A MOBILIZAÇÃO DA CAPACIDADE DE GENERALIZAÇÃO ATRAVÉS DA EXPLORAÇÃO DE ESTRATÉGIAS DE CÁLCULO: UM ESTUDO COM ALUNOS DO 4.º ANO[1]

Célia Mestre
Agrupamento de Escolas Romeu Correia, Almada
Unidade de Investigação do Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
celiamestre@hotmail.com

Hélia Oliveira
Instituto da Educação da Universidade de Lisboa
hmoliveira@ie.ul.pt

Resumo

Neste artigo apresenta-se um estudo inserido numa investigação mais ampla de implementação de uma experiência de ensino em que se pretende desenvolver o pensamento algébrico de alunos de uma turma do 4.º ano de escolaridade. O objectivo deste artigo é analisar como a exploração de estratégias de cálculo a partir de expressões numéricas particulares pode contribuir para a mobilização da capacidade de generalização matemática e para a sua expressão em linguagem natural, e ainda para a iniciação à simbolização. Este artigo baseia-se na concepção de pensamento algébrico enquanto "processo em que os alunos generalizam ideias matemáticas a partir de um conjunto de exemplos particulares, estabelecem essa generalização através do discurso da argumentação e expressam-na gradualmente de uma forma simbólica apropriada à sua idade" (Blanton & Kaput, 2005, p. 413), e centra-se na importância do carácter potencialmente algébrico da aritmética (Carpenter, Levi, Franke & Zeringue, 2005). Este estudo tem ainda como referência a concepção de pensamento quase-variável defendida por Fujii (2003), cujo desenvolvimento se apoia na exploração de expressões numéricas particulares para a construção da generalização matemática. A recolha de dados incide sobre a realização de três tarefas matemáticas em aula, tendo sido realizada a análise documental das

[1] Trabalho realizado no âmbito do *Projecto PPPM - Práticas Profissionais de Professores de Matemática*, apoiado pela FCT - Fundação para a Ciência e Tecnologia (contrato PTDC/CPE-CED/098931/2008).

resoluções escritas dos alunos e registado em vídeo os momentos de discussão colectiva com a turma. Os resultados evidenciam que os alunos conseguem generalizar relações numéricas, a partir da estrutura subjacente às estratégias de cálculo propostas, expressando essa generalização em linguagem natural e iniciando um percurso em direcção à linguagem simbólica. Este estudo mostra a importância de explorar o carácter potencialmente algébrico da aritmética, desde os primeiros anos.

Palavras-Chave: Early álgebra; Pensamento algébrico; Generalização; Simbolização; Pensamento quase-variável.

Abstract

In this article we present a study from a teaching experiment to promote grade 4 students' algebraic thinking. The aim of this paper is to analyze how the exploration of calculation strategies with particular number sentences can contribute to the development of students' generalization capacity and to express it in natural language, and also to the beginning of symbolization. In this paper, we take algebraic thinking as "a process in which students generalize mathematical ideas from a set of particular instances, establish those generalizations through the discourse of argumentation, and express them in increasingly formal and age-appropriate ways" (Blanton & Kaput, 2005, p. 413) and we presume the potentially algebraic nature of arithmetic (Carpenter, Levi, Franke & Zeringue, 2005). The conception of quasi-variable thinking (Fujii, 2003), whose development is supported by the exploration of particular number sentences targeted at the mathematical generalization, also informed this work. The data were collected from three mathematical tasks solved in the classroom and we used observation and students' written records analyzes. The results showed that students can generalize numerical relations from the structure inherent to the calculation strategies that were proposed, and can express that generalization in natural language and are begin to make a way to symbolization. This study shows the importance of exploring the potentially algebraic character of arithmetic, from the first years of school.

Keywords: Early algebra; Algebraic thinking; Generalization; Symbolization; Quasi-variable thinking.

Introdução

No âmbito da Educação Matemática em Portugal, o novo Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte et al., 2007), representa uma inovação curricular no que respeita ao tratamento do tema Álgebra ao considerar como um dos quatro eixos fundamentais do ensino-aprendizagem o desenvolvimento do pensamento algébrico desde os primeiros anos de escolaridade. Esta abordagem está em sintonia com as recentes tendências internacionais que consideram que a introdução ao pensamento algébrico deve começar nos primeiros anos, mas que este não deve constituir simplesmente um tema adicional do currículo (National Council of Teachers of Mathematics, 2000; Blanton & Kaput, 2005; Kieran, 2007; Carpenter et al, 2005). Ao invés, deve ser entendido como uma forma de pensamento que aporta significado, profundidade e coerência à aprendizagem de outros temas. Também o *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2000) considera a Álgebra como um fio condutor curricular desde os primeiros anos de escolaridade e que pode contribuir para unificar o currículo da Matemática. Assim, desde cedo, pode ser construída uma base sólida centrada, por exemplo, nos números e nas suas propriedades que cimente o trabalho posterior com os símbolos e expressões algébricas e também na experiência sistemática com padrões que poderá vir a desenvolver a compreensão da noção de função.

O trabalho de investigação em curso, no qual se integra este artigo, tem como objectivo geral compreender como se desenvolve o pensamento algébrico dos alunos de uma turma de 4.º ano de escolaridade. Em particular, este artigo tem como objectivo analisar como a exploração de estratégias de cálculo a partir de expressões numéricas particulares contribui para a mobilização da capacidade de generalização matemática e para a sua expressão em linguagem natural, possibilitando ainda uma iniciação à linguagem simbólica.

O Pensamento Algébrico e a Aritmética

O pensamento algébrico pode ser encarado como "um processo em que os alunos generalizam ideias matemáticas a partir de um conjunto de exemplos particulares, estabelecem essa generalização através do discurso da argumentação e expressam-na gradualmente de uma forma simbólica apropriada à sua idade" (Blanton & Kaput, 2005, p. 413). No pensamento algébrico "dá-se atenção não só aos objectos, mas também às relações existentes entre eles, representando e raciocinando sobre essas relações, tanto quanto possível de modo geral e abstracto” (Ponte, 2006, p. 8).

De acordo com diversos autores (Mason, 1996; Carraher, Martinez & Schliemann, 2008; Blanton, 2008; Ponte, Branco & Matos, 2009), a generalização é um elemento central do pensamento algébrico. A generalização matemática envolve “uma afirmação de que uma propriedade ou técnica é válida para um conjunto de objectos matemáticos” (Carraher, Martinez & Schliemann, 2008, p. 3). Para Mason (1996) uma das formas de desenvolver a capacidade de generalização é sensibilizar para a distinção entre *olhar para* e *olhar através*, conjugando-se esta última com a capacidade de ver a generalização a partir do particular. A generalização pode ser expressa de diversas formas. Inicialmente, as crianças podem expressar as generalizações que observam no mundo com palavras e, gradualmente, usar formas mais simbólicas (Blanton, 2008).

O actual corpo de investigação, sobre a introdução da Álgebra no ensino elementar, enfatiza a aritmética conceptualizada de forma algébrica e assenta no pressuposto de que a compreensão da Álgebra começa com a aprendizagem da Aritmética (Kieran, 2007). Esta autora salienta que os resultados da investigação apontam para a necessidade de promover a generalização algébrica nos primeiros anos de escolaridade e que uma das possíveis abordagens para o desenvolvimento do pensamento algébrico baseia-se no carácter potencialmente algébrico da aritmética, ou seja, na aritmética generalizada.

Cai e Knuth (2005) defendem a introdução de ideias algébricas nos primeiros anos e argumentam que isso requer, fundamentalmente, reformular o modo como a aritmética deve ser ensinada nesses anos de escolaridade. De facto, numa perspectiva mais tradicional do ensino da Matemática tem sido dada a primazia ao cálculo e aos algoritmos, e como referem Kaput, Carraher e Blanton (2008) a aritmética que habitualmente é ensinada na escola elementar desvaloriza o desenvolvimento da capacidade de generalização embora os alunos sejam capazes de pensar sobre estrutura e relações antes de serem ensinados a usar símbolos algébricos. Por exemplo, quando é pedido aos alunos para determinarem se a soma de dois números ímpares será par ou impar, eles podem fazer predições e justificá-las em termos de propriedades dos números sem usarem os símbolos algébricos. Estes autores acrescentam, também, que a ênfase no desenvolvimento de pensamento de nível superior, como a generalização, não implica a diminuição da importância das capacidades de rotina como a fluência de cálculo. Pelo contrário, as actividades algébricas proporcionam contextos ricos e significativos nos quais as crianças podem praticar a fluência de cálculo.

Como referem Carraher e Schliemann (2007), a introdução do pensamento algébrico na escola elementar acarreta novas visões sobre a Aritmética e a Álgebra e a forma como estas se relacionam, assumindo que se pode construir uma ponte entre elas. Nesta perspectiva, Russell, Schiffer e Bastable (2011) identificaram quatro actividades matemáticas que podem constituir a referida ponte: “compreensão do comportamento das operações; generalização e justificação; extensão do sistema numérico e a utilização da notação com significado” (p. 44). Os autores argumentam que este tipo de actividades matemáticas tem também o potencial de fortalecer os alicerces do cálculo para todos os alunos, pois providenciam “um meio para os alunos reexaminarem e obterem uma compreensão fortemente alicerçada sobre o significado das operações e formas de pensar em matemática” (p. 67).

Também Rivera (2006) sugere que os sistemas numéricos devem ser ensinados de tal forma que os alunos percebam as propriedades ou relações numéricas existentes em objectos individuais para, progressivamente, verificarem que estas são invariantes independentemente dos objectos de que partiram. As regularidades que os alunos encontram nas operações aritméticas podem constituir a base para a exploração da generalização sobre os números e operações e também de práticas como a formulação, o teste e a prova dessa generalização. Bastable (2007) refere-se a essas práticas como centrais para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

A construção da generalização a partir das relações numéricas e das operações aritméticas e suas propriedades, e ainda a noção de equivalência associada ao sinal de igual (=), constituem para Carpenter et al. (2005) aquilo que consideram ser o pensamento relacional, isto é, “a capacidade de olhar para expressões ou equações na sua concepção mais ampla, revelando as relações existentes nessas expressões ou equações” (p. 53). Para ilustrar o que pretendem dizer com pensamento relacional, os autores usam a igualdade numérica seguinte: 8+4=__+5. Para resolvê-la, os alunos podem adicionar 8 e 4 e depois pensar em quanto têm de adicionar a 5 para obter 12. No entanto, o processo usado, ainda que válido, não tem em conta a relação entre os números envolvidos. O aluno que apreenda a expressão no seu todo, pode considerar que 5 é mais um do que 4 e, por isso, o número a colocar no espaço será menos um do que 8, usando a seguinte relação: 8+4=(7+1)+4=7+(1+4). No entanto, estes autores salientam que trabalhar o pensamento relacional não significa ensinar um conjunto de truques de cálculo. Embora essas relações possam simplificar os cálculos, há um objectivo maior no pensamento relacional do que o específico conhecimento que leva à simplificação do cálculo. A compreensão de porque é que estes truques são possíveis acarreta uma compreensão de ideias importantes sobre a relação entre as operações e as suas propriedades.

Neste sentido, Kieran (2004) defende que o pensamento algébrico nos primeiros anos deve envolver o desenvolvimento de formas particulares de pensar que permitam analisar relações entre quantidades, identificar a estrutura, analisar a mudança, generalizar, resolver problemas, modelar, justificar, provar e prever, e onde pode ser feito (mas não necessariamente) uso do simbolismo algébrico como ferramenta. Esta autora sugere ajustamentos no tratamento da aritmética, devendo: (a) focar-se nas relações e não apenas no cálculo e na resposta numérica; (b) focar-se nas operações e suas inversas; (c) focar-se simultaneamente na representação e na resolução; (d) focar-se em números e letras, e não apenas nos números; e, (e) reforçar o significado do sinal de igual.

Pimentel e Vale (2009) salientam que ao se trabalhar, de forma integrada, o pensamento aritmético e algébrico nos primeiros anos, destaca-se o facto de as ideias aritméticas, conceitos e técnicas terem um carácter potencialmente algébrico, na medida em que são passíveis de ser generalizadas. Neste sentido, as autoras analisam a relação entre o desenvolvimento do cálculo mental e do sentido de número com base na descoberta de padrões numéricos e concluem que, tendo em conta essa relação dialéctica, a identificação de padrões numéricos e sua consequente generalização torna-se a base de emergência do pensamento algébrico. O excerto seguinte mostra um exemplo dessa relação:

> *"(...) multiplicar um número por 19 é o mesmo que multiplicá-lo por 20 e em seguida subtrair o número. Este é um caso especial da propriedade distributiva, cuja descrição algébrica é 19n = 20n – n. Esta descrição gera uma analogia com a aritmética. Por exemplo, para resolver o problema de determinação da quantia gasta ao comprar 19 cadernos a 4 euros cada, podemos resolvê-lo através do cálculo mental, fazendo 19x4 = 20x4 – 4."* (Pimentel & Vale, 2009, p. 60).

A exploração de situações como esta enquadra-se na perspectiva de Fujii e Stephens (2008), que defendem a utilização de expressões numéricas generalizáveis como ponte entre a aritmética e o pensamento algébrico. Segundo estes autores, as explicações gerais dos estudantes sobre o porquê da veracidade de uma expressão numérica como 78 - 49 + 49 = 78 e a sua capacidade de usar exemplos específicos daquilo que mais tarde será uma relação geral (a - b + b = a) podem ser descritas como o *pensamento quase–variável*. A expressão *quase-variável* significa “um número ou conjunto de números numa expressão que revelam a relação matemática subjacente e que se manterá verdadeira independentemente dos números que sejam usados” (Fujii, 2003, p. 59). Desta forma, os alunos podem usar expressões numéricas generalizáveis, centrando a atenção na estrutura dessas expressões, e identificar e discutir a generalização algébrica antes da introdução da simbologia algébrica formal.

O estudo de Britt e Irwin (2011) mostra como os alunos conseguiram aplicar um conjunto de estratégias de cálculo mental para resolver diferentes problemas numéricos e detectar as relações entre os números envolvidos, assim como a estrutura subjacente a essas estratégias. Os autores destacam o papel crucial da generalização matemática e salientam a necessidade de os alunos mais novos trabalharem em diferentes níveis de compreensão da generalização que envolva a expressão dessa generalização em palavras, imagens e gráficos, assim como com símbolos numéricos que actuem como quase-variáveis. Para tal, os autores sugerem o seguinte percurso: primeiramente, os alunos devem ser encorajados a trabalhar com números como quase-variáveis; depois a expressar a generalização em linguagem natural e; em seguida, usando os símbolos da Álgebra.

Metodologia do Estudo

O design do estudo segue de perto o que Gravemeijer e Cobb (2006) denominam como “experiência de ensino em sala de aula”, que agrega simultaneamente o desenvolvimento de processos de planeamento e ensino, assim como investigação sobre a aprendizagem e desenvolvimento dos alunos num contexto social, a sala de aula, e deste modo, procura ser, simultameamente, educativa e científica (Kelly, 2003). A experiência de ensino desenvolve-se de acordo com três fases: diagnóstico da situação de partida e desenho da experiência de ensino numa primeira fase; implementação da experiência de ensino na sala de aula na segunda fase; e, na terceira fase, avaliação da experiência de ensino. No entanto, a análise das actividades instruccionais acompanha a realização da experiência de ensino (Gravemeijer & Cobb, 2006), sendo usada tanto para reavaliar e desenhar as tarefas matemáticas, como para traçar o percurso de aprendizagem dos alunos.

Uma experiência de ensino integra uma sequência de episódios de ensino que incluem, entre outros elementos, um professor e um ou mais alunos, e um método de recolha de dados que incide sobre esses episódios (Steffe & Thompson, 2000), que visa a compreensão dos processos de ensino e aprendizagem, e em que o investigador está envolvido como um educador (Kelly, 2003). Deste modo, uma característica distintiva deste tipo de abordagem é a ruptura com a diferenciação entre professor e investigador (Molina, 2006), sendo que em muitos casos o investigador assume o papel de professor, tal como sucedeu no presente estudo. Refira-se que a investigadora é professora de 1.º Ciclo na mesma escola da turma onde se implementa a experiência de ensino e que, anteriormente a esta investigação, já mantinha um contacto directo com a professora titular da turma e os alunos, nomeadamente a partir da coordenação de projectos.

A experiência de ensino decorreu durante o ano lectivo de 2010/11 e as tarefas exploradas em sala de aula tinham como base os temas e tópicos matemáticos da planificação anual definida pela professora titular de turma, respeitando a perspectiva de conceber o pensamento algébrico como um *fio condutor curricular* (NCTM, 2000), numa lógica de integração curricular. De acordo com a potencialidade de tratamento algébrico de cada um dos tópicos matemáticos da planificação anual da turma, as tarefas foram desenvolvidas na experiência de ensino com uma média de duas tarefas por semana e com a duração de 90 minutos cada. Foram realizadas, até ao momento a que se reporta este artigo, dezassete tarefas, inseridas nos tópicos “múltiplos e divisores” e “operações com números naturais”, de acordo com o Programa de Matemática do Ensino Básico (PMEB) (Ponte et al., 2007).

A turma onde decorreu a experiência de ensino estava inserida numa escola de meio urbano e era constituída por 19 alunos, 7 raparigas e 12 rapazes, com uma média de nove anos de idade. Embora a turma estivesse a trabalhar de acordo com o PMEB desde o 3.º ano de escolaridade, no início da experiência de ensino, os alunos revelavam algumas dificuldades na exploração de questões que envolviam o sentido de número, privilegiando quase exclusivamente a utilização dos algoritmos na resolução das tarefas. Esse facto era expresso inclusivamente quando os alunos comunicavam os seus raciocínios, referindo que colocavam os números “em cima” e “em baixo”, ilustrando o procedimento que efectuam quando resolvem o algoritmo. Também a exploração de relações numéricas denotava algumas fragilidades por parte dos alunos. Refira-se, como exemplo, que ao iniciar a exploração de sequências numéricas, diversos alunos ficaram muito surpreendidos quando lhes surgiu a expressão 11x3 como parte de uma tabuada, argumentando que “a tabuada do 3 terminava no 10x3".

As tarefas integradas na experiência de ensino centraram-se na exploração das relações numéricas e das propriedades das operações, numa perspectiva de desenvolvimento do sentido de número, e tendo em conta os tópicos matemáticos, como já foi referido. A exploração destas tarefas tinha como objectivos a identificação de regularidades e expressão da generalização através da linguagem natural, e a iniciação de um percurso em direcção à simbolização através da passagem da linguagem natural para a linguagem matemática. A utilização de alguma simbologia informal começou a ser introduzida, em particular, em quatro tarefas (10ª, 12ª, 14ª e 17ª).

Na décima tarefa, "Salas de cinema", era pedido aos alunos que descobrissem de quantas formas seria possível arrumar uma sala de cinema com cem cadeiras, tendo cada fila o mesmo número de cadeiras. Na parte de exploração colectiva dessa tarefa, foi proposto pela professora a utilização do símbolo "?" para expressar "qual o número" em expressões como "? x5=100". Embora o símbolo tenha sido sugerido pela professora, os alunos aderiram com bastante facilidade e usaram-no, na tarefa, para descobrir as diferentes possibilidades que existiam para arrumar as 100 cadeiras. As restantes três tarefas (12ª, 14ª e 17ª) serão analisadas em seguida.

As três tarefas que servem de base a este artigo, envolvem estratégias de cálculo a partir da exploração de expressões numéricas particulares e foram as primeiras em que, mais intencionalmente, se trabalhou a tradução da generalização da linguagem natural para a linguagem matemática. Nestas tarefas promoveu-se, assim, a construção de um percurso em direcção à simbolização, embora o objectivo principal tenha sido o desenvolvimento da capacidade de generalização. De facto, como a seguir se pode constatar, a utilização de simbologia surgiu sempre no contexto específico da tarefa e para expressar matematicamente a generalização que tinha sido expressa em linguagem natural.

Para a recolha dos dados foram gravadas em formato vídeo as três aulas em que os alunos realizaram as três tarefas e analisados os momentos de discussão colectiva. Também foram usadas para análise as resoluções escritas das tarefas pelos alunos. Estas três aulas foram leccionadas pela investigadora deste estudo (primeira autora deste artigo).

Para análise dos dados definiram-se como dimensões de análise da mobilização da capacidade de generalização na exploração de estratégias de cálculo com expressões numéricas particulares os seguintes aspectos: a) reconhecimento da estrutura matemática subjacente às estratégias de cálculo através da identificação explícita das relações numéricas e das propriedades das operações envolvidas; b) expressão da generalização da estratégia de cálculo em linguagem natural; c) tradução da generalização da estratégia de cálculo da linguagem natural para a linguagem matemática.

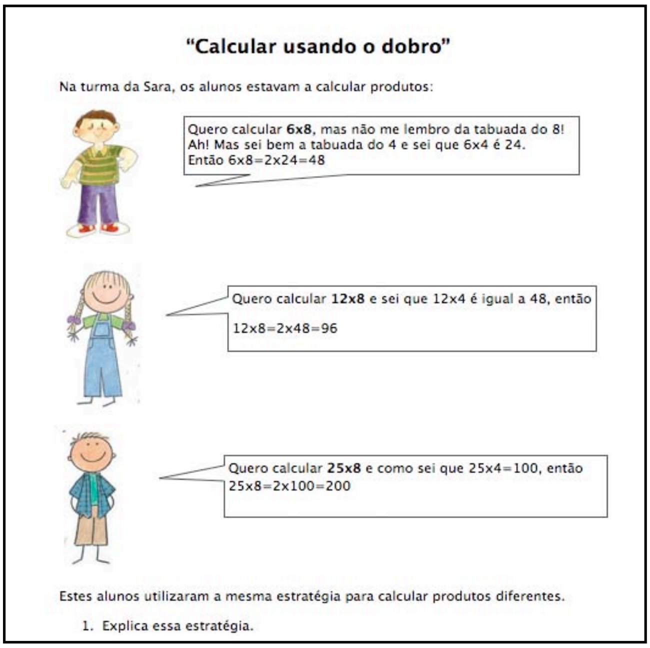
Apresentação dos Resultados

Nesta secção, apresenta-se e discute-se a exploração das três tarefas, em aula, que foram seleccionadas para análise neste artigo: "Calcular usando o dobro", "A estratégia do Afonso" e "A estratégia da Marta". Estas tarefas apresentam diferentes estratégias de cálculo a partir de expressões numéricas particulares. As três tarefas foram resolvidas pelos alunos em pares e tiveram momentos de discussão colectiva na turma. Para análise da exploração das tarefas apresentam-se alguns trabalhos dos alunos e excertos significativos das discussões colectivas.

Tarefa "Calcular usando o dobro"

A primeira tarefa em análise neste artigo explorava a relação de dobro e metade entre as tabuadas do 4 e do 8. As expressões numéricas apresentadas eram as seguintes: 6x8=2x24=48, 12x8=2x48=96 e 25x8=2x100=200, como se pode ver na figura ilustrativa do enunciado da tarefa (Figura 1).

Na explicação da estratégia, os diferentes pares de alunos conseguiram reconhecer as relações de dobro e metade entre as tabuadas do 4 e do 8. A figura seguinte mostra a resposta de um par de alunos que justifica a estratégia pela utilização da relação de dobro, ou seja, reconhecem os produtos da tabuada do 8 como o dobro dos produtos da tabuada do 4. Estes alunos recorrem ainda a uma das expressões numéricas apresentadas para explicar a estratégia de cálculo.



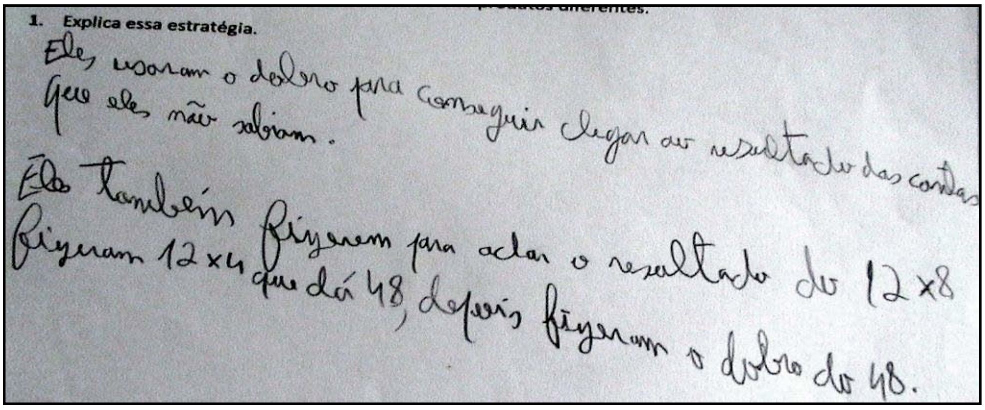
"Calcular usando o dobro"

Na turma da Sara, os alunos estavam a calcular produtos:

Estes alunos utilizaram a mesma estratégia para calcular produtos diferentes.

1. Explica essa estratégia.

Figura 1 - Enunciado da tarefa "Calcular usando o dobro".

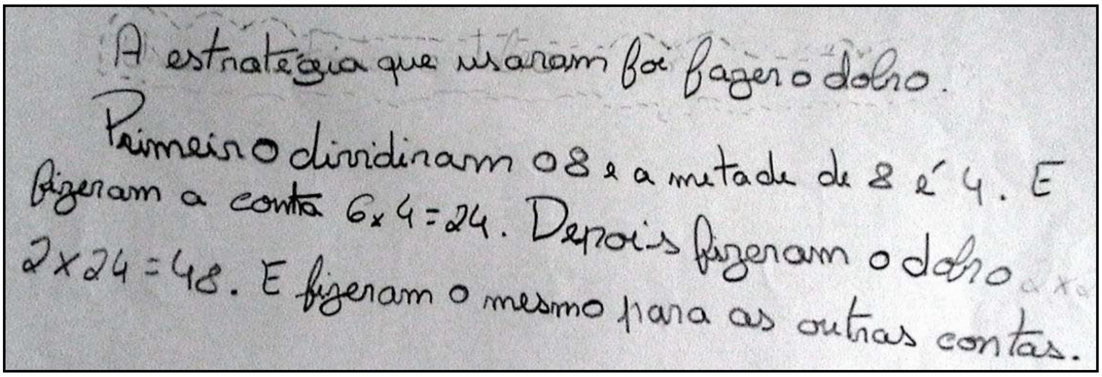


1. **Explica essa estratégia.**

Eles usaram o dobro para conseguir chegar ao resultado das contas
que eles não sabiam.
Eles também fizeram para achar o resultado do 12x8
fizeram 12x4 que dá 48, depois fizeram o dobro do 48.

Figura 2 - Resposta do par João P. e Beatriz.

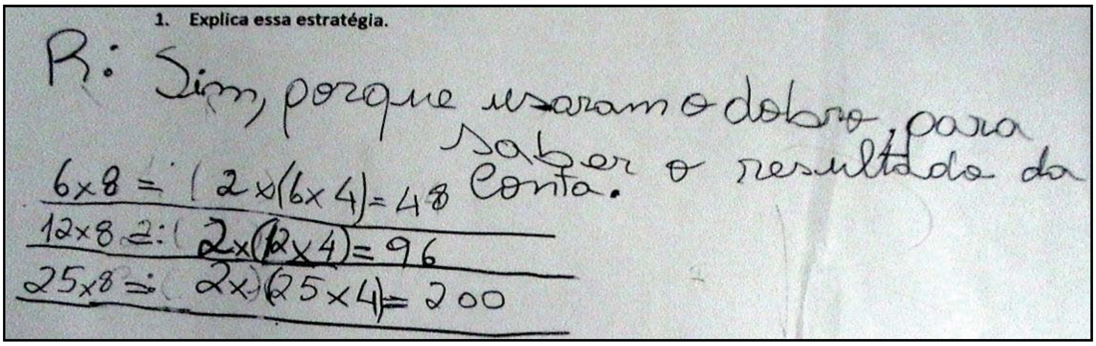
Tal como o exemplo anterior, a resposta seguinte revela que este par de alunos identificou a relação de dobro entre os produtos da tabuada do 8 e os produtos da tabuada do 4, e também usou um dos exemplos apresentados no enunciado da tarefa para explicar a estratégia de cálculo. No entanto, estes alunos identificam, ainda, 4 como metade de 8, assumindo a importância dessa relação na explicação da estratégia.



A estratégia que usaram foi fazer o dobro.
Primeiro dividiram o 8 e a metade de 8 é 4. E
fizeram a conta 6x4=24. Depois fizeram o dobro
2x24=48. E fizeram o mesmo para as outras contas.

Figura 3 - Resposta do par Fábio e Henrique.

A figura seguinte mostra como os alunos conseguiram identificar a relação de dobro utilizada na estratégia de cálculo. Para além disso, este par de alunos expressa essa relação de dobro através de expressões numéricas, para cada um dos exemplos apresentados no enunciado da tarefa, identificando claramente os produtos da tabuada do 8 como o dobro dos produtos da tabuada do 4.



1. Explica essa estratégia.

R: Sim, porque usaram o dobro para saber o resultado da conta.
6x8 = (2x(6x4)=48
12x8 =: (2x(12x4)=96
25x8 =: 2x(25x4)=200

Figura 4 - Resposta do par António e Carolina.

A resposta do par seguinte ilustra como reconheceram a relação de dobro e metade utilizada na estratégia de cálculo. Estes alunos recorrem a outros exemplos para além dos apresentados no enunciado da tarefa, mostrando o procedimento que efectuam para obter os produtos da tabuada do 8 usando o dobro dos produtos da tabuada do 4, embora não o registando correctamente. Evidenciam que conseguem estender essa estratégia para além dos exemplos apresentados no enunciado da tarefa.

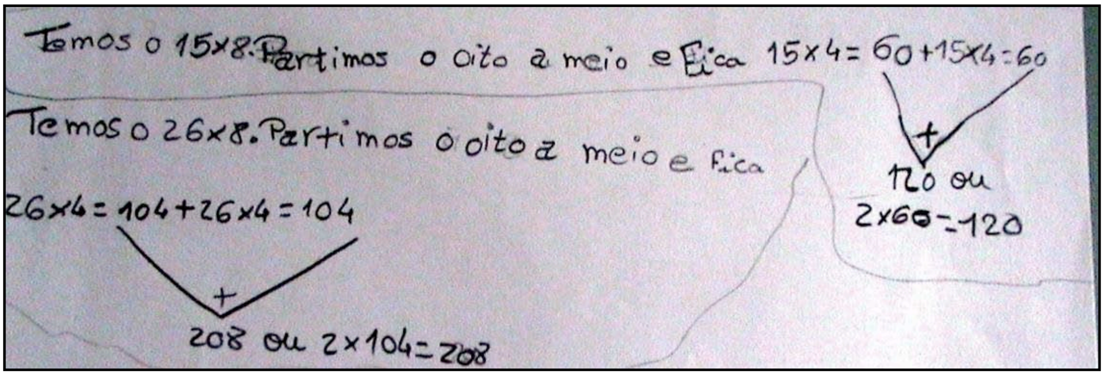

Temos o 15×8. Partimos o oito a meio e fica 15×4=60+15×4=60
+
120 ou
2×60=120
Temos o 26×8. Partimos o oito a meio e fica
26×4=104+26×4=104
+
208 ou 2×104=208

Figura 5 - Resposta do par Joana e Gonçalo.

O último exemplo, que se apresenta a seguir, mostra como os alunos conseguem generalizar a estratégia de cálculo, apresentando evidências que apreenderam a estratégia para além dos casos particulares usados como exemplos. Quando referem que para saber o resultado da multiplicação de um factor por 8, fazem duas vezes a "a metade de 8" por esse factor, mostram como apreenderam a generalização dessa estratégia.

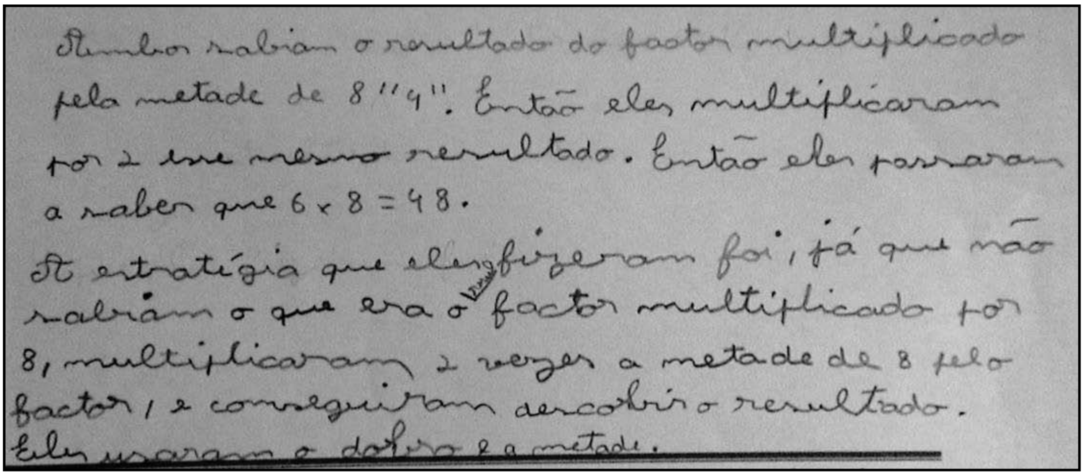

Ambos sabiam o resultado do factor multiplicado pela metade de 8 "4". Então eles multiplicaram por 2 esse mesmo resultado. Então eles passaram a saber que 6×8=48.
A estratégia que eles fizeram foi, já que não sabiam o que era o factor multiplicado por 8, multiplicaram 2 vezes a metade de 8 pelo factor, e conseguiram descobrir o resultado.
Eles usaram o dobro e a metade.

Figura 6 - Resposta do par Matilde e André.

Na exploração colectiva desta tarefa, diferentes pares foram apresentar as suas resoluções para os colegas. Nessas apresentações, os alunos revelaram que tinham compreendido a estratégia de cálculo, mas que também a conseguiam estender para outros valores das tabuadas do 8 e do 4, para além dos apresentados no enunciado da tarefa. Desta forma, foi possível descrever a generalização da estratégia de cálculo em linguagem natural. O aluno João V. foi ao quadro escrever essa generalização:

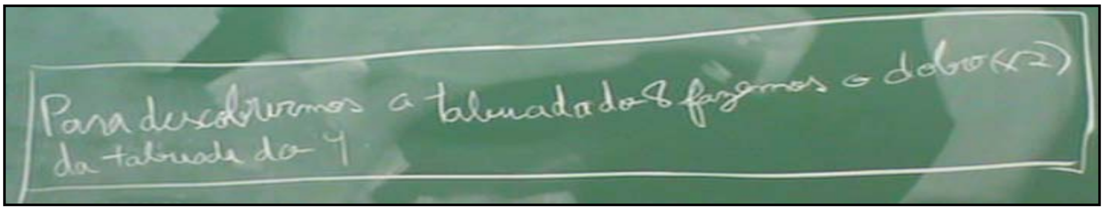


Figura 7 – Expressão da generalização em linguagem natural, feita pelo João V.

A partir da construção da generalização em linguagem natural, foi trabalhada a tradução dessa generalização para a linguagem matemática. Com esse propósito, a professora conduziu o seguinte diálogo:

Professora – (...) agora quero que pensem nesta frase que o João V. escreveu e que a escrevam na linguagem matemática. Como é que eu posso usar a linguagem matemática?
Vários alunos – Com conta.
Professora – Então como é que eu posso escrever isto? Mas atenção que eu não quero para casos particulares como o 6x8, o 12x8 ou o 25x8, eu quero para todos os números da tabuada do 8 e do 4.
Rita – Podemos fazer para 7x8.
Professora – Isso é um caso particular. Eu quero que dê para todos os casos.
Rita – Como assim?
Professora – Para todos os casos da tabuada do 8. O que é que acontece na tabuada do 8?
Aluno – É sempre mais oito.
Professora - Vamos acrescentar sempre mais oito. Ou seja, se usarmos a multiplicação estamos a fazer o quê?
Alunos – Sempre a multiplicar por oito.
Professora – Como é que eu posso escrever isso?
Rita – Usamos um ponto de interrogação.
Fábio – Vezes oito.

Ao referir-se ao “ponto de interrogação”, Rita utiliza o símbolo que tinha sido usado na tarefa “Salas de Cinema”, descrita acima sucintamente. Essa foi, de facto, a tarefa onde o símbolo surgiu pela primeira vez, proposto pela professora. Assim, Rita consegue escrever no quadro a seguinte expressão:

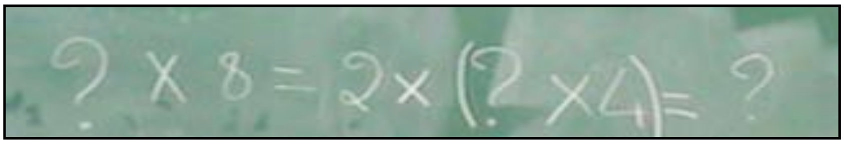


Figura 8 – Expressão da generalização em linguagem matemática, feita pela Rita.

A expressão sugerida pela Rita é discutida com a turma propondo, a professora a substituição do “ponto de interrogação” por um número qualquer. Os alunos sugerem a utilização do seis, como mostra a figura seguinte:

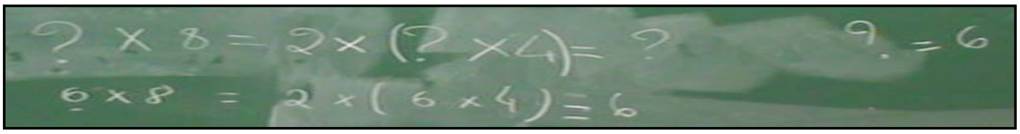


Figura 9 - Exploração da expressão apresentada pela Rita.

A partir da análise da expressão apresentada pela Rita, com a substituição do símbolo pelo valor numérico “6”, os alunos constatam que a expressão não pode ser verdadeira. Sugerem, então, que a seguir ao sinal de igual não deverá estar o “ponto de interrogação”. Desta forma, acordam que a expressão que traduzirá o que escreveram em linguagem natural será a seguinte:

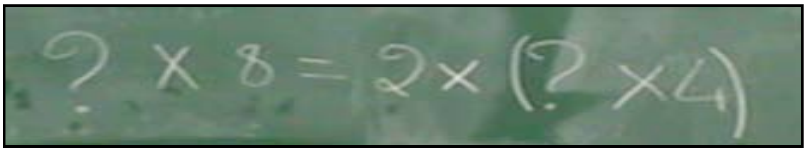
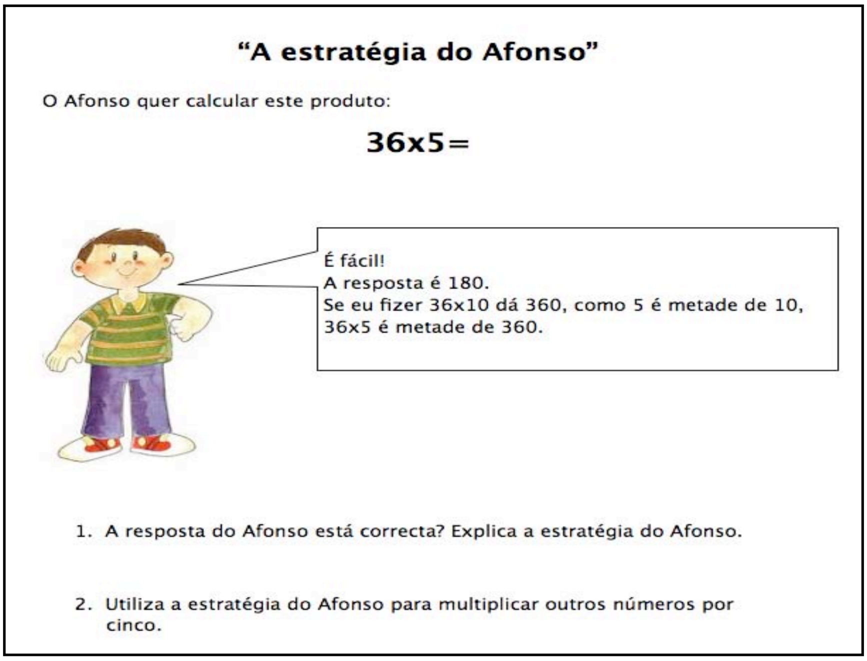


Figura 10 - Expressão final da generalização em linguagem matemática, feita pela Rita.

A análise da exploração desta tarefa permite concluir que os alunos conseguiram apreender a estrutura subjacente à estratégia de cálculo usada nas expressões numéricas apresentadas. Assim sendo, os alunos identificaram as relações de dobro e metade nas tabuadas do 4 e do 8 a partir dos exemplos apresentados. Para além disso, os alunos conseguiram usar essa estratégia para outros exemplos particulares daquelas tabuadas. Na exploração colectiva da tarefa, os alunos conseguiram expressar a generalização dessa estratégia de cálculo em linguagem natural. No entanto, a passagem para a linguagem matemática não foi imediata. Embora uma das alunas tenha sugerido a utilização do símbolo “ponto de interrogação” para representar “qualquer número”, essa mesma aluna apresentou uma expressão incorrecta. Este episódio poderá estar relacionado com o facto de os alunos, muitas vezes, terem a concepção de que a seguir ao sinal de igual deverá vir um resultado numérico (Carpenter et. al, 2003). Ao utilizarem o símbolo “ponto de interrogação”, os alunos percebem que o podem substituir por um “qualquer número”, mas ainda estão a construir o significado desse símbolo e, naturalmente, ainda muito limitados pela concepção do “valor numérico”.

Tarefa “A estratégia do Afonso”

Nesta tarefa foi explorada a estratégia de cálculo inversa da anterior, agora com outros valores: a multiplicação por cinco ser equivalente a metade da multiplicação por 10. Para tal, foi explorado o exemplo particular de 36x5, como mostra o enunciado da tarefa:


“A estratégia do Afonso”

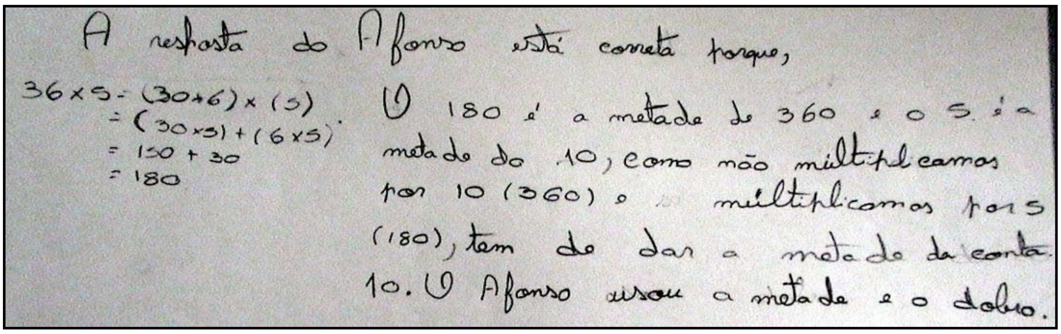
O Afonso quer calcular este produto:

36x5=

1. A resposta do Afonso está correcta? Explica a estratégia do Afonso.
2. Utiliza a estratégia do Afonso para multiplicar outros números por cinco.

Figura 11 - Enunciado da tarefa "A estratégia do Afonso"

Na resposta à primeira questão, todos os alunos conseguiram verificar que a resposta do Afonso estava correcta e explicaram de diferentes formas a estratégia usada. A resposta que se apresenta, em seguida, mostra como o par de alunos conseguiu reconhecer que a resposta do Afonso estava correcta e que foi usada a estratégia do dobro e da metade para determinar o produto de 36x5. Esses alunos utilizaram a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição para determinar o produto de 36x5.



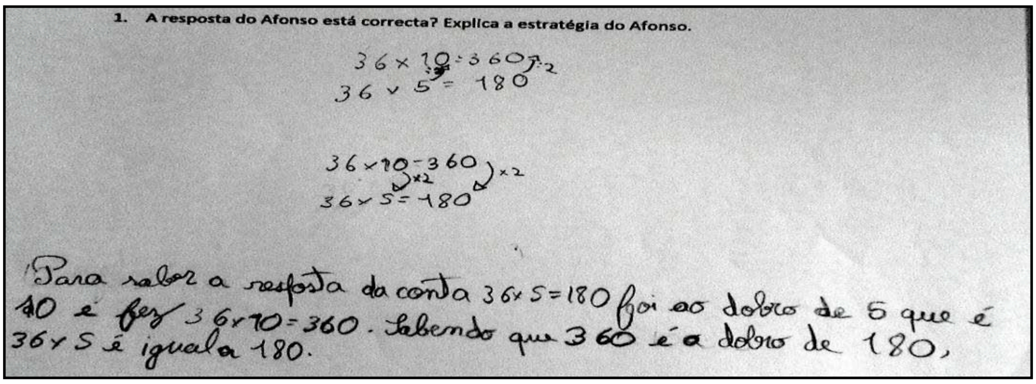
A resposta do Afonso está correta porque,

36×5 = (30+6)×(5)
= (30×5)+(6×5)
= 150 + 30
= 180

O 180 é a metade de 360 e o 5 é a metade do 10, como não multiplicamos por 10 (360) e multiplicamos por 5 (180), tem de dar a metade da conta 10. O Afonso usou a metade e o dobro.

Figura 12 - Resposta do par Rita e Miguel.

No exemplo seguinte os alunos também conseguiram reconhecer que a resposta do Afonso estava correcta. Estes alunos evidenciam ainda as relações numéricas de dobro e metade envolvidas na estratégia de cálculo representando-as esquematicamente. No entanto, a direcção das setas que usaram no esquema é contrária ao seu discurso em linguagem natural, mostrando como estes alunos ainda estão numa fase de apropriação da simbologia usada:



1. A resposta do Afonso está correcta? Explica a estratégia do Afonso.

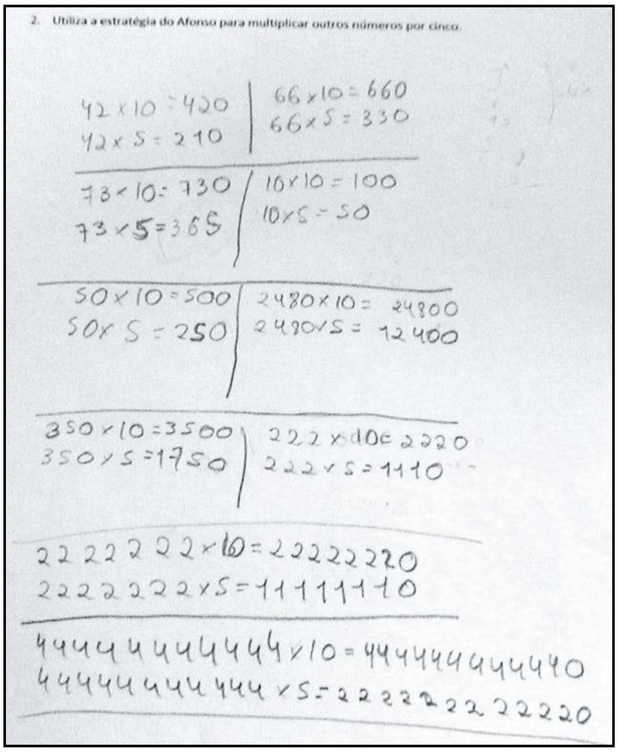
36 × 10 = 360 :2
36 × 5 = 180

36×10=360 ×2 ×2
36×5=180

Para saber a resposta da conta 36×5=180 foi ao dobro de 5 que é 10 e fez 36×10=360. Sabendo que 360 é o dobro de 180, 36×5 é igual a 180.

Figura 13 - Resposta do par João V. e Lawry.

Para responder à segunda questão da tarefa, os alunos utilizaram diferentes exemplos, mostrando que conseguiam aplicar aquela estratégia para outros números. A figura seguinte mostra como um par de alunos conseguiu empregar a estratégia de cálculo, mesmo no caso de números muito grandes, usando números pares que facilmente dividiam por dois.


2. Utiliza a estratégia do Afonso para multiplicar outros números por cinco.

42×10=420 | 66×10=660
42×5=210 | 66×5=330

73×10=730 | 10×10=100
73×5=365 | 10×5=50

50×10=500 | 2480×10=24800
50×5=250 | 2480×5=12400

350×10=3500 | 222×10=2220
350×5=1750 | 222×5=1110

2222222×10=22222220
2222222×5=11111110

44444444444×10=444444444440
44444444444×5=222222222220

Figura 14 - Resposta do par João V. e Lawry.

Na discussão colectiva da tarefa, a professora procurou que os alunos generalizassem a estratégia do Afonso através da linguagem natural. O excerto seguinte mostra como diversos alunos conseguiram fazê-lo, sem dificuldade:

> *Professora. – Quem é que é capaz de explicar por palavras a estratégia do Afonso?*
>
> *Fábio – Ele para saber a tabuada do 5 fez metade da tabuada do 10.*
>
> *Rita – Ele fazendo a tabuada do 10, se a dividir vai conseguir a tabuada do cinco.*
>
> *Professora – Se a dividir por quanto? Tens de explicar isso. Não podes pôr só dividir, podes dividir por 5, por 2…*
>
> *Rita – A dividir por dois.*

Desta forma, os alunos expressaram em linguagem natural a generalização da estratégia de cálculo: “Para descobrirmos a tabuada do 5 fazemos metade da tabuada do 10”.

Quando lhes foi solicitado para traduzirem essa frase para linguagem matemática, alguns alunos continuaram a usar exemplos particulares da estratégia de cálculo. A professora volta a insistir que pretende que a expressão seja válida para todos os casos e não só para alguns, referindo que deve ser usada “para qualquer número”. Ao referir-se a “qualquer número”, os alunos sugeriram a utilização de um símbolo não numérico. Inicialmente, sugeriram a utilização do “ponto de interrogação” que já tinham usado na tarefa descrita anteriormente, mas também apresentaram outras representações pictóricas. No entanto, tiveram dificuldade em representar a metade de “qualquer número”, sugerindo representações em que desenhavam metade do símbolo, como mostra a figura seguinte:

Figura 15 - Tentativa de expressão da generalização em linguagem matemática, feita pelo Henrique.

Para centrar os alunos na representação correcta daquilo que haviam expressado em linguagem natural, a professora retomou a exploração do produto 36x5. Desta forma, conduziu a discussão para a exploração daquilo que tinham feito com a resolução desse produto. O excerto seguinte é ilustrativo desse momento da aula:

Professora: Nós ali tínhamos 36x5. Fizemos trinta e seis vezes...

Rita: Trinta e seis vezes dez.

Professora: Trinta e seis vezes dez e depois fizemos o quê?

Rita: Dividimos por dois.

Professora: Então, como é que a gente pode pôr? Qualquer número vezes cinco é igual...

Fábio: É igual a metade.

Professora: O que é que a gente fez primeiro?

Gonçalo C.: Multiplicou por dez.

Professora: Multiplicou por dez. Ele fez trinta e seis vezes dez. Mas isto -

apontando para 36x5=36x10 - não é igual?

Alunos: Não.

Fábio: Pois não. Depois fez a metade.

Professora: Fez a metade. E isso quer dizer o quê? Fez a metade disto - apontado para 36x10. - Como é que se representa metade disto?

Rita: A dividir por dois.

Nesse momento é escrita no quadro a seguinte expressão numérica: 36x5=(36x10):2. A partir do recurso a esta expressão numérica, que servira de base para a exploração da estratégia de cálculo, os alunos demonstraram uma maior facilidade em traduzir a generalização em linguagem matemática. Assim, representaram a generalização em linguagem matemática, da seguinte forma:

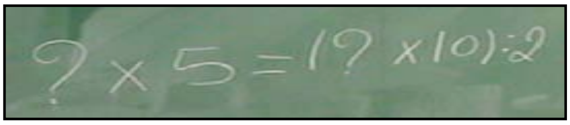


Figura 16 - Expressão da generalização em linguagem matemática, feita pela Rita.

A partir da representação de diferentes símbolos utilizada anteriormente por alguns alunos, Fábio propôs que aquela expressão também poderia ser escrita usando outros símbolos. Assim, apresentou o seguinte exemplo no quadro:

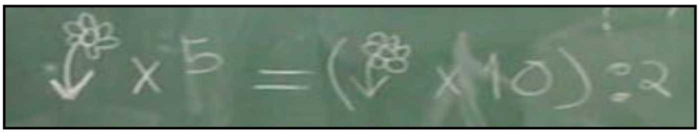


Figura 17 - Expressão da generalização em linguagem matemática, feita pelo Fábio.

Na análise desta segunda tarefa, pode referir-se como os alunos conseguiram, facilmente, apreender a estrutura subjacente à estratégia de cálculo e identificar as relações numéricas de dobro e metade envolvidas. A tradução da generalização da estratégia de cálculo em linguagem natural foi, também, facilmente conseguida. No entanto, a representação em linguagem matemática revelava-se, nesta tarefa e comparativamente com a anteriormente analisada, mais complexa por exigir a representação da "metade". Neste aspecto, os alunos usaram, com alguma criatividade, a representação da metade “de qualquer número” desenhando metade dos símbolos pictóricos que sugeriam para representar “qualquer número”. Este facto evidencia como estes alunos ainda estão num percurso inicial da construção do significado da simbologia. Por outro lado, e comparativamente com a primeira tarefa analisada neste artigo, nesta a expressão numérica não estava explícita no seu enunciado. Assim, e embora os alunos tenham compreendido as relações numéricas envolvidas na estratégia de cálculo e tenham conseguido a sua generalização em linguagem natural, a sua tradução para a linguagem matemática só foi conseguida quando se retomou a estratégia de cálculo a partir do uso da expressão numérica “36x5=(36x10):2”. Este aspecto parece salientar a importância do recurso a expressões numéricas para promover a construção da generalização, de acordo com o conceito de *quase-variável* defendido por Fujii (2003).

Tarefa “Estratégia da Marta”

Da mesma forma que nas anteriores, esta tarefa explorava uma estratégia de cálculo, desta vez relativa à multiplicação de um número por 9, recorrendo à multiplicação por 10, aplicando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à subtracção. Para tal, a tarefa apresentava a exploração da seguinte expressão numérica: 18x9=180-18=162.

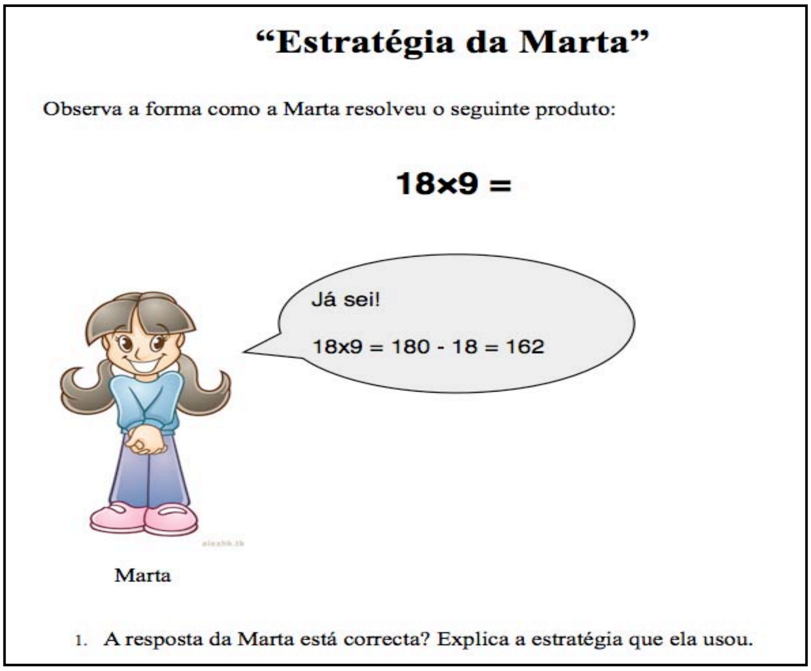
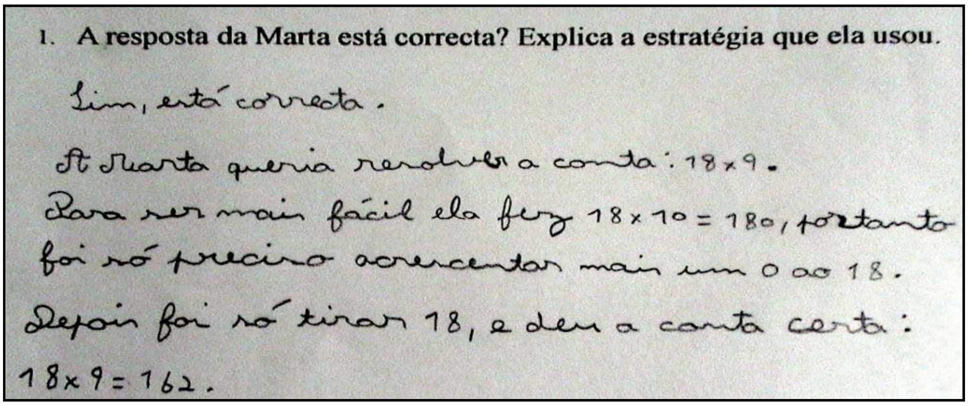


Figura 18 - Enunciado da tarefa "Estratégia da Marta".

Todos os alunos conseguiram referir que a resposta da Marta estava correcta. Igualmente, todos os alunos conseguiram explicar a estratégia de cálculo, referindo que multiplicar 18 por 9 era equivalente à multiplicação por 10 e depois subtrair 18. No exemplo que se apresenta em seguida, o par de alunos explica a estratégia de cálculo de forma clara e, para além disso, refere a vantagem da utilização da multiplicação por dez e a forma como essa estratégia facilita o cálculo.


1. A resposta da Marta está correcta? Explica a estratégia que ela usou.

Sim, está correcta.

A Marta queria resolver a conta: 18×9.

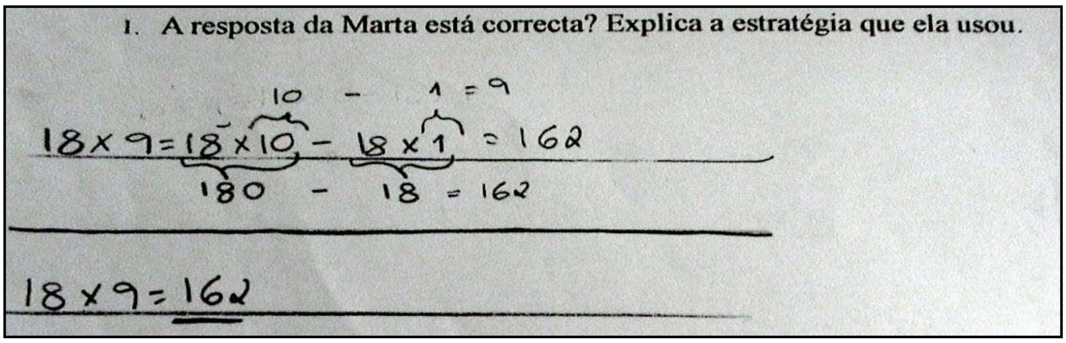
Para ser mais fácil ela fez 18×10 = 180, portanto foi só preciso acrescentar mais um 0 ao 18.

Depois foi só tirar 18, e deu a conta certa:

18×9 = 162.

Figura 19 - Resposta do par Matilde e André.

No exemplo seguinte, o par de alunos conseguiu mostrar que a resposta da Marta estava correcta recorrendo à utilização da propriedade distributiva da multiplicação em relação à subtracção. Deste modo, estes alunos conseguiram responder às questões solicitadas sem a necessidade de explicar verbalmente a estratégia de cálculo explorada na tarefa.


1. A resposta da Marta está correcta? Explica a estratégia que ela usou.

$$18\times 9 = \underbrace{18\times \overbrace{10}^{10}}_{180} - \underbrace{18\times \overbrace{1}^{1}}_{18} = 162$$

10 − 1 = 9

180 − 18 = 162

18×9 = 162

Figura 20 - Resposta do par Rita e Miguel.

Esta resolução foi apresentada na discussão colectiva. Desta forma, quando na discussão colectiva a professora sugeriu que os alunos expressassem a estratégia da Marta em linguagem natural, Rita e Fábio manifestaram-se da seguinte forma:

Rita: Se multiplicarmos qualquer número por 9, multiplicamos por 10 menos esse número vezes um é igual aquele resultado, é igual a...
Fábio: A qualquer número vezes nove.

A forma como estes alunos expressaram a estratégia de cálculo evidencia, de forma bastante clara, a utilização da propriedade distributiva da multiplicação em relação à subtracção. A expressão da generalização dessa estratégia de cálculo em linguagem natural foi, então, registada do seguinte modo:

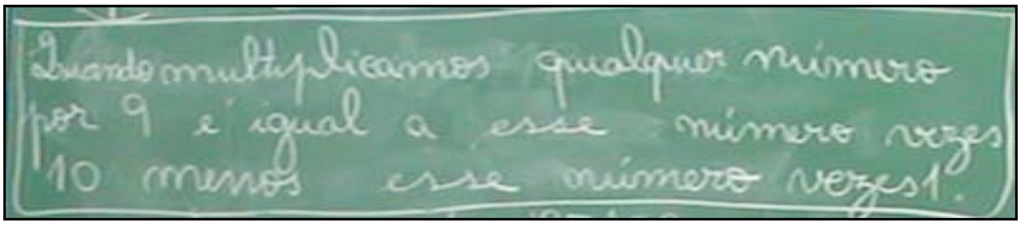


Figura 21 - Expressão da generalização em linguagem natural, escrita pela professora a partir do contributo colectivo dos alunos.

A construção da generalização da estratégia de cálculo na linguagem matemática foi mais facilmente conseguida do que nas tarefas anteriores. A figura seguinte mostra como a sua representação expressa claramente a tradução da linguagem natural anteriormente feita:

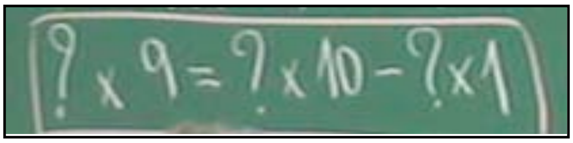


Figura 22 - Expressão da generalização em linguagem matemática, escrita pela professora a partir do contributo colectivo dos alunos.

Na análise desta terceira tarefa pode referir-se que, tal como nas anteriores, os alunos conseguiram apreender a estrutura subjacente à estratégia de cálculo e identificar as relações numéricas envolvidas. Também conseguiram, facilmente, traduzir a generalização da estratégia de cálculo em linguagem natural. A tradução da generalização da estratégia de cálculo para a linguagem matemática foi, nesta tarefa, mais facilmente conseguida. De facto, a utilização da propriedade distributiva da multiplicação em relação à subtracção apresentada por um par de alunos e explorada colectivamente com toda a turma, parece ter contribuído para que a construção da generalização em linguagem matemática fosse mais imediata. Desta forma, e mais uma vez, parece ser evidente a importância da utilização de expressões numéricas particulares para a construção da generalização, usando essas expressões como quase-variáveis (Fujii, 2003).

Considerações Finais

Através da análise das três tarefas apresentadas neste estudo, que envolvem a exploração de diferentes estratégias de cálculo através de expressões numéricas particulares, procurar-se-á, agora, explicitar como a exploração dessas tarefas contribuiu para a mobilização da capacidade de generalização expressa em linguagem natural e em linguagem matemática.

Primeiramente, e de acordo com a primeira dimensão de análise, importa referir que os diferentes pares de alunos conseguiram reconhecer a estrutura subjacente às estratégias de cálculo de cada uma das tarefas, identificando claramente as relações numéricas e usando as propriedades das operações envolvidas nas expressões numéricas apresentadas, nomeadamente, as propriedades associativa da multiplicação e distributiva da multiplicação em relação à subtracção e o conhecimento de que a multiplicação e a divisão são operações inversas. Conseguiram aplicar as estratégias de cálculo a outros casos para além dos exemplos apresentados, como foi bastante evidente nas primeiras duas tarefas. Salienta-se a importância de levar os alunos a focarem-se nas relações numéricas, trabalhando as expressões numéricas numa perspectiva mais algébrica (Carpenter et al., 2003).

Relativamente à segunda dimensão de análise, verifica-se que diferentes pares de alunos usaram as estratégias de cálculo definidas nas expressões numéricas particulares para construírem a generalização em linguagem natural, com relativa facilidade. De forma clara, esses alunos referiram que podiam construir a tabuada do 8 a partir do dobro da tabuada do 4, a tabuada do 5 fazendo metade da tabuada do 10, e como a multiplicação por 9 poderia ser obtida a partir da multiplicação por 10. Em cada um dos casos, os alunos exploraram as expressões numéricas particulares para a construção da generalização em linguagem natural, o que surge como evidência de desenvolvimento do pensamento algébrico, de acordo com as perspectivas de vários autores (Blanton & Kaput, 2005; Ponte, 2006).

No que diz respeito à terceira dimensão de análise, não sendo nosso interesse primário a introdução precoce à linguagem simbólica, parece, ainda assim, ser possível a iniciação, de modo gradual, nesse percurso como forma de tradução da linguagem natural para a linguagem matemática, o que também nos mostram diversos estudos (Barbosa, 2009; Blanton, 2008; Santos, 2008). Neste sentido, importa salientar a importância da utilização de expressões numéricas particulares para o desenvolvimento da capacidade de generalização e, mais concretamente, para a introdução à linguagem simbólica. Esse facto pode ser reconhecido na segunda tarefa analisada, onde não estando explícita no enunciado a expressão numérica os alunos demonstraram maiores dificuldades em traduzir para linguagem matemática o que tinham referido em linguagem natural. Quando, na discussão colectiva, a expressão numérica foi retomada, os alunos mostraram já uma maior facilidade em traduzir a generalização para a linguagem matemática. Este resultado vai ao encontro da perspectiva de Fujii (2003) ao assinalar a importância de explorar a generalização e a simbolização a partir de expressões numéricas particulares passíveis de ser generalizadas, enquadrando-se no conceito de *pensamento quase-variável* defendido por este autor.

Em síntese, este estudo evidencia que uma experiência de ensino assente na exploração de estratégias de cálculo a partir de expressões numéricas particulares, como as apresentadas nestas tarefas, pode contribuir para a expressão da generalização em linguagem natural e a sua tradução em linguagem matemática, permitindo a iniciação de um percurso em direcção à simbolização. Para tal, foram determinantes as características das tarefas propostas e a sua sequenciação, assim como o modo como foram exploradas pela professora com a turma. É de realçar o seu importante papel na sensibilização dos alunos para a distinção entre “olhar para” e o “olhar através” (Mason, 2006), encaminhando-os para a expressão da generalização em linguagem natural e simbólica. Estes são aspectos importantes, a ter em conta, quando se procura promover a interligação entre a Aritmética e a Álgebra nos primeiros anos de escolaridade.

Referências Bibliográficas

Barbosa, A. C. (2009). *A resolução de problemas que envolvam a generalização de padrões em contextos visuais: Um estudo longitudinal com alunos do 2.º ciclo do* *ensino básico* (Tese de doutoramento, documento policopiado). Universidade do Minho, Braga.

Bastable, V. (2007). Reasoning algebraically about operations: Developing early algebraic thinking by examining the generalizations that underlie young student's mathematical thinking. What do teachers and those who prepare teachers need to understand? In D. K. Pugalee, A. Rogerson, & A. Schnook (Eds.), *Proceedings of the 9th international conference of mathematics education in a global community* (pp. 60-63). Charlotte, NC: Center for Mathematics, Science & Technology Education.

Blanton, M., & Kaput, J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(5), 412-446.

Blanton, M. (2008). *Algebra and the elementary classroom. Transforming thinking, transforming practice*. Heinemann: Portsmouth, NH.

Carpenter, T. P., Franke, M. L., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic & algebra in elementary school.* Portsmouth, NH: Heinemann.

Carpenter, T. P., Levi, L., Franke, M. L., & Zeringue, J. K. (2005). Algebra in the elementary school: Developing relational thinking. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education, 37*(1), 53-59.

Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of mathematics teaching and learning* (pp. 669-705). Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Carraher, D. W., Martinez, M. V., & Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education, 40*(1), 3-22.

Cai, J., & Knuth, E. J. (2005). Introduction: The development of students' algebraic thinking in earlier grades from curricular, instructional and learning perspectives. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education, 37*(1), 1-4.

Fujii, T. (2003). Probing students' understanding of variables through cognitive conflict problems: Is the concept of a variable so difficult for students to understand? In N. A. Pateman, B. J. Dougherty, & J. T. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education(PME)* (pp. 49-65). Honolulu: PME.

Fujii, T., & Stephens, M. (2008). Using number sentences to introduce the idea of variable. In C. Greenes, & R. Rubenstein (Eds.) *Algebra and algebraic thinking in* *school mathematics: Seventieth yearbook* (pp. 127-149). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics (NCTM).

Gravemeijer, K., & Cobb, P. (2006). Design research from a learning design perspective. In J. van den Akker, K. Gravemeijer, S. McKenney, & N. Nieveen (Eds.), *Educational design research* (pp. 45-85). London: Routledge.

Britt, M. S., & Irwin, K. C. (2011). Algebraic thinking with and without algebraic representation: A pathway for learning. In J. Cai, & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 137-159). New York, NY: Springer.

Kelly, A. E. (2003). Research as design. *Educational Researcher*, *32*(1), 3-4.

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it?. *Mathematics Educator, 8*(1), 139-151.

Kieran, C. (2007). Developing algebraic reasoning: The role of sequenced tasks and teacher questions from the primary to the early secondary school levels. *Quadrante, 16*(1), 5-26.

Molina, M. (2006). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo de igual en alumnos de tercero de educación primaria* (Tese de doutoramento, documento policopiado). Universidade de Granada, Granada.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Pimentel, T., & Vale, I. (2009). A descoberta de padrões no desenvolvimento do Cálculo mental: Uma experiência com professores do 1.º ciclo. In C. Costa, E. Mamede, & F. Guimarães (Eds.), *Números e Estatística: Reflectindo o presente, perspectivando o futuro* (pp. 1-9). Vila Real: Secção da Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação (SEM-SPCE). [CdRom]

Ponte, J. P. (2006). Números e álgebra no currículo escolar. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos, & P. Canavarro (Eds.), *Números e Álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores* (pp. 5-27). Lisboa: SEM-SPCE.

Ponte, J. P., Branco, N., & Matos, A. (2009). *Álgebra no ensino básico*. Lisboa: ME/ Direcção-Geral de Inovação e do Desenvolvimento Curricular (DGIDC).

Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., ... Oliveira, P. (2007). *Programa de matemática do ensino básico*. Lisboa: ME/DGIDC.

Rivera, F. D. (2006). Changing the face of arithmetic: Teaching children algebra. *Teaching Children Mathematics, 12*(6), 306-311.

Russell, S. J., Schiffer, D., & Bastable, V. (2011). Developing algebraic thinking in the context of arithmetic. In J. Cai, & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 43-69). New York, NY: Springer.

Santos, M. M. P. (2008). *A generalização nos padrões: Um estudo no 5.º ano de escolaridade* (Dissertação de mestrado, documento policopiado). Universidade de Lisboa, Lisboa.

Steffe, L., & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In A. E. Kelly, & R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 267-306). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.