NOTA BREVE SOBRE O CONCEITO DE MÉDIA

Hélio Bernardo Lopes *

O conceito de média surge de modo abundante na disciplina de Métodos Estatísticos, presente em muitos cursos de licenciatura de instituições de ensino superior.

Surge, de igual modo, em domínios onde a noção de acaso está ausente, mas onde o conceito de média continua a ser essencial no tratamento de dados ligados a determinadas grandezas.

A tendência para a utilização de modelos quantitativos, em número cada vez maior, em domínios do saber, determinou a necessidade de colher quantidades, sempre mais vastas, de informação numérica, acompanhadas do correspondente tratamento.

Nos fenómenos estudados que assumem carácter aleatório, procede-se ao correspondente estudo através de amostragem adequada, que possa servir de base a inferências úteis.

É neste âmbito que surge, de modo permanente, o recurso ao conceito de média, mormente no estudo das distribuições de frequências. Neste domínio, contudo, o conceito de mais vasta aplicação é o de média aritmética, seja no caso de amostras de dados não classificados, seja no de classificados.

Acontece, porém, que existem muitos outros conceitos de média, todos englobados numa expressão geral das médias. E mesmo esta é ainda uma particularização dum conceito mais geral de média, que se referirá adiante, e que é a média-ϕ.

O CONCEITO DE MÉDIA SEGUNDO CAUCHY

Admita-se que se pretende estudar determinada população, em torno de certo atributo quantitativo. O processo seguido, por razões diversas, envolve a obtenção de uma amostra representativa da população, que se escreve aqui como:

$$\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$$

$x_i \in$ **R**, (i=1,...,n), n$\in$ **N**.

Sejam:

---

* Jornalista.

$$x_m = min\{x_i : i = 1,\ldots,n\} \qquad \wedge \qquad x_M = max\{x_i : i = 1,\ldots,n\}$$

respectivamente, o mínimo e o máximo do conjunto dos elementos da amostra. Tem-se, então, a seguinte

DEFINIÇÃO. Dada a amostra, $(x_1,\ldots,x_n)$, $x_i \in$ **R**, (i=1,...,n), n$\in$ **N**, dá-se o nome de **média da amostra segundo Cauchy** a qualquer valor, $m_c \in$ **R**, que se compreenda entre o mínimo e o máximo do conjunto dos valores da amostra, ou seja:

$$x_m \leq m_c \leq x_M .$$

Como se torna evidente, se os valores da amostra forem todos iguais a uma constante real **R**, K $\in$ **R**, a média da amostra segundo Cauchy vale também K:

$$m_c = \text{K}.$$

Veja-se, sobre este conceito, o seguinte

EXEMPLO. Considere-se a amostra de dimensão, $n = 35$, oriunda de certa população, que se mostra na matriz que se segue.

$$\begin{matrix} 1 & 7 & 4 & 5 & 2 & 5 & 2 \\ 3 & 3 & 6 & 6 & 4 & 1 & 6 \\ 9 & 5 & 1 & 2 & 3 & 8 & 3 \\ 7 & 3 & 8 & 4 & 9 & 8 & 3 \\ 4 & 2 & 4 & 7 & 8 & 2 & 4 \end{matrix}$$

Neste caso, o mínimo e o máximo da amostra valem, respectivamente:

$$x_m = 1 \qquad \wedge \qquad x_M = 9.$$

Assim, pode fazer-se:

$$m_c = 5$$

como sendo o valor da média da amostra segundo Cauchy, uma vez que se tem, nos termos da definição:

$$x_m = 1 \leq 5 \leq 9 = x_M .$$

Mas também pode tomar-se para média da amostra segundo Cauchy, por exemplo:

$$m_c = 7$$

uma vez que se tem:

$$x_m = 1 \leq 7 \leq 9 = x_M .$$

Convém reparar no carácter extremamente simples desta definição, mas que não corresponde à enunciação de uma ideia banal ao tempo de Cauchy. Ainda hoje, se questionado, um aluno que desconheça uma qualquer definição de média das mais correntes, é quase certo que lhe não ocorrerá a resposta simples e evidente que se contém na definição agora apresentada. E note-se, ainda, que esta definição simples e evidente, afinal, deixa à argúcia de quem a utilizar um amplo campo para a sua materialização.

MÉDIA ARITMÉTICA

A média aritmética de uma amostra é a medida de localização mais utilizada, e tanto no caso do estudo das distribuições de frequências, como nos casos de dados não classificados. Atente-se, pois, na sua

DEFINIÇÃO. Dada uma amostra aleatória, ($x_1, \ldots, x_n$), $x_i \in$ **R**, (i=1,...,n), n$\in$ **N**, a **média aritmética da amostra** é definida por:

$$m_a = \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

No caso de **dados não classificados**, por:

$$\underbrace{m_a = \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{p} n_i x_i}{n}}_{(1)}$$

onde $n_i \in$ **N**, ($i = 1, \ldots, p$), é a frequência absoluta da classe i , com $p \in$ **N** o número de classes e por

$$\sum_{i=1}^{p} n_i = n$$

no caso de **dados classificados**.

À expressão (1) pode dar-se a forma:

$$m_a = \bar{x} = \sum_{i=1}^{p} f_i x_i$$

onde:

$$f_i = \frac{n_i}{n}$$

é a frequência relativa da classe i , ($i = 1, \ldots, p$).

Veja-se, mais uma vez, o caso da amostra do exemplo anterior, mas agora tratado à luz do conceito de média aritmética, com os dados classificados, ou sem o estarem.

EXEMPLO. Considerando a amostra tal como foi anteriormente apresentada, ou seja, sem os seus elementos estarem classificados, a média aritmética da amostra vale:

$$m_a = \bar{x} = \frac{1+7+4+\cdots+2+4}{35} \cong 4{,}54$$

onde $n = 35$ é a respectiva dimensão.

Procedendo agora à classificação dos elementos da amostra, no pressuposto de que a população correspondente é constituída por elementos do conjunto:

$$\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$

é-se conduzido ao quadro que se mostra de seguida:

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n_i	3	5	6	6	3	3	3	4	2

pelo qual se obtém o valor da média aritmética da amostra:

$$m_a = \bar{x} = \frac{3\times 1+5\times 2+\cdots+2\times 9}{3+5+\cdots+2} \cong 4{,}54$$

como se viu atrás.

Facilmente se demonstra que a média aritmética de uma amostra, ($x_1,\ldots,x_n$), é um caso particular do conceito de média segundo Cauchy, dado ser:

$$min\{x_1,\ldots,x_n\} \le m_a \le max\{x_1,\ldots,x_n\}.$$

No caso de os elementos da amostra serem todos iguais a uma constante, K ∈ **R**, virá, como é evidente:

$$m_a = \bar{x} = \mathrm{K}.$$

No domínio da Mecânica, onde idealmente se consideram conjuntos de pontos:

$$\{x_1,\ldots x_n\}$$

abcissas relativamente a certo eixo orientado, com massas de valor unitário, a média da amostra, ($x_1,\ldots,x_n$), corresponde ao centro de gravidade do conjunto desses pontos.

Note-se, em face do que se mostrou no exemplo anterior, que a média de uma amostra, oriunda de certa população, pode não ser um valor da mesma. Trata-se, tão-só, de uma medida de localização da amostra.

PROPRIEDADES DA MÉDIA ARITMÉTICA

A média aritmética de uma amostra apresenta um conjunto vasto de propriedades, todas elas, sem dúvida, de grande utilidade no cálculo do seu valor.

Seja, então, a amostra, ($x_1,\ldots,x_n$), $x_i \in$ **R**, (i=1,...,n), n∈ **N**, $K \in$ **R**, e seja:

$$\bar{x} = m_a(x_1,\ldots,x_n)$$

a média aritmética da amostra. Tem-se, então, a seguinte propriedade:

$$m_a\left(x_1 + K,\ldots,x_n + K\right) = m_a\left(x_1,\ldots,x_n\right) + K.$$

Esta propriedade permite, em certas circunstâncias, facilitar o cálculo da média da amostra, muito em especial, se os valores da mesma forem grandes e muito próximos. É o que passa com a amostra que se segue:

101	107	104	105	102	105	102
103	103	106	106	104	101	106
109	105	101	102	103	108	103
107	103	108	104	109	108	103
104	102	104	107	108	102	104

cuja média vem dada por:

$$\overline{x} = m_a\left(1+100{,}7+100,\ldots,4+100\right) = m_a\left(1{,}7,\ldots,4\right) + 100 \cong 4{,}54 + 100 = 104{,}54.$$

Uma segunda propriedade é a que se traduz por:

$$m_a\left(Kx_1,\ldots,Kx_n\right) = Km_a\left(x_1,\ldots,x_n\right)$$

com $K \in \mathbf{R}$.

Uma terceira propriedade, ainda, é a definida por:

$$m_a\left(x_1 + y_1,\ldots,x_n + y_n\right) = m_a\left(x_1,\ldots,x_n\right) + m_a\left(y_1,\ldots,y_n\right)$$

que é extensível ao caso de p amostras da mesma dimensão:

$$m_a\left(\sum_{j=1}^{p} x_{1j},\ldots,\sum_{j=1}^{p} x_{nj}\right) = \sum_{j=1}^{p} m_a\left(x_{1j},\ldots,x_{nj}\right).$$

Uma nova propriedade, a quarta, relaciona a média de uma amostra de dimensão, $n \in \mathbf{N}$, com as das subamostras, de dimensões, $n_1,\ldots,n_k$, $k \in \mathbf{N}$, $n = n_1 + \cdots + n_k$, tendo-se:

$$m_a\left(x_1,\ldots,x_n\right) = \frac{n_1\overline{x_1} + \cdots + n_k\overline{x_k}}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i\overline{x_i}}{n}$$

onde $\overline{x_i}, (i = 1,\ldots,k),$ é a média da subamostra i .

Assim, se se decompuser a amostra do exemplo inicial nas três sub-amostras:

1	7	4	5	2	5	2
3	3	6	6	4	1	6

9	5	1	2	3	8	3
7	3	8	4	9	8	3

4	2	4	7	8	2	4

respectivamente, com as dimensões, 14, 14 e 7, e com médias, 3,93, 5,21 e 4,43, a média da amostra inicial vale:

$$m_a = \bar{x} = \frac{14 \times 3{,}93 + 14 \times 5{,}21 + 7 \times 4{,}43}{14 + 14 + 7} \cong 4{,}54.$$

Uma nova propriedade, a quinta, é a que se traduz pelo facto de ser nula a média dos desvios dos elementos da amostra relativamente à média desta, ou seja:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - m_a\right)}{n} = 0$$

com i∈{1,...,n}.

Finalmente, a sexta propriedade da média aritmética, que se traduz no facto do seu valor poder ser obtido através da adição de uma constante arbitrária, $K \in$ **R**, à média dos desvios dos valores da amostra relativamente à referida constante:

$$m_a = K + \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - K\right)}{n}.$$

Retomando o exemplo inicial, e tomando, neste caso, a constante, $K = 4$, pode escrever-se a nova matriz constituída pelos desvios dos elementos da amostra relativamente àquela constante considerada, como se mostra de seguida.

$$\begin{array}{rrrrrrr}
-3 & 3 & 0 & 1 & -2 & 1 & -2 \\
-1 & -1 & 2 & 2 & 0 & -3 & 2 \\
5 & 1 & -3 & -2 & -1 & 4 & -1 \\
3 & -1 & 4 & 0 & 5 & 4 & -1 \\
0 & -2 & 0 & 3 & 4 & -2 & 0
\end{array}$$

A média aritmética dos valores desta amostra, contida na matriz, vale:

$$\frac{-3+3+0+1+\cdots-2+0}{35} \cong 0{,}54$$

pelo que a média da amostra do exemplo inicial vale:

$$m_a \cong 4+0{,}54=4{,}54$$

como já se havia mostrado.

MÉDIA GEOMÉTRICA

A média geométrica é um outro conceito de média, mas muito pouco utilizado no manuseio de distribuições de frequências, ao contrário do que se dá com a média aritmética.

Apresenta, em todo o caso, algum interesse, por exemplo, na estimação de números índices, bem como em alguns outros domínios da Estatística, sendo que se define apenas para amostras constituídas por elementos reais positivos. Veja-se, então, a sua

DEFINIÇÃO. Dada uma amostra aleatória, ($x_1,\ldots,x_n$), $x_i \in \mathbf{R}^+$, (i=1,...,n), n$\in$ **N**, a **média geométrica da amostra** é definida por:

$$\underbrace{m_g = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}}_{(2)}$$

No caso de **dados não classificados**, por:

$$m_g = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{p} x_i^{\,n_i}}$$

onde $n_i \in$ **N**, ($i=1,\ldots,p$), é a frequência absoluta da classe i , com $p \in$ **N** o número de classes e por:

$$\sum_{i=1}^{p} n_i = n$$

no caso de **dados classificados**.

Voltando, mais uma vez, ao caso do exemplo apresentado inicialmente, a média geométrica da amostra apresentada, com os seus elementos não classificados, vale:

$$m_g = \sqrt[35]{1 \times 7 \times 4 \times \cdots \times 2 \times 4} \cong 3{,}84.$$

Do mesmo modo, se os elementos da amostra se apresentarem classificados como anteriormente se mostrou, a média geométrica procurada calcula-se por:

$$m_g = \sqrt[35]{1^3 \times 2^5 \times 3^6 \times \cdots \times 9^2} \cong 3{,}84$$

cujo valor coincide com o achado a partir da amostra com os elementos não classificados.

Note-se que, por aplicação da função logarítmica à expressão (2), por exemplo, se obtém:

$$\log m_g = \log \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \log x_i}{n}$$

ou seja, o logaritmo da média geométrica de uma amostra é, afinal, a média aritmética dos logaritmos dos elementos da mesma, a que se dá, por vezes, a designação de **média logarítmica**.

O conceito de média geométrica, para lá das aplicações referidas atrás, é usado no estudo de fenómenos cujas variações são proporcionais a determinado valor inicial.

MÉDIA HARMÓNICA

Um terceiro tipo de média, também sem grande interesse no estudo das distribuições de frequências, mas que é de grande utilidade em situações em que não tem lógica adicionar valores da amostra, é o de média harmónica, que se introduz com a seguinte

DEFINIÇÃO. Dada uma amostra aleatória, $(x_1, \ldots, x_n)$, $x_i \in$ **R**\{0}, (i=1,...,n), n∈ **N**, a **média harmónica da amostra** é definida por:

$$\underbrace{m_h = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}}_{(3)}$$

no caso de **dados não classificados**, por:

$$m_h = \frac{n}{\sum_{i=1}^{p} \frac{n_i}{x_i}}$$

onde $n_i \in$ **N**, ($i = 1,\ldots, p$), é a frequência absoluta da classe i , com $p \in$ **N** o número de classes e:

$$\sum_{i=1}^{p} n_i = n$$

no caso de **dados classificados**.

Dado que (3), por exemplo, se pode escrever na forma:

$$m_h = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}} = \frac{1}{\frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}{n}}$$

tal mostra que a média harmónica de uma amostra é o inverso da média aritmética dos inversos dos elementos da mesma.

O presente conceito de média pode aplicar-se, facilmente, à amostra inicialmente dada, supondo que a mesma traduz a natureza de certo problema típico da aplicação do conceito de média harmónica, obtendo-se o valor:

$$m_h \cong 2{,}31.$$

A aplicação dos conceitos de média aritmética, geométrica e harmónica à amostra considerada logo ao início do presente texto, constituída por números reais positivos, conduziu a valores que satisfazem a condição:

$$m_a > m_g > m_h.$$

Ora, esta condição é universal para uma amostra qualquer, ($x_1,\ldots,x_n$), $x_i \in$ **R** $^+$, (i=1,...,n), n$\in$ **N**, desde que os elementos da amostra não sejam todos iguais entre si.

FÓRMULA GERAL DAS MÉDIAS

As três médias que se referiram antes - aritmética, geométrica e harmónica - são casos particulares do conceito de média de ordem p, que se introduz com a seguinte

DEFINIÇÃO. Dada uma amostra aleatória, ($x_1, \ldots, x_n$), $x_i \in \mathbf{R}^+$, (i=1,...,n), n$\in$ **N**, dá-se o nome de **média de ordem** p, $p \in$ **R**, ao valor da expressão:

$$m(p) = m_p = \underbrace{\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^{\,p}}{n} \right]^{\frac{1}{p}}}_{(4)}.$$

Facilmente se percebe que:

$$m(-1) = m_h \qquad \wedge \qquad m(1) = m_a = \bar{x}.$$

No caso, $p = 0$, (4) conduz a uma indeterminação. A mesma pode ser levantada por recurso à Regra de Hospital, obtendo-se, então:

$$\lim_{p \to 0} m(p) = m_g$$

ou seja:

$$m(1) = m_a \qquad \wedge \qquad m(0) = m_g \qquad \wedge \qquad m(-1) = m_h .$$

De igual modo, pode mostrar-se que se tem:

$$\lim_{p \to -\infty} m(p) = min\{x_1, \ldots, x_n\}$$

$$\lim_{p \to \infty} m(p) = max\{x_1, \ldots, x_n\}$$

e também que (4) é crescente com p. De facto:

$$\forall p \in \mathbf{R} \quad , \quad \frac{dm(p)}{dp} > 0$$

como pode comprovar-se facilmente, desde que a amostra seja constituída por elementos reais positivos.

No caso, $p = 2$, obtém-se a designada **média quadrática da amostra**:

$$m(2) = \left[\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} \right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}}$$

muito utilizada em estudos de convergência de distribuições.

Para o caso da amostra considerada inicialmente vem:

$$m(2) = \sqrt{\frac{1^2 + 7^2 + 4^2 + \cdots + 2^2 + 4^2}{35}} \cong 4{,}93$$

o que mostra que $m(p)$ cresce com $p \in$ **R**, como se referiu.

MÉDIA-ϕ

Pode ainda generalizar-se o conceito de média de ordem p, antes apresentado, introduzindo o novo conceito de média-ϕ, que se expõe na seguinte

DEFINIÇÃO. Seja ϕ : **R** → **R**, uma função invertível no seu domínio, e $(x_1,\ldots,x_n)$ uma amostra aleatória, n∈ **N** e $x_i \in$ $\mathbf{R}^+$, (i=1,...,n). Dá-se o nome de **média-ϕ da amostra** ao valor m_ϕ, tal que:

$$\phi\left(m_\phi\right)=\frac{\sum_{i=1}^{n}\phi\left(x_i\right)}{n}$$

No caso de **dados não classificados**, por:

$$\phi\left(m_\phi\right)=\frac{\sum_{i=1}^{p}n_i\phi\left(x_i\right)}{n}$$

onde $p \in$ **N** é o número de classes, n_i ∈ **N** a frequência absoluta da classe i, e sendo:

$$\sum_{i=1}^{p}n_i = n$$

No caso de **dados classificados**.

Se a função ϕ : **R** → **R** for a função $\phi(x) = x^p$, $p \in$ **R** e x ∈ $\mathbf{R}^+$, a média-ϕ constitui a média de ordem p, já antes estudada:

$$\left(m_\phi\right)^p=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^p}{n} \qquad \Leftrightarrow \qquad m_\phi=\sqrt[p]{\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^p}{n}}.$$

EXEMPLO. Seja ϕ : **R** → **R**, $\phi(x) = e^x$, $x \in$ **R**. Tem-se, então:

$$e^{m_\phi}=\frac{\sum_{i=1}^{n}e^{x_i}}{n} \qquad \Leftrightarrow \qquad m_\phi=\ln\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}e^{x_i}}{n}\right].$$

Aplicando o presente conceito de média-ϕ à amostra do exemplo inicial, virá para valor da média-ϕ:

$$m_\phi \cong 6{,}87.\ \bullet$$

EXEMPLO. Seja, agora, a função $\phi : \mathbf{R}_0^+ \to \mathbf{R}$, dada por:

$$\phi(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Tem-se aqui:

$$\frac{1}{1+m_\phi^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+x_i^2}}{n}$$

pelo que virá:

$$1+m_\phi^2 = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+x_i^2}} \qquad \Leftrightarrow \qquad m_\phi = \sqrt{\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+x_i^2}} - 1}.$$

Achando, neste caso, o valor da média-ϕ para a amostra do exemplo inicial, obtém-se:

$$m_\phi \cong 2{,}87.$$

MÉDIA APARADA

Como se referiu ao introduzir a noção de média aritmética, esta tem especial importância no estudo das distribuições de frequências.

Acontece, como facilmente pode comprovar-se, que se trata de um conceito pouco flexível, e fortemente influenciado pelos valores extremos que possam surgir na amostra.

Com a finalidade de evitar os efeitos desaconselháveis de possíveis valores extravagantes, recorre-se ao conceito de média aparada, que se introduz com a seguinte

DEFINIÇÃO. Seja $\alpha \in [0,1]$. Dá-se o nome de **média aparada a 100×α% da amostra** $(x_1,\ldots,x_n)$, $x_i \in$ **R**, (i=1,...,n), n∈ **N**, à média aritmética dos elementos da amostra, depois da mesma ser extirpada dos 100×α% dos seus menores valores, e de 100×α% dos maiores.

No caso em que α=0,25, a média aparada toma o nome de **meia-média**. Corresponde, pois, à média aritmética da metade central da amostra estudada, abandonando as 25% observações mais baixas e as 25% mais elevadas. Veja-se, a este propósito, o seguinte

EXEMPLO. Retomando a amostra do exemplo inicial, facilmente se poderá estimar que valor da sua meia-média será, sensivelmente, 4,24.

Com o presente texto procurou mostrar-se a unidade que está subjacente ao conceito de média, operando, no final, uma ligeira incursão num domínio mais moderno do tratamento de amostras, onde procura retirar-se das mesmas informação que possa causar distorção nos valores a estimar.

BIBLIOGRAFIA

MELLO, F. Galvão de (1993): *Probabilidades e Estatística. Conceitos e Métodos Fundamentais - Volume I*, Escolar Editora, Lisboa.

MURTEIRA, Bento José Ferreira e BLACK, George Hubert Joseph (1983): *Estatística Descritiva*, McGraw-Hill de Portugal Lda.

MURTEIRA, Bento J. F., (1993): *Análise Exploratória de Dados - Estatística Descritiva*, McGraw-Hill de Portugal Lda.