



Artigo

Representações Matemáticas na Resolução de Problemas no 1.º Ano de Escolaridade

Beatriz Alves

Agrupamento de Escolas de Ferreiras
beatrizalves020@outlook.pt | ORCID 0009-0000-7222-9240

António Guerreiro

Escola Superior de Educação e Comunicação, Universidade do Algarve e Centro de Investigação Transdisciplinar em Educação e Desenvolvimento (CITED), Instituto Politécnico de Bragança
aguerrei@ualg.pt | ORCID 0000-0002-4711-4270

Resumo

Neste artigo, abordamos a resolução de problemas matemáticos e as representações matemáticas, como forma de expressar ideias e conceitos matemáticos, através de múltiplas configurações, sejam elas operações numéricas ou desenhos, por alunos do 1.º ano de escolaridade, os quais ainda se encontram no início do seu percurso escolar e ainda não têm um conhecimento elaborado da matemática formal. O estudo foi realizado com uma turma de 1.º ano de escolaridade, pertencente a uma escola em contexto rural, no concelho de Loulé, no ano letivo 2023/2024. Foram apresentados aos alunos, oito problemas matemáticos, os quais foram resolvidos recorrendo a várias tipologias de representação, por total iniciativa destes. A recolha de dados integrou as produções dos alunos e a gravação vídeo e áudio das oito aulas, em que decorreu o estudo, particularmente da apresentação e discussão das realizações dos alunos. Da análise dos dados conclui-se que a tipologia de representação mais utilizada foi a representação gráfica, recorrendo a desenhos, enquanto a representação algébrica esteve ausente. A representação verbal teve alguma



expressão no início da intervenção educativa, porém foi a representação numérica, relacionada com o uso de operações numéricas, que obteve um maior crescimento no seu aparecimento, começando a ganhar expressão entre as resoluções, à medida que os alunos iam apresentando os seus trabalhos.

Palavras-chave: Matemática; Representações Matemáticas; Resolução de Problemas; 1.º Ciclo do Ensino Básico.

Abstract

In this article, we look at mathematical problem solving and mathematical representations as a way of expressing mathematical ideas and concepts through multiple configurations, be they numerical operations or drawings, by 1st year students, who are still at the beginning of their school journey and do not yet have an elaborate knowledge of formal maths. The study was carried out with a 1st year class from a rural school in the municipality of Loulé in the 2023/2024 school year. The students were presented with eight mathematical problems, which they solved on their own initiative using various types of representation. Data collection included the students' productions and the video and audio recording of the eight lessons in which the study took place, particularly the presentation and discussion of the students' achievements. Analysing the data shows that the most used type of representation was graphical, using drawings, while algebraic representation was absent. Verbal representation was used to some extent at the start of the educational intervention, but it was numerical representation, related to the use of numerical operations, that saw the greatest increase in appearance, beginning to gain expression among the resolutions as the students presented their work.

Keywords: Maths; Mathematical Representations; Problem Solving; 1st Cycle of Basic Education.

Introdução

O currículo que rege o ensino básico e secundário português é assente no Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória (Direção Geral de Educação / Ministério da Educação, 2017) e nas Aprendizagens Essenciais da Matemática (Canavarro et al., 2021). O primeiro define os princípios, valores e áreas de competência que devem ser atingidos pelos alunos no final da escolaridade obrigatória, enquanto as Aprendizagens Essenciais “são documentos de orientação curricular base na planificação, realização e avaliação do ensino e da aprendizagem, [que] visam promover o desenvolvimento das áreas de competências inscritas no Perfil dos Alunos à Saída da



Escolaridade Obrigatória” (site da Direção Geral de Educação / Ministério de Educação). Desta forma, para alcançar o pleno cumprimento do currículo deve ser feita uma correta articulação destes documentos orientadores.

Quando falamos na área da matemática não podemos restringir o desenvolvimento das competências e capacidades matemáticas apenas ao ensino básico e secundário. É necessário referir que as Orientações Curriculares para a Educação Pré-Escolar (OCEPE) (Silva et al., 2016) também definem competências e capacidades matemáticas a estimular nas crianças desde a educação pré-escolar.

Na educação pré-escolar deve ser apresentado às crianças “uma diversidade e multiplicidade de oportunidades educativas, que [constituem] uma base afetiva e cognitiva sólida da aprendizagem da matemática” (Silva et al., 2016, p. 74), uma vez que “os conceitos matemáticos adquiridos nos primeiros anos vão influenciar positivamente as aprendizagens posteriores e que é nestas idades que a educação matemática pode ter o seu maior impacto” (Silva et al., 2016, p. 74).

Nesta ótica, é primordial que na transição entre níveis educativos seja assegurada a “continuidade dos programas educativos, providenciando um currículo apropriado à criança em termos de desenvolvimento, evitando uma mudança abrupta e as consequentes dificuldades de adaptação” (Rosa, 2013, p. 15).

Neste artigo pretende-se apresentar uma síntese de uma investigação, desenvolvida no âmbito da Prática de Ensino Supervisionada (PES) do Mestrado em Ensino de 1.º Ciclo do Ensino Básico e de Matemática e Ciências Naturais no 2.º Ciclo do Ensino Básico da Escola Superior de Educação e Comunicação da Universidade do Algarve (Alves, 2024), que analisa as representações matemáticas utilizadas por alunos do 1.º ano de escolaridade ao solucionarem problemas matemáticos, unindo as capacidades de representações matemáticas e a resolução de problemas.

Resolução de Problemas

A resolução de problemas é uma das seis capacidades matemáticas que as aprendizagens essenciais estabelecem como objetivo para desenvolver na área da matemática. Esta é uma capacidade matemática que “deve ser uma constante e apoiar tanto a abordagem aos conhecimentos matemáticos como oferecer oportunidades para a sua aplicação” (Canavarro et al.,



2021, p. 9). Esta capacidade não deve ser uma novidade para os alunos ao entrar no 1.º ciclo do ensino básico, uma vez que já em idade pré-escolar lhes devem ser propostas “situações problemáticas em que as crianças encontrem as suas próprias soluções e as debatam com as outras [crianças]” (Silva et al., 2016, p. 74).

De acordo com Piedade e Reis (2019), a resolução de problemas é uma “capacidade transversal essencial para o desenvolvimento de ideias matemáticas por parte dos alunos, colocando-os a pensar e a desenvolver o seu raciocínio matemático” (p. 180). A abordagem sistemática a esta capacidade, estimula não só o pensamento lógico, mas também o seu raciocínio crítico e a comunicação, incidindo noutras capacidades matemáticas como o raciocínio matemático, o pensamento computacional e a comunicação matemática. Uma vez que os problemas matemáticos podem envolver qualquer um dos domínios de conteúdo e a resolução dos mesmos é sempre apresentada recorrendo a uma forma de representação, também as capacidades de conexões e representações matemáticas podem e devem ser estimuladas com a resolução de problemas.

Representações Matemáticas

As representações matemáticas são outra das capacidades previstas nas aprendizagens essenciais. Esta capacidade “é essencial, valorizando-se a expressão verbal das ideias, bem como as representações que envolvem materiais manipuláveis ou elaboração de diagramas, sem dispensar o investimento progressivo no uso fluente da linguagem simbólica” (Canavarro et al., 2021, p. 9).

Segundo Infante e Canavarro (2015), “as representações são consideradas instrumentos essenciais que possibilitam representar, organizar e comunicar ideias matemáticas” (p. 139), uma vez que “sustentam a argumentação dos conhecimentos matemáticos” (p. 140). Esta perspetiva evidencia a importância desta capacidade matemática como mediadora na construção do conhecimento, permitindo que os alunos visualizem relações, identifiquem padrões e comuniquem raciocínios com maior clareza.

De acordo com Velez (2020), para compreender as representações matemáticas é crucial perceber “o que são, como se caracterizam, que tipos de representações existem e como se



organizam em sistemas de representações” (p. 9). De modo global, as representações matemáticas são caracterizadas por “uma construção mental ou física que descreve aspectos da estrutura de um conceito” (Velez, 2020, p. 9) ou por “um símbolo ou conjunto de símbolos, diagramas, objetos, imagens ou gráficos, que podem ser utilizados no processo de ensino e aprendizagem” (Amado, 2022, p. 3). Em suma, as representações matemáticas são ferramentas que permitem “comunicar o nosso raciocínio aos que nos rodeiam, evidenciando o percurso que seguimos na resolução de uma determinada questão matemática” (Velez, 2020, pp. 9-10), constituindo “um meio para a compreensão e trabalho com os conceitos [matemáticos]” (Infante & Canavarro, 2015, p. 140).

Sistemas de representação

Para Velez (2020), “uma representação matemática não pode ser interpretada isoladamente, só fazendo sentido no quadro de um determinado sistema de representação com regras, significados e normas globalmente aceites” (p. 10). Neste sentido, todas as representações estão enquadradas em sistemas de representações mais amplos com uma estrutura interna própria. Existem sistemas de representação externas, referidas como semióticas, e representações internas que espelham as representações externas que existem no “mundo físico como elementos e materiais estruturados (numeração algébrica, equações, funções, derivadas, linguagem Logo, retas numéricas, gráficos cartesianos, diagramas, fractais e outros)” (Velez, 2020, p. 11). As representações externas são facilmente observáveis, enquanto as representações internas são mais difíceis de caracterizar e compreender. As representações internas não são possíveis de observar diretamente, pois estão dependentes do significado que cada aluno atribui às representações externas.

Tipos de representação

Independentemente do sistema de representação a que pertence, cada representação insere-se numa determinada tipologia. Bruner (1999, citado em Velez, 2020) distingue entre representações ativas, icónicas e simbólicas:

A minha sugestão é que os seres humanos têm provavelmente três maneiras diferentes de realizarem esta proeza. A primeira é através da ação. Conhecemos muitas coisas para as quais não há imagética



nem palavras e é muito difícil ensiná-la através de palavras, diagramas ou imagens (...). Há um segundo sistema de representação que depende da organização visual ou outra organização sensória e do recurso a imagens de resumo (...). A primeira forma de representação veio a ser designada como ativa e a segunda como icónica (...). Por fim, há a representação por palavras ou linguagem. O seu traço distintivo é ser simbólica por natureza (p. 12).

Na classificação das representações em ativas, icónicas e simbólicas é possível estabelecer subcategorias, as quais, por exemplo, “nas representações icónicas podem ser imagens que representam um dado objeto com grande quantidade de detalhes ou esquemas e diagramas que representam esse objeto de forma muito abstrata” (Ponte et al., 2015, p. 312). Nas representações simbólicas podem existir também diversos tipos, “tendo em conta a complexidade dos conceitos que representam e a familiaridade que o indivíduo tem dessas representações” (Ponte et al., 2015, p. 312).

As representações também podem adquirir uma dimensão mista envolvendo aspectos simbólicos e icónicos, os quais caracterizam as representações matemáticas na forma de registo semiótico. No domínio do ensino e da aprendizagem da matemática podemos caracterizar quatro modos de representação: i) verbal, ii) gráfico, iii) algébrico e iv) numérico, que podem ser considerados isoladamente ou em interação (Amado, 2022; Mainali, 2021).

A representação verbal inclui as linguagens escrita e falada (Mainali, 2021), estando associada à utilização de palavras e frases para comunicar a informação e representar ideias. A representação gráfica inclui imagens, diagramas, planos de coordenadas e outras representações figurativas (Mainali, 2021), associada à utilização de um desenho, esquema, diagrama, tabela ou gráfico como forma de explicitar o raciocínio utilizado na resolução da tarefa matemática (Varela, 2020). A representação algébrica decorre da utilização de símbolos, fórmulas, etc. (Mainali, 2021), relacionada com a utilização de expressões algébricas, de relações, de padrões e funções (Varela, 2020). A representação numérica refere-se à apresentação de dados ou de ideias e conceitos matemáticos de uma forma organizada, eventualmente numa lista ordenada ou numa tabela (Mainali, 2021), sendo também associada à utilização das quatro operações elementares: adição, subtração, multiplicação e divisão (Varela, 2020).



Contudo, uma única representação pode não ser suficiente para apresentar uma ideia matemática, pode ser necessário a utilização de diferentes representações em simultâneo com diferentes papéis, no que se refere à sua representatividade, na apresentação de ideias, conceitos ou problemas matemáticos, em função da natureza das tarefas matemáticas e das preferências dos alunos (Mainali, 2021).

As representações matemáticas “permitem múltiplas concretizações de um conceito” (Amado, 2022, p. 3), o que auxilia na compreensão dos alunos, uma vez que “a utilização de múltiplas representações de um mesmo conceito permite aos alunos extrair e apreender determinadas propriedades” (Amado, 2022, p. 3). Apresentar a mesma ideia sob a forma de várias representações, permite aprofundar o conhecimento, oferecendo vários olhares sobre o mesmo assunto, através da tradução de representações no ensino e na aprendizagem da matemática (Mainali, 2021).

Enquadramento Metodológico

Natureza do design e questões de investigação

A investigação tem contribuído para problematizar e compreender as situações educativas, mas também para enquadrar e caracterizar a área da educação (Hamido & Azevedo, 2013). Investigar em educação envolve o estudo e a compreensão aprofundada de um ou vários aspectos do processo de ensino e de aprendizagem, permitindo construir um maior saber educativo e melhorar a qualidade deste processo. Neste sentido, o estudo realizado seguiu a metodologia qualitativa, uma vez que “os dados recolhidos são (...) ricos em pormenores descritivos relativamente a pessoas, locais e conversas” (Bogdan & Biklen, 1994, p. 16).

Neste caso, contará com uma descrição detalhada do trabalho escrito e oral realizado pelos alunos quando confrontados com uma série de problemas matemáticos. Além da descrição detalhada, esta metodologia também se caracteriza pela inserção da investigadora no contexto onde está a ser feito o estudo, ocorrendo observação participante, sucedendo-se questões planeadas ou não planeadas aos alunos e um registo das respostas e do que foi observado (Bogdan & Biklen, 1994). A interpretação dos resultados da observação assenta numa “perspetiva comprehensiva, [permitindo] a descrição, interpretação e análise crítica ou reflexiva sobre os fenómenos estudados”



(Gonçalves, 2010, p. 48), baseada na tipologia de representações verbais, gráficas, algébricas e numéricas (Amaro, 2022; Mainali, 2021).

O presente estudo teve como ponto de partida a seguinte questão base de investigação:

Quais as representações matemáticas utilizadas por alunos de 1.º ano de escolaridade ao resolverem problemas matemáticos?

Esta questão de investigação, além de terem sido o ponto de partida do estudo, também constituiu a orientação para o processo de análise crítica e reflexiva após a recolha dos dados, na tentativa de responder o mais detalhadamente possível às indagações iniciais.

Participantes e contexto educativo

A presente investigação contou com a colaboração de uma turma de 1.º ano de escolaridade, com vinte e quatro alunos, nove meninas e quinze meninos, com idades compreendidas entre os cinco e os sete anos, numa escola em contexto rural, pertencente a um agrupamento de escolas do concelho de Loulé.

Um dos alunos detém transtorno do espetro do autismo, porém como não possui uma grande disparidade dos demais, em termos de escrita e de cognição, realizou as mesmas tarefas que os colegas, usufruindo de um maior apoio do docente titular e da professora/investigadora (primeira autora) e também de suporte de vários materiais para auxiliar na sua compreensão. No decorrer das intervenções nem sempre foi possível contar com todos os alunos, uma vez que não se encontravam presentes. Porém, todas as intervenções foram implementadas com um mínimo de vinte alunos.

As aulas alicerçaram-se em torno das seguintes fases: apresentação do problema, trabalho autónomo dos alunos, apresentação e discussão das atividades realizadas e sistematização das aprendizagens matemáticas, tendo por princípio as etapas do ensino exploratório da matemática (Guerreiro et al., 2015).

O ensino exploratório da matemática pressupõe que o aluno seja o centro do trabalho, valorizando o diálogo e a descoberta em substituição da exposição de conteúdos. Neste sentido, foram apresentados à turma participante, oito problemas matemáticos, envolvendo a adição, a



subtração, a ordenação de números, a divisão e o cálculo combinatório, distribuídos por oito tarefas matemáticas com o objetivo de recolher informação para responder à questão de investigação, mas também de introduzir e fomentar a capacidade de resolução de problemas, uma vez que estes alunos nunca tinham trabalhado este tipo de tarefa matemática.

A professora/investigadora iniciou todas as intervenções educativas, com uma duração média de noventa minutos, pela apresentação do problema, procedendo à sua leitura, seguido da resolução individual autónoma do mesmo pelos alunos, uma vez que se pretendia analisar as representações matemáticas de cada um, com posterior apresentação e discussão das atividades realizadas, por três alunos em cada uma das aulas, e síntese dos aspectos matemáticos envolvidos no problema. A sequência das apresentações dos alunos ao grupo turma teve em atenção a tipologia de representação, privilegiando as representações diferentes entre si e começando por aquelas que não estavam totalmente corretas de forma a não constranger os alunos que as iam apresentar.

Na primeira aula verificou-se que os alunos, mesmo com a ilustração a acompanhar o enunciado, tinham alguma dificuldade em compreender o problema. Como tal, houve necessidade de repensar as intervenções e aplicar nas seguintes aulas algumas estratégias que não foram idealizadas inicialmente. Dada a faixa etária, foi necessário segmentar a leitura dos problemas, para certificar que os alunos acompanhavam a informação que ia sendo proferida, simplificar o vocabulário e questionar se havia alguma palavra que desconhecessem o significado e utilizar materiais para exemplificar fisicamente os problemas.

A intervenção educativa abrangeu a aplicação de oito problemas matemáticos, seguindo uma determinada ordem de apresentação, partindo do conteúdo conhecido dos alunos, números ordinais e adição, até ao conteúdo que ainda não tinha sido abordado, cálculo combinatório. As intervenções decorreram, no ano letivo de 2023/24, sendo que os três primeiros problemas foram apresentados em novembro de 2023 e os restantes cinco foram implementados em janeiro de 2024. A apresentação dos problemas, tanto na primeira como na segunda parte das intervenções, foi sistematizada, isto é, deu-se pouco tempo de intervalo entre cada intervenção para criar uma rotina de trabalho.



Instrumentos de recolha e análise de dados

De forma a acompanhar o cariz qualitativo da investigação, o estudo foi realizado através da observação participante, porém esta surge como uma técnica complementar à recolha das produções dos alunos e gravação áudio e vídeo das apresentações e da discussão (Minayo & Costa, 2018). Cada problema foi entregue numa folha A4, individualmente, com espaço em branco para que os alunos pudessem fazer todas as representações que considerassem necessárias para a resolução do problema. No final de cada intervenção, as folhas foram recolhidas e foram sujeitas a uma análise detalhada para caracterizar as representações matemáticas. Além destes instrumentos, no decorrer das intervenções encontrava-se um gravador na sala para captar as interações entre os participantes. Também durante as apresentações e discussão, foi feita uma gravação em vídeo para complementar as informações dos restantes instrumentos.

Relativamente à análise dos dados, esta foi feita tendo em conta a tipologia de representação verbais, gráficas, algébricas e numéricas (Amaro, 2022; Mainali, 2021). A análise dos dados teve como foco, não só as produções dos alunos, mas também os diálogos gravados entre os participantes e a professora/investigadora. Os vídeos das apresentações foram o recurso mais utilizado para justificar as produções dos alunos, enquanto os áudios foram utilizados pontualmente, apenas como forma de esclarecimento quando surgiam dúvidas quanto à gravação de vídeo.

Princípios éticos do estudo

O presente estudo seguiu todos os princípios éticos intrínsecos à investigação. Dada a necessidade de captar o áudio e a imagem dos alunos, começou-se por informar todos os encarregados de educação da presença da professora/investigadora previamente, solicitando o preenchimento da declaração de consentimento informado, onde se comunicou todos os detalhes relevantes relativos à investigação. Além disso, também os alunos foram informados previamente, tomando conhecimento não só da presença da professora/investigadora, mas também dos métodos de recolha de dados. Também foi garantido o anonimato de todos os participantes, uma vez que se recorreu a nomes fictícios, os nomes que constavam nos registos recolhidos foram apagados e as imagens captadas dos alunos foram utilizadas apenas para fins investigativos e nunca partilhadas, protegendo a integridade dos alunos.



Análise e Discussão dos Resultados

Representações verbais

As representações verbais pressupõem a utilização de palavras e/ou frases, quer seja de forma oral ou escrita (Mainali, 2021). Considerou-se também a utilização de números, por si, como uma representação verbal, dado tratar-se de uma designação e não estar a esta representação associada, de modo explícito, uma operação numérica para além da contagem elementar. Uma vez que os participantes se encontravam no início do processo de aquisição da leitura e da escrita, era esperável que esta representação fosse pouco utilizada. Contudo, a natureza de alguns problemas apresentados, nomeadamente aqueles que envolvem inferências, deduções e análise de possibilidades, sem necessitar da utilização de operações aritméticas, pode ter estimulado os alunos a optarem por esta representação matemática.

O primeiro problema foi solucionado pela maioria dos alunos através da representação verbal. Através das informações proferidas no enunciado, os alunos tinham de responder quais os personagens que chegaram respetivamente em primeiro, segundo e terceiro lugar numa corrida. Uma das alunas explicou o que fez na sua apresentação:

Professora/Investigadora: – O que é que fizeste, Joana?

Joana: – Eu fiz os nomes.

Professora: – Muito bem, escreveste os nomes. Por baixo dos nomes escreveste alguma coisa, não foi?

Joana: – Sim.

Professora: – O quê?

Joana: – Escrevi primeiro, segundo e terceiro (1.^º, 2.^º e 3.^º).

Do diálogo, conseguimos compreender que a aluna considerou que a melhor forma para representar o seu raciocínio seria através da escrita, o que depreende algum conhecimento acerca dos números ordinais. Começou por escrever o nome das personagens integrantes da situação problema e os números ordinais que correspondiam à posição de cada uma no final da corrida (Figura 1).

**Figura 1***Resolução da Joana*

Como esta aluna, a maioria dos alunos solucionou o problema recorrendo à representação verbal, sendo que em alguns casos representaram o nome apenas pela letra inicial e escreveram o número ordinal correspondente. Alguns alunos trocaram a ordem entre o João e a Ana, o que revela dificuldade de compreensão do significado temporal da palavra “depois”.

Na segunda situação problema apresentada, questionou-se os alunos sobre quantos palitos seriam necessários para construir dois triângulos e um quadrado, sabendo que são precisos três para construir um triângulo e quatro para construir um quadrado. Alguns alunos optaram pela designação da quantidade de palitos utilizada em cada figura, escrevendo os números:

Professora: – O que é que fizeste, João?

João: – Em cima dos triângulos fiz o número da quantidade de palitos.

Professora: – Quantos palitos é que eram necessários?

João: – Um tem três e o outro tem três (apontando para os triângulos). O quadrado tem quatro.

Manuela (colega): – Qual é o total?

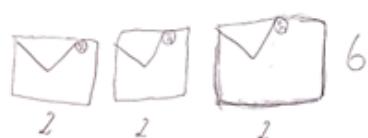
João: – Dez (apontando para o 10).

Apesar de conjugar a representação gráfica, nas imagens dos polígonos, com a representação verbal, considerada como designação de quantidades (Figura 2), o que nos indica a resolução do problema é a representação verbal da quantidade total, sem indicação da operação associada.

**Figura 2***Resolução do João*

O João começou por desenhar as figuras geométricas e depois considerou que a melhor forma de proceder, era designando a quantidade de palitos necessária para construir cada uma, indicando a quantidade total do lado esquerdo. A Rita também optou por representar verbalmente a quantidade de palitos necessária para construir cada uma das figuras e a sua totalidade. Pressupõe-se que os alunos que optaram por esta representação tenham calculado mentalmente a soma, apesar de não a terem representado pela operação de adição associada. Neste caso, optou-se por classificar a resolução do aluno através da articulação das representações verbal e gráfica, destacando-se a utilização da designação do números de palitos utilizados e a quantidade total.

Relativamente ao terceiro problema, a grande maioria dos alunos não utilizou a representação verbal para solucionar o problema. Apenas uma aluna optou por esta representação, porém quando solicitada para apresentar a sua resolução, não o quis fazer. A análise é feita, exclusivamente a partir da sua produção. No terceiro problema, solicitava-se aos alunos que indicassem o número de renas que apareceriam na totalidade de três postais, sabendo que cada um teria um selo com duas renas. A aluna Teresa optou por escrever o número de renas contido em cada postal e no final, escreveu o número total (Figura 3).

Figura 3*Resolução da Teresa*

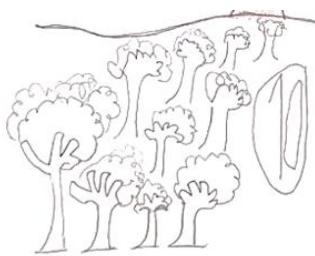


Verifica-se que a representação verbal foi articulada com a representação gráfica, complementando-se. Presume-se que a aluna tenha recorrido ao cálculo mental para realizar a adição, todavia não o demonstrou nem registou qualquer operação numérica, colocando apenas os números como designação de uma quantidade.

Ao solucionarem o quarto problema nenhum aluno optou exclusivamente pela representação verbal. A aluna Ana optou por representar o seu pensamento de forma gráfica, através do desenho das árvores, e de forma verbal, escrevendo a designação do número dez (Figura 4).

Figura 4

Resolução da Ana



O quinto problema estava relacionado com a divisão. No enunciado introduzia-se uma nova personagem, que queria repartir, de forma igual, nove rebuçados pelos seus três filhos. Ao solucionar este problema alguns alunos optaram por registrar o número de rebuçados que cada filho iria receber, articulando, mais uma vez, a representação verbal com a representação gráfica. Um dos alunos referiu:

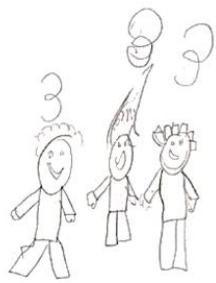
Professora: – Quando quiseres podes começar a apresentar o teu trabalho.

Jorge: – Eu fiz o número três para cada um dos meninos (apontando para os números e para cada boneco desenhado).

Professora: – E o que é que fizeste mais?

Jorge: – Desenhei três meninos e cada um tinha três rebuçados.

Pressupõe-se que o aluno tenha descomposto o total, mentalmente, mas optou por representar a sua resolução articulando a escrita e o desenho (Figura 5).

**Figura 5***Resolução do Jorge*

O aluno começou por desenhar cada um dos filhos e repartiu a totalidade pelos três, designando o número por cima de cada um deles. O mesmo se verificou com outro colega que também optou por articular o desenho com a escrita.

O sexto, o sétimo e o oitavo problema envolviam a subtração, a subtração e a adição e o cálculo combinatório, respetivamente. Apesar de estes terem sido realizados em janeiro, numa altura em que alguns alunos já adquiriram alguma competência de escrita, em nenhuma das resoluções dos últimos três problemas se obteve representação verbal.

Representações gráficas

A representação gráfica presume a utilização de desenhos, esquemas, tabelas, gráficos ou diagramas ou outras representações figurativas para representar o pensamento matemático (Mainali, 2021; Varela, 2020). Uma vez que a representação simbólica, com recurso ao desenho e à pintura, é trabalhada inúmeras vezes na educação pré-escolar, era esperável que a representação gráfica fosse a representação mais usual por entre as resoluções dos alunos. Em todas as intervenções resultaram resoluções conectadas à representação gráfica, mais exatamente, sob a forma de desenhos.

As resoluções do primeiro problema demonstraram uma maior tendência para a representação verbal. Porém, alguns alunos articularam a representação verbal com a



representação gráfica, apresentando a sua resposta recorrendo a ambas. A aluna Ana foi um dos exemplos:

Professora: – Mostra-nos o teu trabalho, pode ser?

Ana: (vira a folha para a professora e para a turma)

Professora: – O que é que fizeste?

Ana: – Desenhei os bonecos e depois pus uma seta (apontando para a seta que ligava cada um dos bonecos ao nome).

Através das palavras da Ana conseguimos perceber que esta optou por uma forma de representação gráfica, desenhando os bonecos tendo em conta a ordem de chegada que ela considerava correta, desenhando o Paulo em primeiro, a Ana em segundo e o João em terceiro, horizontalmente (Figura 6).

Figura 6

Resolução da Ana



A Maria também recorreu à representação gráfica para apresentar a sua resolução. Apesar de recorrer às mesmas representações que a Ana, a Maria optou por desenhar os bonecos na ordem que considerava correta, porém na vertical e mais pormenorizadamente, acrescentando a linha da metade.

No segundo problema, a maioria dos alunos optou por apresentar o seu resultado sob a forma de desenhos. Um dos alunos que optou por esta tipologia de representação referiu o seguinte:

Professora: – Quando quiseres, podes começar.

Tomás: (mostra o trabalho na horizontal porque foi assim que o fez) – Eu fiz... Eu acho que fiz bem, mas... para a próxima já faço bem.



Professora: – Mas o que é que fizeste, Tomás?

Tomás: – Fiz três palitos e três palitos. Juntamos três com três, dá seis palitos.

Professora: – Sim...

Tomás: – Depois fiz o quadrado e quatro palitos.

Professora: – E na totalidade quantos palitos são?

Tomás: – São seis para os triângulos e para o quadrado são quatro. Seis mais quatro são dez.

O Tomás optou por desenhar as figuras geométricas, dois triângulos e um quadrado, e desenhar ao lado de cada um, o número de palitos necessário para os construir (Figura 7). Este aluno preferiu representar todo o seu pensamento de forma gráfica, não articulando com nenhuma outra tipologia de representação.

Figura 7

Resolução do Tomás



A mesma estratégia foi apresentada pelo Tiago, mas este desenhou os palitos todos juntos, não conectando nenhuma quantidade a nenhuma figura em específico, apresentando apenas a quantidade total.

No terceiro problema, alguns alunos optaram por utilizar, exclusivamente, a representação gráfica, recorrendo ao desenho para demonstrar o seu pensamento. Um dos alunos referiu:

Professora: – Podes mostrar o que fizeste?

Dinis: – Eu fiz as seis renas.

Professora: – Fizeste mais qualquer coisa, não foi?

Dinis: – Fiz os postais com os selos.



O Dinis representou todo o seu raciocínio através de desenhos (Figura 8). Desenhou os três postais, acrescentando um selo em cada um e desenhou duas renas por cima de cada postal, resultando em seis renas.

O Carlos também optou por fazer uma representação gráfica, porém mais pormenorizada, apresentando as duas renas dentro do selo, demonstrando ter compreendido todas as informações do enunciado.

Figura 8

Resolução do Dinis



No quarto problema poucos alunos utilizaram, exclusivamente, a representação gráfica. Esta representação surgiu muitas vezes articulada com a representação verbal ou com a representação numérica. Uma das alunas, ao apresentar a sua resolução, referiu:

Professora: – O que é que fizeste?

Sara: – Eu fiz as árvores.

Professora: – Desenhaste as árvores?

Sara: (abana a cabeça em confirmação).

Professora: – Muito bem. No total, quantas árvores é que foram plantadas? O que é que tu escreveste na tua folha?

Sara: – Dez.

Esta aluna optou por desenhar a quantidade de árvores plantadas em cada dia, e no final escreveu o número total de árvores plantadas (Figura 9), articulando a representação gráfica com a representação verbal.

**Figura 9***Resolução da Sara*

A aluna Margarida também optou pela mesma articulação, porém não desenhou as árvores, preferiu desenhar figuras para representar as árvores, despendendo menos tempo na resolução do problema, complementada pela indicação numérica das quantidades em cada um dos dias.

Na análise das resoluções do quinto problema é possível constatar que a representação gráfica surge de forma isolada e articulada com outras representações matemáticas. A resolução do Paulo exemplifica a articulação entre a representação gráfica e a representação verbal:

Professora: – Podes explicar o que fizeste?

Paulo: – Fiz três bolinhas e fiz três rebuçados em cada bolinha.

Professora: – Então quantos rebuçados cada um dos filhos vai receber?

Paulo: – Três.

O aluno optou por desenhar três bolinhas (círculos), em que cada um representa o que cada filho iria receber, e dividiu a quantidade total por três, desenhando três rebuçados em cada círculo.

Diferente da maioria, a Ana optou por recorrer apenas à representação gráfica (Figura 10). Esta aluna desenhou os três filhos e três rebuçados por cima de cada um deles, finalizando a sua resolução.

**Figura 10***Resolução da Ana*

De forma semelhante, Igor, o aluno com transtorno do espetro do autismo, com a explicação da professora/investigadora e com o auxílio do docente titular, solucionou o quinto problema recorrendo exclusivamente à representação gráfica. O aluno desenhou os três filhos e acrescentou três traços representativos da quantidade de rebuçados que iam receber, chegando ao mesmo resultado que os colegas.

Relativamente ao sexto problema, as suas resoluções apresentaram uma maior tendência para a representação gráfica, conjugada ou não com a representação verbal ou numérica. Uma das alunas solicitada para apresentar, articulou a representação gráfica, a verbal e a numérica:

Sara: – A Sofia tinha duas peças e quatro peças para pôr dentro da caixa (apontando para o desenho das peças e da caixa, respetivamente). Pus dois mais quatro que dá nove.

Professora: – Nove?

Sara: (a aluna olha para a folha).

Sara: – É seis.

A aluna reconhece que fez várias representações (Figura 11) e, quando a professora salientou o resultado, a aluna rapidamente percebeu o seu erro e o corrigiu, sem ajuda.

**Figura 11***Resolução da Sara*

A Sara começou por desenhar as peças que estavam fora da caixa, escrevendo o número correspondente ao lado. De seguida, procedeu à adição dessas peças. Na sua apresentação, a aluna respondeu que o total dava nove peças, corrigindo posteriormente para seis. Uma vez que a aluna estava a apresentar o seu trabalho, a sua folha estava voltada para a turma, o que fez com que visse o número seis ao contrário, assemelhando-se a um nove. Quando questionada se a soma entre dois e quatro dá nove, a aluna conferiu a sua resolução e corrigiu para seis.

O sétimo problema envolvia a adição e a subtração, o que levou muitos alunos a recorrerem a diferentes representações gráficas. Ana fez uma representação gráfica, mas não conseguiu justificar a sua resolução:

Professora: – O que é que fizeste, Ana?

Ana: – Eu desenhei quatro livros.

Professora: – Porque é que desenhaste quatro livros?

Ana: (olha para a sua folha e não responde).

Professora: – Ana, como é que chegaste ao quatro?

Ana: – Porque três mais dois é quatro.

Professora: – Três mais dois é quatro?

Ana: – Sim.

Ana: (olha para a sua folha)

Ana: – Sobraram quatro.

Professora: – Sobraram quatro, mas voltando atrás, de onde é que surgiu o três e o dois? O que é que esses números representam?



Ana: (encolhe os ombros e abana a cabeça de um lado para o outro como a dizer que não)

Professora: – Não sabes de onde é que vieram?

Ana: – Não.

A Ana chegou ao resultado esperado, mas não soube justificar como é que fez.

O oitavo problema suscitou algumas dúvidas nos alunos, mas muitos arriscaram na representação gráfica para tentar solucionar. Apesar de poucos alunos terem apresentado todas as formas possíveis de fazer o ramo de flores – um ramo com quatro flores só com rosas, só com margaridas e com rosas e margaridas –, todos colocaram várias hipóteses e alguns recorreram ao desenho para as exemplificar. O aluno que esteve mais perto do resultado correto, recorrendo à representação gráfica:

Lucas: – Eu fiz as flores e pintei. Aqui fiz dois mais dois, aqui três mais um...

Professora: – O que é que esses números representam?

Lucas: (olha para a folha, mas não responde)

Professora: – Desenhaste as flores, não foi?

Lucas: – Sim.

Professora: – Essas flores representam as várias formas de como podemos fazer o ramo, certo?

Lucas: – Sim.

Professora: – Então fala-nos do primeiro conjunto que fizeste.

Lucas: – Duas rosas e duas margaridas.

Professora: – É uma forma, muito bem. Qual é a próxima?

Lucas: – Aqui fiz um e três.

Professora: – Que flores são essas? Três...

Lucas: – Rosas e uma margarida.

Professora: – Muito bem. É outra forma.

Lucas: – Aqui é quatro margaridas e aqui quatro rosas.

Professora: – Então de quantas formas podemos fazer o ramo de flores?

Lucas: – Cinco.

Professora: – E tens aí as cinco formas?



Lucas: – Não.

Professora: – O que é que faltou?

Lucas: (olha para a folha, mas não responde).

Professora: – Sabes qual é que faltou?

Lucas: – Não.

O Lucas preferiu desenhar as várias hipóteses de como poderia organizar o ramo de flores, porém perdeu-se nas suas hipóteses e escapou-lhe uma. Posteriormente, a professora reviu as várias formas com o aluno e questionou se o ramo com três rosas e uma margarida não poderia ser arranjado de forma inversa. Ao que o aluno concordou e afirmou que podia tratar-se de outra forma de organização. Assim como o Lucas, outros alunos optaram pela representação gráfica, recorrendo ao desenho para representar algumas formas de organizar o ramo de flores, porém muitos acabaram por perder-se e deixar ausente alguma hipótese.

A representação gráfica revelou ser a estratégia de resolução com o surgimento mais coerente, isto é, desde o início da intervenção pedagógica que esta tipologia de representação foi muito utilizada pelos alunos, de forma geral. Este facto, pode dever-se à familiaridade que os alunos sentem com o desenho, estratégia integrada neste tipo de representação matemática.

Representações algébricas

As representações algébricas abrangem as resoluções com expressões algébricas, ou seja, a combinação de letras, números e símbolos (Mainali, 2021; Varela, 2020). Dado o ano de escolaridade dos participantes, era esperável que este tipo de representação não fosse utilizado. Os problemas criados também não convidavam à utilização desta tipologia de representação e, tal como esperado, esta não surgiu entre as várias resoluções dos alunos.

Representações numéricas

As representações numéricas pressupõem a utilização de ideias e conceitos matemáticos, de uma forma organizada, de uma ou mais operações numéricas (Mainali, 2021; Varela, 2020). Optou-se por considerar nesta categoria as representações que denotavam de forma explícita a utilização



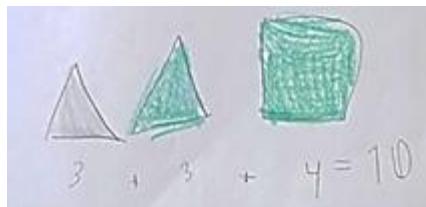
de operações numéricas, bem como de listas ordenadas, como no caso da reta numérica. Uma vez que os participantes se encontravam no primeiro ano, não se esperava que esta tipologia de representação fosse muito utilizada, a menos que os alunos já tivessem tido contacto com estas operações noutro contexto, por exemplo: na educação pré-escolar ou em casa.

O primeiro problema foi maioritariamente solucionado através da representação verbal, por vezes conjugada com a representação gráfica. Como tal, a representação numérica não foi utilizada, comprovando o que era esperável.

No segundo problema, visto que este envolvia a adição, a representação numérica surgiu em algumas resoluções dos alunos, porém apenas numa reduzida minoria. A aluna Teresa não quis apresentar o seu trabalho quando solicitada. Contudo, através da sua produção, é possível compreender como é que esta solucionou o segundo problema (Figura 12).

Figura 12

Resolução da Teresa



A Teresa optou por conjugar a representação numérica com a representação gráfica. Conseguimos ver que desenhou as figuras geométricas que tinham de ser construídas, dois triângulos e um quadrado, e por baixo colocou a quantidade de palitos necessária para construir cada figura, colocando um três por baixo de cada triângulo e um quatro por baixo do quadrado. Por fim, adiciou os três valores e igualou a dez, finalizando a sua resolução. Assim como a Teresa, o Carlos também arriscou em fazer a mesma operação numérica, todavia apagou-a e optou por representar apenas graficamente.

No terceiro problema, pouquíssimos alunos optaram pela representação numérica. Um dos alunos que preferiu esta tipologia de representação, referiu o seguinte:



António: – Eu pintei, fiz as renas, fiz as cartas e eu disse que era dois, mais dois, mais dois que dá seis (apontando para a operação “ $2+2+2=6$ ”).

Professora: – Porquê somar dois, mais dois, mais dois?

António: – Porque são duas renas, mais duas renas, mais duas renas.

Neste caso, é possível afirmar que o António optou por articular a representação gráfica com a representação numérica, começando por desenhar as cartas e as renas, para depois realizar a soma da quantidade de renas de cada postal (Figura 13).

Figura 13

Resolução do António



Apesar de ter iniciado a sua resolução com a representação gráfica, este aluno arriscou a representação numérica, pois considerou que era a melhor forma de calcular e apresentar o seu resultado.

Ao resolverem o quarto problema, poucos alunos optaram pela representação estritamente numérica. Contudo, aqueles que utilizaram, não sentiram necessidade de utilizar outra tipologia de representação matemática, recorrendo apenas a uma operação numérica. Um dos alunos que utilizou exclusivamente a representação numérica referiu:

Professora: – O que é que fizeste?

Tiago: – Fiz uma conta.

Professora: – Fizeste uma conta...

Tiago: – Fiz uma conta e pintei o desenho.

Professora: – E pintaste o desenho. Mas porque é que fizeste essa conta? Porque é que utilizaste esses números?



Tiago: (olha para a folha, mas não responde).

Professora: – Que números é que escreveste?

Tiago: – O um, o dois, o três, o quatro e o dez.

Professora: – Então quantas árvores foram plantadas ao todo?

Tiago: – Dez.

Professora: – Muito bem. E os outros números, o que é que representam?

Tiago: – Quanto é que vai dar.

Professora: – Mas o um, o que é que representa?

Tiago: – Uma árvore.

Professora: – Que foi plantada...

Tiago: – No dia 1.

Professora: – E no dia 2?

Tiago: – Duas árvores.

Professora: – E no dia 3?

Tiago: – Três árvores.

Professora: – E no dia 4?

Tiago: – Quatro árvores.

Apesar de inicialmente não conseguir explicar o porquê de ter feito uma conta ou o porquê de utilizar os números um, dois, três e quatro, à medida que ia respondendo às questões da professora/investigadora, o Tiago foi demonstrando reconhecer os passos dados para solucionar o problema, além de que reconheceu que utilizou uma operação para resolver a situação problema (Figura 14).

Figura 14

Resolução do Tiago

$$1+2+3+4=10$$



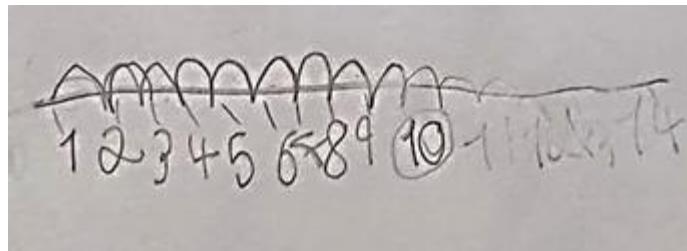
O Tiago optou, exclusivamente, pela representação numérica, diferenciando-se do que tinha acontecido até à quarta intervenção, em que esta surgia sempre articulada com outra tipologia de representação.

Este problema foi implementado em janeiro, logo os alunos já tinham um conhecimento mais aprofundado acerca da resolução de problemas e das representações matemáticas. Por esta razão, alguns alunos optaram por representações que ainda não tinham sido utilizadas até aqui, nomeadamente a reta numérica. Considera-se a reta numérica como uma forma de representação numérica, dada a sua natureza aditiva, apresentando os números naturais inteiros por ordem crescente, da esquerda para a direita.

A Maria recorreu à reta numérica para chegar ao valor total de árvores plantadas (Figura 15), dando “saltos” de um em um.

Figura 15

Resolução da Maria



Pela sua resolução, podemos compreender que a aluna começou por traçar a reta até ao número catorze, porém ao solucionar apenas chegou ao número dez, apagando os números que não precisava.

O problema cinco envolvia a divisão ou decomposição de um número natural em parcelas iguais. Como os alunos ainda não sabiam como fazer o algoritmo da divisão para solucionar o problema, a representação numérica surgiu como forma de verificação do resultado, recorrendo à adição.



Os poucos alunos que representaram numericamente, optaram por utilizar a adição para solucionar o problema, como se pode constatar:

Professora: – Diz-nos o que fizeste.

Carla: – Deu nove.

Professora: – Quantos rebuçados cada filho vai receber?

Carla: – Três rebuçados.

Professora: – E o que é que fizeste para chegar a esse valor?

Carla: – Eu... (não prossegue e fica a olhar para a turma)

Professora: – Podes olhar para a tua folha. O que é que fizeste?

Carla – Eu distribuí três para cada um e depois fiz três, mais três, mais três que deu nove.

A Carla reconheceu que fez uma operação de adição para verificar que três, mais três, mais três, dá nove. Presume-se que a aluna tenha calculado mentalmente a decomposição do número nove e que depois tenha feito a operação para verificar o seu resultado e apresentá-lo. Esta representação pode estar relacionada com a tipologia de exercícios a que os alunos estão habituados a resolver acerca da decomposição de números naturais, uma vez que apresentam a decomposição sempre sob a forma de uma soma. Assim como esta aluna, outros alunos também apresentaram a adição como resolução do problema, observando-se um aumento do número de alunos a recorrer a esta tipologia de representação, mas continuaram a representar apenas a minoria da turma.

O sexto problema, que envolvia a adição, exigia dos alunos uma maior capacidade de descodificação das informações do enunciado. Embora alguns alunos não tenham compreendido o enunciado, alguns daqueles que compreenderam, optaram pela representação numérica, nomeadamente o Tobias:

Professora: – Quando quiseres podes começar.

Tobias: – Eu fiz contas para apresentar o trabalho. Fiz ela (apontando para o desenho da personagem Sofia) e pintei os legos.

Professora: – E o que é que fizeste aqui em baixo? (apontando para o desenho).

Tobias: – Fiz os legos.

Professora: – Muito bem. E ao lado?



Tobias: – Fiz uma conta.

Professora: – E quanto é que deu essa conta?

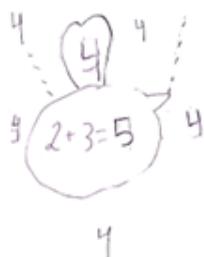
Tobias: – Seis. Faltam seis blocos para arrumar.

Conjugando a representação gráfica, com a representação numérica, o Tobias apresentou o resultado do problema através de uma adição, referindo que faltavam arrumar seis blocos. O resultado foi obtido através da soma das quatro peças que estavam no chão, com as duas peças que estavam em cima da cama. A reta numérica surgiu como estratégia de resolução de uma aluna que, para solucionar a situação problema, deu “saltos” com os valores das peças em falta, resultando no número seis.

Nas resoluções do sétimo problema, o aumento da utilização da representação numérica foi notável. Apesar de muitos não terem completado a sua resolução, optaram por esta tipologia de representação para apresentar aquilo que sabiam fazer. A Teresa foi, novamente, umas das alunas que optou por este tipo de representação (Figura 16).

Figura 16

Resolução da Teresa



A aluna começou por adicionar as quantidades de livros lidos, resultando no número cinco, e depois apresentou a designação do número quatro. Porém, não demonstrou como chegou ao número quatro. Presume-se que a aluna tenha calculado, mentalmente, a diferença entre nove e cinco, mas não conseguiu transpor esse cálculo para o papel.



Outros alunos também procederam apenas à adição das quantidades de livros lidos. Por outro lado, alguns alunos demonstraram a diferença entre a quantidade total e a quantidade de livros lidos, mas não demonstraram esta adição inicial, como foi o caso do aluno Tiago:

Tiago: – Menos... Eu fiz nove menos cinco, é igual a quatro.

Professora: – E porque é que fizeste nove menos cinco?

Tiago: – Porque é igual a quatro. A quantidade que o menino não leu.

Professora: – Muito bem, mas de onde é que veio o nove?

Tiago: – São os livros todos.

Professora: – E o cinco?

Tiago: – São os livros que o menino leu.

Através deste diálogo, é possível perceber que o aluno compreendeu que deveria fazer a diferença entre a quantidade total de livros e a quantidade de livros lidos, para chegar à quantidade livros que ficaram por ler. Porém, pressupõe-se que o aluno tenha feito a adição das quantidades lidas mentalmente, e não considerou necessário colocar no papel. Assim como o Tiago, o Jorge também procedeu à mesma subtração e não demonstrou a adição das quantidades de livros que já tinham sido lidos.

Envolvendo também um raciocínio aritmético, o Carlos optou pela representação numérica, mas em formato de esquema. Este aluno optou por desenhar três círculos à volta da personagem, um do lado direito, outro do lado esquerdo e outro por cima. Colocou dentro do círculo da esquerda o número quatro, e dentro do círculo da direita o número cinco. No círculo de cima, colocou o número nove, interligando-o com os outros dois. Pressupõe-se que o cinco representa o número de livros lidos e o quatro o número de livros que ficaram por ler, uma vez que o círculo onde está o quatro está colorido, apresentando-se como a resposta do aluno ao problema.

Um dos alunos que apresentou o trabalho optou pela representação na reta numérica:

Mateus: – Eu fiz uma reta numérica e depois saltei três vezes e deu quatro. Depois rodeei o quatro e coloquei um certinho.

Professora: – Usaste a reta numérica e deste quantos saltinhos?

Mateus: – Três.

Professora: – Porquê três?



Mateus: – Porque o quatro vem a seguir ao três.

Professora: – Mas como é que chegaste ao quatro?

Mateus: – Usando a cabeça.

Professora: – Mas eu queria perceber como é que pensaste. Percebi que usaste uma reta numérica.

Mateus: – Eu podia usar contas.

Professora: – Em que contas é que pensaste?

Mateus: – Três mais um que dá quatro.

Professora: – E porquê três mais um?

Mateus: – Porque eu quis.

Neste caso, é possível afirmar que o Mateus não sabia justificar o seu resultado, nem explicar como pensou. Porém, ao analisar a produção deste aluno, é possível constatar que este tinha dado “saltos” na reta numérica até ao número nove, mas depois apagou, voltando ao quatro. É possível que o aluno tenha dado os “saltos” necessários até chegar ao número total de livros requisitados e depois tenha apagado a quantidade que foi lida, primeiro três livros e depois outros dois, regressando ao número quatro.

Para terminar as intervenções, foi implementado o oitavo problema que, como referido, denotou dificuldades nos alunos. Como o problema envolvia cálculo combinatório, muitos optaram pela representação gráfica. Porém, houve quem arriscasse em representar numericamente e chegasse a todas as hipóteses possíveis, como o caso do Carlos:

Carlos: – Eu fiz as formas.

Professora: – Mas como é que as fizeste?

Carlos: – Fiz cinco rosas.

Professora: – Cinco rosas?

Carlos: – Não, quatro rosas e depois fiz três mais um e um mais três.

Professora: – Então de quantas formas conseguimos compor o nosso ramo?

Carlos: – Cinco.

O Carlos conseguiu chegar a todas as combinações possíveis, conseguindo representá-las numericamente. O Carlos foi traçando ligações entre as flores do enunciado e realizou as operações



“3+1” e “2+2” representando cada parcela, a quantidade de um tipo de flor. As restantes formas foram representadas de forma verbal, escrevendo a designação do número quatro, ao lado de cada flor, representando respetivamente por 4+0 e 0+4.

A resolução da Carla foi semelhante, a aluna também optou pela representação numérica e conseguiu representar todas as hipóteses possíveis. Em diálogo com a professora, referiu:

Carla: – Eu fiz duas rosas e duas margaridas.

Professora: – Fizeste como?

Carla: – Fiz contas.

Professora: – E que outras contas é que fizeste?

Carla: – Fiz três rosas e uma margarida e depois fiz três margaridas e uma rosa.

Professora: – Ou seja, inverteste as flores. E mais?

Carla: – Depois fiz quatro rosas e depois fiz quatro margaridas.

Professora: – Então de quantas formas é que podemos fazer o nosso ramo?

Carla: – Cinco.

Esta aluna, assim como o Carlos, construiu adições, em que cada uma das parcelas representa a quantidade de uma determinada flor (Figura 17).

Figura 17

Resolução da Carla

The image shows handwritten mathematical work on a piece of paper. At the top left, there is a drawing of a flower with four petals. Next to it is the equation $2+2=4$. To the right of the flower is another drawing of a flower with four petals, next to the equation $3+1=4$. Below these, there is a drawing of a flower with three petals, next to the equation $3+1=4$. Further down, there is a drawing of a flower with four petals, next to the equation $4+0=4$. To the right of this drawing is a large circled number 5 , with an arrow pointing from the number to the drawing. At the bottom left, there is a drawing of a flower with four petals, next to the equation $4+0=4$.

Diferente do colega, a Carla conseguiu representar em adição as combinações possíveis e igualar as somas a quatro, finalizando as operações.



À medida que as intervenções se foram sucedendo, a representação numérica foi sendo cada vez mais utilizada. Determinados alunos demonstraram uma maior tendência para este tipo de representação, o que pode significar que tiveram mais contacto como cálculo, que os restantes colegas, quer tenha sido na educação pré-escolar ou em casa. Contudo, nas últimas intervenções, mais alunos apostaram nas operações numéricas, mais exatamente na adição, o que pode representar uma consequência das apresentações daqueles alunos que já detinham algum conhecimento acerca desta tipologia de representação matemática. A partilha das resoluções de vários alunos, com recurso a várias tipologias de representação, alargou o leque de estratégias de resolução de todos os alunos. Para aqueles que não conheciam a representação numérica, a intervenção educativa foi mais benéfica, munindo-os de mais formas de solucionar problemas matemáticos.

Representações matemáticas na sala de aula do 1.º ano de escolaridade

O cruzamento entre as produções dos alunos e os diálogos entre os participantes e a professora/investigadora permitiram conhecer diversas representações matemáticas dos alunos de 1.º ano de escolaridade na resolução de problemas. A representação gráfica foi a tipologia mais recorrente entre as resoluções dos alunos, todavia, este acontecimento era expectável, uma vez que na educação pré-escolar a representação simbólica é enriquecida e alargada partindo dos hábitos dos alunos, como desenhar, colorir, etc. (Silva et al., 2016). Como tal, esta tipologia de representação surge como a maior aliada dos alunos, desta faixa etária, ao solucionarem problemas matemáticos.

Por outro lado, apesar de se esperar a ausência de representações algébricas e verbais no decorrer da intervenção educativa, a segunda tipologia acabou por surgir na resolução de determinados problemas. O primeiro problema, nomeadamente, aparenta ter levado a que os alunos optassem pela representação verbal, uma vez que apenas envolvia a ordenação, testemunhando que a natureza dos problemas matemáticos pode influenciar a escolha dos alunos acerca do tipo de representação matemática a utilizar (Mainali, 2021). Além disso, embora se esperasse que os alunos não tivessem competência de escrita, uma vez que estavam no início do processo de aquisição desta, alguns demonstraram possuir alguma capacidade de registo formal, contrariando as expectativas e conseguindo escrever algumas palavras, letras ou números relacionados com os



problemas, o que revela uma opção dos alunos por diferentes tipos de representação (Mainali, 2021).

Por fim, a representação numérica surgiu como a maior novidade e na qual os alunos apresentaram o maior desenvolvimento, pois apesar de se esperar que alguns alunos tivessem conhecimento de determinadas operações aritméticas, nomeadamente a adição, surgiram outras representações relacionadas com estas operações, que demonstraram que certos participantes já possuíam algum conhecimento acerca do cálculo. Outros participantes foram criando e fortalecendo o seu conhecimento numérico, aumentando o número de vezes em que esta tipologia de representação surgiu entre as produções dos alunos e aumentando a variedade de criações relacionadas com esta tipologia de representação matemática, valorizando a utilização de diversas representações (Amado, 2022; Mainali, 2021).

Face a esta apreciações, é possível afirmar que, de forma geral, os participantes já tinham desenvolvidas noções matemáticas, corroborando com o referido no documento orientador das OCEPE (Silva et al., 2016), quando menciona que estas são desenvolvidas desde a educação pré-escolar, uma vez que foi notória a detenção de certos conceitos matemáticos por parte de alguns alunos.

As representações utilizadas, permitiram compreender aprofundadamente o raciocínio dos alunos, dado que, conseguiu-se compreender a forma de pensar mesmo dos alunos que não apresentaram o seu trabalho ou não conseguiram explicar o seu raciocínio (Velez, 2020). Em alguns casos, os próprios alunos, ao observar as suas representações, conseguiram corrigir-se e avivar a sua memória, relembrando o seu raciocínio. Desta forma, comprova-se que as representações fomentam a autocompreensão e permitem comunicar o raciocínio matemático (Velez, 2020).

Com base na variedade de representações e no desenvolvimento evidente das estratégias de resolução de problemas fomentado nos alunos, afirma-se que a intervenção educativa foi relevante na trajetória dos participantes, demonstrando-lhes a importância de conhecer várias tipologias de representação, permitindo-lhes, consequentemente, compreender mais aprofundadamente a área da matemática (Mainali, 2021).



Considerações Finais

Reiterando o referido, a questão base de investigação incidiu sobre o tipo de representações matemáticas, utilizadas por alunos de 1.º ano de escolaridade ao resolverem problemas matemáticos. Partindo do que foi obtido na análise dos dados, os participantes recorreram, maioritariamente, à representação gráfica para solucionar os problemas propostos. Por outro lado, a representação algébrica foi inexistente no decorrer da intervenção educativa, mas apesar de se considerar que o mesmo se verificaria com a representação verbal, esta surgiu, principalmente, nas resoluções do primeiro problema. Este facto pode dever-se à natureza do problema que convida os alunos a recorrer a esta tipologia de representação, atendendo à sua natureza de inferência lógica (Mainali, 2021). A representação numérica foi alvo de um aumento de aplicações no decorrer da recolha de dados, notando-se um aumento dos participantes que a esta tipologia recorriam, todavia, alguns elementos da turma utilizaram desde o início, transparecendo um conhecimento superior acerca de algumas operações básicas e uma preferência por este tipo de representação (Mainali, 2021).

A frequente utilização da representação gráfica declara a familiaridade que os alunos desta faixa etária demonstram para com esta, em particular com o desenho, porém ao analisar o significado desta recorrência podemos concordar com Pinto & Canavarro (2012), quando diz que a sua utilização também possibilita a transposição da informação ouvida para o papel, auxiliando não só na obtenção do resultado, mas também na compreensão do enunciado do problema, numa lógica de tradução de representações (Mainali, 2021). Este modo de representação revela-se, assim, uma estratégia eficaz de organização do pensamento, permitindo aos alunos visualizar as relações entre os dados e estruturar o raciocínio necessário à resolução.

Através desta análise da tipologia de representações matemáticas, é possível inferir que em determinados participantes, nomeadamente naqueles que demonstraram, desde o início, algum conhecimento numérico e verbal, conteúdo não previsto no currículo a trabalhar na educação pré-escolar, tenham passado por momentos de escolarização anteriores à sua entrada no 1.º ano de escolaridade. Contudo, apesar de se supor que estes tenham ocorrido no período de educação pré-escolar, na verdade não se pode afirmar com certeza, que estes métodos e práticas tenham sido



apresentados aos participantes no contexto do jardim de infância, podendo dever-se a outros intervenientes, como o contexto familiar.

Relativamente às limitações e dificuldades sentidas no decorrer da investigação, estas referem-se, essencialmente, ao processo de recolha de dados. Ao proceder às várias intervenções, foi notória a irregularidade na assiduidade de alguns alunos, o que fez com que não fosse possível aplicar todos os problemas com todos, não observando assim como seria o seu desempenho em todas as implementações. Porém, uma vez que foram construídos oito problemas, esta limitação foi colmatada, em parte, pois obtiveram-se mais resultados, mesmo dos alunos que não participaram em todas as aulas da intervenção educativa. Além disso, também os hábitos de apresentação dos alunos foram uma dificuldade, mas era esperável dada a faixa etária dos participantes. Alguns alunos não quiseram apresentar, mesmo tendo sido dada a oportunidade de o fazerem apenas para a professora/investigadora e para o docente titular, todavia a timidez e o desconforto prevaleceram e houve a necessidade de escolher outros alunos para apresentar as atividades desenvolvidas na resolução de problemas.

Apesar das dificuldades sentidas, a investigação promoveu um maior conhecimento e compreensão acerca das estratégias de resolução dos alunos no início da escolaridade e levantou algumas questões que poderiam ser respondidas, mediante alterações e acrescentos neste estudo. A presente investigação aponta para que a natureza dos problemas matemáticos influencia a escolha de representação dos alunos ao solucioná-los, bem como as suas preferências na opção pelas representações (Mainali, 2021). Caso se prosseguisse com a investigação, apresentar-se-ia mais problemas de origem qualitativa, como o primeiro problema, ao longo da intervenção educativa e em diferentes momentos, para verificar se a maioria dos alunos recorreria ou não à representação verbal, como aconteceu com a turma participante.

Referências Bibliográficas

- Alves, B. (2024). *Representações Matemáticas na Resolução de Problemas no 1.º Ano de Escolaridade*. [Relatório de Prática de Ensino Supervisionada, Universidade do Algarve]. Repositório da Universidade do Algarve.



Amado, N. (2022). Representações múltiplas no ensino e aprendizagem da matemática. *Educação e Matemática*, 166, 2-6.

Bogdan, R. & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Porto Editora.

Canavarro, A.P., Mestre, C., Gomes, D., Santos, E., Santos, L., Brunheira, L., Vicente, M., Gouveia, M. J., Correia, P., Marques, P., & Espadeiro, G. (2021). *Aprendizagens Essenciais de Matemática no Ensino Básico*. ME DGE. <https://www.dge.mec.pt/noticias/aprendizagens-essenciais-de-matematica>

Direção-Geral da Educação (s.d.). *Aprendizagens Essenciais*. (website).
<https://www.dge.mec.pt/noticias/aprendizagens-essenciais-de-matematica>

Direção-Geral da Educação/Ministério da Educação (2017). *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória*. Editorial do Ministério da Educação – Direção Geral da Educação.

Gonçalves, T. N. R. (2010). Investigar em educação: Fundamentos e dimensões da investigação qualitativa. In M. Alves, & N. Azevedo (Eds.). *Investigar em educação: Desafios da construção de conhecimento e da formação de investigadores num campo multi-referenciado* (pp. 39-63). UIED.

Guerreiro, A., Tomás Ferreira, R., Menezes, L. & Martinho, M. H. (2015). Comunicação na sala de aula: a perspetiva do ensino exploratório da matemática. *Zetetiké*, 23(44), 279 – 295.

Hamido, G. & Azevedo, N. (2013). Investigar em educação: reflexões e perspetivas multidisciplinares. *Interacções*, 27, 1-12.

Infante, M., Canavarro, A. P. (2015). Representações matemáticas e suas funções na generalização. in A. P. Canavarro, L. Santos, C. Nunes, H. Jacinto (Orgs.), *Atas do XXVI Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp.137-156). APM.

Mainali, B. (2021). Representation in teaching and learning mathematics. *International Journal of Education in Mathematics, Science, and Technology (IJEMST)*, 9(1), 1-21.
<https://doi.org/10.46328/ijemst.1111>.

Minayo, M., & Costa, A. (2018). Fundamentos Teóricos das Técnicas de Investigação Qualitativa. *Revista Lusófona de Educação*, 40, 139-153.

Piedade, B. & Reis, S. (2019). O que é um problema matemático? – Conceções de alunos do 4.º ano de escolaridade. *Interacções*, 50, 180-196.

Pinto, E., & Canavarro, A. P. (2012). O papel das representações na resolução de problemas de Matemática: um estudo no 1.º ano de escolaridade. In O. Magalhães, & A. Folque (org), *Práticas*



de investigação em Educação. Departamento de Pedagogia e Educação da Universidade de Évora.

Ponte, J. P., Quaresma, M. & Mata-Pereira, J. (2015). Representações matemáticas e ações do professor no decorrer de uma discussão matemática. In M. V. Pires, R. T. Ferreira, A. Domingos, C. Martins, H. Martinho, I. Vale, N. Amado, S. Carreira, T. Pimentel, & L. Santos. *Investigação em Educação Matemática 2015: Representações Matemáticas*. Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática. ISSN 2182-0023.

Rosa, M. C. M. F. (2013). *A matemática na transição do pré-escolar para o primeiro ciclo: Importância e dificuldades percepcionadas pelos professores e educadores*. [Dissertação de mestrado, ISPA - Instituto Universitário]. Repositório do Instituto Universitário.

Silva, I. L., Marques, L., Mata, L. & Rosa, M. (2016). *Orientações curriculares para a educação pré-escolar*. Editorial do Ministério da Educação – Direção-Geral da Educação.

Varela, E. (2020). *A importância da resolução de problemas no desenvolvimento do raciocínio matemático no 1.º Ciclo do Ensino Básico*. Instituto Superior de Educação e Ciências, Lisboa, Portugal.

Velez, I. M. P. (2020). *Tarefas na sala de aula: prática letiva de professores do 3.º ano com representações matemáticas*. [Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa]. Repositório da Universidade de Lisboa.