AS TAREFAS DE PADRÕES NA AULA DE MATEMÁTICA: UM DESAFIO PARA PROFESSORES E ALUNOS

Isabel Vale
Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo
isabel.vale@ese.ipvc.pt

Resumo

Este artigo, apoiado em dados teóricos e empíricos, analisa uma proposta didáctica, baseada na resolução de tarefas desafiantes com padrões, em contextos visuais, que através de múltiplas resoluções e representações, conduz à compreensão de conceitos matemáticos estruturantes, como seja a generalização, suscitando a criatividade de alunos e professores do ensino básico. Apresenta-se de seguida como é possível concretizar algumas destas ideias através de dois exemplos de sala de aula e termina-se com algumas reflexões que apontam como os padrões podem constituir um desafio e uma oportunidade de mudança para ensinar e aprender matemática.

Palavras-chave: Padrões; Visualização; Generalização; Resolução de Problemas; Criatividade.

Abstract

This paper, grounded on theoretical and empirical data, analyzes a didactical experience, based on solving challenging visual patterns tasks that through multiple resolutions and representations lead to the comprehension of structural mathematical concepts, such as generalization, inspiring creativity for students and teachers of basic education. It shows how we can realize these ideas through some examples of classroom and ends with some reflections that show how patterns can be a challenging and an opportunity to change teaching and learning mathematics.

Keywords: Patterns; Visualization; Generalization; Problem Solving; Creativity.

Introdução

Há quem afirme que a riqueza de um país reside mais na capacidade inovadora e criativa dos seus estudantes, do que nos seus recursos naturais (Gontijo, 2007). Acreditando nesta ideia, cabe à escola proporcionar mecanismos que estimulem o potencial criativo dos seus alunos, e que mantenham esse potencial, de modo que lhes permita desenvolver a sua imaginação e produzir novas ideias que lhes venham a ser úteis pessoalmente e para a sociedade no global. De acordo com alguns investigadores, a escola não tem cumprido este papel por formatar por vezes demasiado as reacções e respostas dos alunos restringindo a sua imaginação e autonomia (Robinson & Aronica, 2009).

Atravessamos uma época de grandes mudanças sociais mas também educacionais quer a nível do currículo de matemática do ensino básico, com o novo Programa de Matemática do Ensino Básico (ME-DGIDC, 2007), quer a nível da formação de professores, com o recente modelo integrado de formação e os programas nacionais de apoio - o Programa de Formação Continua em Matemática para professores do 1.º e 2.º ciclo do ensino básico e o Plano da Matemática – mas todas com uma mesma finalidade que é melhorar as competências matemáticas dos estudantes e neste sentido as instituições deverão garantir, que professores e alunos tenham uma formação matemática de qualidade. Esta pressupõe um investimento em práticas que proporcionem experiências ricas e desafiantes promotoras de capacidades cognitivas de ordem superior como sejam a resolução e formulação de problemas, o raciocínio e a comunicação. Para isso são necessárias estratégias inovadoras com vista à melhoria do ensino e da aprendizagem, nomeadamente valorizar tarefas, materiais e métodos de ensino que tradicionalmente não o eram.

Nesta perspectiva, o projecto[1] em que estive mais recentemente envolvida evidenciou a importância de tarefas de natureza exploratória, em particular as que envolvem generalização na descoberta e estudo de padrões em contextos figurativos/visuais como componente essencial do pensamento algébrico (e.g. Barbosa, 2010; Pimentel, 2010; Vale, 2009; Vale *et al.,* 2009). Evidenciou, também, que uma abordagem desta natureza permite motivar estudantes e professores para a matemática, desenvolver capacidades de ordem superior e estimular a sua criatividade, valorizando relações entre diferentes temas matemáticos, em contextos

[1] Projecto *Matemática e padrões no ensino básico: perspectivas e experiências curriculares de alunos e professores* – PADRÕES, financiado pela FCT com a referência PTDC /CED/69287/2006

diversificados, e muitos conceitos que tradicionalmente têm sido abordados de forma descontextualizada e com pouco significado para os alunos. Estas tarefas apelam à exploração e investigação autónoma e à curiosidade permitindo um pensamento divergente conducente a fluência, a flexibilidade e a originalidade como componentes essenciais do pensamento criativo (Vale & Pimentel, in press). Neste contexto, as tarefas desempenham um papel crucial no desenvolvimento de experiências didácticas que ajudem os professores a ensinar e os alunos a aprender, onde a sala de aula é o contexto privilegiado da investigação.

A Aula de Matemática, os Professores e as Tarefas

A aprendizagem matemática durante uma aula de matemática depende grandemente do professor e das tarefas que se propõem aos estudantes. A literatura identifica que alguns dos principais obstáculos às reformas curriculares estão centralizados nos professores, como sejam: a falta de familiaridade com práticas inovadoras de ensino e de ferramentas adequadas; a falta de compreensão da matemática que ensinam; a sua incapacidade de comunicar com os estudantes de outras formas sem ser através do ensino directo; e a relutância a novos métodos de ensino, devido às crenças que possuem sobre o que os alunos precisam saber (e.g. Hiebert, Morris, Berk, & Jansen, 2007). Assim, muitas das fragilidades existentes com as aprendizagens matemática dos estudantes, devem-se por um lado, às concepções e atitudes dos professores que influenciam as suas acções na sala de aula e as suas interacções com os alunos, por outro lado aos fracos conhecimentos matemáticos e didácticos desses professores.

Assim, numa altura de inovação curricular em que há necessidade de interpretar e implementar um novo programa de matemática, este pode ficar seriamente comprometido se não for dada uma atenção especial à formação de professores, uma vez que os conhecimentos, crenças e atitudes dos professores influenciam as suas acções na sala de aula e suas interacções com os alunos (e.g. Pimentel, 2010; Sowder, 2007; Vale, 2009). Para que se possa ultrapassar alguns destes problemas, vários investigadores afirmam que os professores devem ter uma compreensão profunda da matemática fundamental para ensinar e capacidade para contextualizar os conteúdos numa perspectiva de ensino (e.g. Ball, Thames, & Phelps, 2008; Ma, 1999; Schoenfeld, 2008). Assim precisam de saber como mobilizar esse conhecimento de modo a contribuir para uma melhor aprendizagem dos seus alunos. Como tal, os professores devem ter uma compreensão aprofundada do pensamento matemático de seus alunos, para que os possam apoiar no desenvolvimento das suas competências matemáticas. Nunca perdendo de vista que ensinar matemática envolve conseguir que os outros aprendam e façam matemática.

Actualmente, a tendência generalizada em educação matemática sugere que uma aprendizagem eficaz requer que os alunos se envolvam activamente em tarefas significativas e diversificadas (e.g. Doyle, 1988; Stein & Smith, 1998). Esta ideia segue uma linha de pensamento onde as capacidades de ordem superior e pensamento crítico são privilegiadas, onde as longas exposições são substituídos pelo diálogo e pela descoberta. De acordo com Boaler (2002), diferentes métodos de ensino não são apenas veículos para a produção de mais ou menos conhecimento, eles moldam a natureza desse conhecimento e identificam a relação dos alunos com a matemática, através das práticas em que se envolvem.

O professor ao longo da sua prática tem de efectuar um conjunto de decisões durante o processo de instrução que dependem de vários factores que afectam as suas acções, incluindo a forma de interpretar o currículo e seleccionar os materiais curriculares e estratégias mais adequados a utilizar. Dentro deste contexto, nós, educadores, temos a dupla responsabilidade de preparar professores de matemática, para que sejam criativos nas tarefas que propõem e matematicamente competentes, quer em termos científicos, quer em termos didácticos e discutir a forma como essas tarefas podem ser construídas, refinadas e adaptadas de modo a que possam promover a desejável compreensão matemática dos estudantes.

A aula de matemática depende, para além do professor, sobretudo da ênfase em tarefas matematicamente ricas, em particular as de natureza exploratória e investigativa que permitam gerar excelentes interacções de aprendizagem. A construção de boas tarefas requer um *interface* entre o teórico e o prático, entre as intenções e a realidade, entre a tarefa e o aluno (Liljedahl, Chernoff & Zaskis, 2007). Sierpinska (2003) considera que o *design*, análise e teste empírico das tarefas é uma das responsabilidades mais importantes da educação matemática. De facto, as tarefas utilizadas na sala de aula são o ponto de partida para a actividade matemática dos alunos que irão exercer uma grande influência no que os alunos aprendem. O nível cognitivo que as tarefas suscitam tem muito a ver com a sua natureza, mas também com a exploração feita pelo professor e o modo como são realizadas pelos alunos. O muito ou pouco apoio pode resultar num aumento ou diminuição cognitivo da tarefa (e.g. Doyle, 1988; NCTM, 2000; Smith, Hughes, Engle & Stein, 2009; Stein & Smith, 1998). Um modo de melhorar uma compreensão conceptual da matemática deve focar-se em torno de tarefas matematicamente desafiantes, que promovam o pensamento flexível, raciocínio e resolução de problemas (Smith *et al.,* 2009), dando aos alunos oportunidades para partilhar e clarificar ideias, desenvolver argumentos convincentes, desenvolver uma linguagem para exprimir ideias matemáticas e aprender a partir de outras perspectivas (NCTM, 2000).

Numa sala de aula onde se promova um ensino mais conceptual, de cariz exploratório e de inquirição matemática, Peressin e Knuth (2000) identificam três processos a que os professores devem recorrer para alimentar essa cultura de sala de aula: (1) colocar tarefas matematicamente ricas; (2) promover a discussão dos alunos sobre as tarefas e as suas (re)soluções; e (3) reflectir sobre as tarefas e as discussões de modo a maximizar a actividade matemática e a consequente compreensão dos alunos. Embora as discussões ofereçam oportunidades importantes para os alunos, constituem também desafios para o professor que deve determinar a forma de organizar a discussão construída a partir de um conjunto diversificado de respostas. O professor deve decidir quais aspectos da tarefa a destacar, como organizar o trabalho dos alunos, que perguntas colocar de modo a constituírem um desafio aos alunos com diferentes níveis de experiência e como apoiá-los, mas sem eliminar o desafio contido na tarefa. Contudo ter em atenção que tarefas matematicamente desafiantes não são apenas as consideradas difíceis ou com envolvem um alto nível de matematização (e.g. Holton *et al.,* 2009). As tarefas mais desafiantes normalmente requerem mais do que elaborados conceitos matemáticos, mas um olhar diferente mobilizando os conhecimentos prévios e alguma persistência, além de que grande parte do desafio pode também ser fornecido pelo professor.

Assim, sendo os professores os principais agentes de mudança, é importante que desenvolvam determinado tipo de capacidades, nomeadamente criativas, baseadas em conhecimentos matemáticos e didácticos sólidos, que lhes permitam construir ou adaptar e explorar boas tarefas matemáticas para a sala de aula. Por um lado, serem criativos nas tarefas que propõem para desenvolver o pensamento criativo dos alunos e motivá-los para a aprendizagem da matemática e, por outro lado, também, devem ser matematicamente competentes para analisar as (re)soluções dos seus alunos e consequentemente apoiá-los em direcção à sua resolução. É pois imprescindível que os professores possam explorar todo o potencial instrucional contido na tarefa e, para isso, é necessário que tenham oportunidades, nomeadamente a nível da formação, inicial ou contínua, de as explorarem e resolverem do mesmo modo que se pretende que as venham a explorar com os seus próprios alunos.

Padrões, Visualização e Generalização

Usamos o termo *padrão* em matemática quando pretendemos procurar ordem ou estrutura e por isso os termos regularidade, repetição e simetria estão muitas vezes presentes (Frobisher, Frobisher, Orton & Orton, 2007). Assim, quando realizamos a tarefa bastante elementar de completar uma tabela dos 100 podemos ver uma estrutura que envolve padrões baseados simplesmente no modo como os dígitos dos números são repetidos. Esta é uma das primeiras experiências formais em matemática onde se revela o poder da percepção dos padrões pela criança (e.g. Van de Walle, 2007). O facto de reconhecerem que existe uma estrutura simples torna mais fácil para elas compreenderem o modo como os números são construídos e como podem continuar (Vale, 2009).

A ideia fundamental num padrão envolve repetição e mudança. Conseguimos identificar um padrão naquilo que vemos ou imaginamos que pode acontecer. Um padrão será de repetição quando há um motivo identificável que se repete de forma cíclica indefinidamente. Um padrão será de crescimento quando cada termo muda de forma previsível em relação ao anterior. Estes padrões têm uma importância significativa na descoberta de conceitos, propriedades e resolução de problema em matemática (e.g. Orton, 1999; Vale *et al.,* 2009)

A generalização é considerada pelo NCTM (2000) como uma das principais finalidades do ensino da matemática. Neste sentido os padrões, pela sua natureza, constituem o contexto privilegiado para trabalhar a matemática e são um modo de encorajar os estudantes a explorar ideias importantes como sejam a conjectura e a generalização (e.g. Blanton & Kaput, 2005; Lannin, 2003; Mason, 1996; NCTM, 2000; Vale, 2009). A literatura descreve vários estudos, com alunos e com professores, que nos permitem concluir que as tarefas de padrões (e.g. de repetição e de crescimento, lineares e não-lineares, numéricos e figurativos), com as suas diferentes naturezas e contextos, tem-se revelado potenciadoras no desenvolvimento de capacidades de generalizar e em promover o pensamento algébrico e, em particular, o simbolismo que lhes está associado (e.g. Amit & Neria 2007; Barbosa, Vale, & Palhares, 2007; Lee & Freiman, 2006; Radford 2008; Rivera & Becker, 2005; Stacey 1989; Triphati, 2008;

Vale *et al.,* 2009).

Os padrões devem ser entendidos na matemática escolar não apenas como um tema a explorar mas como uma componente transversal. De acordo com Frobisher e seus colaboradores (2007), os padrões permeiam toda a matemática e o seu estudo permite chegar a ideias matemáticas poderosas como a generalização e a álgebra. O papel do professor neste processo é crucial. A forma como se apresenta uma tarefa ou como o questionamento é efectuado pode condicionar que uma simples tarefa aritmética se transforme numa tarefa algébrica, onde há espaço para construir padrões, conjecturar, generalizar e justificar factos e relações matemáticas. Blanton e Kaput (2005) consideram que o raciocínio algébrico pressupõe que os alunos, partindo da observação de um conjunto de evidências, generalizem ideias matemáticas através de argumentações, expressando-as de modos cada vez mais formais de acordo com a idade. Assim, a álgebra é vista como uma ferramenta para expressar tais generalizações.

Polya (1988) chama a atenção para a importância da intuição visual ao considerar uma das suas estratégias de resolução de problemas *fazer um desenho*. Contudo, o papel do visual na resolução de problemas, e na aprendizagem matemática em geral, embora reconhecido como importante e objecto de estudo de muitos investigadores ainda é uma questão em aberto (e.g. Dreyfus, 1991; Stylianou, 2001). O visual está muitas vezes associado à geometria e, nos primeiros anos muitos professores têm continuado a adiar este tema perpetuando um ensino em que os alunos tenham mais tempo para desenvolver e aperfeiçoar as suas competências computacionais, muitas das vezes a um nível repetitivo, sem lhes dar oportunidade de aprender geometria e ter experiências visuais que lhes permitam interligar os dois domínios, numérico e geométrico. No entanto, usamos as representações visuais quando pretendemos transmitir uma ideia através de uma imagem não só na geometria mas noutros contextos e para explorar outros temas (e.g. o arranjo rectangular para a multiplicação). É, muitas vezes, mais fácil comunicar um conceito criando um imagem visual assim como é compreendida mais rapidamente e retida por mais tempo do que uma sequência de palavras (e.g. Gilbert, 2007). Alguns estudantes pensam predominantemente de modo visual e para esses uma abordagem visual é apropriada; para outros é essencial que as suas competências visuais sejam desenvolvidas e para estes os padrões podem ser um bom contexto de aprendizagem (e.g. Orton, 1999; Vale, 2009).

A importância da visualização na aprendizagem da matemática vem do facto de que a visualização não está relacionada somente com a mera ilustração mas também por ser reconhecida como uma componente do raciocínio, da resolução de problemas e mesmo da prova. Os estudantes sem esta capacidade visual terão grande dificuldade em ser capazes de ter sucesso na tarefa de aprender matemática (e.g. Gilbert, 2007; Orton, 1999). O termo *visualização* é usado para significar o procedimento mental que permite mover de um objecto físico visível para a sua representação mental que é apresentado visual na forma de desenhos, tabelas, diagramas e gráficos (e.g. Frobisher *et al.,* 2007; Gilbert, 2007). Toda a actividade matemática necessita de recorrer a representações. Uma representação deverá incluir componentes: concretas, verbais, numéricas, gráficas, contextuais, pictóricas ou simbólicas que descrevam diferentes aspectos do conceito. Friendland e Tabach (2001) propõem quatro modos de representação essenciais no ensino da matemática, em particular para a Álgebra: representação verbal, representação numérica, representação gráfica e representação algébrica. Para que se possa retirar todo o potencial de cada uma dessas representações o professor deverá conhecer as vantagens e desvantagens associadas a cada uma dessas representações. E este aspecto é um dos motivos pelos quais se devem recorrer a representações múltiplas na exploração dos conceitos matemáticos. A opção por cada um dos tipos de representação na resolução de um problema vai depender de vários factores relacionados com a natureza da tarefas, com o nível cognitivo e formas pensamento de quem resolve a tarefa e com as características da própria representação. Algumas das dificuldades que os estudantes têm com as representações e em estabelecer relações entre elas, são devidas à instrução a que foram submetidos, onde se privilegia apenas um tipo de representação (externa) (Goldin, 2002). Deste modo, o ensino deve promover uma articulação entre as diferentes representações de modo a tornar os estudantes mais flexíveis e criativos e a promover uma melhor compreensão dos conceitos. No entanto, a investigação (Tripathi, 2008) sugere os benefícios da utilização de múltiplas representações para a compreensão de um conceito matemático, pois é fundamental para permitir o seu uso flexível na resolução de problemas. No trabalho que temos desenvolvido temos dado uma atenção especial às representações visuais/figurativas.

O ensino básico é a altura apropriada para iniciar os estudantes nas diferentes formas de representação visual das ideias matemáticas e a noção de que uma representação pictorial pode representar um objecto e as relações entre objectos.

Rivera e Becker (2008), nas tarefas com padrões figurativos, salientam a importância da percepção visual, que consideram o acto que permite ver e identificam dois tipos de percepção visual: a *percepção sensorial* (ou concreta) - que acontece quando o individuo vê um objecto como sendo apenas um mero objecto; e a *percepção cognitiva* – que vai mais além da mera percepção sensorial, quando os indivíduos vêem ou reconhecem um facto ou propriedade relacionado com o objecto. Estamos interessados nos padrões visuais ou figurativos, ou seja, aqueles que utilizam figuras, no sentido de Rivera e Becker (2005), que utilizam o termo (*figural*) para se referir aos objectos (ou desenhos) que possuem atributos ou possuem relações entre eles. Estes padrões visuais/figurativos vão permitir que os alunos pensem visualmente o que os conduzirá à generalização através do raciocínio indutivo.

As crianças e os jovens adultos são conhecidos por possuírem um forte conhecimento visual de ideias e conceitos matemáticos. *Ver* é uma componente importante da generalização que os jovens estudantes devem explorar (e.g. Mason, 1996; Orton, 1999). Assim, o ensino precisa propor tarefas desafiantes que enfatizem compreensão da generalização, através dos seus aspectos numéricos e figurativos, capitalizando esta capacidade inata dos alunos de pensar visualmente. Estes só podem desenvolver esta capacidade através de experiências em situações que requeiram tal pensamento (e.g. Dreyfus, 1991; Stylianou, 2001; Tripathi, 2008). *Ver* um padrão é necessariamente um primeiro passo na exploração de padrões (Lee & Freiman, 2006), mas os estudantes devem ter agilidade perceptual para *ver* vários padrões, o que lhes permitirá abandonar aqueles que não lhes são úteis. As representações visuais podem incluir formas tais como diagramas, tabelas, modelos concretos, gráficos, metáforas, imagens dinâmicas. Os padrões podem sugerir abordagens numéricas, visuais e mistas (Orton, 1999; Stacey, 1989). Deste modo, o ensino deve ter em atenção quais as abordagens mais eficazes para os estudantes atendendo ao seu nível de escolaridade e aos fins em vista. Algumas das estratégias que os professores podem adoptar para fomentar as representações visuais nos seus alunos podem passar por levá-los a exprimir o que vêem através de outras formas de representação, como sejam, descrever padrões em tabelas utilizando expressões numéricas adequadas. Com o tempo, os estudantes consideram as representações visuais como ferramentas úteis na resolução de problemas e começam a usá-las independentemente de lhes ser pedido ou apresentado. Esta é a nossa principal preocupação neste trabalho, dar atenção aos aspectos figurativos que possam estar relacionados com a generalização.

As tarefas com padrões dão aos estudantes oportunidades para observar e verbalizar as suas próprias generalizações e traduzi-las numa linguagem mais formal de acordo com a idade. E, se os professores não tiverem nas suas práticas o hábito de propor aos alunos tarefas para exprimir as suas próprias generalizações, então não haverá lugar para o pensamento matemático, em particular, não há pensamento algébrico (Mason, 1996). De acordo com Stacey (1989), as tarefas de padrões podem envolver dois tipos de generalização: a *generalização próxima* que se refere à descoberta do termo seguinte e que podem ser obtidos por contagem, desenho ou por recurso a uma tabela e que normalmente envolve relações recursivas, e a *generalização distante* que envolve a descoberta do padrão e que requer uma compreensão da lei de formação, ou seja, uma regra geral através de uma expressão matemática, e requer a procura de relações funcionais. Vários investigadores abordam estes dois tipos de generalização, referidos por Stacey (1989), mas utilizando terminologia diferente como sejam Mason (1996) que fala em *generalização local* e *generalização global,* enquanto que Lannin (2005) fala em *generalização recursiva* e *generalização explícita* e Radford (2008) em *generalização aritmética* e *generalização algébrica*, respectivamente. Uma vez que a generalização envolve pensamentos de ordem superior como sejam raciocínio, abstracção, pensamento holístico, visualização e flexibilidade, a capacidade de generalizar vai permitir caracterizar e diferenciar os estudantes uns dos outros. Por exemplo, Stacey (1989) concluiu nos seus estudos que os alunos mais competentes procuram relações funcionais em detrimento das recursivas que são utilizadas pelos alunos menos dotados. Assim, a selecção das tarefas é crucial se o professor pretende criar experiências de resolução de problemas que permitam aos alunos fazer generalizações.

Padrões, Resolução de Problemas e Criatividade

A sociedade actual requer criatividade num grande número de diferentes funções e profissões. Em todas as áreas do conhecimento a necessidade de ter mais pessoas criativas, capazes de oferecer soluções inovadoras para os problemas tem vindo a ser cada vez mais defendida. Deste modo a criatividade é uma capacidade transversal a todas as áreas de conhecimento. Não há uma única descrição de criatividade, mas pode-se afirmar que começa com a curiosidade e envolve os estudantes na exploração e experimentação com base na sua imaginação e originalidade (DFES, 2000). Normalmente, é usada para se referir à capacidade do pensamento de produzir novas ideias, abordagens e novas acções e aplicá-las à realidade (e.g. Leikin, 2009; Silver, 1997). O processo envolve pensamento original. Um aspecto importante de mudança que necessita de ser realmente feito para ajudar os estudantes a sobreviver no século 21 é envolvê-los e reforçar as suas capacidades para pensar criativamente e resolver problemas. Na escola, a matemática é, de acordo com alguns autores, uma das melhores disciplinas para promover o desenvolvimento do pensamento criativo (Gontijo, 2007).

A criatividade matemática, de acordo com vários autores (e.g. Conway, 1999; Leikin, 2009; Silver, 1997), caracteriza-se por possuir três dimensões: *fluência, flexibilidade* e *originalidade* que representam três das componentes que envolve a resolução de problemas abertos. A *fluência* é a capacidade de produzir um grande número de ideias. Esta capacidade adquire-se em conseguir o maior número de ideias diferentes e fora do comum. As ideias surgem ás vezes associadas e utilizam apenas conhecimentos básicos. Quanto mais se trabalhar um tema mais fluentes nos tornamos. A *fluência* pode ser medida pelo número de soluções correctas que se pode encontrar na resolução de uma mesma tarefa e que constitui o que alguns autores designam por múltiplas soluções de um problema (e.g. Leikin, 2009; Silver, 1997). A *flexibilidade* é a capacidade para pensar de modos diferentes. Está associada ao modo como mudamos de ideias quando se está a resolver um problema para encontrar várias soluções ou para optar pela solução óptima. Pode ser medida pelo número de modos diferentes de pensar que se pode ter na resolução de um problema. Um bom solucionador de problemas possui várias abordagens para resolver um determinado problema. Os alunos, que mudam o modo de atacar um problema, mostrando versatilidade, são, normalmente, os melhores a resolver correctamente um problema. E *originalidade* é a capacidade de pensar de forma única, produzindo ideias novas e únicas. É um pensar fora do óbvio. É ter uma ideia rara. Pode ser medida em comparação com a percentagem de alunos num determinado grupo que pode obter a mesma solução. Quando numa turma há respostas não usuais, não convencionais, os outros professores podem ajudar a confirmar a selecção de uma solução original. De acordo com Silver (1997), a originalidade na sala de aula pode ser manifestada quando um aluno analisa várias soluções a um problema, métodos e respostas e consegue criar outra que seja diferente.

A criatividade desempenha um papel importante no desempenho dos estudantes. De acordo com Conway (1999) o que nós professores pretendemos dos nossos dos alunos é que tenham muitas ideias, uma vez que esta fluência aumenta a possibilidade de uma resposta correcta e significativa. Um aumento no número de resoluções diferentes a situações diferentes indica que os estudantes possuem a flexibilidade necessária para ajustar a sua maneira de pensar quer sobre qualquer problema quer nos modos de o resolver. Esta capacidade é muito importante em matemática, pois, de acordo com Conway (1999), é aquela que os alunos com mais sucesso a matemática possuem uma vez que lhes permite aplicar diferentes abordagens a um problema. Finalmente, os alunos precisam ser incentivados a procurar respostas originais, uma vez que esta estratégia é um caminho para encontrar soluções criativas ou soluções para problemas difíceis. Os alunos precisam reconhecer que tanto a flexibilidade como a originalidade incentivam o pensamento divergente, proporcionando um pensamento de ordem superior. O pensamento divergente é uma das componentes mais importantes quando se está a trabalhar com padrões (e.g. Pimentel, 2010; Vale & Pimentel, 2010). Devem colocar-se aos alunos questões e tarefas desafiadoras para aumentar a sua criatividade em matemática. Uma situação de ensino desejada pode ser alcançada, entre outras, através de resolução de problemas e da reflexão para incentivar os alunos a produzir mais respostas. Nesta perspectiva o professor tem um papel importante a desempenhar. Mas, em vez disto, a escola tem proposto aos alunos sobretudo perguntas e tarefas fechadas, nada desafiantes, que encaminham os alunos para uma única resposta, normalmente através de procedimentos rotineiros e é isso que causa o conflito, pois provoca nos alunos barreiras mentais que os impedem de novas formas de pensar.

A criatividade dos alunos, através das suas dimensões, fluência e flexibilidade, é um indicador da capacidade matemática dos alunos, logo a importância que tem na matemática escolar como elemento essencial quer na exploração de problemas quer no ensino de conteúdos (e.g. Silver, 1997). As tarefas que podem promover essas dimensões devem ser abertas, assumindo a forma de formulação e resolução de problemas (incluindo a generalização) e as explorações e investigações matemáticas. Num ambiente que pretende estimular a criatividade, a inovação desempenha um papel importante, pois é uma característica dinâmica que os alunos podem desenvolver se os professores lhes proporcionarem oportunidades de aprendizagem adequadas (e.g. Leikin, 2009; Levenson, in press).

Muitos resultados da investigação mostram que a resolução e formulação de problemas matemáticos estão intimamente relacionados com a criatividade (e.g. Silver, 1997). As tarefas desafiantes, geralmente, exigem pensamento criativo e o nosso trabalho recente com problemas de padrão, mostraram que este é um caminho possível para promover a criatividade dos alunos.

Apenas podemos ser criativos se nos sentirmos atraídos e desafiados pela tarefa. As situações desafiantes proporcionam oportunidades para pensar matematicamente. Holton e seus colaboradores (2009) defendem a importância do desafio na aula de matemática afirmando que os alunos podem aborrecer-se facilmente com as rotinas se não forem desafiados. As tarefas desafiantes usualmente requerem pensamento criativo. De acordo com alguns investigadores (e.g. Leikin, 2009; Polya, 1981), acreditamos que a criatividade pode ser desenvolvida se proporcionarmos aos alunos tarefas que, permitindo abordagens autónomas, possam gerar novas intuições sobre as ideias matemáticas subjacentes. É este tipo de tarefas que julgamos importante que os professores produzam e apliquem, de modo a motivar os alunos, envolvê-los na aula e desafiá-los para a actividade matemática.

Há uma forte ligação dos padrões com a resolução de problemas não só por Polya (1988) considerar a procura de padrões como uma das suas heurísticas na resolução de problemas, mas porque essa procura utiliza e enfatiza processos matemáticos como sejam: exploração, experimentação, formulação, conjectura, generalização, prova, comunicação e discussão de ideias, desafiando os alunos a recorrer às suas capacidades de pensamento de ordem superior, características essenciais num trabalho de natureza exploratório que se pretende nas nossas salas de aula. Estes processos são também parte integrante do pensamento algébrico (e.g. Blanton & Kaput, 2005; Mason, 1996) que constituem uma componente poderosa em matemática desde os primeiros anos. Deste modo, torna-se difícil diferenciar na actividade matemática a procura de padrões da resolução de problemas. Portanto, o nosso objectivo como educadores matemáticos é proporcionar aos alunos (incluindo os futuros professores) abordagens criativas que lhes permitam resolver o maior número possível de problemas e pensar de forma independente e crítica.

A Proposta Didáctica

O professor enquanto mediador entre os alunos e o conhecimento matemático, deve proporcionar tarefas diversificadas e desafiantes na sala de aula que permitam aos alunos mobilizar, integrar e aplicar diferentes conhecimentos, bem como destacar e desenvolver processos matemáticos estruturantes — experimentar, conjecturar, analisar, comunicar e criar — contribuindo para uma aprendizagem mais eficaz da Matemática. De acordo com o NCTM (2000) uma boa tarefa é aquela que serve para introduzir ideias matemáticas fundamentais e permite diferentes abordagens constituindo um desafio intelectual para os estudantes.

Os professores devem ter uma preparação matemática sólida mas como já se sabe este tipo de conhecimento por si só não chega para ensinar. Os conceitos por mais elementares que sejam exigem outro tipo de conhecimento. Vários investigadores reconhecem que o conhecimento essencial para ensinar não está presente em muitos professores, sobretudo nos futuros professores, pois o que é adquirido durante a sua formação inicial é insuficiente (e.g. Vale, 2000). Esta deve promover um ensino que passe para lá dos procedimentos e atinja os conceitos, as conexões e a procura da evidência matemática, proporcionando situações semelhantes às que irão vivenciar na sua pratica profissional. Não devem abordar apenas conteúdos matemáticos de forma profunda, mas, também, os conceitos mais elementares relativos aos tópicos de matemática escolar que devem ensinar aos seus alunos. Neste sentido, os professores necessitam de desenvolver uma profunda compreensão da matemática que vão ensinar, revisitando com um outro olhar conceitos já aprendidos, tendo oportunidades de experienciarem as mesmas tarefas que irão utilizar com os seus alunos, de modo a que possam reflectir sobre como orientar e responder aos seus alunos do modo que se espera que um professor de matemática o faça.

Nesta perspectiva, desenvolveu-se uma proposta didáctica (Vale *et al.,* 2009), para professores e alunos do ensino básico, constituída por um conjunto de tarefas envolvendo padrões que permitem diferentes tipos de abordagens, onde se privilegia o contexto figurativo, e incluem processos de pensamento superior que são parte essencial não só da resolução de problemas, mas do pensamento matemático como sejam analisar, conjecturar, representar, generalizar e justificar e que conduzem a um conceito matemático poderoso como seja o pensamento algébrico. Nesta proposta o primeiro passo será *ver* um padrão. Para se conseguir a necessária flexibilidade de pensamento resultante de diferentes formas de *ver*, é necessário propor aos estudantes tarefas nas quais eles possam desenvolver, entre outras, essa a capacidade de *ver*.

O reconhecimento de padrões e a generalização através de regras que os próprios alunos podem formular, recorrendo a linguagem verbal e à simbologia matemática, permitindo que o ensino da álgebra se processe de modo gradual e ajudem a desenvolver a capacidade de abstracção essencial na aprendizagem matemática. A proposta didáctica resultou de uma trajectória de aprendizagem baseada num modelo de ensino e aprendizagem que se processa em várias fases que designamos por: (1) *Contagens visuais básicas* - reconhecimento de padrões para desenvolver a capacidade de *ver instantaneamente* (*subitizing*) como base no sentido do número; (2) *Contagens visuais em contextos diversificados* - reconhecimento de padrões em várias disposições de modo a facilitar a contagem (p.e. associação para obter 5 ou 10, multiplicação em arranjos rectangulares, simetria, arranjos indiferenciados); (3) *Sequências* – descoberta de padrões e construção de generalizações em padrões de repetição e de crescimento; e (4) *Problemas* – construção, por parte dos alunos, das suas próprias sequências e/ou descoberta do padrão e generalização para estabelecer relações e propriedades que permitam chegar à solução. Nesta proposta, identifica-se a matemática com a resolução de problemas que envolvem padrões em contextos figurativos que permitem fazer generalizações como componente essencial do pensamento algébrico. Estas ideias podem ser expressas no diagrama da Figura 1.

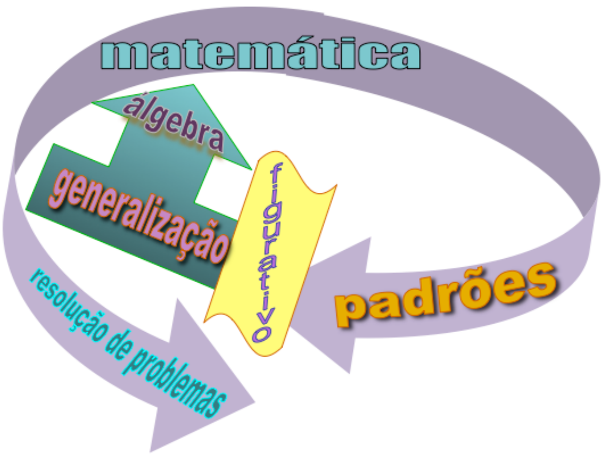

Figura 1 – Contexto

A proposta didáctica tem por base o estudo de padrões, onde os contextos figurativos têm um papel relevante. É dirigida não só aos estudantes para aprender matemática, mas, também, aos professores para ensinar matemática. Apresentam-se dois exemplos de tarefas de padrões em contextos visuais — *Contagens* e *Sequências* — para o ensino básico e que foram utilizadas no projecto Padrões com alunos do ensino básico e da formação (inicial e contínua). Ambas destacam o desenvolvimento do sentido do número e do pensamento algébrico com um objectivo comum que é desenvolver um novo olhar, utilizar diferentes abordagens e resoluções através de ideias criativas. Ou seja, estas tarefas suscitam múltiplas soluções, que proporcionam a fluência de múltiplas ideias e representações matemáticas, flexibilidade de pensamento ao procurar métodos de resolução diferentes e originalidade nas soluções encontradas. De acordo com a idade dos alunos e objectivos pretendidos, o professor pode incentivar a utilização de materiais manipuláveis para permitir um maior envolvimento e compreensão dos estudantes na tarefa.

Os dados referidos neste trabalho resultam de um estudo mais alargado que privilegia uma abordagem de natureza qualitativa cujo principal objectivo procura entender de que maneira uma experiência didáctica baseada em padrões figurativos é um contexto adequado para obter expressão de generalização e pode contribuir para promover a aprendizagem matemática, em particular o pensamento algébrico ao nível do ensino básico por alunos e (futuros) professores. Para efeitos do presente artigo os dados foram recolhidos durante o ano de 2010 e seleccionados a partir do trabalho com alunos do 4.º ano de escolaridade e com alunos do 3.º ano de um curso de formação inicial de professores em educação básica. A turma do 4.º ano tinha 21 alunos e foram observadas quatro aulas com cerca de 90 minutos cada. A turma do 3.º ano da formação inicial de professores tinha 28 alunos, onde trabalharam a proposta didáctica sobre padrões durante quatro aulas com cerca de duas horas cada. Os dados foram recolhidos de forma holística, incluindo observações em sala de aula, trabalhos individuais escritos, notas, documentos, assim como fotografias para fornecer informações adicionais. A análise efectuada foi descritiva e interpretativa debruçando-se em particular sobre as resoluções dos alunos das tarefas propostas. Começa-se por apresentar e discutir brevemente as expectativas em relação a cada uma das possíveis formas de exploração das tarefas e de seguida as respostas dos estudantes.

Exemplos de Algumas das Tarefas

Exemplo 1. O primeiro exemplo refere-se a contagens visuais em contextos diversificados, a tarefa das conchinhas (Figura 2).

Tarefa 1. Contagens visuais – Conchinhas

Observe a figura

A menina do mar organizou as conchas que apanhou ontem na praia do modo que a figura mostra.
Descubra um processo rápido de as contar?

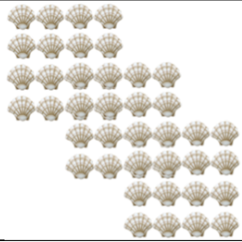

Figura 2 – Conchinhas

Os trabalhos desenvolvidos no âmbito do referido projecto (e.g. Pimentel, 2010; Vale, 2009) identificaram que um trabalho prévio com tarefas de contagens em ambientes figurativos constitui uma boa estratégia para desenvolver nos alunos, capacidades de *ver* (identificação, decomposição, rearranjo, disposição). Contribuem para uma maior flexibilidade de visualização e pensamento e a utilização de processos semelhantes noutros contextos, como sejam nas tarefas que envolvem padrões de crescimento, é efectuada muito mais facilmente. Na verdade, a exploração de padrões de crescimento em sequências figurativas é crucial para os alunos verem as relações entre os termos sucessivos, permitindo-lhes traduzir os padrões visuais identificados através de expressões numéricas como primeiro passo para chegar à generalização – o cerne do pensamento algébrico. As expressões numéricas que traduzem o pensamento dos estudantes quando identificam um padrão de contagem das conchas deve ser explicado.

Por exemplo: A expressão 2 x (4x4 + 2x2) traduz o seguinte modo de *ver* o número total de conchinhas, duas vezes, dois quadrados um de 4 por 4 e outro de 2 por 2. Enquanto a expressão 3 x (4x4) – 2 x (2x2) traduz, três quadrados 4x4 menos dois quadrados sobrepostos 2x2. O professor deve salientar que as diferentes expressões encontradas, 2 x (4x4 + 2x2) = 3 x (4x4) – 2 x (2x2) = ... , são equivalentes pois representam o mesmo número de conchas (40). A representação escrita das expressões na horizontal salienta a equivalência das expressões numéricas e permite dar um novo significado ao sinal de igual, ou seja, identificam-no com uma relação de equivalência e não apenas para indicar o resultado de um operação. As nossas expectativas para esta tarefa consistia em que os alunos descobrissem formas originais de *ver* o número total de conchas. O que se constatou foi que os resultados, quer dos alunos, quer dos futuros professores foi muito semelhante, aparecendo as mesmas soluções em ambos os grupos de estudantes. A expressão que traduz o modo de contagem é que foi diferente, atendendo ao uso de simbologia matemática que é diferente nestes dois grupos, mas todo o raciocínio era o mesmo. As soluções mais utilizadas pelos dois grupos foram as seguintes (Figura 3).

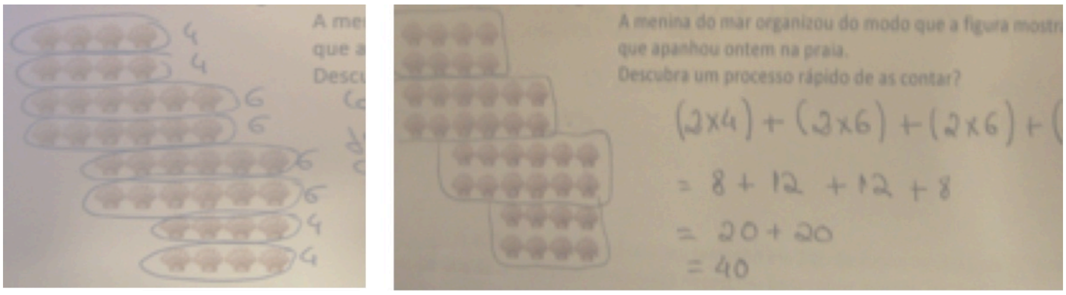

Figura 3 – Resoluções da tarefa das conchinhas

Podemos considerar como resoluções menos comuns na turma do 1º ciclo do ensino básico e na turma da formação inicial, respectivamente as que se traduzem nas expressões 10x4 e 4x4 + 4x6, pois foram apresentadas por um número muito reduzido de alunos (Figura 4).

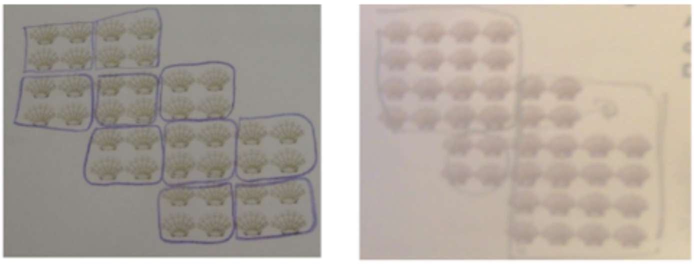

Figura 4 – Mais resoluções da tarefa das conchinhas

*Exemplo 2***.** O segundo exemplo refere-se a uma sequência que envolve um padrão de crescimento (Figura 5).

Tarefa 2. Padrões figurativos de crescimento – Os camiões

Observe a sequência junto

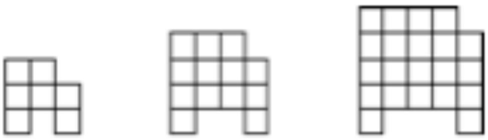

Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3

a) Desenhe a figura seguinte.

b) Qual é a área de cada figura se tomar para unidade de área, a área de um quadradinho? Escreva a expressão que traduza o modo de fazer essa contagem.

c) Explique como poderá construir a figura 25.

d) Descreva por palavras como determinar a área de qualquer figura da sequência.

e) Explique, a um colega que não acredita na sua regra anterior, que a sua regra funciona.

Figura 5 – Camiões

Nos padrões de crescimento, cada termo muda de forma previsível em relação ao anterior. Na análise dessa mudança podem ser utilizados vários modos de *ver* que conduzem a outras tantas representações numéricas e/ou algébricas. O processo de generalização é, também, condicionado por esse modo de *ver*, relacionando cada termo com o(s) anterior(es) ou com a ordem que ocupa na sequência — *generalização próxima* e *distante,* respectivamente. A primeira, que utiliza o raciocínio recursivo, é mais habitual, mesmo entre os professores, mas é mais pobre por não permitir descrever o que se passa com um termo de qualquer ordem. Assim, deve ser feita esta aprendizagem, tanto por professores como por alunos, do uso do raciocínio funcional que permite relacionar qualquer termo com a respectiva ordem e que fornece de imediato uma descrição sobre o modo de conhecer qualquer termo da sequência (Vale & Pimentel, in press).

Neste trabalho, é evidente a ligação entre conceitos e capacidades matemáticas e o desafio colocado aos alunos de estabelecerem conexões entre tópicos e ideias que vão aflorando ou aprofundando. Por seu lado, a utilização de padrões figurativos incentiva as conexões entre os números, a álgebra e a geometria, suscitando diferentes representações. Em particular, neste exemplo o conceito de área é muito evidente. A tarefa escolhida procura ilustrar este ponto de vista.

Pretendemos que os alunos procurem um padrão, o descrevam e construam argumentos para o validar recorrendo a diferentes representações. O trabalho anterior com contagens visuais pode ajudar os alunos a *ver* um padrão e a escrever a expressão numérica que traduza esse modo de *ver*, de forma a tornar possível a generalização a termos distante. Os alunos devem ser incentivados a observar e ver as figuras de diferentes maneiras e a escolher aquela que lhes permita descobrir uma relação funcional, registando esses vários modos numa tabela (Figura 6), utilizando representações mais ou menos formais. Há um raciocínio indutivo baseado num pensamento visual, fortemente ligado ao modo como os alunos conseguem *ver* a lei de formação do padrão (Figura 7). Esta componente é fundamental sobretudo para conseguir-se uma generalização distante, em casos como o deste exemplo, que envolve uma expressão algébrica de segundo grau, com conhecimentos de matemática elementar. A criatividade pode ser revelada na procura de diferentes modos de *ver* o padrão, para escolher a melhor maneira de obter uma expressão da generalização distante, o que exige do aluno fluência e flexibilidade e, nalguns casos, originalidade.

Nº da figura	Área
1	1+1+2+1x3 = 3+2+2= ...
2	1+1+3+2x4 = 4+3+3x2= ...
3	1+1+4+3x5 = 5+4+4x3= ...
...	...
25	1+1+26+25x27 = 27+26+26x25= ...
...	...
n	1+1+(n+1)+nx(n+2) = (n+2)+(n+1)+(n+1)xn= ...

Figura 6 – Registos de modos de *ver*

As expectativas em relação a esta tarefa foram as esperadas. Nos futuros professores, apareceram muitas soluções utilizando representações diferentes, tabelas, desenhos, linguagem matemática que conduziram a diferentes expressões algébricas (Figura 7).

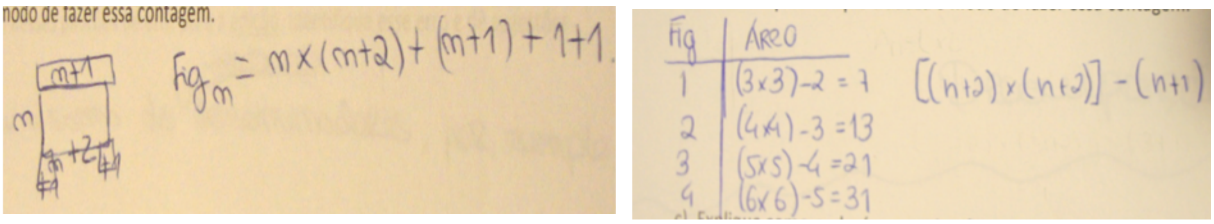

Figura 7 – Diferentes representações na resolução da tarefa dos camiões

Os alunos do 1.º ciclo utilizaram material para os ajudar na construção da sequência, conseguindo compreender a estrutura do padrão e efectuar generalizações próximas. Surgiram várias soluções propostas pelos mesmos alunos o que mostra possuírem flexibilidade de pensamento (Figura 8).

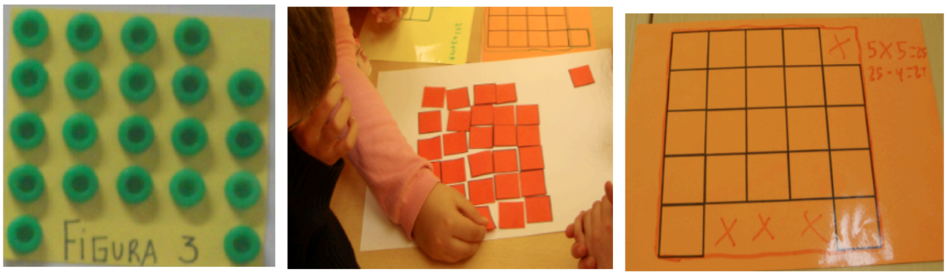

Figura 8 – Diferentes materiais na resolução da tarefa dos camiões

As estratégias de contagem mais comuns foram as que conduziram às expressões respectivamente $(n+2) + n^2 + n + (n+1)$, $(n+2)^2 - (n+1)$ e $(n+1)^2 + (n+1) +1$ que correspondem ao modo de *ver* indicado na figura (Figura 9).

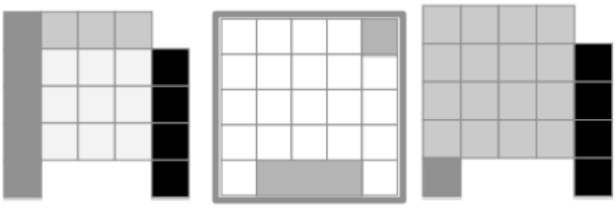

Figura 9 – Formas de *ver* mais comuns na resolução dos camiões

A visualização e as consequentes propriedades das figuras, são aspectos cruciais para o sucesso desta tarefa, assim como, o trabalho prévio com contagens em contextos diversificados, uma vez que esta sequência envolve um padrão não-linear e que, de outro modo, seria bastante mais complicado de traduzir numa expressão algébrica. As expressões algébricas e mesmo as numéricas não são criadas a partir de uma sequência numérica, mas, sobretudo, a partir da generalização baseada nas propriedades das figuras.

A Concluir

Os estudantes possuem potenciais enormes ao nível das capacidades de visualização, imaginação, conjectura e generalização. Estas devem ser exploradas pelo professor se pretendemos que estes jovens, mais do que treinar um conjunto de técnicas matemáticas, venham a gostar de matemática. Nesse sentido, o professor deve estar atento e ser criativo nas estratégias a que recorrer que lhe permita explorar esse potencial em cada um dos seus alunos e com cada uma das tarefas que utiliza desafiando-os, também, a serem criativos e persistentes nas suas resoluções.

O trabalho com padrões em contextos figurativos apresentado, revela-se com grande potencial na aula de matemática, pois pode ser um percurso didáctico para: promover diferentes estratégias de contagem; descobrir diferentes modos de *ver* em sequências e problemas; dar sentido a expressões numéricas relacionando-as com a representação visual; permitir a alunos muito novos formular conjecturas de modo intuitivo, recorrendo à linguagem verbal, ou mais formal, recorrendo à simbologia matemática; permitir utilizar de forma flexível diferentes formas de representação; proporcionar oportunidades de argumentar e comunicar matematicamente; permitir o desenvolvimento da capacidade de generalização (próxima e distante), que é uma componente essencial do pensamento algébrico e do próprio raciocínio matemático; e contribuir para a construção de uma imagem mais positiva da matemática, por parte dos alunos, porque são desafiantes e apelam fortemente ao seu sentido estético, curiosidade e criatividade (Vale, 2009). Os alunos quando submetidos a esta proposta didáctica conseguem ter sucesso na compreensão de conceitos matemáticos poderosos como sejam analisar, reconhecer, representar e generalizar padrões em tarefas de natureza exploratória em contextos figurativos.

As tarefas de contagens visuais permitiram aos estudantes uma flexibilidade visual importante que lhes permitiu, não só optar pela estratégia mais adequada aos fins em vista, mas sobretudo perceber o significado das expressões numéricas e ao passar para as sequências, fazer uma generalização distante por palavras ou recorrendo a simbologia. Nas tarefas com padrões de crescimento as estratégias que surgiram mais foram uma combinação de abordagens figurativas com abordagens numéricas, mas onde o ponto de partida foi sempre a abordagem visual. Mostram como a expressão da generalização pode ser explorada a diferentes níveis utilizando diferentes representações trabalhando em simultâneo a aritmética e a álgebra assim como potenciam o raciocínio funcional. Ilustram também a flexibilidade de pensamento na resolução das propostas apresentadas, em particular nas que envolvem generalização distante, em que o suporte visual foi de uma ajuda preciosa para a compreensão da estrutura dos padrões. As tarefas utilizadas evidenciam que os estudantes procuraram a utilização de diferentes estratégias de abordagem, tendo sido mais evidente este aspecto com os alunos do 1.º ciclo do ensino básico, para os quais constituíram um desafio. As representações simbólicas a que os alunos do 1.º ciclo chegaram em muitos casos, resultaram dum trabalho consistente, de acordo com a proposta didáctica, e que seria impensável para estes níveis noutro contexto, tendo surgido sempre naturalmente. O recurso a materiais manipuláveis também foi evidente nos alunos do 1.º ciclo. Esta experiência didáctica evidenciou que temos alunos muito criativos e que nos podem surpreender positivamente.

As tarefas de padrões não são o único recurso desafiante na aula de matemática. Neste empreendimento, o professor tem um papel fundamental na escolha e selecção das tarefas que proporcionem a aprendizagem matemática. Proporcionar aos alunos situações e tarefas desafiadoras também constitui em si um desafio para os professores, quer na sua selecção ou construção mas na orientação do trabalho de cada um e de todos. Isto implica um conhecimento amplo e profundo da matemática que ensinam e como ensiná-la.

Referências Bibliográficas

Amit, M., & Neria, D. (2008). Rising to challenge: Using generalization in pattern problems to unearth the algebraic skills of talented pre-algebra students. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education, 40*(1), 111-129.

Ball, D., Thames, M., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Barbosa, A. (2010). *A resolução de problemas que envolvem a generalização de padrões em contextos visuais: Um estudo longitudinal com alunos do 2.º ciclo do ensino básico* (Tese de doutoramento, documento policopiado). Universidade do Minho, Braga.

Barbosa, A., Vale, I., & Palhares, P. (2007). Patterns and generalization: The influence of visual strategies. In Demetra Pitta-Pantazi, & George Philippou (Eds.), *Proceedings of the fifth congress of the European Society for Research in Mathematics Education – CERME 5* (pp. 844-851). Larnaca, Cyprus: European Society for Research in Mathematics Education and University of Cyprus.

Blanton, M., & Kaput, J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, *36*(5), 412-446.

Boaler, J. (2002). Open and closed mathematics: Student experiences and understandings. In J. Sowder, & B. Schappelle (Eds.), *Lessons learned from research* (pp. 135-42). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics (NCTM).

Conway, K. (1999). Assessing open-ended problems. *Mathematics Teaching in the*

Middle School, *4*(8), 510-514.

DFES (2000). *The curriculum guidance for the foundation stage.* London: QCA.

Doyle, W. (1988). Work in mathematics classes: The context of students' thinking during instruction. *Educational Psycologist, 23*, 167-80.

Dreyfus, T. (1991). On the status of visual reasoning in mathematics and mathematics education. In F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of the 15th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME)* (vol. 1, pp. 33-48). Assisi: PME.

Friendland, A., & Tabach, M. (2001). Promoting multiple representations in algebra. In A. A. Cuoco (Ed), *2001 Yearbook of the National Council of the Teachers of Mathematics: The roles of representation in school mathematics* (pp. 173-185). Reston, VA: NCTM.

Frobisher, L., Frobisher, A., Orton, A., & Orton, J. (2007). *Learning to teach shape and space.* Cheltenham, UK: Nelson Thornes.

Gilbert, J. (Ed.) (2007).*Visualization in science education*. Dordrecht: Springer.

Goldin, G. (2002). Representation in mathematical learning and problem solving. In L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 197-218). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Gontijo, C. (2007). Estratégias de ensino em matemática e em ciências que promovem a criatividade: Algumas possibilidades. *Ciência & Ensino*, *1*(2), 1-10.

Hiebert, J., Morris, A., Berk, D., & Jansen, A. (2007). Preparing teachers to learn from teaching. *Journal of Teacher Education*, *58*(1), 47-61.

Holton, D., Cheung, K., Kesianye, S., Losada, M., Leikin, R., Makrides, G., … & Yeap, B. (2009). Teacher development and mathematical challenge. In E. J. Barbeau, & P. J. Taylor (Eds.), *Challenging mathematics in and beyond the classroom. The 16th ICMI Study* (pp. 205-242). NewYork: Springer.

Lannin, J. (2005). Generalization and justification: The challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. *Mathematical Thinking and Learning, 7*(3), 231-258.

Lee, L., & Freiman, V. (2006). Developing algebraic thinking through pattern exploration. *Mathematics Teaching in the Middle School, 11*(9), 428-433.

Leikin, R. (2009). Exploring mathematical creativity using multiple solution tasks. In R. Leikin, A. Berman, & B. Koichu (Eds.), *Creativity in mathematics and the education of gifted students* (pp. 129-145). Rotterdam, Netherlands: Sense Publishers.

Levenson, E. (in press). Mathematical creativity in elementary school: Is it individual or collective? In *Proceedings of CERME 7*. Poland: University of Rzesków.

Liljedahl, P., Chernoff, E., & Zaskis, R. (2007). Interweaving mathematics and pedagogy in task design: A tale of one task. *Mathematics Teacher Education*, *10*, 239-249.

Ma, L. (1999*). Knowing and teaching mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. In N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra* (pp. 65-86). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Ministério da Educação/Direcção-Geral de Inovação e do Desenvolvimento Curricular (ME/DGIDC) (2007). *Programa de matemática do ensino básico.* Recuperado a Janeiro 7, 2008, em http://www.min-edu.pt/outerFrame.jsp?link=http%3A//www.dgidc.min-edu.pt/

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston: NCTM.

Orton, A. (1999). *Pattern in teaching and learning of mathematics.* London: Cassel.

Peressin, D., & Knuth, E. (2000). The role of tasks in developing communities of mathematical inquiry. *Teaching Children Mathematics*, *6*(6), 391-397.

Pimentel, T. (2010). *O conhecimento matemático e didáctico, com incidência no pensamento algébrico, de professores do primeiro ciclo do ensino básico: Que relações com um programa de formação contínua?* (Tese de doutoramento, documento policopiado). Universidade do Minho, Braga.

Polya, G. (1981). *Mathematical discovery*. New York: John Wiley & Sons.

Polya, G. (1988). *How to solve it.* Princeton, NJ: Princeton University Press.

Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: A semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education, 40*(1), 83-96.

Remillard, J., & Bryans, M. (2004). Orientation toward mathematics curriculum materials. *Journal for Research in Mathematics Education, 35,* 352-388.

Rivera, F., & Becker, J. (2005). Figural and numerical modes of generalizing in algebra. *MathematicsTeaching in the Middle School, 11*, 198-203.

Rivera, F., & Becker, J. (2008). Middle school children's cognitive perceptions of constructive and deconstructive generalizations involving linear figural patterns. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education, 40*(1), 65-82.

Robinson, K., & Aronica, L. (2009). *The element: How finding your passion changes everything*. New York, NY: Penguin.

Schoenfeld, A. H. (2008). On modeling teachers' in-the-moment decision making. In A. H. Schoenfeld, (Ed.) *A study of teaching: Multiple lenses, multiple views. Journal for Research in Mathematics Education* monograph series (Monograph No 14, pp. 45-96). Reston, VA: NCTM.

Sierpinska, A. (2003). Research in mathematics education – through a keyhole. In E. Simmt, & B. Davis (Eds.), *Proceedings of the 2003 annual meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group (CMESG)* (pp. 11-35). Edmonton, AB: CMESG.

Silver, E. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, *29*(3), 75-80.

Smith, M., Hughes, E., Engle, R., & Stein, M. K. (2009). Orchestrating discussions. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *14(9),* 548-556.

Sowder, J. (2007). The mathematical education and development of teachers. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (vol. 1, pp. 157-224). Reston: NCTM.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalizing problems. *Educational Studies in Mathematics*, *20*(2), 47-164.

Stein, M. K., & Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *3(4)*, 268-275.

Stylianou, D. (2001). On the reluctance to visualize in mathematics: Is the picture changing? In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th PME International Conference* (vol.4, pp. 225-232). Utrecht, The Netherlands: Freudenthal Institute.

Tripathi, P. (2008). Developing mathematical understanding through multiple representations. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *13*(8), 438-445.

Vale, I. (2009). Das tarefas com padrões visuais à generalização. Em J. Fernandes, H. Martinho, & F. Viseu (Eds.), *Actas do XX Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 35-63). Viana do Castelo: Associação de Professores de Matemática (APM).

Vale, I. (2000). *Didáctica da matemática e formação inicial de professores num contexto de resolução de problemas e de materiais manipuláveis*. Lisboa : APM.

Vale, I., Barbosa, A., Borralho, A., Barbosa, E., Cabrita, I., Fonseca, L., & Pimentel, T. (2009). *Padrões no ensino e aprendizagem da matemática – propostas curriculares para o ensino básico*. Viana do Castelo: ESEVC-Projecto Padrões.

Vale, I., & Pimentel, T. (2010). From figural growing patterns to generalization: A path to algebraic thinking. In M. F. Pinto, & T. F. Kawasaki (Eds.), *Proceedings of the 34th Conference of the PME* (vol. 4, pp. 241-248). Belo Horizonte, Brasil: PME.

Vale, I., & Pimentel, T. (in press). Mathematical challenging tasks in elementary grades. In *Proceedings of CERME 7*. Poland: University of Rzesków.

van de Walle, J. (2007). *Elementary and middle school mathematics*. Pearson: Boston, MA.