O CONCEITO DE DERIVADA DE UMA FUNÇÃO: UMA CONSTRUÇÃO ALTERNATIVA AO CONCEITO DE LIMITES

Jairo Rocha de Faria

Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional
Universidade Federal da Paraíba, Cidade Universitária – Campus I. CEP 58051-900,
João Pessoa – PB/Brasil.
jairo@ci.ufpb.br

Emerson Souza Freire

Escola de Engenharia Industrial Metalúrgica de Volta Redonda da UFF
Avenida dos Trabalhadores 420 – Vila Sta. Cecília. CEP 27255-125
Volta Redonda – RJ/Brasil.
emerson.freire@bol.com.br

Resumo

Este artigo propõe uma construção alternativa para o conceito de derivada de uma função, um dos conceitos fundamentais do Cálculo Diferencial, aproximando-se do Método das Fluxões de Newton, apresentado no século XVIII através de forte apelo intuitivo. Evitar a construção demasiadamente técnica do conceito de derivada através de um limite indeterminado cuja abstração e formalismo constituem dificuldades adicionais para os alunos foi a principal motivação para este trabalho. Amparados ainda pelo desenvolvimento histórico, acreditamos que a abordagem ora proposta constitua uma alternativa bastante natural tanto para a significação do conceito de derivada, quanto para o desenvolvimento de alguns aspectos técnicos do conteúdo programático de Cálculo, como calcular derivadas e obter as regras de derivação, por exemplo. O principal objetivo deste trabalho é, portanto, fornecer fundamentos que corroborem com esta afirmação.

Palavras-chave: Cálculo Diferencial; Derivada; Educação Matemática; Limite.

Abstract

This work proposes an alternative construction for the concept of derivative of a function, a fundamental concept of Differential Calculus, approaching of the Method of Fluxions Newton, presented in the XVIII century through strong intuitive appeal. In order to avoid the construction of the concept of derived through an undetermined limit, whose abstraction and formalism are additional difficulties for students was the main motivation for this work. Still supported by the historical development of the concept of derivative we believe that the proposed approach constitutes a very natural alternative to the significance of the concept of derivative and for the development of some technical aspects of the Calculus, like how to obtain the derived rules, for example. The main objective of this work is, therefore, to provide evidences corroborating this statement.

Keywords: Differential Calculus; Derivatives; Mathematics Education; Limits.

Introdução

Uma das grandes dificuldades enfrentadas pelos alunos em seu primeiro curso de Cálculo Diferencial é a abstrata definição de limite de uma função (Cornu, 1991). Além do mais, verifica-se um altíssimo nível de reprovação nas disciplinas de Cálculo, que frequentemente são responsabilizadas pelas taxas de evasão e retenção também bastante altas em diversos cursos do ensino superior, sobretudo no Brasil (Villarreal, 1999). Do ponto de vista histórico, podemos observar que estes dois conceitos: "limite" e "função" foram sendo construídos e aprimorados desde a Idade Antiga até o início da Idade Contemporânea (Boyer, 1991; Roque, 2012). Em particular, embora seja uma interpretação a posteriori, a noção de infinitésimo já pode ser identificada nos paradoxos de Zenão de Elea (495 - 430 A.C.). A formalização do conceito de limite estendeu-se, portanto, por um longo processo até o século XIX, devendo-se destacar as contribuições de Bolzano (1781-1848), Cauchy (1789-1857) e Weierstrass (1815-1897) (Baron, 2004; Carvalho e D'Ottaviano, 2012), devendo-se a este último a definição precisa de limite como conhecemos hoje, em termos de ε e σ, dada em 1874 (Hairer & Wanner, 1996). Analogamente, a definição de função atualmente aceita só foi concebida em 1837 por Dirichlet, consolidando os trabalhos de Fourier em fins do século XVIII (Ávila, 2002). Afere-se daí que as contribuições de Galileu (1564-1642), Kepler (1571-1630), Newton (1643-1727) e Leibniz (1646-1716) perpassaram as dificuldades técnicas e teóricas do rigor matemático[1] atrelados aos dois conceitos

[1] Cumpre ressaltar que, embora o rigor matemático seja um conceito histórico e, portanto, em evolução e que as justificativas tanto de Newton quanto de Leibniz sofreram severas críticas, é possível abordar os conceitos de derivada e integral e suas aplicações, sobretudo em cursos introdutórios, sem o excessivo formalismo dos dias atuais.

supracitados.

Nesta discussão, merece lugar de destaque os legados de Newton e Leibniz, que a despeito de travarem uma das mais famosas disputas de propriedade intelectual da história da ciência, hoje são reconhecidos por suas contribuições ao Cálculo, desenvolvidas de forma totalmente independente (Hall, 2002; Meli, 1996). Convém sublinhar ainda o não menos importante legado matemático de Cauchy, que além de transformar o Cálculo Diferencial e Integral de variáveis de seus antecessores no Cálculo Diferencial e Integral de funções (Kleiner, 1989), com sua preocupação didática revolucionou o modo e a ordem de apresentação dos conceitos, contribuindo para a própria transformação dos conceitos fundamentais do Cálculo (Grabiner, 1981), o que causou forte influência no ensino das disciplinas de Cálculo e Análise até a atualidade.

Esta forte sistematização encontrada no trabalho de Cauchy (Cauchy, 1821), remete a "Os Elementos de Euclides", obra lançada por volta de 300 a.C., também com uma preocupação didática que levou a um encadeamento das proposições que, segundo Roque:

> *"A tese mais reveladora a respeito do encadeamento das proposições nos Elementos, partindo dos primeiros princípios, é a de que os resultados foram enunciados de trás para frente."* (Roque, 2012, p. 168)

Esta sistematização, fundamental na ciência, é, em geral, levada de forma equivocada para os livros didáticos e para a sala de aula com consequências muito negativas para o ensino, onde os conteúdos são apresentados como um "saber pronto", ao alcance de alguns poucos "gênios" e de forma completamente descontextualizada. Nas palavras de Grabiner, acerca do trabalho de Cauchy:

> *"Ele sintetizou os trabalhos anteriores e construiu tão bem uma firme fundamentação que obscureceu as tentativas que o precederam. Assim como os Elementos de Euclides foram tão bem sucedidos que conduziram os trabalhos anteriores para o esquecimento, assim como o Cálculo de Newton-Leibniz tornou desnecessária a leitura dos trabalhos prévios sobre áreas e tangentes, do mesmo modo o Cauchy's Cours d'analyse and Calcul infinitesimal tornou obsoletos muitos dos tratados anteriores sobre limites, convergência, continuidade, derivadas e integrais."* (Grabiner, 1981, p.15, tradução nossa).

Em particular, fica evidenciada por grande parte dos livros de Cálculo brasileiros e internacionais[2] uma forte instrumentalização do ensino. De fato, é comum verificar uma revisão do conceito de função e das funções elementares, seguida pela introdução do conceito de limite até sua definição formal, para em seguida se introduzir o conceito de derivada de uma função e suas aplicações mais comuns. Finalmente, os capítulos finais dedicam-se à introdução dos conceitos de primitiva de uma função e de integral definida, coroando-se o curso com o Teorema Fundamental do Cálculo que estabelece a relação formal entre os dois principais conceitos introduzidos: derivada e integral. Embora esta apresentação seja bastante apreciada do ponto de vista estético, ela caminha na contramão do desenvolvimento histórico que costuma apontar para o caminho natural da construção dos conceitos científicos. Justifica-se esta abordagem pela necessidade da compreensão do conceito de limite para a subsequente introdução do conceito de derivada em um ponto, dada, classicamente, pelo limite do quociente de Newton e reforçada com a importante interpretação geométrica do coeficiente angular da reta tangente à função no ponto em análise.

A proposta deste trabalho é introduzir o conceito de derivada de uma função através da sua definição alternativa, utilizando-se o conceito de função de decaimento mais rápido a zero (Griffel, 2002), que embora também seja um conceito também associado ao limite de uma função, conduz a uma metodologia mais intuitiva, tanto para a obtenção das regras de derivação, quanto para a sistematização do cálculo de derivadas das funções elementares. Cumpre ressaltar que a metodologia ora proposta apresenta semelhanças com o Método das Fluxões[3] desenvolvido por Newton na obtenção das derivadas, podendo ser vista como uma justificativa deste método, através da definição de função de decaimento mais rápido a zero, e sua extensão para a obtenção de técnicas mais gerais de derivação.

Para dar prosseguimento ao debate, vamos inicialmente discutir a definição de limite de uma função. Em seguida iremos fazer uma breve análise comparativa entre a definição clássica e a definição alternativa de derivada. Posteriormente, com o objetivo de comparar a complexidade entre as duas abordagens, serão deduzidas algumas propriedades através da definição alternativa. Finalmente, serão apresentadas

[2] Aqui cabe ressaltar que embora o importante movimento de reforma do ensino do Cálculo nos Estados Unidos, iniciado em meados dos anos 1980, apresente várias propostas concretas para a problemática em questão, este movimento não teve influência significativa para o ensino no Brasil (Ávila, 2002).

[3] Newton justificava seu método de forma mais intuitiva, utilizando a noção de movimento e de incrementos infinitamente pequenos que podiam ser desprezados quando apresentavam potências maiores ou iguais a dois (Hall, 2002).

algumas conclusões e indicados alguns estudos a serem realizados.

A Definição de Limite de uma Função

Como já mencionado, a maneira como o Cálculo Diferencial e Integral se apresenta na grande maioria dos livros didáticos da atualidade foi fortemente influenciada por Cauchy[4]. No Brasil, um dos ícones desta maneira de apresentar a disciplina é “O Cálculo com Geometria Analítica” (Leithold, L. 1994), livro que vem sendo amplamente adotado por décadas e, consequentemente, formando parte considerável das novas gerações de professores de Cálculo.

No que segue iremos utilizar as definições apresentadas nesta obra para confrontar com as definições necessárias para a construção da definição alternativa de derivada.

Definição 1: Seja *f* uma função definida para todo número em algum intervalo aberto contendo a, exceto possivelmente no próprio a. **O limite de *f(x)* quando *x* tende a *a* será *L***, escrito como

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \qquad (1)$$

se a seguinte afirmação for verdadeira: Dado $\varepsilon > 0$ qualquer, existe $\delta > 0$, tal que se $0 < |x - a| < \delta$ então $|f(x) - L| < \varepsilon$. (Leithold, 1994).

A definição acima se encontra de maneira similar em boa parte dos mais tradicionais livros de Cálculo adotados no Brasil. No entanto, a grande maioria dos estudantes dificilmente consegue, num primeiro momento, determinar limites por meio dela. Além da dificuldade contida no próprio entendimento devido ao seu nível de abstração, tem-se a necessidade de manipular três parâmetros distintos, representados por ε, δ e L.

[4] Em seu Cálculo, os conceitos de função e limite de função eram fundamentais. Ele definiu a derivada como o limite de um quociente e apresentou uma definição satisfatória de função contínua que é análoga à utilizada nos dias de hoje. (Boyer, 1991). Também se deve a ele a definição formal de limite que é comumente apresentada nos cursos introdutórios de Cálculo.

As Definições Clássica e Alternativa de Derivada

No século XVIII, Newton e Leibniz introduziram quase que ao mesmo tempo e de maneira independente o conceito de derivada, sendo o conceito de limite como conhecemos hoje formulado apenas no século seguinte por Cauchy. A Leibniz se deve o símbolo $\frac{df}{dx}$ como notação para derivada da função *f(x)* em relação a variável *x*, que se tornou bastante adotada e aceita por facilitar a manipulação algébrica. Neste trabalho, no entanto, será utilizada a notação $f'(x_0)$, introduzida por Lagrange (1736-1813), para a definição clássica de derivada e a notação $\dot{f}(x_0)$ será reservada para a definição alternativa a fim de se distinguir as duas abordagens. Neste texto, reconhecemos como clássica a definição de derivada usualmente adotada nos dias atuais, ainda que uma definição análoga a que aqui denominamos por alternativa tenha sido utilizada nos séculos XVII e XVIII, como será esclarecido no texto.

A definição clássica de derivada

Definição 2: A derivada de uma função *f* é a função denotada por *f´*, tal que seu valor em qualquer número *x* do domínio de *f* seja dado por

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad (2)$$

se esse limite existir (Leithold, 1994).

Observação 1: Tanto na definição de limite (Eq. 1), quanto na definição de derivada (Eq. 2), apresentadas no citado livro texto, a exigência de que o ponto considerado seja um ponto de acumulação do domínio da função não está explícita, já que seria um novo conceito a ser introduzido aos aprendentes. Em geral, estes conceitos são abordados *a posteriori* em um curso mais avançado, como o Curso de Análise Real, por exemplo. Na definição de derivada, no entanto, está implícito que o ponto considerado deve pertencer ao domínio da função como pode ser observado na Eq. 2

A definição alternativa de derivada

A seguir será introduzida a definição alternativa de derivada que pode ser naturalmente estendida para a derivada Gâteaux de funções vetoriais e tensoriais (Griffel, 2002). Inicialmente deve ser construído o conceito de uma função $f(g(x))$ "*que vai a zero mais rápido do que* $g(x)$" dado pela definição abaixo:

Definição 3: Sejam *f* e *g* funções reais tais que *f(g(x)) esteja definida*. **Dizemos que a função *f* vai a zero mais rápido do que *g*** se

$$\lim_{g(x)\to 0} \frac{f(g(x))}{g(x)} = 0 \tag{3}$$

que será denotada por $f = o(g(x))$ (Griffel, 2002).

Embora este conceito seja formalizado utilizando-se o conceito de limite, ele pode ser construído a partir da exploração de exemplos bastante ilustrativos, como abaixo:

Exemplo 1) As funções $f_1(h) = h^2$ e $f_2(h) = h^3$ vão a zero mais rápido do que a função . Uma tabela, neste caso, pode ajudar bastante na construção do conceito:

Tabela 1: exemplo comparativo de funções

h	$f_1(h) = h^2$	$f_2(h) = h^3$
± 0.90	0.8100	± 0.729000
± 0.50	0.2500	± 0.125000
± 0.10	0.0100	± 0.001000
± 0.09	0.008	± 0.000729
± 0.05	0.0025	± 0.000125
± 0.01	0.0001	± 0.000001

De fato, é imediato concluir que a função f_2 vai a zero mais rápido que f_1 que também vai a zero mais rápido do que h. Deve-se observar que os quocientes $\frac{|f_2(h)|}{|f_1(h)|} = \frac{|f_1(h)|}{|g(h)|} = |h|$ e $\frac{|f_2(h)|}{|g(h)|} = |h|^2$ tendem a zero quando h tende a zero e, portanto, $f_2(h) = o(f_1(h))$, $f_1(h) = o(g(h))$ e $f_2(h) = o(g(h))$, resultado que pode ser extrapolado para funções do tipo $f_3(h) = h^{1+\delta}$, com $\delta > 0$.

Após algumas atividades e a apropriação deste conceito pelos aprendentes, podemos introduzir o conceito de derivada via a definição alternativa:

Definição 4: (alternativa) Sejam $x_0 \in \Omega$ e $f : \Omega \subset \Re \to \Re$. $\dot{f}(x_0)$ é a **derivada** de $f(x)$ em $x_0 \in \Omega$, se a seguinte expansão pode ser escrita

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h\dot{f}(x_0) + o(h), \tag{3}$$

para h suficientemente pequeno. Neste caso, diz-se que $f(x)$ é diferenciável no ponto x_0.

A noção *suficientemente pequeno,* inerente ao Cálculo Diferencial desde seus primórdios e por tantas vezes controversa na história da matemática, deve ser introduzida a partir de exemplos elucidativos. A interpretação geométrica fornece alguns elementos que tem apelo a esta definição, como ilustrado na seção abaixo.

Interpretações da Derivada Via Definição Alternativa

Vamos admitir que $f(x)$ seja derivável no ponto x_0 e vamos analisar o comportamento da expansão dada pela Eq. 2 em um intervalo (suficientemente pequeno) $I = (x_0 - h, x_0 + h)$. A interpretação que decorre imediatamente da definição alternativa é considerar que $f(x_0 + h)$ pode ser aproximado por $f(x_0) + h\dot{f}(x_0)$ para qualquer ponto $x_0 \in I$, a menos de um pequeno erro $o(h)$. Consideremos um simples exemplo numérico para auxiliar esta interpretação:

Exemplo 2: Seja $f(x) = x^2$. Temos que $f(x+h) = (x+h)^2$. Assim,

$f(x+h) = x^2 + h2x + h^2$. Como $h^2 = o(h)$, obtemos facilmente[5] a derivada dada por $\dot{f}(x) = 2x$. Tomando-se $x_0 = 1$, temos $f(x_0) = 1$, $\dot{f}(x_0) = 2$ e o seguinte resultado, para alguns valores de h:

Tabela 2. Valores exatos e aproximados de $f(x) = x^2$ em $x_0 = 1$ para vários valores de h.

h	valor exato $f(x_0 + h)$	valor aproximado $\approx f(x_0) + h\dot{f}(x_0)$
0.3	1.69	1.60
-0.3	0.49	0.40
0.2	1.44	1.40
-0.2	0.64	0.60
0.1	1.21	1.20
-0.1	0.81	0.80
0.05	1.102	1.10
-0.05	0.9025	0.90
0.01	1.0201	1.02
-0.01	0.9801	0.98

No gráfico abaixo, podemos observar que os pontos obtidos da aproximação têm como reta suporte a reta tangente ao gráfico de $f(x_0)$ no ponto $(x_0, f(x_0))$. Mais ainda, devemos destacar que o coeficiente angular desta reta tangente[6] é dado por

[5] Note que evitamos assim o uso de um limite indeterminado para obtenção da derivada como se obtém quando se utiliza o quociente de Newton.

[6] Considerando-se a definição clássica, esta interpretação é construída com a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0))$ sendo aproximada por retas secantes nos pontos $(x_0, f(x_0))$ e $(x_0 + h, f(x_0))$ quando h se

$\dot{f}(x_0)$.

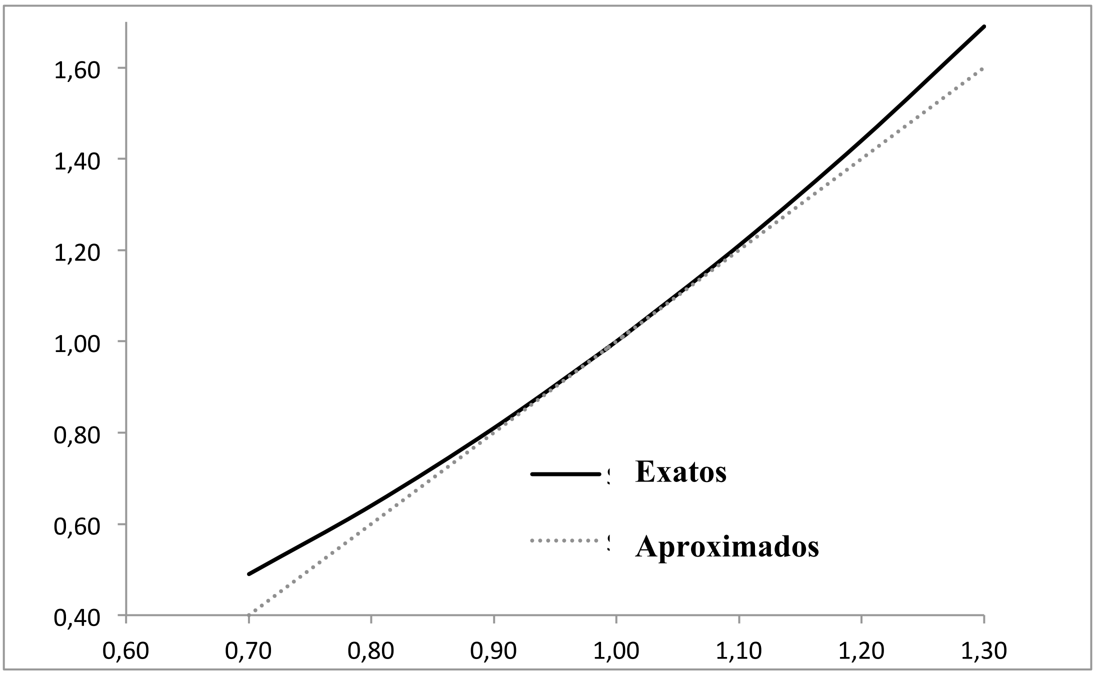

Gráfico 1. Gráfico de $f(x) = x^2$ e valores aproximados por $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + h\dot{f}(x_0)$ em $x_0 = 1$, para vários valores de h.

Deve ficar claro para o aluno que o termo $o(h)$ pode ser desconsiderado (para h pequeno), já que o mesmo continua pequeno mesmo quando dividido pelo termo pequeno h. No exemplo acima, fica evidenciado que o valor do erro da aproximação, dado por $o(h)$, torna-se cada vez menor quando h se aproxima de zero, como se observa na Tabela 2.

Observação 2: da aproximação $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + h\dot{f}(x_0)$ convém ainda observar que ao se fixar $h > 0$ o sinal da derivada determina se a função é crescente $(\dot{f}(x_0) > 0)$ ou decrescente $(\dot{f}(x_0) < 0)$, donde se pode deduzir a condição necessária

aproxima de zero. Por outro lado, pela definição alternativa, a reta tangente é a reta suporte da aproximação linear obtida quando se despreza o termo $o(h)$.

de ponto crítico.

Observação 3: Lagrange (1797) afirmava que toda função poderia ser expandida em uma série de potências como

$$f(x+h)=f(x)+hp(x)+h^2q(x)+h^3r(x)+\ldots \qquad (4)$$

exceto talvez em alguns valores isolados de *x*, sendo a derivada definida pelo termo *p(x).*

Com a noção atual do conceito de funções, sabe-se hoje que esta definição é válida apenas para certa classe de funções, sendo mais adequado fazer esta abordagem introduzindo-se a Série de Taylor. No entanto, além da semelhança com a definição alternativa, pode-se perceber no título da obra (*Théorie des fonctions analytiques contenant les principes du calcul différentiel dégagés de toute considération d'infiniment petits et d'évanouissans*, *de limites ou de fluxions et réduits à l'analyse algébrique des quantities finies*) a motivação para que o conceito de derivada ficasse livre de justificativas baseadas nos conceitos de infinitamente pequenos, evanescentes, limites e fluxões, como apresentados nas obras de Newton e Leibniz (Roque, 2012).

Embora as duas definições levem à maneiras distintas de se construir o conceito, elas são equivalentes, como ressaltado no seguinte lema:

Lema 1: As definições clássica e alternativa são equivalentes.

Demonstração: dada a expansão alternativa $f(x_0+h)=f(x_0)+h\dot{f}(x_0)+o(h)$, podemos rearranjar os termos, tal que $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\dot{f}(x_0)+\frac{o(h)}{h}$. Tomando-se o limite $h\to 0,$ segue-se que $\dot{f}(x)=f'(x)$. Logo, a definição alternativa implica na definição clássica. Por outro lado, considerando-se a definição clássica, temos que

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$ donde se segue que

$$f'(x)+\frac{o(h)}{h}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

desde que *h* seja suficientemente pequeno. Multiplicando-se por *h*, e rearranjando os termos, tem-se que $f(x_0+h)-f(x_0)=hf'(x)+o(h)$. E, portanto, $f'(x)=\dot{f}(x)$, ou seja, a definição clássica também implica na definição alternativa o que conclui a demonstração.

Uma função $f:\Omega\subset\Re\rightarrow\Re$ é dita diferenciável em Ω se as definições acima se aplicam para todo ponto $x\in\Omega$.

Ressalta-se, no entanto, que a abordagem alternativa evita a necessidade do cálculo de um limite indeterminado (do tipo $\frac{0}{0}$), como ocorre com a definição via o quociente de Newton, que constitui uma dificuldade adicional tanto para a introdução quanto para a apropriação deste saber pelos aprendentes. Abaixo, daremos exemplos para ilustrar algumas propriedades da derivada obtidas da definição alternativa. Um exercício recomendável é comparar os procedimentos para se obter estes mesmos resultados através da definição clássica.

Exemplos:

3) A função $f(x)=x^n$, onde n é inteiro positivo é diferenciável em toda a reta $\Re$.

Pela definição alternativa e utilizando-se o binômio de Newton, obtemos:

$$f(x_0+h) = (x_0+h)^n = \binom{n}{0}x_0^{\,n} + \binom{n}{1}hx_0^{\,n-1} + \sum_{j=2}^{n}\binom{n}{j}h^j x_0^{\,n-j},$$

donde,

$$f(x_0+h)=(x_0+h)^n = f(x_0)+hnx_0^{\,n-1}+h^2\sum_{j=2}^{n}\binom{n}{j}h^{j-2}x_0^{\,n-j},\ \ \forall x_0\in\Omega.$$

Amparados pelo exemplo 2), observamos que o último termo acima é $o(h)$ e temos que $\dot{f}(x_0)=nx_0^{\,n-1}, \forall x_0\in\Omega.$

4) A função $f(x)=|x|$ não é diferenciável no ponto $x_0=0.$

Pela definição alternativa, segue-se que se $h>0$, temos $f(0+h)=|0+h|=0+h$. Por outro lado, se $h<0$, temos $f(0+h)=|0+h|=0-h$, logo, dependendo do lado pelo qual *h* se aproxima de zero (pela direita ou pela esquerda), têm-se diferentes valores para a derivada (+1 ou -1, respectivamente) e, portanto, a derivada não existe na origem.

Sublinha-se ainda que a ideia de continuidade, intrinsecamente relacionada com o conceito de limite, deve ser abordada através de exemplos, até a construção da sua definição:

Definição 5: Uma **função** $f:\Omega\subset\Re\rightarrow\Re$ é dita **contínua** em $x_0\in\Omega$ se $\lim_{h\to 0} f(x_0+h)=f(x_0)$.

Neste ponto, deve-se destacar que o exemplo 4) é um caso clássico de que continuidade não implica em diferenciabilidade. No entanto, a recíproca é verdadeira, como se observa do seguinte resultado:

Proposição 1: Uma função $f:\Omega\subset\Re\rightarrow\Re$ diferenciável em $x_0\in\Omega$ é contínua em $x_0\in\Omega$.

A demonstração, através das definições clássica e alternativa é imediata. Vamos utilizar a demonstração alternativa, dado que a primeira pode ser encontrada facilmente na literatura.

Demonstração: Se f é diferenciável em $x_0\in\Omega$, temos que

$$\lim_{h\to 0} f(x_0+h)=f(x_0)+\lim_{h\to 0}(h\dot{f}(x_0)+o(h))=f(x_0).$$

Técnicas de Derivação

Nesta seção, iremos deduzir algumas técnicas de derivação, que sistematizam o cálculo de derivadas, utilizando a definição alternativa. Convém salientar que para duas funções $f(h)=o(h)$ e $g(h)=o(h)$, tem-se que $f(h)+g(h)=o(h)$ e $f(h)g(h)=o(h)$, como é fácil construir através de exemplos, bem como demonstrar.

As regras abaixo são válidas para todos os pontos onde as funções são diferenciáveis. Sejam $\alpha,\beta\in\Re$ e $u(x)$ e $v(x)$ funções diferenciáveis sobre o domínio

Ω.

Lema 2) A derivada da função constante é nula sobre toda a reta

Seja $u(x) = k$, onde $k \in \Re$ é uma constante.

Demonstração: temos que: $u(x+h) = k = u(x) + 0, \ \forall x \in \Re.$

Logo, $\dot{u}(x) = 0, \forall x \in \Re.$

Lema 3) Seja $[u+v](x) = u(x) + v(x)$. A derivada da soma de duas funções é a soma das derivadas destas funções.

Demonstração: temos que:

$$[u+v](x+h) = u(x+h) + v(x+h) = u(x) + h\dot{u}(x) + o(h) + v(x) + h\dot{v}(x) + o(h).$$

Donde, $$[u+v](x+h) = [u(x) + v(x)] + h[\dot{u}(x) + \dot{v}(x)] + o(h).$$

Logo, $$[u+\dot{v}](x) = \dot{u}(x) + \dot{v}(x), \ \forall x \in \Omega.$$

Lema 4) Seja $[uv](x) = u(x)v(x)$. A derivada do produto de duas funções diferenciáveis é dada pela fórmula:

$$[u\dot{v}](x) = \dot{u}(x)v(x) + u(x)\dot{v}(x), \forall x \in \Omega.$$

Demonstração: temos que:

$$[uv](x+h) = u(x+h)v(x+h) = (u(x) + h\dot{u}(x) + h\dot{u}(x)o(h))(v(x) + h\dot{v}(x) + o(h)).$$

Donde se segue, $$[uv](x+h) = u(x)v(x) + h(\dot{u}(x)v(x) + u(x)\dot{v}(x)) + h^2\dot{u}(x)\dot{v}(x) + o(h)o(h),$$

e, finalmente, $$[uv](x+h) = [uv](x) + h(\dot{u}(x)v(x) + u(x)\dot{v}(x)) + o(h).$$

Logo, $$[u\dot{v}](x) = \dot{u}(x)v(x) + u(x)\dot{v}(x), \forall x \in \Omega.$$

Lema 5) Seja $[\frac{u}{v}](x) = \frac{u(x)}{v(x)}$, $\forall x \in \Omega$ tal que $v(x) \neq 0$. A derivada do quociente de duas funções diferenciáveis é dada pela fórmula:

$$[\dot{\frac{u}{v}}](x) = \frac{\dot{u}(x)v(x) - u(x)\dot{v}(x)}{v^2(x)}, \forall x \in \Omega \text{ tal que } v(x) \neq 0.$$

Demonstração:

Por definição, $\frac{u(x+h)}{v(x+h)} = \frac{u(x) + h\dot{u}(x) + o(h)}{v(x) + h\dot{v}(x) + o(h)}$,

calculando-se a diferença com o termo $\frac{u(x)}{v(x)}$, obtemos

$$\frac{u(x) + h\dot{u}(x) + o(h)}{v(x) + h\dot{v}(x) + o(h)} = \frac{u(x)}{v(x)} + \frac{h[\dot{u}(x)v(x) - u(x)\dot{v}(x)] + o(h)}{v(x)(v(x) + h\dot{v}(x) + o(h))},$$

novamente, fazendo-se a diferença com o termo $\frac{h[\dot{u}(x)v(x) - u(x)\dot{v}(x)]}{v^2(x)}$, obtemos

$$\frac{u(x) + h\dot{u}(x) + o(h)}{v(x) + h\dot{v}(x) + o(h)} = \frac{u(x)}{v(x)} + h\frac{\dot{u}(x)v(x) - u(x)\dot{v}(x)}{v^2(x)} + \frac{o(h)}{v^3(x)(v(x) + h\dot{v}(x) + o(h}$$

donde $$[\dot{\frac{u}{v}}](x) = \frac{\dot{u}(x)v(x) - u(x)\dot{v}(x)}{v^2(x)}.$$

Observação 4: Comparando-se as demonstrações dos Lemas 2 a 6 utilizando as definições alternativa ou clássica (esta última através de algum livro didático, como, por exemplo, o Leithold (1994)), observa-se que as primeiras além de serem mais simples, não se utilizam de "truques" como somar e subtrair um termo adequado para se deduzir as regras do produto e do quociente (Lemas 4 e 5). Embora seja importante conhecer alguns artifícios para sua utilização em demonstrações, sobretudo para estudantes do curso de Matemática, é bastante conveniente apresentar um caminho menos artificial na introdução e construção dos conceitos, o que justifica a definição alternativa como um facilitador do processo e de ensino e aprendizagem.

Conclusões

Neste trabalho, foram observadas duas abordagens para a construção do conceito de derivada: a primeira, denominada de definição clássica e largamente encontrada nos textos didáticos de Cálculo e a segunda, denominada neste trabalho por definição alternativa, dada pelo segundo termo da expansão de uma função. Embora as duas definições sejam equivalentes, observa-se que a definição alternativa perpassa algumas dificuldades técnicas sobre o conceito e o cálculo de limites indeterminados, que devem ser enfrentadas quando se opta pela definição clássica de derivada. Estas dificuldades acerca do conceito de limites constituem uma dificuldade adicional para a apropriação do conceito de derivada. Além do mais, as regras de derivação podem ser obtidas de maneira mais simples e direta através da definição alternativa. Como observado previamente, o conceito de derivada proposto por Newton e Leibniz no século XVIII antecipou-se aos conceitos atuais de limite e função, que foram formalizados apenas no século XIX, por Cauchy e Riemann, respectivamente.

Em geral, a História da Matemática aponta na direção da construção dos conceitos da forma mais natural e intuitiva. Assim, alterar a sequência histórica em benefício da estética da apresentação e do formalismo matemático é uma sistematização precoce, que além de colocar o estudante em uma atitude passiva em relação à aprendizagem, afasta-o das motivações iniciais. De fato, muitos conceitos do Cálculo advêm de problemas da Física e da Engenharia, que poderiam despertar um maior interesse do aluno, bem como enriquecer sua formação interdisciplinar. Em particular, destaca-se a abordagem adotada por Newton em seu Método das Fluxões (Newton, 1736), que foi apresentada com bastante apelo intuitivo e que guarda analogia com a definição que foi denominada de alternativa, neste trabalho.

Cabe ainda ressaltar que a definição alternativa herda de forma muito natural todas as propriedades da série de Taylor e suas conveniências para o desenvolvimento de métodos numéricos, sendo, portanto, bastante adequada para o ensino moderno, já que com a popularização dos computadores nas últimas décadas, a Matemática Computacional tem se consolidado como uma forte tendência para o ensino e para a pesquisa. A presente metodologia, portanto, tem forte potencial para ser utilizada tanto em cursos introdutórios como em cursos focados nas aplicações, tanto do ponto de vista da modelagem quanto do ponto de vista dos métodos numéricos.

Finalmente, como trabalhos futuros serão desenvolvidos métodos numéricos através da definição alternativa e será realizado um levantamento com estudantes e professores de cursos introdutórios de Cálculo, com a finalidade de analisar suas percepções sobre a complexidade, vantagens e desvantagens de cada uma das propostas para a construção do conceito de derivada.

Referências Bibliográficas

Ávila, G. (2002). O Ensino do Cálculo e da Análise. *Revista Matemática Universitária*, 33, 83-95.

Baron, M. E. (2004). *The origins of the infinitesimal calculus*. Mineola: Dover Publications.

Boyer, C. (1991). *História da Matemática*. São Paulo: Edgard Blücher.

Carvalho, T. F. & D'Ottaviano, I. M. L. (2012). Calculus infinitesimalis: uma teoria entre a razão e o mito? *Ciênc. educ. (Bauru), 18*(4).

Cauchy, A. L. (1992). *Cours d'analyse algébrique* (reimpressão do original de 1821). Bologna: Clueb.

Cornu, B. (1991). Limits. In D. Tall (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 153-166). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Euclides (2009). *Os "Elementos" de Euclides*. São Paulo: Unesp.

Grabiner, J. V. (1981). *The origins of Cauchy's rigorous calculus*. Cambridge, Mass.: MIT.

Griffel, D. H. (2002). *Applied Functional Analysis*. New York: Dover.

Hairer, E. & Wanner, G. (1996). *Analysis by Its History. Undergraduate Texts in Mathematics*. New York: Springer-Verlag.

Kleiner, I. (1989). Evolution of the Function Concept: A Brief Survey. *The College Mathematics Journal,* 20(4), 282-300.

Lagrange, J-L. (1787). *Théorie* des *fonctions analytiques contenant* les *principes* du *calcul différentiel dégagés* de *toute considération* d'*infiniment petits* et d'*évanouissans*, de *limites* ou de fluxions et réduits à l'analyse algébrique des quantities finies. Paris: Impr. de la République, prairal an V [1797]. (Pre-1801 Imprint Collection (Library of Congress)).

Leithold, L. (1994). *O Cálculo com Geometria Analítica*. São Paulo: Ed. Harbra.

Meli. D. B. (1996). *Equivalence and Priority*. Oxford: University Pres.

Newton, I. (1736). *The Method of Fluxions and Infinite Series: With Its Application to the Geometry of Curve-lines*. Henry Woodfall.

Roque, T. (2012). *História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas.* Rio de Janeiro: Zahar.

Villarreal, M. E. (1999). *O Pensamento Matemático de Estudantes Universitários de Cálculo e Tecnologias Informáticas*. [Doutorado em Educação Matemática apresentada na UNESP].