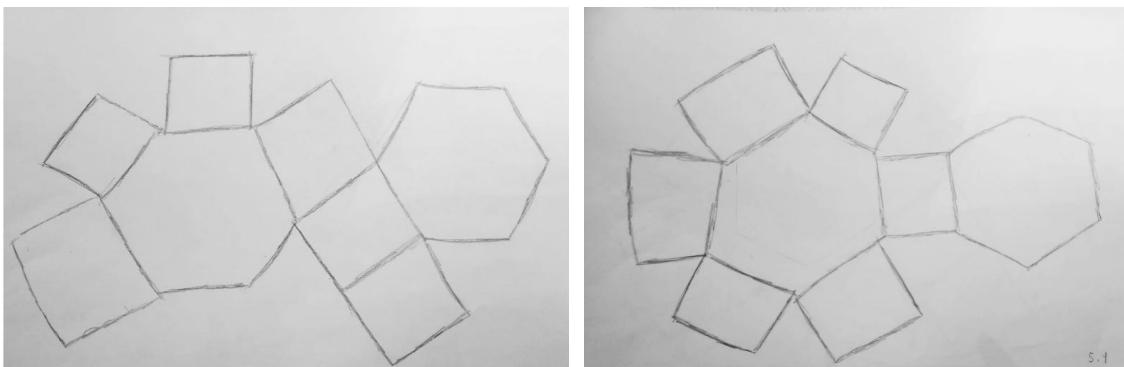
Categorização das representações das planificações dos sólidos (planificação alternativa)

| Grupos | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| a) Representam a planificação pelo seu contorno, sendo identificáveis os elementos que a compõem. | X | X | | X | X | |
| b) Representam apenas o contorno exterior da planificação. | | | X | | | |
| c) Representam os elementos que compõem a planificação, mas os contornos apresentam as “abas” da figura contornada. | | | | | X | |

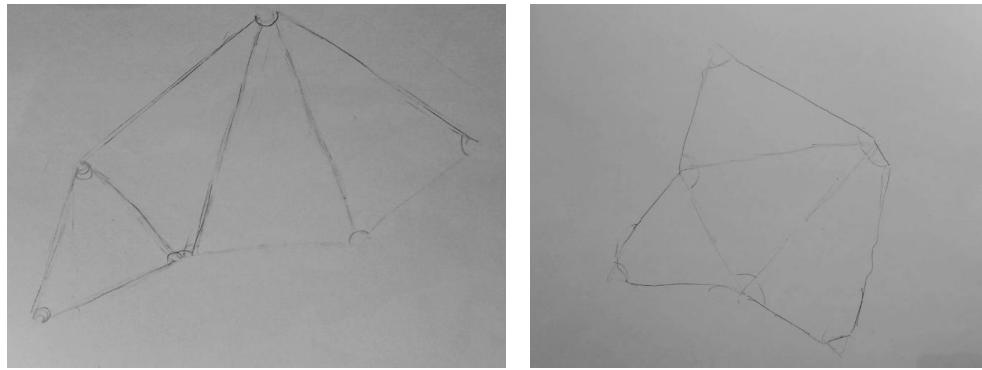
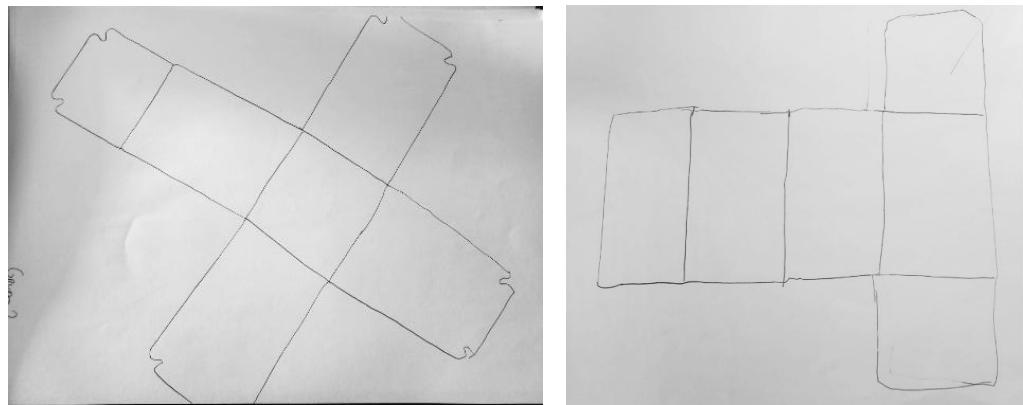
Os grupos 1, 4 e 5 representaram ambas as planificações corretamente, no sentido em que, tanto na planificação inicial como na alternativa, estão identificados não apenas o seu contorno mas também os elementos que a compõem e as relações entre eles (Figura 13).

Figura 13

Planificações do prisma hexagonal do grupo 5



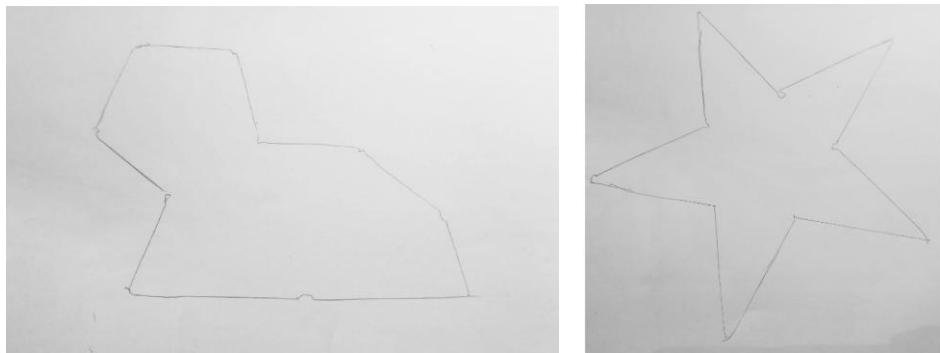
Para o grupo 2, a representação das planificações iniciais denota dependência do material manipulável na medida em que, em vez de representarem apenas os polígonos que compõem a planificação, representaram também aqueles elementos cuja única função é fixar o modelo (abas). Ou seja, desenham literalmente aquilo que estão a ver/manipular. O mesmo aconteceu com o grupo 6 em ambas as planificações (Figura 14). Nas produções deste grupo vê-se que apesar de os polígonos que compõem as planificações terem sido representados, os contornos exteriores da planificação apresentam alguns vértices das figuras arredondados, numa representação literal do material manipulável (Figura 14). Porém, na construção das planificações alternativas, o grupo 2 apresenta já uma representação focada apenas nos polígonos que a compõem, separando assim a planificação do material usado (Figura 15).

Figura 14*Planificações da pirâmide triangular do grupo 6***Figura 15***Planificações do prisma quadrangular do grupo 2*

O grupo 3 apenas considerou o contorno exterior da planificação, não incluindo os polígonos que as compõem (Figura 16).

**Figura 16**

Planificações da pirâmide pentagonal do grupo 3



As planificações de categoria a) evidenciam elementos explícitos do nível descritivo/analítico por se focarem nas diferentes componentes da planificação e suas propriedades.

4.ª Parte – Integração

Como forma de sistematização e integração dos conceitos, foram apresentados três itens, um de classificação de afirmações como verdadeiras ou falsas, o segundo de escolha múltipla e o terceiro de identificação do sólido de uma imagem e justificação. Esta parte da atividade também foi realizada em grupo.

Relativamente à primeira questão, os alunos tinham de classificar quatro afirmações como verdadeiras ou falsas. Todos os grupos classificaram corretamente as afirmações (Figura 17) à exceção do grupo 3 que considerou como falsa a afirmação que dizia que uma pirâmide quadrangular tem cinco vértices.

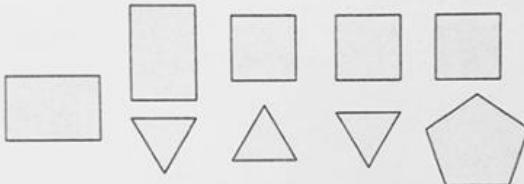
**Figura 17***Primeiro dos três itens propostos, corretamente preenchido***Assinala as frases com V (verdadeiro) ou F (Falso).**

| | |
|-------------------------------------|---|
| <input checked="" type="checkbox"/> | Um prisma pode ter um número ímpar de vértices. |
| <input checked="" type="checkbox"/> | Uma pirâmide pode ter um número par de arestas. |
| <input checked="" type="checkbox"/> | Uma pirâmide quadrangular tem 5 vértices. |
| <input checked="" type="checkbox"/> | Um prisma octogonal tem 11 faces. |

Quanto ao segundo item, que foi extraído de uma prova final do 1.º CEB (IAVE, 2014), os alunos tinham de selecionar, de entre vários polígonos, cinco para construir uma planificação que correspondesse a um sólido geométrico (Figura 18).

Figura 18*Segundo dos três itens propostos, corretamente preenchido*

A Marta planificou um sólido geométrico, usando como faces apenas cinco dos polígonos seguintes.



Assinala com um X o nome do sólido geométrico que a Marta planificou.

- Cilindro
- Cubo
- Prisma
- Pirâmide

Embora todos os grupos tivessem respondido corretamente, inicialmente tiveram alguma dificuldade em considerar a possibilidade de as faces laterais de um prisma poderem ser quadrados. Esta questão também já tinha surgido num grupo durante a construção dos sólidos geométricos. Isto revela dificuldade na identificação do quadrado como caso particular de um retângulo, que seria



um elemento explícito do nível 3, de dedução informal. Nesta situação, os alunos estão a raciocinar ainda no nível 2, descriptivo/analítico, sendo esta classificação inclusiva dos retângulos um elemento implícito deste nível.

Na última questão, extraída de uma prova de aferição do 1.º CEB (IAVE, 2012), era pretendido que os alunos identificassem qual era o sólido (pirâmide quadrangular) representado na figura e justificassem porque não poderia ser os outros dois sólidos (prisma quadrangular e pirâmide triangular) (Figura 19).

Figura 19

Enunciado do terceiro item

Observa o sólido geométrico da figura e lê o que dizem a Inês, o Pedro e a Maria.



Inês: É um prisma quadrangular.
Pedro: É uma pirâmide triangular.
Maria: É uma pirâmide quadrangular.

Qual dos três amigos tem razão?

Resposta: Maria

Explica porque é que os outros dois amigos se enganaram.

Todos os grupos identificaram corretamente o sólido da figura, no entanto as justificações à resposta diferiram, tal como se pode verificar na tabela 7.

**Tabela 7***Classificação das respostas dos alunos ao terceiro item*

| | Grupos | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|--|--------|---|---|---|---|---|---|
| Justificou a razão pela qual não era um prisma | | X | | X | X | X | |
| Justificou a razão pela qual não era uma pirâmide triangular | | X | X | X | X | X | |

Apenas três grupos (3, 4 e 5) justificaram a razão pela qual não era um prisma e a razão pela qual não era uma pirâmide triangular, descrevendo as características do sólido, base quadrada e faces laterais triangulares (Figura 20). O grupo 1 recorreu à forma das faces laterais retangulares dos prismas e ao facto deste sólido apresentar faces laterais triangulares para a sua explicação. Contudo, a justificação não ficou completa, pois não explicaram o porquê de a figura representar uma pirâmide (Figura 21). Os grupos 2 e 6 basearam-se na forma do polígono da base para a justificação. No entanto, não explicaram a razão pela qual o sólido era uma pirâmide e não um prisma (Figura 22).

Figura 20*Resposta do grupo 4 ao terceiro item*

Explica porque é que os outros dois amigos se enganaram.
Os dois amigos enganaram-se porque o prisma tem sempre faces retângulares no caso da pirâmide triangular a base tinha de ser um triângulo.

**Figura 21***Resposta do grupo 1 ao terceiro item*

Explica porque é que os outros dois amigos se enganaram.

Por que o sólido é uma Pirâmide e também
Por que os Prismas têm as faces retangulares
e o que está na imagem é uma Pirâmide

Figura 22*Resposta do grupo 6 ao terceiro item*

Explica porque é que os outros dois amigos se enganaram.

As duas enganaram - a Jorge disse que era um tra-
pezísmo mas na realidade era só uma pirâmide.
O Pedro está errado porque a base não
é um triângulo mas sim um quadrado.

A justificação completa na resposta indica que os alunos conhecem as componentes e propriedades dos sólidos o que se poderia classificar como respostas de tipo 4, da tipologia de Gutiérrez et al. (1991). As utilizações de atributos matemáticos na construção destas justificações evidenciam elementos explícitos do nível 2 – descriptivo/analítico. As justificações incompletas revelam que os alunos ainda denotam alguma dificuldade em enunciar as propriedades dos sólidos, o que se poderia enquadrar como respostas de tipo 3, evidenciando elementos implícitos do nível 1, visual. Deste modo, e de uma forma geral, os alunos ainda demonstraram raciocinar no nível visual, no entanto já revelam alguns indícios de pensamento do nível descriptivo/analítico, estando em transições entre os dois níveis.

Considerações Finais

O trabalho desenvolvido com esta turma de 4.º ano de escolaridade e a análise realizada com base no corpo teórico construído pelos van Hiele, e ampliado por outros investigadores, permitiu



conhecer melhor o pensamento geométrico destas crianças. De uma forma geral, os alunos apresentaram nas suas respostas elementos explícitos do nível 1, nomeadamente identificação de sólidos baseada na sua aparência, na dependência de materiais manipuláveis e das suas propriedades físicas e no recurso a linguagem mais simples com justificações inexistentes ou bastante reduzidas. Também foram observados elementos implícitos de nível 1, tais como descrições e justificações um pouco mais elaboradas, com identificação de componentes e algumas características. Foram ainda verificados elementos explícitos de nível 2, na caracterização dos sólidos pelas suas propriedades e pelas relações entre os seus componentes, estabelecidas através da exploração de modelos. Nestes casos, percebeu-se a utilização de linguagem mais sofisticada, respostas mais elaboradas, baseadas em propriedades matemáticas dos sólidos geométricos em estudo. A generalidade dos alunos forneceu evidências de se encontrar em diferentes estágios intermédios de desenvolvimento do seu pensamento geométrico, entre os níveis 1 – visual, e 2 – descriptivo/analítico.

As conclusões deste estudo estão em linha com outros, realizados com alunos com idades próximas. O estudo de Gutiérrez e Jaime (1998), que foi feito com alunos de ensino primário e secundário, concluiu que a maioria dos alunos de 11 e 12 anos apresentavam o nível 1 completo, sendo que apenas uma percentagem mais pequena dos alunos (10%) demonstrava o nível 2 completo e uma percentagem residual do nível 3. Embora o conteúdo abordado fosse a geometria no plano, consegue-se perceber que a maioria dos alunos não tinham o nível 2 e o nível 3 adquirido. Num outro estudo, abordando a geometria no espaço, de Gutiérrez e colaboradores (1991), verificou-se que o grupo da faixa etária mais baixa (13/14 anos) encontravam-se entre o nível 1 e 2. Neste estudo, não se observou qualquer aluno com o nível 2 completo nem se verificou qualquer tipo de aquisição do nível 3 ou do nível 4. Assim, devemos ter em consideração que esperar que os alunos no final do 1.º CEB adquiram a compreensão de classificações inclusivas, que se situam no nível 3 de van Hiele, como sugerem as Aprendizagens Essenciais (Canavarro et al., 2021d), requer um trabalho aturado de promoção da transição de níveis, neste caso, do nível 1 para o nível 2 e do nível 2 para o nível 3. Relativamente ao modo de organizar a sequência didática, um estudo realizado por Oliveira e Leivas (2017) atesta que as atividades realizadas com alunos de 5.º ano seguindo o modelo de ensino de van Hiele foram produtivas comparativamente com os resultados



obtidos sem a aplicação desta abordagem, com um impacto igualmente positivo no interesse dos alunos pela aprendizagem da geometria.

Apesar das limitações deste estudo, decorrentes dos condicionamentos inerentes a ter sido realizado em contexto de prática de ensino supervisionada, foi possível confirmar a relevância da teoria de van Hiele como ferramenta de trabalho do professor. Por um lado, permite compreender o nível do pensamento geométrico dos alunos e o seu desenvolvimento e, por outro lado, fornece ao professor um referencial para a planificação, preparação e implementação das suas práticas letivas, tanto na adequação da linguagem a utilizar como na escolha dos recursos e sequenciação das tarefas.

Referências Bibliográficas

- Abrantes, P., Serrazina, L., & Oliveira, I. (1999). *A Matemática na educação básica*. Ministério da Educação-Departamento da Educação Básica.
- Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 843- 908). National Council of Teachers of Mathematics.
- Canavarro, A. P., Mestre, C., Gomes D., Santos E., Santos, L., Brunheira, L., Vicente, M., Gouveia, M. J., Correia, P., Marques, P. M. & Espadeiro, R. G. (2021a). *Aprendizagens essenciais: 1.º ano, 1.º ciclo do ensino básico de Matemática*. DGE-ME. [Aprendizagens Essenciais - Ensino Básico | Direção-Geral da Educação](#)
- Canavarro, A. P., Mestre, C., Gomes D., Santos E., Santos, L., Brunheira, L., Vicente, M., Gouveia, M. J., Correia, P., Marques, P. M. & Espadeiro, R. G. (2021b). *Aprendizagens essenciais: 2.º ano, 1.º ciclo do ensino básico de Matemática*. DGE-ME. [Aprendizagens Essenciais - Ensino Básico | Direção-Geral da Educação](#)
- Canavarro, A. P., Mestre, C., Gomes D., Santos E., Santos, L., Brunheira, L., Vicente, M., Gouveia, M. J., Correia, P., Marques, P. M. & Espadeiro, R. G. (2021c). *Aprendizagens essenciais: 3.º ano, 1.º ciclo do ensino básico de Matemática*. DGE-ME. [Aprendizagens Essenciais - Ensino Básico | Direção-Geral da Educação](#)



Canavarro, A. P., Mestre, C., Gomes D., Santos E., Santos, L., Brunheira, L., Vicente, M., Gouveia, M. J., Correia, P., Marques, P. M., & Espadeiro, R. G. (2021d). *Aprendizagens essenciais: 4.º ano, 1.º ciclo do ensino básico de Matemática*. DGE-ME. [Aprendizagens Essenciais - Ensino Básico | Direção-Geral da Educação](#)

Clements, D. H. (2003). Teaching and learning geometry. In NCTM (Org.), *A research companion to principles and standards for school mathematics*, (pp.151-178). NCTM.

Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 420-464). Macmillan Publishing Company.

Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In M. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (3rd ed., pp. 119-161). Macmillan Publishing Company.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. D. Reidel Publishing Company.

Gutiérrez, A. (1992). Exploring the links between van Hiele Levels and 3-dimensional geometry. *Structural topology*, 18, 31-48. <https://www.researchgate.net/publication/39425797>

Gutiérrez, A. & Jaime, A. (1998). On the Assessment of the van Hiele Levels of Reasoning. *Focus on Learning problems in mathematics*, 20(2-3), 27-46. <https://www.researchgate.net/publication/237774635>

Gutiérrez, A., Jaime, A., & Fortuny, J. M. (1991). An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the van Hiele levels. *Journal for research in mathematics education*, 22(3), 237-251. <https://doi.org/10.5951/jresematheduc.22.3.0237>

Howse, T., & Howse, M. (2015). Linking the van Hiele theory to instruction. *Teaching Children Mathematics*, 21(5), 305-313.

IAVE. (2012). *Prova de aferição 1.º ciclo do ensino básico - Matemática*. Ministério da Educação e Ciência, Instituto de Avaliação Educativa. https://iave.pt/wp-content/uploads/2020/04/pa_mat_1_ciclo_12.pdf

IAVE. (2014). *prova final de Matemática do 1.º ciclo do ensino básico 1.ª fase*. Ministério da Educação e Ciência, Instituto de Avaliação Educativa. https://iave.pt/wp-content/uploads/2020/04/mat_42_1C_1F_2014.pdf



Jaime, A. & Gutiérrez, A. (2016). El razonamiento geométrico según el modelo de van Hiele. In Carrillo, J. et al. (Eds.), *Didáctica de las matemáticas para maestros de Educación Primaria* (pp. 173-195). Paraninfo.

López, M. B., & Masot, M. C. B. (2018). Enseñanza y aprendizaje de la geometría em primaria. In Indugrafic Digital (Eds.), *Geometría en la Educación Primaria* (pp. 28- 38). Indugrafic Digital.

Oliveira, M. T., & Leivas, J. C. P. (2017). Visualização e representação geométrica com suporte na teoria de van Hiele. *Ciências e Natura*, 39(1), 108-117. <https://doi.org/10.5902/2179460X23170>

Piaget, J., & Inhelder, B. (1956). *The child's conception of space*. Routledge & Kegan Paul.

van Hiele, P. (1999). Developing geometric thinking through activities that begin with play. *Teaching Children Mathematics*, 6, 310–316.