

## **A MODELAGEM MATEMÁTICA APLICADA ÀS QUESTÕES AMBIENTAIS: UMA ABORDAGEM DIDÁTICA NO ESTUDO DA PRECIPITAÇÃO PLUVIOMÉTRICA E DA VAZÃO DE RIOS**

JÚLIO CÉSAR PENEIREIRO <sup>(1)</sup>

DENISE HELENA LOMBARDO FERREIRA <sup>(1)</sup>

<sup>(1)</sup> Docente e pesquisador(a) titular do CEATEC – Pontifícia Universidade Católica de Campinas – Brasil.

(e-mail: jcp@puc-campinas.edu.br e lombardo@puc-campinas.edu.br)

### **Resumo**

A presente pesquisa tem como meta usar a modelagem matemática como uma estratégia para abordagem de problemas do meio ambiente, empregando conteúdos matemáticos e estatísticos, além dos recursos da informática, para identificar possíveis tendências nos índices de precipitações pluviométricas e de vazões em alguns rios distribuídos pelo Estado de São Paulo, Brasil. Para tanto, emprega-se a estatística paramétrica com aplicação da análise de regressão, além da estatística não paramétrica por meio dos testes de Mann-Kendall e de Pettitt. Todas as atividades foram desenvolvidas em um ambiente extra-classe com a participação de um grupo de estudantes universitários. Ao longo do desenvolvimento da pesquisa surgiram várias questões, gerando discussões e reflexões a respeito dos conteúdos utilizados, implicando em interpretações relacionadas aos problemas ambientais.

**Palavras-chave:** educação ambiental; modelos matemáticos e estatísticos; precipitação pluviométrica; vazões de rios.

### **Abstract**

The following research has as aim the use of the mathematical modelling as a strategy while taking into consideration the environmental problems, using mathematic and statistic contents, apart from web resources, to identify

possible tendencies in the rainfall's indices and flow's indices in some rivers distributed in the São Paulo state, Brazil. To do so, the parametric statistic with application of the analysis of regression is used, besides the non-parametric statistic through the tests of Mann-Kendall and Pettitt. All the activities were developed in an extra-class environment with the participation of a group composed by university students. Over the development of the research, many questions emerged, promoting discussions and reflexions considering the contents used, implying in interpretations related to the environmental problems.

**Keywords:** environmental education; mathematical and statistical models; rainfall; rivers flows.

## 1 – Introdução

Em geral, estudantes de diferentes áreas apresentam dificuldades em conteúdos matemáticos e estatísticos. Isto pode estar relacionado com as tensões presenciadas por eles no ensino e aprendizagem de conteúdos matemáticos nas séries iniciais, ou mesmo devido à ausência em relacionar os conteúdos da sala de aula com a realidade vivenciada por eles. As experiências pedagógicas mostram que a conexão dos conteúdos vistos na sala de aula com a realidade do estudante por meio de assuntos de seu interesse, do mundo do trabalho ou da área do curso que atua, pode possibilitar uma aprendizagem mais significativa e menos estressante.

O trabalho pedagógico com a Modelagem Matemática (MM) constitui em um importante instrumento de aplicação da Matemática para resolver problemas reais, uma vez que gera necessidades para o levantamento de dados e para simplificações das situações da realidade. Segundo Bassanezi (2002, 16): “A Modelagem Matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los, interpretando suas soluções na linguagem do mundo real”. Nesse ambiente, os estudantes desenvolvem projetos e as ações são voltadas à experimentação, visualização, interpretação, previsão. Isso pressupõe empenho e até mesmo o desejo em explorar coisas novas, tendo como consequência a produção de conhecimento.

Quando se trabalha com projetos práticos pode-se favorecer a construção de um ambiente onde os estudantes são estimulados a realizarem simulações e fazer analogias, na medida em que um determinado modelo pode ser útil na representação de diferentes situações. Isso acaba por auxiliar os estudantes na identificação de aplicações em outras áreas do conhecimento e em diferentes contextos. Carvalho (2009) deixa esse

ponto claro ao destacar que atividades com projetos práticos podem beneficiar os estudantes no sentido de produzirem novas informações a partir da leitura e da interpretação dos dados.

A MM também se identifica com uma perspectiva pedagógica focada na formação da cidadania, além das consciências política e social do estudante. Ela busca valorizar as habilidades individuais necessárias para uma efetiva participação em uma sociedade democrática e, similarmente ao pensamento de Skovsmose (2008), ao enfatizar a avaliação crítica das práticas que envolvem a Matemática, levando em consideração o ambiente cultural a que os estudantes pertencem.

Neste contexto, o papel da Tecnologia da Informação é visto como um componente indispensável no trabalho com a MM; quer como ferramenta de apoio operacional, quer como instrumento que venha contribuir para a superação de vários desafios frequentemente encontrados nas salas de aulas tradicionais, tais como o desinteresse do estudante e a falta de habilidades apropriadas para o mercado de trabalho.

A utilização da tecnologia na prática docente pode contribuir para criar ambientes de aprendizagem propícios à discussão e investigação, à experimentação, à elaboração, verificação e validação de conjecturas. O aspecto visual das representações matemáticas e da experimentação proporcionadas nesses ambientes pode favorecer a apropriação de conhecimentos matemáticos. Nessa perspectiva, Richit e Maltempi (2010) assinalam que o trabalho envolvendo projetos e tecnologias pode favorecer o estudante a construir seus conhecimentos de acordo com o seu ritmo.

Por outro lado, o uso de conteúdos matemáticos e estatísticos para descrever e interpretar dados específicos de várias áreas constitui-se numa poderosa ferramenta para a solução de problemas reais e para a fundamentação de decisões. Neste contexto, torna-se interessante envolver a Matemática, a Estatística e as Tecnologias em questões relacionadas ao Meio Ambiente, pois essa união pode apresentar um caminho promissor para despertar um maior interesse dos estudantes pelo aprendizado dessas Ciências, tornando-os mais conscientes, críticos e reflexivos no tocante à problemática ambiental.

A questão ambiental considerada no presente trabalho está relacionada com as mudanças climáticas, tendo em vista que elas representam um tema de grande relevância, sendo alvo de preocupação e discussão tanto por parte do meio científico-acadêmico, quanto de organizações ambientais e da sociedade como um todo, em decorrência de todas as implicações de âmbito econômico, social e ambiental que elas desencadeiam. Uma possibilidade de compreender o clima em nível global, além do uso de satélites, pode ser realizada ao se conhecer a variabilidade dos elementos climáticos em nível local e/ou regional, como enfatizou Paciornik (2003).

A pesquisa aqui apresentada foi desenvolvida como uma atividade extra-classe envolvendo estudantes de um curso de Engenharia Ambiental. O objetivo foi usar conteúdos matemáticos e estatísticos, além dos recursos da informática, para identificar tendências anuais nos índices de precipitação pluviométrica e vazão em alguns rios espalhados pelo Estado de São Paulo, Brasil.

Os conteúdos matemáticos e estatísticos aqui abordados envolveram o emprego da Estatística Paramétrica, com aplicação da análise de regressão, e da Estatística Não Paramétrica. Essa última é uma área da Estatística que normalmente não é contemplada nos currículos de graduação universitária. Foram usados os testes de Mann-Kendall (Sneyers, 1975) e de Pettitt (Pettitt, 1979) por serem os procedimentos estatísticos apropriados para analisar mudanças climáticas, além de permitirem detectar e localizar, de forma precisa, o ponto inicial de uma determinada tendência num parâmetro climatológico (Goossens; Berger, 1986). Ao longo da pesquisa aqui relatada, os usos desses testes, por meio de uma aplicação em MM, suscitaram a elaboração de muitas questões e discussões sobre o emprego dos conteúdos estatísticos explorados, além dos resultados encontrados possibilitarem novas interpretações relativas às questões ambientais.

## **2 – Metodologia**

O trabalho de pesquisa envolveu a participação de cinco estudantes, três do período matutino e dois do noturno, ambos do quarto semestre do curso de Engenharia Ambiental de uma Instituição de Ensino Superior. Ao longo de quatro meses de atividades ocorreram encontros envolvendo os estudantes, sendo cada encontro com duração de aproximadamente duas horas e frequência de duas vezes por semana.

Foram utilizados os dados das precipitações pluviométricas e das vazões de rios em algumas localidades dispersas ao longo do Estado de São Paulo. Os dados de precipitações e vazões correspondem às séries temporais anuais das medidas realizadas nas estações medidoras do Instituto Agrônomo de Campinas (IAC) e no Sistema de Informações para o Gerenciamento de Recursos Hídricos (SigRH)<sup>1</sup>. A Figura 1 mostra os locais onde foram coletadas as medidas utilizadas nesse trabalho. As informações de cada cidade (para a precipitação) e o rio (para a vazão) que corta a correspondente região estão apresentadas na Tabela 1, além de incluir a distância até a estação do IAC/Campinas e cada série temporal com os períodos dos dados trabalhados. Esses períodos abrangem intervalos de tempo variáveis, dependendo da localidade estudada.

---

<sup>1</sup> Disponíveis nos endereços eletrônicos: <<http://www.ciiagro.sp.gov.br/>> (para o IAC) e <http://www.sigrh.sp.gov.br/> (para o SigRH).



Do ponto de vista matemático, empregando o apoio da informática, optou-se em organizar e trabalhar todas as informações por meio de planilhas do programa *Microsoft Excel*, uma vez que entre os estudantes era o programa mais disseminado e de mais fácil acesso.

Para cada série temporal anual, foi realizada uma suavização dos dados por meio do cálculo da média empregando a relação:

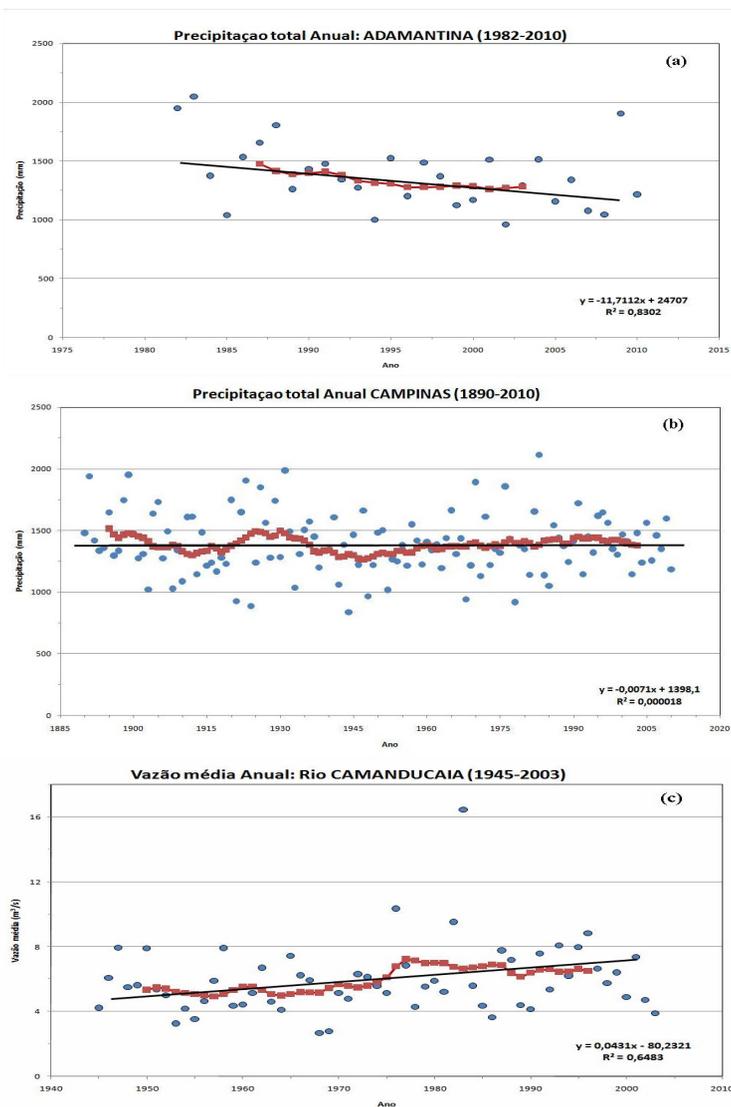
$$\bar{V}_n = \frac{1}{6} \left[ \sum_{i=n-2}^{n+2} V_i + \frac{1}{2}(V_{n+3} + V_{n-3}) \right] \quad (1)$$

Nessa relação,  $(\bar{V}_n)$  representa o valor médio da variável climática em estudo para o  $i$ -ésimo mês  $(V_i)$ . Esse procedimento foi motivado pelo fato de permitir evitar possíveis flutuações impostas pelos dados (SELLO, 1999). Dessa maneira, trabalha-se com uma suavização desses dados e, assim, pode-se realizar uma análise de tendência da variável com boa precisão, como é discutido a seguir.

## 2.a – Análise de Regressão

O primeiro teste, empregando a estatística paramétrica, foi da Análise de Regressão. Por meio da regressão linear aplicada a cada variável os estudantes podem identificar o comportamento da série temporal e ter uma primeira ideia do comportamento da eventual tendência. Do ponto de vista matemático, define-se a série de dados pela variável  $Y$  (precipitação ou vazão), no tempo  $t$  (ano). Assim,  $Y$  é uma função de  $t$  representada por  $Y = f(t)$ .

Com o intuito de avaliar apenas o deslocamento de tendência, foi empregada suavização aos dados (eq. 1) para posterior uso da regressão linear. Essa tarefa foi contemplada com o uso da *ferramenta gráfica* do *Excel* com a opção de *ajuste da linha de tendência*. Nesse cálculo utilizou-se a equação da reta de tendência ( $y = a(x) + b$ ), onde  $a$  é o coeficiente angular da reta e, no caso,  $x = t$ . A Figura 2 ilustra três situações com comportamentos diferentes de cada série temporal estudada. O gráfico da Figura 2a mostra o decréscimo do índice de precipitação para a localidade de Adamantina no período de 1982 a 2010; o gráfico da Figura 2b revela o comportamento estável do índice de precipitação para a localidade de Campinas no período de 1890 a 2010, enquanto que o gráfico da Figura 2c mostra o aumento da vazão do rio Camanducaia no período de 1945 a 2003.



**Figura 2** – (a) Precipitação pluviométrica para Adamantina (comportamento decrescente), (b) Precipitação pluviométrica para Campinas (comportamento estável) e (c) Vazão para o rio Camanducaia (comportamento crescente): regressão linear (método da suavização com pontos em vermelho e em azul os valores registrados pelas estações medidoras).

A Tabela 2 apresenta um resumo dos parâmetros de todos os ajustes realizados da amostra estudada. Na tabela são colocadas as localidades e os rios que passam próximos a essas, as variáveis analisadas, bem como o coeficiente angular (a), o poder de ajuste ( $R^2$ ) e o intervalo de confiança (IC) dessas variáveis.

**Tabela 2** - Resultados da análise de regressão linear pela suavização dos dados.

Cidade/Rio	Série	a	R <sup>2</sup>	IC (95%)
Adamantina (Rio Aguapei)	Precipitação	-11,7112	0,8302	-14,6334 a - 8,8016
	Vazão	+ 0,5482	0,8493	+ 0,4803 a + 0,6175
Campinas (Rio Atibaia)	Precipitação	- 0,0071	0,0001	- 0,3527 a + 0,3368
	Vazão	- 0,0867	0,6473	- 0,1048 a - 0,0694
Monte Alegre do Sul (Rio Camanducaia)	Precipitação	+ 1,9728	0,8286	+ 2,9064 a + 3,7299
	Vazão	+ 0,0431	0,6483	+ 0,0340 a + 0,0533
Pindamonhagaba (Rio Paraíba do Sul)	Precipitação	+ 5,5218	0,5776	+ 4,1045 a + 6,9401
	Vazão	+ 1,6771	0,7002	+ 1,2350 a + 2,1199
Ribeirão Preto (Rio Pardo)	Precipitação	+ 2,1708	0,2725	+ 1,2549 a + 3,0872
	Vazão	+ 1,2987	0,6451	+ 1,0165 a + 1,5821
Limeira (Rio Piracicaba)	Precipitação	+ 0,4442	0,0355	- 0,1389 a + 1,0282
	Vazão	- 0,1062	0,0197	- 0,1162 a + 0,3293
Pariquera-Açú (Rio Ribeira de Iguape)	Precipitação	+ 5,2821	0,5201	+ 3,6609 a + 6,9042
	Vazão	+ 0,8329	0,3719	+ 0,5208 a + 1,1404
Tatuí (Rio Sorocaba)	Precipitação	+ 3,5872	0,5872	+ 2,8037 a + 4,3707
	Vazão	+ 0,5138	0,6684	+ 0,3796 a + 0,6501
Itararé (Rio Taquari)	Precipitação	+ 6,1131	0,3402	+ 2,1425 a +10,0845
	Vazão	+ 0,0478	0,5622	+ 0,0341 a + 0,0625
Votuporanga (Rio Turvo)	Precipitação	-12,9827	0,9692	-14,8099 a -11,0499
	Vazão	+ 0,2039	0,2699	+ 0,0518 a + 0,3569

## 2.b – Teste de Mann-Kendall

Como abordado anteriormente, o teste sequencial de Mann-Kendall, proposto inicialmente por Sneyers (1975), é o método mais apropriado para analisar mudanças climáticas e, segundo Goossens e Berger (1986), ele permite detectar e localizar de forma aproximada o ponto inicial de determinada tendência. Neste teste, considera-se que, na hipótese de estabilidade de uma série de dados, a sucessão de valores ocorre de forma independente, e a distribuição de probabilidade deve permanecer sempre a mesma (série aleatória simples).

Moraes *et. al.* (1995) descrevem o método considerando uma série temporal de  $Y_i$  de  $N$  termos  $1 \leq i \leq N$  a ser analisada. Esse teste consiste na soma  $t_n = \sum_{i=1}^N m_i$  do número de termos  $m_i$  da série, relativo ao valor  $Y_i$  cujos termos precedentes ( $j < i$ ) são inferiores ao mesmo ( $Y_j < Y_i$ ). Para séries com grande número de termos ( $N$ ), sob a hipótese nula ( $H_0$ ) de ausência de tendência,  $t_n$  apresentará uma

distribuição normal com média e variância dadas, respectivamente, por:  
$$E(t_n) = \frac{N(N-1)}{4} \text{ e } \text{var}(t_n) = \frac{N(N-1)(2N+5)}{72}.$$

Testando a significância estatística de  $t_n$  para a hipótese nula, usando um teste bilateral, esta pode ser rejeitada para grandes valores da estatística  $U(t_n)$  através da equação dada por:

$$U(t_n) = \frac{(t_n - E(t_n))}{\sqrt{\text{var}(t_n)}}. \quad (2)$$

O valor da probabilidade  $\alpha_1$  é calculado por meio de uma tabela da normal reduzida, tal que:  $\alpha_1 = \text{prob}(|U| > |U(t_n)|)$ . Sendo  $\alpha_0$  o nível de significância do teste, a hipótese nula é aceita se  $\alpha_1 > \alpha_0$ . Caso a hipótese nula seja rejeitada, implicará a existência de tendência significativa, sendo que o sinal da estatística  $U(t_n)$  indica se a tendência é crescente ( $U(t_n) > 0$ ) ou decrescente ( $U(t_n) < 0$ ).

O ponto de início de uma mudança na série pode ser determinado aplicando-se o mesmo princípio à série inversa. Neste caso, em sua versão sequencial, a eq. (2) é calculada no sentido direto da série, partindo do valor  $i = 1$  até  $i = N$ , gerando a estatística  $-1,96 < U(t_n) < 1,96$  (1,96 corresponde a  $\alpha_0 = 0,05$ ), e, no sentido inverso da série, partindo do valor  $i = N$  até  $i = 1$ , gerando a estatística  $U^*(t_n)$ . A interseção das duas curvas  $U(t_n)$  e  $U^*(t_n)$  é onde se localiza o ponto aproximado de mudança de tendência, se esse ponto ocorre dentro do intervalo de confiança  $-1,96 < U(t_n) < 1,96$ .

### 2.c – Teste de Pettitt

O teste de Pettitt (Pettitt, 1979; Moraes *et. al.*, 1995), também é um teste não-paramétrico que utiliza uma versão do teste de Mann-Whitney, em que se verifica se duas amostras  $Y_1, Y_2, \dots, Y_t$  e  $Y_{t+1}, Y_{t+2}, \dots, Y_T$  são da mesma população. A estatística  $U_{t,T}$  faz uma contagem do número de vezes que um membro da primeira amostra é maior que um membro da segunda e pode ser escrita de acordo com a equação:

$$U_{t,T} = U_{t-1,T} + \sum_{j=1}^T \text{sgn}(Y_i - Y_j); \text{ para } t = 2, \dots, T; \quad (3)$$

onde:  $\text{sgn}(x) = 1$  para  $x > 0$ ;  $\text{sgn}(x) = 0$  para  $x = 0$  e  $\text{sgn}(x) = -1$  para  $x < 0$ .

A partir disso, a estatística  $U_{t,T}$  é então calculada para valores de  $1 \leq t \leq T$ , sendo que a estatística  $K(t)$  do teste é o máximo valor absoluto de  $U_{t,T}$ . Essa estatística localiza o ponto em que houve uma mudança brusca na média de uma série de dados e sua significância pode ser avaliada através da equação:

$$p \cong 2e^{\left(\frac{-6(K(t))^2}{(T^3+T^2)}\right)} \quad (4)$$

O ponto de mudança brusca é o valor para  $t$  onde ocorre o máximo de  $K(t)$ . A eq. (4) permite inferir os valores críticos de  $K_{crit.}$  por meio da relação:

$$K_{crit.} = \pm \sqrt{\frac{-\ln\left(\frac{p}{2}\right)(T^3 + T^2)}{6}} \quad (5)$$

O nível de significância da mudança para ambos os testes é estimado para os níveis de 5% e 10%.

### 3 – Resultados

Ao longo da pesquisa os estudantes puderam observar que, embora as análises de regressão por meio de cálculos e gráficos representem possibilidades de tendências das séries de dados estudados, os intervalos de confiança empregados para esse tipo de análise se tornam limitados para tomar a decisão se a amostra sofre ou não tendência. Após isso, eles realizaram algumas pesquisas e concluíram que análises mais detalhadas e adequadas podem ser realizadas por meio da Estatística Não Paramétrica, como a aplicação dos testes de Mann-Kendall e Pettitt.

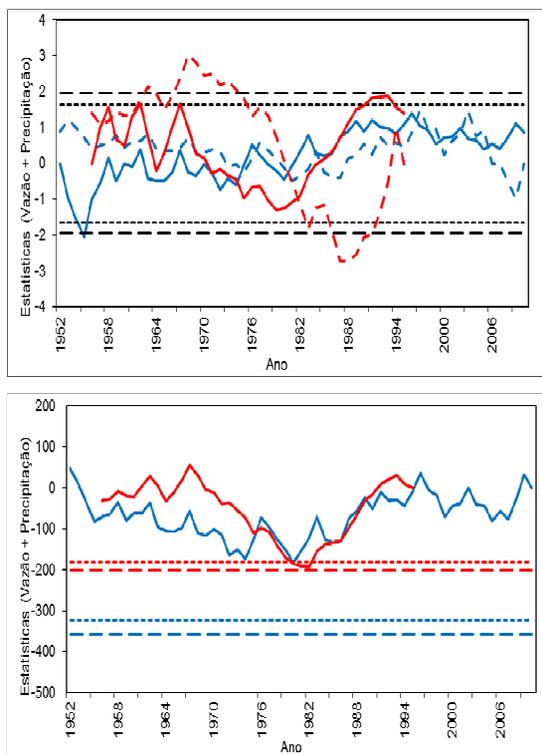
Para executar as análises estatísticas foram desenvolvidos diversos procedimentos por meio de planilhas do *Excel*, empregando diferentes recursos de

funções, de lógicas, de estatística e de gráficos desse *software*, tais como no ícone  $f_x$ : Média, Desvpad, Cont.se, Procv, Cont.núm, se, Tipo de tendência, Exibir equação no gráfico, Exibir valor de r-quadrado no gráfico, dentre outras.

As formas gráficas dos testes de Mann-Kendall e de Pettitt para a precipitação em duas localidades estudadas estão apresentadas na Figura 3. Em ambos os testes, as linhas horizontais pontilhadas representam os limites críticos dos intervalos de confiança de 90 e 95%. Vale ressaltar que, no teste de Mann-Kendall, a tendência é significativa quando os valores absolutos de  $U(t_n)$  são maiores que os intervalos de confiança e o início dessa tendência pode ser identificado pela interseção das curvas  $U(t_n)$  (em traçados contínuos: azul, para precipitação e vermelho, para vazão) e  $U^*(t_n)$  (em traçados descontínuos das mesmas cores) nas Figuras 3 (à esquerda). Porém isso deve ocorrer dentro dos valores críticos dos intervalos de confiança (Grosso *et al.*, 2005; Peneireiro e Ferreira, 2011). Por outro lado, no teste de Pettitt (Figura 3, à direita e obedecendo as mesmas notações do teste anterior), o ponto de mudança brusca de  $K(t)$  (em módulo) ocorre quando este for maior que os limites críticos estabelecidos. No entanto, essa condição deixa de ser verdadeira quando os valores que estão em seguida ao valor crítico oscilam em intervalos próximos ao valor máximo. Neste caso, o último valor do intervalo de oscilação indica o ponto de início da tendência (Pettitt, 1979).

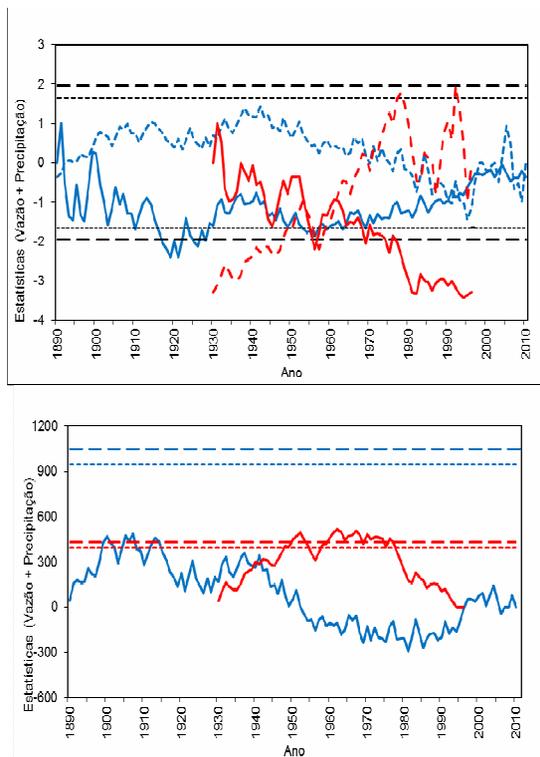
Por uma rápida inspeção nos gráficos da precipitação para a cidade de Pindamonhangaba e o rio Paraíba do Sul, é possível verificar que o teste de Mann-Kendall (Figura 3, à esquerda) acusa cruzamentos das curvas estatísticas de  $U(t_n)$  e  $U^*(t_n)$  entre os intervalos de confiança. Esses cruzamentos dão indícios de haverem tendências nessas variáveis. Um dos cruzamentos ocorre em 1980 para precipitação, enquanto que o outro ocorre em 1982 para vazão. Porém, somente essas constatações não são suficientes para afirmar se ocorreram tendências de crescimento ou decrescimento nessas variáveis, tornando necessário o uso do teste de Pettitt (Figura 3, à direita).

Para os dados de precipitação em Pindamonhangaba, o teste de Pettitt não identificou mudança significativa para a série, como é possível verificar na figura, visto que os valores de  $K(t)$  em nenhum momento cruzaram os intervalos de confiança. No caso da série de vazão para o rio Paraíba do Sul, os dados apontam uma “quebra” de tendência na precipitação em 1982 (quando a tendência de crescimento se tornou mais evidente para esse teste). Desta forma, as aplicações dos testes indicaram que somente houve aumento na vazão do rio, e não para a precipitação na região da cidade analisada.



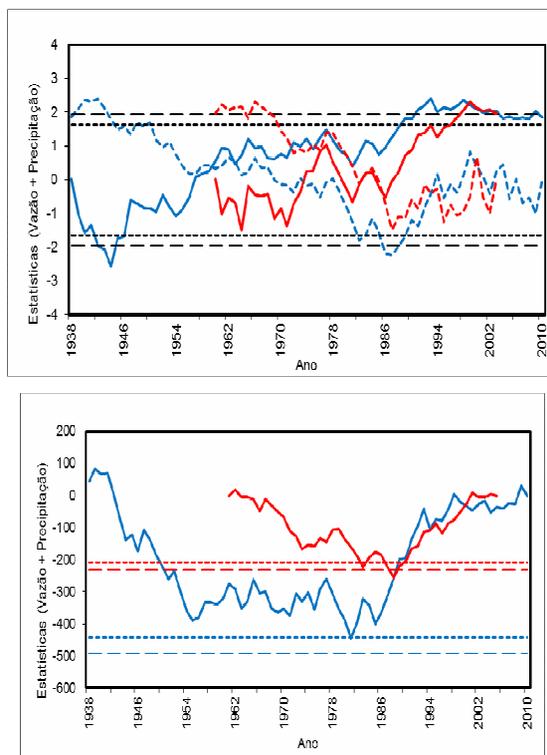
**Figura 3** – As estatísticas de Mann-Kendall (esquerda) e Pettitt (direita) para precipitações pluviométricas na cidade de Pindamonhangaba (em azul) e vazão para o rio Paraíba do Sul (em vermelho).

No caso da precipitação e vazão na região de Campinas, os gráficos da Figura 4 indicam que é possível verificar que o teste de Mann-Kendall (Figura 4, à esquerda) acusou cruzamentos das curvas estatísticas de  $U(t_n)$  e  $U^*(t_n)$  entre os intervalos de confiança. Novamente, esses cruzamentos dão indícios de haverem tendências nessas variáveis para a precipitação que ocorreu em 1992 e para a vazão que se deu em 1957. Entretanto, por meio do uso do teste de Pettitt (Figura 4, à direita), verifica-se que somente a série de dados de vazão está dentro do intervalo de confiança, indicando que apenas essa variável sofreu aumento de tendência a partir dessa data.



**Figura 4** – As estatísticas de Mann-Kendall (esquerda) e Pettitt (direita) para precipitações pluviométricas na cidade de Campinas (em azul) e vazão para o rio Atibaia (em vermelho).

No que concerne às séries de precipitação da cidade de Tatuí e da vazão do rio Sorocaba, as formas gráficas dos testes não paramétricos estão apresentadas na Figura 5. Para esses casos, verifica-se, em princípio, que as duas variáveis sofreram cruzamentos das curvas estatísticas, sendo registrado o ano de 1981 para precipitação, e 1986 para série com dados de vazão. Não obstante, para o teste adicional de Pettitt apenas a variável vazão apresentou quebra de tendência nessa data, confirmando que houve aumento de tendência.



**Figura 5** – As estatísticas de Mann-Kendall (esquerda) e Pettitt (direita) para precipitações pluviométricas na cidade de Tatuí (em azul) e vazão para o rio Sorocaba (em vermelho).

A Tabela 3 resume todas as análises efetuadas para todas as séries temporais de precipitação e vazão estudadas e avaliadas, empregando a Estatística Não Paramétrica. Na tabela são colocadas as localidades e rios que passam próximos a essas, além das variáveis analisadas, períodos dos dados trabalhados, resultados acusados por cada um dos testes (“dentro” e “fora”, para afirmar ou não se as curvas estatísticas estão entre os intervalos de confiança). A última coluna mostra a verificação se a tendência foi confirmada ou não, incluindo, também, o ano a partir do início da ocorrência.

Desta forma pode-se argumentar que os testes de Mann-Kendall e de Pettitt realizados para as variáveis precipitação e vazão indicaram que houve concordância entre os resultados, levando a concluir que esses testes podem ser empregados na identificação de tendências de séries temporais.

Uma análise superficial da tabela indica a diversidade de informações relacionadas à tendência das variáveis precipitação e vazão nas localidades estudadas.

Diante disso, diversas discussões foram desencadeadas ao longo das atividades entre os professores e estudantes interessados no tema. As discussões mais relevantes são apresentadas a seguir.

**Tabela 3 - Resumo das análises estatísticas empregando os testes Mann-Kendall e Pettitt para precipitação e vazão.**

Cidade	Rio	Série	Período	Mann-Kendall	Pettitt	Tendência
Adamantina (Luisiana)	Aguapei	Prec. Vazão	1982 – 2010 1948 – 2003	Dentro Dentro	Fora Dentro	(?) (+)1971
Campinas (Itatiba)	Atibaia	Prec. Vazão	1890 – 2010 1930 – 1996	Dentro Dentro	Fora Dentro	(?) (-)1957
Monte Alegre do Sul (Monte Alegre do Sul)	Camanducaia	Prec. Vazão	1943 – 2010 1945 – 2003	Dentro Dentro	Fora Fora	(?) (?)
Pindamonhagaba (Cachoeira Paulista)	Paraíba do Sul	Prec. Vazão	1952 – 2010 1956 – 1995	Dentro Dentro	Fora Dentro	(?) (+)1982
Ribeirão Preto (Ribeirão Preto)	Pardo	Prec. Vazão	1953 – 2010 1941 – 2001	Dentro Dentro	Fora Dentro	(?) (+)1971
Limeira (Piracicaba)	Piracicaba	Prec. Vazão	1934 – 2010 1944 – 2003	Dentro Dentro	Fora Fora	(?) (?)
Eldorado (Pariquera Açu)	Ribeira de Iguape	Prec. Vazão	1957 – 2010 1939 – 2001	Dentro Fora	Dentro Fora	(+)1995 (?)
Tatuí (Tatuí)	Sorocaba	Prec. Vazão	1938 – 2010 1960 – 2003	Dentro Dentro	Fora Dentro	(?) (+)1988
Itararé (Itapeva)	Taquari	Prec. Vazão	1977 – 2010 1947 – 1997	Dentro Dentro	Fora Fora	(?) (?)
Votuporanga (Olimpia)	Turvo	Prec. Vazão	1989 – 2010 1964 – 1998	Dentro Dentro	Fora Dentro	(?) (+)1973

(?) significa tendência não detectada; (+) tendência crescente e (-) tendência decrescente com o ano da ocorrência a seguir.

#### 4 – Discussões matemática, técnicas e reflexivas

Durante o desenvolvimento das investigações científicas visando encontrar a determinação da tendência numa série temporal de uma variável de interesse, os professores inquiriram os estudantes e diversos debates surgiram ao longo do período. Algumas dessas discussões envolvendo aspectos matemático (questões de conteúdos matemáticos e estatísticos), técnico (questões relacionadas ao aplicativo *Excel*) e

reflexivo (questões relacionadas ao meio ambiente) são transcritas abaixo<sup>2</sup>: Nesta seção são apresentadas essas discussões na forma de questões das atividades que utilizaram os testes estatísticos abordados e aplicados acima, possibilitando verificar as nuances da construção do conhecimento científico e as relações e interações entre estudantes e professores.

---

(A4): Por que é necessário suavizar os dados?

(P1): A suavização é necessária para evitar a dispersão dos dados.

(A4): Eu aprendi a fazer gráfico de regressão usando o programa *Estat D+*<sup>3</sup> não sei fazer a regressão pelo *Excel*, como se faz?

(P1): Com os dados brutos, faz-se uma suavização aos dados da série temporal e nesses aplica-se o *Excel* por meio da opção *ajuste da linha de tendência*, informa qual a função que deseja aproximar.

(A5): Qual a função que escolho?

(P1): A função de uma reta. Antes de concluir com a opção desejada para desenhar o ajuste linear dos pontos, deve-se solicitar que o *Excel* escreva a equação relacionada à reta ajustada, assim como o  $R^2$ , isto é, o poder de ajuste. Ele indica que quanto mais próximo de 1 for esse valor, melhor o ajuste efetuado aos pontos.

(A2): Por que escolher a reta e não outra função para ajustar os dados?

(P2): Além do ponto de vista matemático, a reta é a função mais simples de ser tratada.

(A3): A precipitação da cidade de Campinas para esse período apresenta tendência?

P1: Não. A figura mostra um padrão quase estável para essa variável, o coeficiente angular é quase zero e negativo (- 0,0071), significando uma ligeira inclinação.

(P2): Agora, calcule o intervalo de confiança para o coeficiente angular da reta pelo *Excel*. Admita 90% e 95% de confiança.

(A1): Como se faz isso no *Excel*?

---

<sup>2</sup> Para manter em sigilo os nomes dos estudantes utilizou-se A1, A2, A3 (matutino), A4, A5 (noturno) para identificá-los. Os professores foram representados com as letras P1 e P2.

<sup>3</sup> *Estat D+* é um aplicativo livre para trabalhar com conceitos relacionados com a Estatística, disponível em: <http://www.calculo.iq.unesp.br/estatistica.html>.

(P1): Para obter o intervalo de confiança em 95% do valor estimado do coeficiente angular da reta de regressão pode-se utilizar os seguintes passos do *Excel: Ferramentas, Análise de dados...*, *Regressão...* Ao abrir a janela do programa deve-se inserir os *Intervalos do eixo Y e X*, e selecionar o *Nível de confiança* em 95% e o *Intervalo de Saída* do arquivo trabalhado. O *Excel* retorna um *Resumo dos Resultados* com o intervalo de *confiança inferior e superior*.

(P2): Qual o intervalo de confiança?

(A1): Foi de  $-0,3529$  a  $0,3368$ . Mas o que representa esse intervalo?

(P2): Significa que a probabilidade do coeficiente angular de uma variável (no caso a precipitação, cujo valor é  $-0,0071$ ) no intervalo calculado é de 95%.

(A2): A vazão do rio Camanducaia apresenta alguma tendência nesse período?

(P2): Sim, a vazão desse rio nesse período sofreu um aumento, porque o coeficiente angular é  $0,0431$ , como mostra a figura.

(P1): É... mas deve-se tomar o cuidado para perceber que somente a aplicação da regressão linear ao dados não é fator suficiente para identificar a tendência de uma série temporal.

(A3): Como assim?

(P1): Ela não garante que a série possua tendência visto que os valores possuem dispersão, em que pese estejam em intervalos de confiança pré-estabelecidos. Porém, há outros testes não paramétricos para verificar se há realmente tendência, como os testes de Mann-Kendall e Pettitt.

(A1): É possível afirmar que se para uma determinada cidade a precipitação aumenta então a vazão dos rios dessa cidade também aumenta?

(P2): Nem sempre isso é possível. Ocorre que pode haver situações em que o crescimento rápido de uma cidade ou a construção de barragens influencie na vazão do rio que passa na sua proximidade, diminuindo a vazão devido ao abastecimento da população. Há relatos científicos mencionando que a derrubada da mata ciliar ou de muitas árvores próximas ao rio pode aumentar o assoreamento do mesmo e com isso afetar o índice de sua vazão. Sugiro pesquisar mais informações sobre esses detalhes com os professores da área de climatologia.

(A1): Como é possível saber se a precipitação pluviométrica da cidade de Pindamonhagaba apresenta alguma tendência?

(P1): Analisando o gráfico de Mann-Kendall percebe-se que a série temporal (em azul)  $U(t_n)$ , e a inversa dessa  $U^*(t_n)$  (em azul tracejado) sofrem várias interseções entre os intervalos de confiança de 90% e 95%. Então, qual dessas interseções indica o início da tendência? A resposta é que não dá para afirmar qual seria a mais correta, então o teste de Pettitt responde a essa questão. No teste de Pettitt, a estatística é calculada para verificar onde ocorreu a “quebra” da série temporal, isto é, onde se encontra o valor crítico ( $K_{crit}$ ) da série. Neste caso, o valor foi no ano de 1980, pois o menor valor (crítico) do teste de Pettitt acusou essa data e esse valor está dentro do intervalo de confiança do teste. Portanto, a partir de 1980 a tendência da precipitação da cidade de Pindamonhagaba foi de aumento.

(A2): Como é possível saber se a vazão do rio Paraíba do Sul apresenta alguma tendência?

(P1): Neste caso, os cruzamentos (as interseções) de  $U(t_n)$ , e  $U^*(t_n)$  no gráfico do teste de Mann-Kendall também ocorrem no intervalo de confiança de 90% e 95%. Note o cruzamento, neste gráfico, no ano 1982. Quando se analisa o gráfico do teste de Pettitt, a quebra da série temporal está fora do intervalo de confiança deste teste. Portanto, não é possível confirmar a tendência dessa variável<sup>4</sup>.

(A4): O estudo estatístico só serve para esses casos?

(P1): Não. O procedimento aplicado serve para inferir de forma correta o ponto inicial de determinada tendência e, com isso, tomar decisão e/ou verificar que espécie de problema está ocorrendo no contexto ambiental. Esse tipo de estudo pode ser aplicado a outros tipos de série temporal, como temperaturas, safras agrícolas, consumo d'água, cargas de esgoto para uma melhor gestão dos recursos hídricos, dentre outros.

---

Das falas explicitadas acima, percebe-se que os estudantes ficaram mais envolvidos e interessados com os conceitos matemáticos e estatísticos utilizados ao buscarem explicações para as questões abordadas pelos professores e por eles próprios. Os professores atuavam como mediadores, formulando questões, tirando dúvidas dos

---

<sup>4</sup> Todas as discussões ocorridas entre estudantes e professores envolveram análises não apenas de gráficos, mas também dos valores contidos nas tabelas apresentadas neste texto. Dessa forma, foram esclarecidas as relações entre as estatísticas trabalhadas mostrando aos estudantes que elas se complementam.

estudantes, discutindo com eles. É importante ressaltar que as atividades realizadas foram muito diferentes daquelas em sala de aula, pois havia um número reduzido de estudantes, e todos com o mesmo interesse: a busca pelo conhecimento.

Outras questões do domínio da Engenharia Ambiental foram propostas pelos estudantes participantes, entretanto, os professores não se sentiram confortáveis em respondê-las devido ao grau de especificidade. Não obstante, essas questões foram encaminhadas pelos próprios estudantes a outros pesquisadores da área, o que reforça o caráter interdisciplinar da pesquisa aqui desenvolvida.

Embora as falas aqui transcritas reflitam uma experiência isolada, no entanto elas mostram claramente que as discussões proporcionadas suscitaram avanços em alguns conhecimentos construídos pelos estudantes; ao mesmo tempo, os estudantes tornaram-se mais conscientes e mais críticos em relação aos conteúdos abordados, inclusive com a problemática ambiental. Além disso, eles puderam entender a Ciência como um conhecimento aberto, sujeito a reformulações e mudanças.

As discussões explicitadas acima levam a acreditar que os professores precisam disponibilizar atividades extra-classe para aqueles estudantes que apresentam interesse em expandir os seus conhecimentos, ainda que seja um grupo pequeno. Esse tipo de atitude verifica-se em estudantes envolvidos em programa de Iniciação Científica. Além de proporcionar a abrangência de novos conhecimentos, dá oportunidade de desenvolver entre os estudantes visões e compreensões mais adequadas do que vem a ser um trabalho científico. Atividades como as aqui apresentadas podem possibilitar que os estudantes atuem como multiplicadores dos conhecimentos, podendo motivar seus colegas e também abrir discussões sobre o tema aqui proposto.

## **5 – Considerações finais**

Ao propor um trabalho de projeto de investigação com dados reais, de fontes diversas, como uso de equipamentos, dados de publicações ou da *Internet*, dentre outros, é possível sensibilizar os estudantes sobre a importância dos conteúdos matemáticos e estatísticos e, conseqüentemente, eles podem se interessar por esses assuntos como meio de abordar problemas variados da vida real, que poderão estar relacionados às suas experiências e necessidades. Essa é, na perspectiva de Bassanezi (2002), a filosofia do emprego da MM em atividades do ensino e aprendizagem. Embora os estudantes participantes desta pesquisa não apresentassem muitas dificuldades na manipulação dos conteúdos matemáticos e estatísticos ministrados em sala de aula, eles puderam conhecer e aprender conteúdos extracurriculares e ao mesmo tempo adquirir conhecimento sobre assuntos da realidade.

Fazendo uma reflexão sobre as atividades propostas percebeu-se que no início os estudantes tiveram algumas dificuldades na organização dos dados contidos nas séries temporais visando realizar análises estatísticas coerentes. Isso mostra que nem sempre os estudantes são organizados para tarefas dessa natureza. Nas explicações iniciais levantadas pelos professores, os estudantes demonstraram entendimento, porém quando partiram de fato para a fase de manipulação com os dados perceberam que havia necessidade de mais esclarecimentos não apenas na organização, mas também como tratar os dados envolvendo os conteúdos estatísticos na lógica exigida pelo programa *Microsoft Excel*.

Os estudantes tiveram a oportunidade de ter contato com métodos estatísticos que despertaram o seu interesse, o que também lhes permitiu inferir a existência ou não de tendências climáticas nas séries de dados. Neste aspecto, observou-se que os estudantes passaram a ter um comportamento mais crítico perante a pesquisa realizada. Isso vai ao encontro das questões exploradas por Barbosa (2006) e Skovsmose (2008).

Por intermédio de gráficos e procedimentos computacionais em atividades expositivas extra-classe foi possível identificar e mostrar para os estudantes a importância e o uso do programa *Microsoft Excel* e suas ferramentas. Por meio dessa facilidade tecnológica, foram aplicadas análises de regressão por meio da suavização de dados e dos testes não-paramétricos de Mann-Kendall e de Pettitt (esses, especialmente desenvolvidos em planilhas do programa *Microsoft Excel*). Para todas as análises foram inferidos os intervalos de confiança e suas interpretações no contexto desta pesquisa, como explorado por Olivo e Batanero (2007). Ficou evidenciado pelos estudantes que o *Excel* é uma poderosa ferramenta no tratamento de dados, possuindo muitas funções da Matemática e da Estatística que são pouco exploradas nos cursos regulares das universidades brasileiras (Borba & Villareal, 2005).

Identificar alterações nos registros meteorológicos é de grande importância para os estudos nas engenharias que utilizam séries de dados, pois tanto simulações como aplicações de teorias de probabilidades são realizadas com a hipótese de que as séries são homogêneas (isto é, os dados da série vêm da mesma população), ou seja, não apresentam tendências. Não obstante, dada a relevância de um tema tão atual, aliado às inúmeras discussões veiculadas pelas mídias, o envolvimento desses assuntos com estudantes de outros cursos, como Matemática, Estatística, Geociências, torna-se importante na medida em que se consegue explorar conteúdos estatísticos. Além disso, os conhecimentos adquiridos pelos estudantes nas atividades propostas, não apenas de ordem acadêmica, mas da importância da compreensão da necessidade de realizar uma pesquisa científica, podem ser levados para a sua vida profissional, contribuindo para o seu crescimento e para a sua valorização profissional.

Por fim, as atividades realizadas valorizaram aspectos internos e externos. No que se refere aos aspectos internos pode-se mencionar as argumentações que surgiram; a

utilização dos conteúdos matemáticos e estatísticos e da tecnologia informática e a evolução dos conhecimentos em diferentes áreas. Quanto aos aspectos externos, é possível mencionar a cooperação que ocorreu entre os estudantes e um alerta para as implicações das mudanças ambientais.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Barbosa, J. (2006). Mathematical modelling in classroom: a critical and discursive perspective. *Zentralblatt für didaktik der Mathematik*, v. 38, n. 3, pp. 293-301.
- Borba, M. C. & Villarreal, M. E. (2005). *Humans-with-Media and Reorganization of Mathematical Thinking: Information and Communication Technologies, Modeling, Visualization and Experimentation*. New York: Springer Science+Business Media, Inc.
- Bassanezi, R.C. (2002). *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia*. São Paulo, SP: Editora Contexto.
- Carvalho, D. L. (2009). Trabalho com projetos no ensino e aprendizagem de Estatística: benefícios, problemas, limitações. *Educação Matemática em Revista*, v. 1, n. 10, pp. 83-93.
- Goossens, C. & Berger, (1986). A. Annual and seasonal climatic variations over the northern hemisphere and Europe during the last century. *Annales Geophysicae*, v. 4, n. B4, Berlin.
- Groppo, J. D.; Moraes, J. M.; Beduschi, C. E.; Martinelli, L. A. (2005). Análise de séries temporais de vazão e precipitação em algumas bacias do Estado de São Paulo com diferentes graus de intervenções antrópicas. *Geociências*, v. 24, n. 2, São Paulo, pp. 181-193.
- Moraes, J. M.; Pellegrino, G.; Ballester, M. V.; Martinelli, L. A.; Victoria, R. L. (1995). Estudo preliminar da evolução temporal dos componentes do ciclo hidrológico da bacia do Rio Piracicaba. In: XI Simpósio Brasileiro de Recursos Hídricos e II Simpósio de Hidráulica e Recursos Hídricos dos Países de Língua Oficial Portuguesa. *Anais...* Recife: Associação Brasileira de recursos Hídricos, pp. 27-32.
- Olivo, E. & Batanero, C. (2007). Un estudio exploratorio de dificultades de comprensión del intervalo de confianza. *UNIÓN - Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, n. 12, pp. 37-51.
- Paciornik, N. (2003). Mudança global do clima: repercussões globais, regionais e locais. *Terra Livre. Ano 19*, v. 1, n. 20. São Paulo, pp. 127-135.
- Peneireiro, J. C. & Ferreira, D. H. L. (2011). Estatística apoiada pela Tecnologia: uma proposta para identificar tendências climáticas. *Acta Scientiae*, v. 13, n. 1, pp. 87-105.
- Pettitt, A.N. (1979). A non-parametric approach to the change-point problem. *Applied Statistics*, v. 28, n. 2, pp. 126-135.
- Richit, A. & Maltempi, M. V. (2010). Desafios e Possibilidades do Trabalho com Projetos e com Tecnologias na Licenciatura em Matemática, *Zetetiké*, v. 18, n. 33, pp. 15-41.
- Sello, S. (1999). *Time series forecasting: a nonlinear dynamics approach*. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/physics/9906035>>. Acesso em: 21 jun. 2010.
- Skovsmose, O. (2008). *Desafios da reflexão em Educação Matemática Crítica*. Campinas: Papyrus Editora.
- Sneyers, R. (1975). *Sur l'analyse statistique des séries d'observations*. Genève: Organisation Meteorologique Mondial, 192 p. (OMM Note Technique, 143).

Recebido: 3 de novembro de 2011.

Aceite: 21 de novembro de 2011.