PROPORCIONALIDADE DIRECTA NO 6.º ANO DE ESCOLARIDADE: UMA ABORDAGEM EXPLORATÓRIA[1]

Ana Isabel Silvestre

Escola Básica 2,3 Gaspar Correia, Portela
Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
anaisabelsilvestre@gmail.com

João Pedro da Ponte

Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
jpponte@ie.ul.pt

Resumo

Este artigo apresenta uma unidade de ensino sobre a proporcionalidade directa e descreve a sua realização em duas turmas do 6.º ano de escolaridade. A unidade de ensino, de cunho exploratório, está de acordo com as orientações do atual programa de Matemática do ensino básico. O seu objectivo é desenvolver o raciocínio proporcional dos alunos, encarado como a capacidade para distinguir relações de proporcionalidade directa de outras relações, compreender a natureza multiplicativa da relação de proporcionalidade directa e resolver vários tipos de problemas, revelando flexibilidade para usar diferentes abordagens sem ser afectado pelos dados numéricos, contextos e representações. O modo como a unidade de ensino decorreu na sala de aula e as aprendizagens dos alunos nos vários aspectos que envolvem o raciocínio proporcional suportam o pressuposto geral de ensino subjacente à unidade.

Palavras-chave: Raciocínio proporcional; Unidade de ensino; Abordagem exploratória.

Abstract

This article presents a teaching unit on direct proportion and describes its implementation in two grade 6 classes. The teaching unit follows as exploratory

[1] Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia no âmbito do Projecto *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática* (contrato PTDC/CPE-CED/098931/2008).

approach and is consistent with the guidelines of the Portuguese mathematics syllabus for basic education. Its aim is to develop students' proportional reasoning, viewed as the ability to distinguish direct proportions from other relationships, to understand the multiplicative nature of proportional relationships and to solve several kinds of problems, showing flexibility to use different approaches without being affected by numerical data, contexts, and representations. The way the teaching unit unfolded in the classroom and the students' learning in several aspects of proportional reasoning supports the general assumption underlying the teaching unit.

Keywords: Proportional reasoning; Teaching unit; Exploratory approach.

Introdução

Ensinar Matemática é uma tarefa cada vez mais complexa que exige ao professor um conhecimento aprofundado do currículo e a capacidade de se adaptar à constante mudança que caracteriza a sociedade do conhecimento. Isto acontece dado que a qualidade das aprendizagens dos alunos na sala de aula depende do currículo e o professor é, em última instância, o gestor do currículo (Moyer, Cai, Laughlin, & Wang, 2009). O *Programa de Matemática do Ensino Básico* (ME, 2007) apresenta diversas mudanças em relação ao programa anterior (ME, 1991). O aspecto mais visível diz respeito à importância dada às capacidades transversais. Outro aspecto é a introdução do tema Álgebra no 2.º ciclo, onde se integra o tópico da proporcionalidade directa. Estas mudanças pretendem ter impacto na prática lectiva do professor.

O desenvolvimento e aperfeiçoamento de unidades de ensino é um dos processos através do qual se podem gerar artefactos úteis ao professor para introduzir novas formas de trabalho na sua prática letiva (Wittmann,1984,1998). Ao mesmo tempo, estas unidades permitem testar teorias sobre o modo como os alunos aprendem em condições diferentes das que usualmente lhes são proporcionadas (Sandoval, 2004). Assim, este artigo apresenta uma unidade de ensino sobre a noção de proporcionalidade directa, de cunho exploratório, de acordo com as orientações deste programa, descreve os seus fundamentos e a sua realização em duas turmas do 6.º ano de escolaridade. Além disso, analisa de que forma a unidade serviu de base à evolução dos alunos nos vários aspectos da sua capacidade de raciocínio proporcional.

A Concepção de Unidades de Ensino como Processo de Mudança Curricular

Unidades de ensino e recursos

Niss (1999) sustenta que, enquanto disciplina científica, a Didáctica da Matemática tem duas dimensões: (i) uma dimensão descritiva/interpretativa, relacionada com a identificação, caracterização e compreensão dos fenómenos e processos relacionados com o ensino-aprendizagem, em todos os níveis de ensino; e (ii) uma dimensão normativa, relacionada com a construção do currículo, abordagens de ensino, sequências de instrução, ambientes de aprendizagem e materiais para o ensino-aprendizagem. No âmbito desta segunda dimensão, tem-se vindo a investigar o pensamento matemático dos alunos tendo por base a concepção (*design*) de objectos didácticos para o ensino da Matemática. Wittmann (1984, 1998) diz que a Educação Matemática tem como cerne a construção de artefactos e a investigação dos seus efeitos em diferentes ecologias educativas. Estes artefactos incluem unidades de ensino, conjuntos coerentes de unidades de ensino e o próprio currículo.

Jones, Langrall, Thornton e Nisbet (2002) apontam o paralelo entre a abordagem de Wittmann (1984, 1998), o modelo de investigação desenvolvido pela Educação Matemática Realista apresentado por Gravemeijer (1998), e as experiências de ensino desenvolvidas nos Estados Unidos da América e descritas por Cobb (1999) e Steffe e Thompson (2000). Existe também um paralelo entre estas investigações e as numerosas experiências de ensino que se têm vindo a desenvolver em Portugal. Estas abordagens procuram construir sequências de ensino articuladas com o conhecimento informal e as representações matemáticas dos alunos, que, através de um processo de reiteração e modificação, possam ser aperfeiçoadas, levando-os a desenvolver um conhecimento progressivamente mais formal (Wittmann, 1984, 1998).

Neste trabalho, construímos uma unidade de ensino, procurando mostrar os vários aspectos que envolvem a sua concepção e realização na sala de aula. Note-se que uma unidade de ensino não é um mero conjunto de tarefas nem uma listagem de tópicos e subtópicos de um programa. Na verdade, uma unidade tem por base uma teoria sobre o modo como os alunos aprendem (uma conjectura de ensino-aprendizagem), sendo constituída por uma sequência de tarefas organizadas de modo coerente e apelando ao uso de diversos recursos didácticos.

Esta conjectura de ensino-aprendizagem, na perspectiva de Sandoval (2004), tem uma natureza eminentemente teórica, baseada no currículo e no conhecimento matemático a ensinar. Além disso, é refinada ao longo do tempo, através de investigação empírica. A construção de uma unidade de ensino procura estabelecer um caminho de aprendizagem, orientado por esta conjectura. Este é um trabalho complexo que obriga a mobilizar conhecimento sobre o tópico e sobre as orientações curriculares, bem como a tomar decisões relativas ao que os alunos têm de aprender e como os ensinar. A este respeito, Lobato, Ellis, Charles e Zbiek (2010), indicam que:

> *"Para planificar uma boa experiência de aprendizagem, é preciso compreender os diferentes modelos e representações (...), um conhecimento sobre os materiais curriculares e o modo de construir lições. Para escolher e desenvolver as tarefas de aprendizagem é preciso saber o que enfatizar e justificar porque é que essas ideias são matematicamente importantes".* (p. vii)

Os recursos didácticos podem ser estruturados, como os manuais escolares, ou não estruturados, como os objectos de uso diário. Os recursos didácticos estruturados são todos os objectos construídos para representar de modo concreto as ideias matemáticas abstractas, tendo em vista incentivar a investigação e a colaboração por parte dos alunos. Apresentamos de seguida os recursos didácticos que desempenham um papel saliente na unidade de ensino.

Tarefas

Na literatura encontramos várias formas para classificar as tarefas matemáticas. Por exemplo, Ponte (2005) classifica-as em função do grau de desafio matemático e de estrutura. O desafio matemático está relacionado com a percepção da dificuldade de uma questão que se coloca ao aluno, na sala de aula ou em momentos de avaliação, e a estrutura com a natureza e precisão do enunciado. Para o autor, as tarefas rotineiras orientadas para a aquisição de conhecimentos e técnicas de cálculo não garantem o desenvolvimento das capacidades matemáticas, pelo que devem ser propostas outras tarefas como a resolução de problemas e as explorações e investigações. Segundo Ponte e Matos (1992), as investigações matemáticas, tal como, de resto, a resolução de problemas, implicam pensamento complexo e exigem envolvimento e criatividade por parte dos alunos. No entanto, ao contrário dos problemas usuais, que especificam claramente o que é dado e o que é pedido, as explorações e investigações têm enunciados e objetivos pouco estruturados e com alguma indefinição. Deste modo, nestas tarefas, têm de ser os alunos a definir e precisar os objetivos, bem como a conjecturar e a testar as suas próprias conjecturas.

No presente trabalho, como para Ernest (1991), assume-se que uma abordagem de investigação e exploração acrescenta a formulação do problema à resolução de problemas. A partir de uma proposta inicial do professor, são os alunos que definem os seus objectivos, formulam as suas conjecturas e exploram caminhos possíveis para as validar. Estas tarefas podem constituir um ponto de partida para desenvolver novos conceitos, levando os alunos a trabalhar de forma intuitiva, estabelecendo conexões entre essa tarefa e a sua experiência.

Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC)

São vários os tipos de tecnologia que podem ser usadas como recursos no ensino-aprendizagem da Matemática, incluindo a calculadora e o computador com software genérico (como a folha de cálculo) e específico (como o Geometer's Sketchpad), a Internet e, mais recentemente, os quadros interactivos. As calculadoras são ferramentas de aprendizagem eficazes quando usadas em cálculos rotineiros e em tarefas que exigem investigação e exploração por parte dos alunos. Entre as perspectivas mais marcantes sobre as potencialidades do computador no ensino-aprendizagem da Matemática, salientam-se as de Papert (1991) que aponta a importância da actividade investigativa no desenvolvimento do conhecimento matemático dos alunos. Para este autor, o mais importante não é o computador efectuar cálculos demorados e repetitivos, mas sim permitir explorar conceitos ou situações, descobrir relações ou semelhanças, modelar fenómenos e testar conjecturas, inventando e reinventando a Matemática.

A folha de cálculo constitui um importante programa-ferramenta para o ensino da Matemática. Visualmente apresenta-se como uma matriz de linhas e colunas, permitindo a inserção de valores numéricos, fórmulas e texto, que podem ser sujeitos a tratamentos e manipulações. A folha de cálculo permite que os alunos não se preocupem com os cálculos e se centrem sobretudo nos aspectos relevantes das questões (Moreira, 1989). Outra particularidade é o facto de permitir o estudo de dados numa perspectiva aritmética, algébrica e gráfica.

Raciocínio Proporcional

O raciocínio proporcional e a relação de proporcionalidade direta

Silvestre e Ponte (2009) consideram que a capacidade de raciocínio proporcional envolve três aspetos: (i) distinguir relações de proporcionalidade direta daquelas que não o são; (ii) compreender a natureza multiplicativa da relação de proporcionalidade direta; e (iii) resolver vários tipos de problemas, revelando flexibilidade para usar diferentes abordagens, sem ser afetado pelos dados numéricos, contexto e representação. Estes aspetos pretendem operacionalizar a noção de raciocínio proporcional, indicando as diferentes vertentes a ter em consideração no seu desenvolvimento. O raciocínio proporcional é fundamental no desenvolvimento matemático do aluno (Misailidou & Williams, 2004), constituindo foco de intensa investigação nas últimas três décadas (English & Halford, 1995; Post, Cramer, Harel, Kieren & Lesh,1998; Shield & Dole, 2002; Streefland,1985). Lesh, Post e Behr (1988) chamam a atenção que nem todas as pessoas adultas resolvem problemas envolvendo relações de proporcionalidade directa, através do uso de raciocínio proporcional.

A relação de proporcionalidade directa tem uma natureza multiplicativa. Nas estruturas multiplicativas, isto é, nas situações que envolvem uma multiplicação, uma divisão ou ambas as operações, Vergnaud (1983), identifica três classes, sendo uma delas o isomorfismo de medidas, que se refere a uma proporção directa simples. Neste caso, as transformações que se operam dentro ou entre variáveis mantêm uma relação proporcional entre os valores numéricos, como mostra a Figura 1:

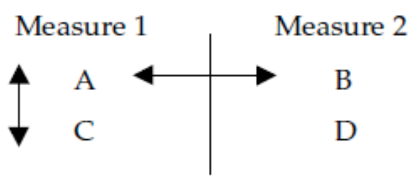


Figura 1 – Isomorfismo de medidas (Vergnaud, 1983).

A não compreensão da natureza multiplicativa da relação de proporcionalidade directa, em particular, do sentido da covariação e invariância, traduz-se na dificuldade em distinguir situações que envolvem esta relação de situações em que isso não acontece.

A relação de proporcionalidade directa entre duas variáveis pode ser formalmente representada como uma igualdade entre duas razões $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ (sendo *a* e *c* valores de uma variável e *b* e *d* valores de outra variável) ou como função linear $y = mx$, com $m\neq0$. O modo como a noção de proporcionalidade direta tem vindo a ser abordada está fortemente ligado às representações. Usualmente, os alunos aprendem, primeiro, a resolver problemas usando igualdades entre razões e, depois, recorrendo à função linear, sem que se estabeleça qualquer relação entre essas duas representações. Stanley, McGowan e Hull (2003) argumentam que a abordagem em que os alunos "resolvem proporções" (sic) está ultrapassada e deve ser substituída por outra em que estes se envolvem em actividades que os ajudam a descobrir que a proporcionalidade é a variação mútua de duas grandezas.

Tipos de problemas e estratégias de resolução

Neste trabalho, usamos problemas de valor omisso (Cramer & Post, 1993), de comparação (Cramer & Post, 1993) e pseudoproporcionais (Verschaffel, Greer & De Corte, 2000). Os primeiros apresentam três valores numéricos e pedem o quarto valor, o valor omisso. Os problemas de comparação apresentam dois ou mais pares de valores numéricos e pedem a sua comparação. Nalguns casos, o contexto destes problemas exige um julgamento qualitativo. Os problemas pseudoproporcionais são aqueles em que não existe uma relação de proporcionalidade directa, mas geram nos alunos uma tendência para assumir que ela existe.

Vários estudos analisam as estratégias usadas pelos alunos para resolver estes problemas. Por exemplo, Hart (1984), Post, Behr e Lesh (1988) e Cramer, Post e Currier (1993) referem as seguintes: (i) *Razão unitária* (ou "quanto para um"), a estratégia mais intuitiva que os alunos usam desde os primeiros anos de escolaridade (cálculo de razões unitárias em problemas de divisão e cálculo de múltiplos de razões unitárias em problemas de multiplicação); (ii) *Factor de mudança* ou *factor escalar* (ou "tantas vezes como"), estratégia condicionada a aspectos numéricos dos problemas mas presente no reportório das crianças; (iii) *Comparação das razões*, comparando as razões unitárias através de duas divisões; e (iv) *Algoritmo do produto cruzado* (ou "*regra de três simples*"), que, embora eficiente, é um processo mecânico desprovido de significado no contexto dos problemas. Post, Behr e Lesh (1988) identificam ainda a estratégia da *interpretação gráfica*, usada para identificar razões equivalentes ou para identificar o valor desconhecido em problemas de valor omisso. Outra estratégia de cunho mais informal é a *composição/decomposição* (Hart, 1984), que pode envolver tanto raciocínios multiplicativos como aditivos. Pelo seu lado, Lamon (1994) classifica as estratégias como sendo “dentro” e “entre” variáveis, distinguindo assim raciocínios de natureza *escalar* (respeitantes a transformações dentro da mesma variável) e de natureza *funcional* (estabelecendo relações entre variáveis). Segundo esta investigadora, a distinção entre estes dois tipos de relação é importante, pois envolvem processos cognitivos diferentes.

Construção de Uma Unidade de Ensino sobre a Proporcionalidade Direta

A unidade de ensino que apresentamos nesta secção tem como objectivo contribuir para o desenvolvimento do raciocínio proporcional dos alunos do 6.º ano de escolaridade. Na sua base estão as orientações dos documentos curriculares nacionais e internacionais e a literatura sobre a noção de proporcionalidade directa, tendo sido desenhada pela primeira autora deste artigo.

Orientações fundamentais

A unidade de ensino assume as finalidades e objectivos gerais do *Programa de Matemática do Ensino Básico* (ME, 2007). Inspira-se, também, nos *Princípios e Normas para a Matemática* Escolar (NCTM, 2000) que referem que a proporcionalidade directa é um tema integrador na disciplina de Matemática. Assim, consideramos que a sua aprendizagem se desenvolve através do trabalho em tópicos como razão e proporção, percentagem, semelhança, equações lineares, declive, frequência relativa e probabilidades. Além disso, a noção de proporcionalidade direta estabelece ligações entre a Matemática e outros domínios da ciência e da arte.

O programa de Matemática português assume que o raciocínio proporcional se desenvolve desde o 1.º ciclo do ensino básico. Esta abordagem centra o foco na compreensão, pelos alunos, da natureza multiplicativa da relação de proporcionalidade directa, mobilizando as suas estratégias intuitivas, procurando torná-las mais sofisticadas e eficientes. Embora sejam trabalhadas as noções de razão e proporção, estas não constituem necessariamente o ponto de partida para o ensino formal da proporcionalidade directa no 6.º ano, podendo usar-se outras vias como as que valorizam a correspondência entre variáveis (explorando a sua covariação). Na linha do que o programa indica, consideramos que o raciocínio proporcional dos alunos envolve muito mais que desenvolver eficiência na aplicação de regras para resolver problemas. Para além das orientações específicas destes documentos curriculares para o ensino da proporcionalidade directa, a unidade de ensino teve em consideração a revisão da literatura sobre este tema, apresentada anteriormente, e ainda as perspectivas sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico nos primeiros anos de escolaridade (Kaput, 2008; Ponte, 2006).

Conjectura de ensino e de aprendizagem e planeamento da unidade de ensino

A unidade de ensino tem um cunho exploratório, procurando envolver os alunos em tarefas não rotineiras, em cuja resolução mobilizem os seus conhecimentos intuitivos. A conjectura de ensino-aprendizagem que lhe está subjacente assume que os alunos do 6.º ano de escolaridade desenvolvem o seu raciocínio proporcional quando: (i) exploram a natureza multiplicativa da relação de proporcionalidade directa, reforçando o seu conhecimento sobre a covariação de grandezas e invariância de relações em certas condições; (ii) trabalham na resolução de problemas envolvendo relações de proporcionalidade directa (de valor omisso e de comparação), problemas pseudoproporcionais e outros em que se averigua a existência de proporcionalidade directa; e (iii) trabalham em simultâneo com diferentes representações (tabelas; gráficos; razão na forma de fracção; razão com dois pontos).

A unidade de ensino é constituída por 5 fichas de trabalho e por dois testes (Tabela 1) envolvendo três tipos de tarefas matemáticas: investigações, explorações e problemas. A ficha de trabalho inicial apresenta aos alunos uma investigação, a segunda ficha uma exploração e as restantes três fichas são constituídas por problemas A Tabela 1 apresenta o planeamento da unidade de ensino com a indicação das fichas de trabalho, da natureza das tarefas de cada ficha, do modo de trabalho e do número de blocos (de 90 minutos) previstos para cada tarefa. A tabela indica ainda os objetivos específicos de cada tarefa(s) e o material necessário para a sua realização. As tarefas das duas primeiras fichas estão contextualizadas na fábula *O Coelho e a Tartaruga*. As restantes tarefas colocam os personagens em contextos diversos.

Tabela 1 – Planeamento da unidade de ensino (9 blocos de 90 minutos).

Fichas de Trabalho e Testes	Descrição	Modo de trabalho	Tempo (bloco 90 minutos)
Teste diagnóstico	- Diagnosticar o conhecimento dos alunos sobre os aspetos que envolvem o raciocínio proporcional.	Individual	1
Ficha 1 O coelho e a tartaruga	- **Natureza da tarefa:** Investigação - **Objetivos da tarefa:** • Distinguir uma relação de proporcionalidade direta de outra que não o é, investigando as relações numéricas que envolvem duas situações que apresentam o mesmo contexto. • Reconhecer a relação de covariação e invariância que envolve a relação de proporcionalidade direta, evidenciando a natureza multiplicativa. • Explicar o significado do invariante (constante de proporcionalidade) • Representar a informação em tabelas e gráficos. - **Material:** Computador (folha de cálculo do Excel)	Em grupo	2,5
Ficha 2 O segredo da tartaruga	- **Natureza da tarefa:** Exploração - **Objetivos da tarefa:** • Distinguir as relações de proporcionalidade directa daquelas que o não são. • Experimentar vários valores invariantes (constante de proporcionalidade) e verificar que a relação de covariação se mantêm. • Explicar o significado da constante de proporcionalidade. • Compreender que o invariante (constante de proporcionalidade) pode ser representado de forma decimal ou na forma de razão (representação como fração ou com dois pontos). - **Material:** Computador (folha de cálculo do Excel)	Em grupo	1,5
Ficha 3 No país das tartarugas	- **Natureza das tarefas:** Problemas - **Objetivos das tarefas:** • Utilizar a relação multiplicativa de covariação e invariância para resolver problemas (valor omisso e de comparação). • Utilizar diferentes representações: tabelas; proporção e razão na forma de fração; razão utilizando dois pontos e decimal. • Ler a razão e a proporção. • Continuar a desenvolver a capacidade de resolução de problemas. - **Material:** Calculadora	Em grupo	1
Ficha 4 Maratona dos coelhos e mais problemas	- **Natureza das tarefas:** Problemas - **Objetivos das tarefas:** • Utilizar a relação multiplicativa de covariação e invariância para resolver problemas (valor omisso que envolvem a noção de percentagem). • Utilizar diferentes representações: tabelas; proporção e razão na forma de fração; razão utilizando dois pontos e decimal. • Ler a razão e a proporção. • Continuar a desenvolver a capacidade de resolução de problemas. - **Material:** Calculadora	Em grupo	1
Ficha 5 Pista interdita a coelhos e outras histórias	- **Natureza das tarefas:** Problemas - **Objetivos das tarefas:** • Utilizar a relação multiplicativa de covariação e invariância para resolver problemas (valor omisso que envolvem a noção de escala). • Utilizar diferentes representações: tabelas; proporção e razão na forma de fração; razão utilizando dois pontos e decimal. • Ler a razão e a proporção. • Continuar a desenvolver a capacidade de resolução de problemas. - **Material:** Calculadora	Em grupo	1
Teste final	- Avaliar as aprendizagens realizadas pelos alunos durante a unidade de ensino, relacionadas com os aspetos que envolvem raciocínio proporcional.	Individual	1

A ficha 1 apresenta cenário da corrida da fábula. O esquema apresenta uma pista onde estão marcados os postos de passagem indicando a distância a que os personagens se situam desde a partida e o seu tempo de passagem, sendo evidente que, tal como na fábula, a tartaruga é a primeira a passar a linha da meta. Pede-se aos alunos que investiguem o que terá acontecido durante a corrida e espera-se que investiguem as relações numéricas entre e dentro das variáveis e identifiquem regularidades numéricas da relação de proporcionalidade direta, nos dados referentes à corrida da tartaruga. Para além disso, espera-se que os alunos representem os dados em tabelas na folha de cálculo (recurso proposto na ficha de trabalho), sendo sugerido durante o trabalho que os alunos representem os dados num gráfico.

A ficha 2 envolve os alunos numa exploração, procurando que mobilizem a relação multiplicativa de proporcionalidade direta trabalhada na ficha anterior. Assim, devem escolher uma constante de proporcionalidade e apresentar o tempo gasto por um dos personagens, para realizar a corrida. A ficha 3 contém vários problemas que envolvem uma relação de proporcionalidade direta. Espera-se que os alunos mobilizem a relação multiplicativa entre e dentro variáveis para resolver os problemas e ainda que utilizem flexivelmente as representações em tabela, razão na forma de fracção e razão na forma decimal. A ficha 4 lida com a noção de percentagem e a ficha 5 com a noção de escala. Espera-se que os alunos mobilizem a relação multiplicativa entre e dentro variáveis para resolver os problemas propostos.

Com o teste diagnóstico pretende-se conhecer a capacidade de raciocínio proporcional dos alunos, antes do desenvolvimento da unidade de ensino, em particular os vários aspetos considerados neste estudo, e decidir se sobre a sua exequibilidade. O teste final pretende dar a conhecer a capacidade de raciocínio proporcional dos alunos após o desenvolvimento da unidade de ensino.

Metodologia

Este estudo segue um paradigma metodológico de *design research* (Bereiter, 2002; DBRC, 2003) que tem vindo a ser usado em Educação Matemática (Confrey, 2006; Sawyer, 2006), tendo em vista construir conhecimento com base em evidências empíricas. Mais especificamente, o estudo é uma experiência de ensino (Steffe & Thompson, 2000), uma das forma de *design research*, que pretende conhecer a influência da unidade de ensino descrita na secção anterior na capacidade de raciocínio proporcional dos alunos.

A unidade de ensino foi desenvolvida em duas turmas de uma escola da periferia de Lisboa. Estas turmas têm como docentes as duas professoras que aceitaram experimentar a unidade de ensino, trabalhando em colaboração com a investigadora. De forma a preservar a identidade dos alunos, os nomes dos participantes no estudo são fictícios. As turmas envolvidas neste estudo são do 6.º ano de escolaridade. A turma A é composta por 25 alunos e a turma B por 26 alunos, com idades entre os 11 e os 14 anos (a maioria tem 11 anos). Os alunos das duas turmas apresentam um desempenho escolar heterogéneo na disciplina de Matemática, se tivermos em atenção os níveis atribuídos na avaliação dos três períodos do 5.º ano e no primeiro período do 6.º ano.

Durante a realização da unidade de ensino, para além das reuniões com as professoras, a primeira autora esteve presente em todas as aulas, que foram gravadas em vídeo, tendo recolhido os registos escritos dos alunos – devolvidos após serem fotocopiados – nas diversas tarefas. Foram aplicados às turmas dois testes, um teste de diagnóstico e um teste final que também foram fotocopiados e posteriormente devolvidos aos alunos. Tendo em consideração a natureza do estudo, a análise de dados é essencialmente descritiva, usando as seguintes categorias: (i) estratégias (processos de cálculo e representações) usadas pelos alunos para resolver problemas que envolvem relações de proporcionalidade directa; e (ii) estratégias (processos de cálculo e representações) usadas pelos alunos para distinguir relações de proporcionalidade directa de outras que o não são. Os dados recolhidos nos testes foram também alvo de uma análise quantitativa.

A Realização da Unidade de Ensino

Nesta secção mostramos a realização das tarefas na aula, ilustrando alguns aspectos que nos parecem mais significativos.

Alguns momentos de trabalho

Ficha de trabalho 1. Na primeira aula as professoras apresentam a tarefa (Figura 2), dizendo que se trata de uma investigação, chamam a atenção os alunos para a necessidade de realização de registos durante o trabalho para poderem fazer um relatório detalhado e dão indicações sobre a constituição dos grupos e a gestão do trabalho em grupo.

Após receberem a ficha, os alunos levam algum tempo a formular conjeturas que reúnam o consenso da maioria dos elementos dos respetivos grupos. Este processo é demorado mas implica-os na realização de um trabalho cognitivamente exigente que requer a mobilização do seu conhecimento e que vai além da Matemática, exigindo ainda a organização das ideias para as comunicar com clareza aos outros elementos do grupo, como mostra o diálogo de um grupo da turma A.

Todos os anos se realiza a corrida mais famosa do mundo. (...) O esquema mostra a prova realizada pelo coelho e pela tartaruga. (...) Investiga o terá acontecido durante a corrida.

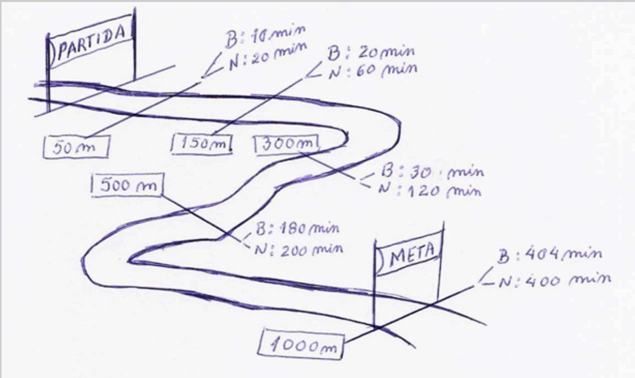


Figura 2 – Ficha de trabalho 1 (aspeto parcial).

Carolina: *Que a tartaruga ganhou toda a gente sabe.*

Rita: *Como é que se sabe isso em Matemática?! (...)*

Manuel: *[A tartaruga] ganhou a corrida porque fez menos tempo que o coelho, é normal... Olha aqui. (Aponta para o registo do tempo gasto pelo coelho.) Esse não é o problema!*

Carolina: *Sim. O que é preciso saber é como é foi a corrida... Não pergunta quem ganhou a corrida!*

Rita: *O coelho dormiu! (Risos) Na história foi assim...*

Manuel: *E a "stora" ia pôr isso assim! Bué da fácil! (...)*

Carolina: *Isto é uma história matemática temos é de ver os números nisto [no esquema]... (...) Olha aqui, o coelho aqui foi muito mais rápido que a tartaruga, fez 100 [minutos] e a tartaruga 200 [minutos] (...) Só depois dos 500 metros é que ele gasta mais tempo que tartaruga. Na metade do fim, dos 500 para os 1000 metros, o coelho perdeu aí. (A Júlia, o quarto elemento do grupo parece não estar a perceber e Carolina repete o que tinha dito, indicando os valores numéricos no esquema.)*

***Manuel**: Foi depois dos 500 metros que ele dormiu e perdeu tempo para a tartaruga. (Segue-se uma discussão sobre este argumento.) (...)*

***Rita:** Mas se ele dormiu não saiu do lugar! Eu acho que ele se cansou e depois foi a correr mais lento e perdeu.*

***Carolina:** (...) É mesmo isso! Olha aqui, [o coelho] aos 150 metros deveria ter feito 300 [minutos] e fez 200 [minutos]. (Os colegas não percebem e Carolina explica.) Aqui (aponta para os150 metros) é 50 mais 50 e mais 50 então aqui (aponta para o tempo realizado pelo coelho aos 150 metros) deveria ser 300 [minutos], 100 mais 100 e mais 100. Mas é 200 [minutos], foi muito mais rápido. (...)*

***Rita:** (Relevando satisfação pela sua ideia ter sido aceite.) Então o coelho perdeu porque se cansou a meio... Hum, depois do meio da corrida. Ele primeiro foi muito rápido...*

Os alunos deste grupo começam por analisar os valores numéricos e a conjeturar sobre o que teria acontecido na corrida, acabando por considerar que o coelho se cansou e, por isso, perdeu. É interessante verificar que Carolina recorre a uma relação de proporcionalidade direta utilizando um procedimento aditivo para explicar aos colegas porque pensa que o coelho tinha realizado até ali uma corrida rápida. É provável que esta aluna, dada a sua facilidade em realizar cálculos mentalmente, tenha verificado a existência da relação que explica na corrida a tartaruga, mas não a comunicou.

Nesta turma, a professora vai passando pelos grupos, demorando-se naqueles onde nota mais dificuldades. Trata-se dos grupos em que os alunos, sem pensarem bem na tarefa, passam de imediato para o registo dos dados na folha de cálculo. Vai apelando à escrita do que pensa cada um dos elementos do grupo para que possam fazer um relatório detalhado. Relembra também que os alunos têm escrito coisas sem sentido porque não releem com atenção as respostas.

Faltam 30 minutos de tempo útil da aula quando o grupo da Carolina inicia o trabalho na folha de cálculo, depois de travar as tentativas de Manuel para usar a folha de cálculo sem pensar no problema. No entanto, os alunos apenas representam os dados depois de optarem por duas tabelas verticais após alguma discussão sobre a vantagem desta escolha tendo por base a sua experiência anterior com a folha de cálculo. Discutem ainda o modo como determinar a “rapidez” do coelho em termos matemáticos. Quando faltam 10 minutos para terminar a aula, a professora diz aos grupos para guardarem o seu trabalho numa *pen drive* que fez circular na sala. Na segunda aula, os alunos continuaram o trabalho, tendo por foco a redação do relatório. A Figura 3 apresenta parte dos relatórios de dois grupos da turma A, que descrevem o modo como os alunos representam os dados e as conclusões da sua investigação. A qualidade do trabalho de alguns grupos é surpreendente (é o caso do grupo de Tomás), revelando que os alunos são capazes de mobilizar conhecimentos adquiridos na realização de tarefas anteriores, de outros temas do programa.

Resposta do grupo de Carolina:

Nini

Metros Percorridos	Minutos Demorados	Min/Metros
50	20	0,4
150	60	0,4
300	120	0,4
500	200	0,4
1000	400	0,4

Barnabé

Metros Percorridos	Minutos Demorados	Min/metros
50	10	0,2
150	20	0,133333
300	30	0,1
500	180	0,36
1000	404	0,404

[Pela observação do esquema.] "O Barnabé até 500 metros esteve á frente. Mas dos 500 metros até á meta a Nini conseguiu vantagem de 4 minutos acabando em 1° lugar."

[A professora oralmente insistiu na investigação sobre o que teria acontecido durante a corrida.] A Rita e a Carolina propuseram uma tabela com os metros percorridos e o tempo demorado do coelho e da tartaruga. Mas o Manuel disse que assim não ficava muito bem e sugeriu que ficava melhor uma tabela para cada animal." (...) " Fizemos a conta entre os números e concluímos que a Nini andou sempre ao mesmo ritmo e o Barnabé não, ou seja, acelerou depois andou mais devagar. "

Resposta do grupo de Tomás

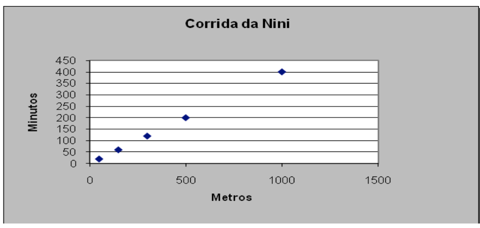
Barnabé

Metros	Minutos	Divisões
50	10	5
150	20	7,5
300	30	10
500	180	2,78
1000	404	2,475

Nini

Metros	Minutos	Divisões
50	20	2,5
150	60	2,5
300	120	2,5
500	200	2,5
1000	400	2,5
2000	800	2,5

"Começámos por fazer uma tabela como nos outros trabalhos [já realizados com recurso à folha de cálculo]. Depois colocámos todos os dados dos metros que percorreram e os minutos demoraram a percorrê-los. Observámos os números com atenção e percebemos que não podemos comparar os minutos do Barnabé com os da Nini." (...) "Fizemos a divisão dos metros com os minutos e vimos que o Barnabé foi alterando a velocidade e a Nini foi sempre na mesma velocidade." (...) "Pensámos que para podermos chegar a um resultado prolongando a pista até ter 2000 metros como o Barnabé foi alterando a sua velocidade não podia continuar a manter o ritmo mas a Nini como tinha estado sempre à mesma velocidade se a pista de prolongasse conseguiria acabar ao mesmo ritmo." (...) Fizemos os gráficos como nos outros trabalhos e a professora ajudou-nos a escolher um e vimos que na Nina os pontos estão em linha."



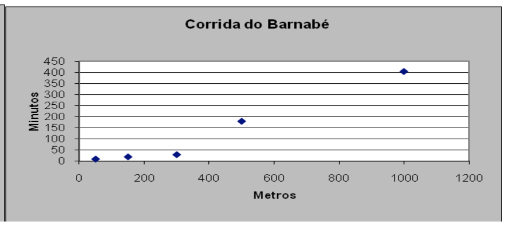


Figura 3 – Respostas de dois grupos da turma A (ficha de trabalho 1).

Os relatórios dos alunos constituem a base do trabalho realizado na terceira aula. Esta começou por uma discussão alargada na turma sobre o facto de, perante uma mesma situação, os personagens (coelho e tartaruga) terem tido um comportamento diferente na corrida. A maior parte dos alunos confirma a sua conjetura, isto é, o coelho correu inicialmente muito depressa, cansou-se e perdeu velocidade na parte final da corrida. Depois, a discussão foca-se na regularidade na corrida da tartaruga Nini. É particularmente interessante a forma como os alunos explicam que, no caso da Nini, os valores numéricos da distância e do tempo variam mantendo a mesma velocidade – a maioria dos alunos designa a velocidade por "ritmo" – reconhecendo a existência de variação dos pares numéricos das duas variáveis que mantêm velocidade constante (invariante).

Esta discussão é também importante para os alunos compreenderem que, utilizando estratégias diferentes, podem encontrar uma resposta coerente. Foi durante a discussão que a professora disse aos alunos que a constante que tinha identificado se designa por constante de proporcionalidade. O significado do valor da constante de proporcionalidade no contexto do problema suscita forte discussão, pois como vimos, o grupo de Carolina obtém esse valor (0,4) através da divisão do tempo pela distância, enquanto o grupo de Tomás opta pela divisão da distância pelo tempo (obtendo 2,5). Os alunos são também desafiados pela professora a averiguar a existência de outras regularidades e alguns apresentam o fator escalar que, dentro de cada variável, permite obter os valores indicados na tabela.

Ficha de trabalho 2. A apresentação da tarefa desta ficha pelas professoras é semelhante à tarefa da ficha 1. Em particular, referem aos alunos a importância de irem efetuando registos sobre o modo como realizam o trabalho, não se limitando a apresentar apenas os cálculos e uma breve resposta. Após a leitura da tarefa, a maioria dos grupos mobiliza o relatório anterior onde estavam os dados necessários. Nas duas turmas, os grupos solicitam poucas vezes a intervenção das professoras, centrando-se a discussão em torno do valor da constante de proporcionalidade a escolher para que o coelho ganhasse a corrida usando a mesma estratégia que a tartaruga. Durante a discussão da tarefa na turma B a professora questiona assim um grupo de alunos:

> ***António:*** *A nossa maior dúvida foi descobrir que nós, é que tínhamos de escolher o valor do ritmo... Da constante da proporção, proporcionalidade, "né"?*
> ***Professora:*** *E como é que pensaram sobre isso?*

António: *Nós tínhamos feito metros por minutos [trabalho da ficha de trabalho 1] e depois deu 2,5 sempre. Metros por 1 minuto, era 2,5.*

Nuno: *Não! A "stora" está a perguntar porque é que era sempre o mesmo ritmo de velocidade! Era a maneira da Nini (tartaruga) correr...*

António: *Ah! Primeiro descobrimos que para o Barnabé ter a mesma estratégia da Nini tenha de correr sempre da mesma maneira... E assim, não se cansava como se cansou... (...) Depois o ritmo de velocidade que tínhamos de pôr para o Barnabé, o menor do ritmo que dê para ganhar. Nós escolhermos 2,6 mas não era preciso, podia ser 2,51. (...)*

Inês: *(Aluna de outro grupo.) Nós escolhermos 0,3 [minutos/metro] mas antes fizemos o tempo a dividir pelos metros. (...) Para o coelho ganhar tinha de fazer menos tempo em cada metro.*

Professora: *Ouviram o que disse a Inês? E concordam? (...) Como é que determinaram o tempo se o coelho tivesse corrido a uma velocidade constante.*

António: *Posso ler (a resposta escrita no relatório)? Primeiro nós experimentámos com 3 [metro/minuto] de constante mas depois escolhemos 2,6 [metro/minuto] porque não era preciso ser... Até podia ser 2,51 [metro/minuto]. (...) Escrevemos 2,6 de constante na coluna (faz um gesto, com a mão, desenhando uma linha vertical)... Depois, como é no Excel escrevemos na linha do comando... Para fazer logo tudo, né? (...) igual, A2 barra [dividir] C2.*

Professora: *E o que tinham nessas colunas? Melhor, para determinar os tempos de passagem e final do Barnabé, o que é que fizeram?*

António: *Ham... Acho que é! Dividimos os metros [a distância], barra, pela constante. E deu! O Barnabé ganha com 384,6 (arredondado às décimas) minutos. (...) Assim, já dava para ganhar*

Ficha de trabalho 3. Esta ficha contém vários problemas, cada um com duas ou três alíneas (Figura 4). Espera-se que os alunos mobilizem o conhecimento sobre a relação multiplicativa de covariação entre variáveis e de invariância da relação entre variáveis, resolvendo problemas de valor omisso e de comparação. Paralelamente, procura-se que os alunos utilizem várias representações para desenvolverem flexibilidade na sua utilização. Apresentamos como exemplo as respostas de dois grupos da turma B a duas alíneas de um problema da ficha de trabalho.

Por causa do tamanho das carapaças existem uma regra na atribuição de tocas. Na tabela estão representados alguns dados recolhidos em cinco veredas.

Número de tocas	Número de tartarugas
2	8
6	24
8	32
30	120
50	200

a) Será possível saber o número de tartarugas que existe em cada toca? Explica como pensaste.

Resposta do grupo de Dário:

Número de tocas		Número de tartarugas
2	×4	8
6	×4	24
8	×4	32
30	×4	120
50	×4	200

$\frac{8}{2} = 4$ São 4 porque é a relação entre Número de tocas e Número de tartarugas.

Resposta do grupo de Joel:

	Número de tocas	Número de tartarugas	
	2	8	
×3	6	24	×3
×4	8	32	×4
×15	30	120	×15
×25	50	200	×25

Sim... 8:2=4 24:6=4 32:8=4 120:30=4 200:50=4

Cada toca tem 4 tart.

c) Quantas tocas serão necessárias para colocar 44 tartarugas? E 400 tartarugas?

Resposta do grupo de Dário:

:4

tartarugas	tocas
4	1
44	11
400	100

Resposta do grupo de Joel:

1 toca = 4 tart.

	tocas	tart.	
×9,09090909	11	44	×9,090909091
	100	400	

Figura 4 – Problema da ficha de trabalho 3 e respostas de dois grupos da turma B

O grupo de Dário estabelece uma relação entre variáveis e identifica 4 como constante de proporcionalidade. Utiliza esta relação para determinar o valor omisso pedido na questão *c*. Por sua vez, o grupo de Joel começa por explorar a relação de covariação entre as variáveis. Só depois explora a relação entre variáveis para identificar a constante de proporcionalidade. Este grupo, para determinar o valor omisso, opta por usar a relação dentro das variáveis. No entanto, esta estratégia revela-se problemática para responder à questão *c*. Durante a discussão do problema, a professora promove uma análise pelos alunos da eficiência do processo de resolução, em particular, no que respeita à escolha de uma estratégia que envolva números mais simples e fáceis de usar nos cálculos.

Ficha de trabalho 4. Esta ficha é constituída por problemas de valor omisso e comparação e envolvem receitas culinárias, diluição de líquidos e a noção de percentagem. Apresentamos, como exemplo ilustrativo, a resolução de um problema em que os alunos revelaram alguma dificuldade (Figura 5). É um problema de comparação que, dado o contexto, requer uma resposta qualitativa, neste caso sobre qual das misturas sabe mais a cenoura.

Para o lanche é preciso fazer sumo de cenoura. O Barnabé tinha as receitas A, B e C.

	Concentrado de cenoura (ml)	Água (ml)
Receita A	100	600
Receita B	250	1000
Receita C	320	1920

a) Qual é o sumo que sabe mais a cenoura?

Resposta do grupo de Dário:

razões 600 : 100 = 6
1000 : 250 = 4
1920 : 320 = 6

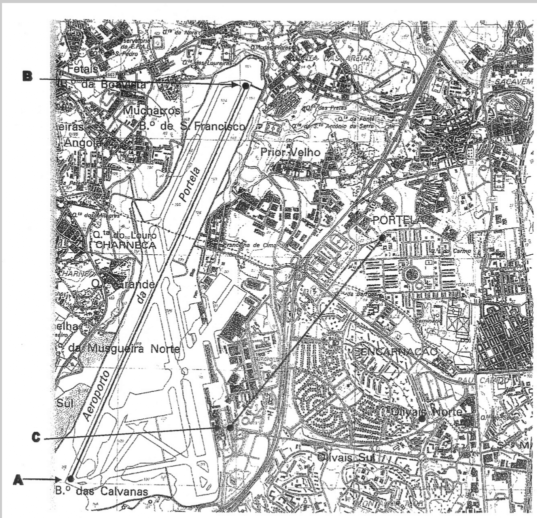
R: As que tenhem o maior sabor a cenoura são o A e a C
ambas tenhem uma razão de 6

Figura 5 – Problema da ficha de trabalho 4 e resposta de um grupo da turma B

O grupo de Dário opta por uma estratégia funcional, calculando o valor decimal da razão. Embora revele compreender que pretende conhecer qual das misturas tem mais sabor a cenoura, os alunos optam por estabelecer a razão entre a quantidade de água e a de concentrado de cenoura. Depois fazem o julgamento sobre o sabor considerando incorrectamente tratar-se da relação entre a quantidade de concentrado de cenoura e a quantidade de água. É provável que esta dificuldade esteja relacionada, por um lado, com o facto de poucos alunos terem já realizado estas misturas e, por outro lado, com a tendência dos alunos mobilizarem a ideia errada de que o dividendo tem de ser maior que o divisor.

Ficha de trabalho 5. É acolhida com grande agrado por parte dos alunos porque um dos problemas que envolve a noção de escala, apresenta um mapa real em que os alunos identificam a escola e, muitos deles, a sua residência. Talvez por se tratar da última ficha e já terem generalizado a natureza multiplicativa da relação de proporcionalidade, os alunos das duas turmas realizam as tarefas com maior rapidez que as tarefas anteriores. A noção de escala não é nova para os alunos que dizem já a conhecer das disciplinas de História e Geografia de Portugal (5.º ano) e Educação Visual e Tecnológica (6.º ano). A Figura 6 mostra o trabalho desenvolvido pelos grupos de Maria e Manuel. Os dois grupos resolvem correctamente o problema mas usam estratégias diferentes – o grupo de Maria uma estratégia multiplicativa escalar e o grupo de Manuel uma estratégia multiplicativa funcional.

Os coelhos descobriram uma pista ótima para as suas corridas. (Imagem fornecida na escala 1:25 000)



b) Completa a tabela e descobre qual é o comprimento real da pista entre os pontos A e B.

Resposta do grupo de Maria:

×13,7

Distância no mapa (cm)	1	13,7
Distância real (cm)	25000	342500

× 13,7

Resposta do grupo de Manuel:

Distância no mapa (cm)	1	13,5
Distância real (cm)	25000	337500

×25000

Figura 6 – Problema da ficha de trabalho 5 e resposta de dois grupos da turma A.

Balanço da realização da unidade de ensino

As professoras conduziram as aulas de acordo com o que tinha sido delineado entre elas e a primeira autora, em particular, o trabalho de exploração de regularidades previsto na realização das duas primeiras fichas de trabalho. A professora da turma A teve de ser mais questionadora porque os alunos dessa turma são menos participativos e apresentam mais dificuldades de aprendizagem do que os alunos da turma B. Na turma A, apenas dois grupos participam espontaneamente nas discussões das tarefas, enquanto na turma B, os alunos participam por sua iniciativa com mais frequência. No entanto, alguns alunos da turma B têm mais dificuldade em gerir o trabalho de grupo, em particular no confronto das opiniões, o que implica a intervenção da professora para moderar conflitos. O trabalho em grupo melhora na realização das fichas 3, 4 e 5 e os alunos mostram ter preocupação em explicar o seu pensamento, tanto na forma oral como na forma escrita.

Tal como se esperava, o trabalho algo demorado na exploração da relação multiplicativa da proporcionalidade direta, é mobilizado na resolução dos problemas de valor omisso e de comparação. De notar que os alunos passam com facilidade da estratégia de composição/decomposição (usada no teste diagnóstico) para a estratégia multiplicativa escalar, aceitando com facilidade a existência de um fator invariante entre as variáveis (constante de proporcionalidade).

A discussão da ficha 3 contribuiu para que os alunos se tornassem críticos sobre as escolhas das estratégias, tendo em conta a sua eficiência. Os alunos verificam que, entre as estratégias que permitem obter uma resposta correta, devemos escolher as mais eficientes. Neste caso, a eficiência é associada à possibilidade de realizar cálculos mais rápidos sem usar representações decimais de dízimas infinitas.

Muitas tarefas, em especial as que constituem a ficha 3, usam diferentes representações para que os alunos ganhem flexibilidade na sua utilização. Os alunos revelam preferência pela utilização da tabela para representar dados, o que pode estar associado ao facto de esta representação ser muito forte nas duas tarefas iniciais que envolvem a utilização da folha de cálculo. Paralelamente, esta representação envolve etiquetas que identificam as variáveis, o que parece ajudar a dar sentido aos valores numéricos envolvidos nos problemas. De notar que os alunos, na sua maioria, não escrevem as razões na forma de fração, a não ser que isso seja pedido, preferindo representá-las com o sinal dois pontos e ou na forma de numeral decimal. Muito poucos alunos operam com frações, preferindo efetuar essas operações com representações decimais.

O tempo usado na realização das tarefas excedeu o previsto. Isto aconteceu por dois motivos: (i) as questões de logística que envolvem a requisição dos computadores portáteis para a realização das duas primeiras tarefas e a arrumação da sala para o trabalho de grupo; e (ii) as dificuldades iniciais dos grupos em gerir o trabalho. Só a última tarefa foi realizada no tempo previsto. Assim, para realizar as tarefas foram necessários nove blocos, mais dois que os previstos. Esta situação não representou grande transtorno em termos de gestão da planificação anual da disciplina de Matemática (6.º ano) porque as horas da área curricular não disciplinar Estudo Acompanhado estavam parcialmente destinadas à disciplina de Matemática.

A Avaliação da Unidade de Ensino

Da unidade de ensino fazem parte dois testes, um de diagnóstico e outro para avaliação das aprendizagens dos alunos, este com influência na sua avaliação sumativa. Ao mesmo tempo, estes testes constituem instrumentos de recolha de dados para este estudo. Note-se que as questões dos dois testes não são totalmente comparáveis na medida que as do teste diagnóstico são mais elementares e não envolvem termos específicos introduzidos durante a unidade de ensino.

Algumas das questões dos testes foram recolhidas ou adaptadas da literatura, correspondendo a problemas de valor omisso, de comparação e pseudoproporcionais. No teste final surgem também questões de comunicação/representação que pedem, por exemplo, para os alunos explicarem o significado da constante de proporcionalidade. As Tabelas 2 e 3 mostram o desempenho dos alunos das turmas A e B no teste diagnóstico e no teste final.

Observando os resultados dos testes, nas duas turmas, os alunos têm melhor desempenho no teste final no que no teste diagnóstico nas três categorias de problemas. Nos problemas de valor omisso e de comparação, os alunos da turma B revelam em ambos os testes um melhor desempenho que os da turma A, sendo o aumento da qualidade do seu desempenho semelhante em ambas as turmas.

Em ambos os testes, os alunos revelam mais facilidade em responder corretamente a problemas de comparação do que a problemas de valor omisso. Esta situação pode ser explicada pelo facto de terem trabalhado num passado próximo com problemas que envolvem a comparação de frações e ainda as operações com frações. No entanto, é de evidenciar que os alunos tendem a fazer comparações usando números representados na forma decimal.

Tabela 2 – Resultados dos testes inicial e final da turma A.

	Teste inicial			Teste final		
Tipo de Questão	N.º de questões	N.º de respostas corretas (25 alunos)	% de respostas corretas	N.º de questões	N.º de respostas corretas (25 alunos)	% de respostas corretas
Valor omisso	5	36	29	5	77	61
Comparação	5	46	37	7	123	70
Pseudoproporcionais	3	23	30	3	44	59
Comunicação/ Representação	-	-	-	5	84	67

Tabela 3 – Resultados dos testes inicial e final da turma B.

	Teste inicial			Teste final		
Tipo de Questão	N.º de questões	N.º de respostas corretas na turma (26 alunos)	% de respostas corretas	N.º de questões	N.º de respostas corretas na turma (26 alunos)	% de respostas corretas
Valor omisso	5	57	44	5	94	72
Comparação	5	79	61	7	156	85
Pseudoproporcionais	3	18	23	3	43	55
Comunicação/ Representação				5	75	58

No teste diagnóstico, os alunos que respondem corretamente aos problemas de valor omisso usam a estratégia de composição/decomposição, utilizando preferencialmente a adição sucessiva ou ao cálculo de metades e dobros. No teste final, para resolver estes problemas, os alunos usam as estratégias escalar e funcional, mostrando flexibilidade no uso de diferentes representações. No teste diagnóstico, os erros identificados na resolução de problemas de valor omisso, estão associados a processos aditivos que não permitem obter respostas correctas. Os erros identificados no teste final neste tipo de problemas estão associados à troca dos valores numéricos das variáveis, parecendo resultar de uma leitura pouco atenta dos problemas ou da organização descuidada dos dados.

No que diz respeito aos problemas de comparação, a estratégia preferencialmente usada pelos alunos nos dois testes, é a funcional. O aumento das respostas corretas, no teste final, está associado a uma melhor interpretação das relações entre variáveis e consequente influência na capacidade de julgamento qualitativo.

No que respeita aos problemas pseudoproporcionais e de comunicação/representação, os alunos da turma A têm um desempenho ligeiramente superior aos da turma B em ambos os testes, sendo o aumento de respostas corretas do teste inicial para o final semelhante nas duas turmas. Os alunos da turma A revelam um esforço para explicar, por exemplo, o significado da constante de proporcionalidade mas os alunos da turma B não respondem a essas questões. O melhor desempenho dos alunos da turma A nestas questões pode estar associado à sua experiência escolar, que tem valorizado a explicação do modo como se pensa na resolução de um problema. Ao contrário, os alunos da turma B parecem não valorizar ainda este tipo de questões ou a parte das questões em que se pede para explicar como se pensa.

Conclusão

A unidade de ensino desenvolveu o raciocínio proporcional dos alunos, tendo estes melhorado o seu desempenho nos três aspetos com que caracterizamos esta capacidade matemática. Os alunos melhoram o seu desempenho na distinção das relações proporcionais daquelas que o não são. Na resolução de problemas, em particular, nos de valor omisso, os alunos passam a usar estratégias multiplicativas em vez da estratégia de composição/decomposição associada com frequência a processos aditivos, o que revela uma melhor compreensão da natureza multiplicativa da relação de proporcionalidade. Além disso, pode dizer-se que os alunos ampliaram o seu conhecimento sobre representações utilizando-as de forma flexível. A tabela é a representação que mostram preferir na resolução de problemas de valor omisso enquanto na resolução de problemas de comparação mostram preferência pela tabela e pela razão (com dois pontos), uma representação já por eles usada antes da unidade de ensino.

Durante o desenvolvimento da unidade de ensino e nos dados obtidos nos testes, é possível perceber que os contextos dos problemas com que os alunos estão mais familiarizados (por exemplo, os que envolvem preços de objetos) parecem tornar mais fácil a sua resolução. Nos contextos que envolvem misturas, os alunos mostram algumas dificuldades e, embora sejam capazes de encontrar a razão unitária, nem sempre fazem depois julgamentos corretos. Também se observa que quando os números utilizados envolvem a representação em fração, os alunos tendem a convertê-los para a representação decimal, mesmo quando dão origem a dízimas infinitas.

Finalmente, é de destacar que conjetura de ensino-aprendizagem presente na unidade de ensino revelou-se propiciadora de aprendizagem significativa, permitindo mobilizar o conhecimento que os alunos já têm, aprofundando-o do ponto de vista matemático e envolvendo-os na generalização de regularidades e relações. Consideramos que a descrição da sua realização nas duas turmas evidencia bem como as tarefas da unidade de ensino proporcionaram o desenvolvimento dos vários aspectos da capacidade de raciocínio proporcional dos alunos.

Referências Bibliográficas

Bereiter, C. (2002). Design research for sustained innovation. *Cognitive Studies, Bulletin of the Japanese Cognitive Science Society*, *9*(3), 321-327.

Cobb, P. (1999). Individual and collective mathematical learning: The case of statistical data analysis. *Mathematical Thinking and Learning, 1*, 5-44.

Confrey, J. (2006). The evolution of design studies as methodology. In R. K. Sawyer (Ed.), *The Cambridge handbook of the learning sciences* (pp. 135-152). New York, NY: Cambridge University Press.

Cramer, K., & Post, T. (1993). Connecting research to teaching proportional reasoning. *Mathematics Teacher, 86*(5), 404-407.

Cramer, K., Post, T., & Currier, S. (1993). Learning and teaching ratio and proportion: Research implications. In D. Owens (Ed.), *Research ideas for the classroom* (pp. 159-178). New York, NY: Macmillan.

The Design Based Research Collective (DBRC) (2003). Design-based research: An emerging paradigm for educational inquiry. *Educational Researcher*, *32*(1), 5-8.

English, L. D., & Halford, G. S. (1995). *Mathematics education: Models and processes*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Ernest, P. (1991). *The philosophy of mathematics education*. London: Falmer.

Gravemeijer, K. P. E. (1998). Developmental research: Research for the sake of educational change. In G. Cebola, & M. A. Pinheiro (Eds.), *Desenvolvimento curricular em Matemática* (pp. 41-66). Lisboa: Secção da Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação (SEM-SPCE).

Hart, K. (1984). *Ratio: Children's strategies and errors*. Windsor: NFER Nelson.

Jones, G., Langrall, C., Thornton, C., & Nisbet, S. (2002). Elementary school childrens' access to powerful mathematical ideas. In L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 113-142). Mawah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). New York, NY: Routledge.

Lamon, S. (1994). Ratio and proportion: Cognitive foundations in unitizing and norming. In G. Harel, & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning* (pp. 89-120). New York: SUNY Press.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1988). Proportional Reasoning. In J. Hiebert, & M. Behr (Eds.) *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 93-118). Reston, VA: Erlbaum & National Council of Teachers of Mathematics (NCTM).

Lobato, J., Ellis, A. B., Charles, R., & Zbiek, R. M. (2010). *Developing essential understanding of ratios, proportions & proportional reasoning, Grades 6-8.* Reston, VA: NCTM.

Ministério de Educação (ME) (1991). *Programa de matemática: Plano de organização do ensino-aprendizagem* (2.º ciclo do ensino básico). Lisboa: ME.

ME (2007). *Programa de matemática do ensino básico*. Lisboa: ME.

Misailidou, C., & Williams, J. (2004, Julho). *Improving performance on 'ratio' tasks: Can pupils convert their 'additive approach'?.* Comunicação apresentanda no 10th International Congress on Mathematics Education (ICME), Roskilde, Denmark. Recuperado em Dezembro 30, 2004, de www.icme-organisers.dk/tsg01/Misailidou_rev1.doc

Moyer, J., Cai, J., Laughlin, C., & Wang, N. (2009). The effect of curriculum type on middle grades instruction. In S. L. Swars, D. W. Stinson, & S. Lemons-Smith (Eds*.), Proceedings of PME-NA 31* (vol. 5, pp. 201-209). Atlanta, GA: Georgia State University.

Moreira, L. (1989). *A folha de cálculo na educação matemática: Uma experiência com alunos do ensino preparatório*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática (APM). [Dissertação de mestrado, apresentada na Universidade de Lisboa]

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Niss, M. (1999). Aspects of the nature and state of research in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 40*(1), 1-24.

Papert, S. (1991). Ensinar crianças a serem matemáticos versus ensinar Matemática. In J. P. Ponte (Ed.), *O computador na Educação Matemática* (pp. 29-44). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2006). Números e álgebra no currículo escolar. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos, & P. Canavarro (Eds.), *Números e álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores* (pp. 5-27). Lisboa: SEM-SPCE.

Ponte, J. P., & Matos, J. F. (1992). Cognitive processes and social interaction in mathematical investigations. In J. P. Ponte, J. F. Matos, J. M. Matos, & D. Fernandes (Eds.), *Mathematical problem solving and new information technologies: Research in contexts of practice* (pp. 239-254). Berlin: Springer.

Post, T., Cramer, K., Harel, G., Kieren, T., & Lesh, R. (1998). Research on rational number, ratio and proportionality. *Proceedings of PME-NA* 20 (vol. 1, pp. 89-93). Raleigh, NC, EUA.

Post, T, Behr, M., & Lesh, R. (1988). Proportionality and the development of prealgebra understandings. In A. F. Coxford, & A. P. Shulte (Eds.), *Algebraic concepts in the curriculum K-12* (pp. 78-90). Reston, VA: NCTM.

Sandoval, W. A. (2004). Developing learning theory by refining conjectures embodied in educational designs. *Educational Psychologist*, *39*(4), 213-223.

Sawyer, R. K. (2006). The new science of learning. In R. K. Sawyer (Ed.), *The Cambridge handbook of the learning sciences* (pp. 1-18). New York, NY: Cambridge University Press.

Shield, M., & Dole, S. (2002). Investigating textbook presentations of ratio and proportion. In B. Barton, K. Irwin, M. Pfannkuck, & O. J. Thomas (Eds.), *Mathematics education in the south pacific. Proceedings of the 25th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia (MERGA)* (pp. 608-616). Auckland, New Zealand: MERGA.

Silvestre, A. I., & Ponte, J. P. (2009). Ser ou não ser uma relação proporcional: Uma experiência de ensino com alunos do 6.º ano. In *Actas do XX seminário de investigação em educação matemática*. Viana do Castelo: APM. [CdRom]

Stanley, D., McGowan, D., & Hull, S. H. (2003). Pitfalls of over-reliance on cross multiplication as a method to find missing values. *Texas Mathematics Teacher*, *11*, 9-11.

Steffe, L. P., & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In R. Lesh, & A. E. Kelly (Eds.), *Research design in mathematics and science education* (pp. 267-307). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Streefland, L. (1985). Search for the roots of ratio: Some thoughts on the long termlearning process. *Educational Studies in Mathematics*, *16*, 75-94.

Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2000). *Making sense of word problems*. Lisse: Swets & Zeitlinger.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. In R. Lesh, & M. Landau (Eds.) *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 127-124). New York, NY: Academic Press.

Wittmann, E. C. (1984). Teaching units as the integrating core of mathematics eduction. *Educational Studies in Mathematics, 15*, 25-36.

Wittmann, E. C. (1998) Mathematics Education as a 'Design Science'. In A. Sierpinska, & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics education as a research domain: A search for identity* (pp. 87-103). Dordrecht: Kluwer.