INFINITO
UMA HISTÓRIA A CONTAR

Patrícia Alexandra da Silva Ribeiro Sampaio *

Resumo
O infinito sempre foi um tema controverso que afectou a mente humana. A sua aceitação como objecto de estudo na Matemática não foi pacífica, sendo ainda muito recente, apesar da longa história que lhe está associada. Faz-se uma pequena descrição das ideias relacionadas a este conceito desde a Grécia antiga até à Idade Média, distinguindo depois os séculos após o Renascimento devido à riqueza de descobertas que ocorreram. Salienta-se que só no século XIX é que Cantor mostrou, relativamente ao tamanho dos conjuntos, que há infinitos *iguais* e *diferentes*. As suas teorias para a teoria de conjuntos revolucionaram então a Matemática. O *infinito actual* finalmente tinha sido incorporado nela. Apesar de toda esta revolucionária e fabulosa teoria, aos poucos foram-se descobrindo algumas contradições, mas vários dos seus problemas foram posteriormente solucionados no século XX.

1. Introdução

Para abordar a questão do infinito adoptou-se uma cronologia histórica. Começou-se pela Grécia Antiga, que procurava a verdade e a razão, fruto do raciocínio lógico e, também, essencial no debate sobre o infinito. De seguida, abordou-se a perspectiva do pensamento na Idade Média, que escurece um pouco a ligação do infinito à Matemática. Depois referimo-nos, ainda, ao Renascimento, período repleto de novas ideias. Nasce, então, o Cálculo Infinitesimal, principal instrumento matemático do tratamento do infinito. Seguidamente, são apresentados, de forma sucinta, alguns dos resultados obtidos pelos matemáticos nos séculos XVII e XVIII. Finalmente, faz-se referência ao trabalho inovador de Cantor, com a sua teoria de conjuntos, relativamente ao infinito, já no século XIX, e abordam-se alguns dos problemas encontrados no século XX. Termina-se com algumas questões do infinito matemático na actualidade.

---

* Professora do Ensino Secundário.

Se do Infinito se trata, poetas, filósofos, matemáticos, físicos, teólogos, todos se debruçaram alguma vez sobre o assunto. Esquecido pelo tempo, este tema tão controverso sempre suscitou dúvidas e questões. Não se trata de uma simples questão de lógica, necessita de imaginação e reflexão, ir para lá do evidente. Que matemático não se debruçou já sobre a inconsistência dos conceitos de multiplicidade e de divisibilidade através dos paradoxos, relativos ao movimento e ao tempo, de Zenão de Eleia? A incompreensão de tais temas originou um conjunto de problemas inexplicáveis, contornáveis pela doutrina grega, dissuadindo o infinito da Matemática. Surge uma distinção entre *infinito potencial* e *infinito actual*, que *remonta* a Aristóteles e só foi ressuscitada no século XIX com a teoria dos conjuntos infinitos de Georg Cantor que são apresentados como *infinitos actuais*.

Para Hilbert (1926, p. 236), "a questão do infinito agitou sempre as *emoções* da humanidade mais profundamente do que qualquer outra". Era então necessário clarificar a *natureza do infinito*. O *Infinito actual* só foi aceite como objecto de estudo na Matemática quando se conseguiu explicar racionalmente os paradoxos que o envolviam. Já Bolzano tinha sentido a necessidade dum novo conceito de infinito, justificando a existência de imensos paradoxos relativos a esta ideia pela falta de precisão do termo. A esta questão polémica Dedekind e Cantor tentaram responder. Estamos no ano de 1869, quando os trabalhos de Cantor provocaram grandes mudanças e controvérsias quanto à concepção de Infinito. Aliás ainda hoje os matemáticos se dividem.

2. Tudo começou na Grécia

O ser humano toma consciência que o mundo é um problema que terá de ser resolvido em termos conceptuais, de uma forma racional e ponderada, e não em termos mítico-afectivos. Por volta do século VII A.C., a cultura grega começa a debruçar-se sobre questões relacionadas com o lugar do Homem no Universo. Pois bem, nesta procura da verdade, da razão, da ordem sobre o caos, nasce o *logos*, o raciocínio lógico. Os filósofos procuravam encontrar princípios fundamentais que explicassem a verdade, designadamente, através da Matemática. Também pela primeira vez, aparecem filósofos que abordam a Matemática pelo conhecimento e não apenas pela sua utilidade.

O século V A.C. constitui o período áureo da civilização ateniense. Foi neste período que Atenas implementou a *democracia*. Num ambiente de lutas políticas e sociais, há um desenvolvimento das realizações culturais e artísticas. Por volta de 450 A.C., o filósofo Zenão de Eleia, discípulo de Parménides, trouxe, através dos seus paradoxos, o *horror ao infinito*. Ele enunciou argumentos para tentar provar a inconsistência dos conceitos de multiplicidade e de divisibilidade, criando quatro paradoxos relativos ao movimento e ao tempo que mais tarde foram estudados por Aristóteles (384-322 A.C.) e que os intitulou por *Aquiles*, *Seta*, *Dicotomia* e *Estádio*, nomes pelos quais ficaram conhecidos. Através destes problemas, Zenão conseguiu mostrar que um segmento de recta *finito*, isto é, de comprimento finito, pode ser dividido em infinitos segmentos de recta também de comprimentos finitos. Estes argumentos conduziram à discussão ardente entre o *infinito actual* e o *infinito potencial* por vários séculos. Surgem as primeiras preocupações sobre como definir e interpretar o infinito. Apesar de Aristóteles ter negado o *infinito actual*, alimentou as especulações acerca do tema. Para ele o *infinito potencial* era apenas uma construção da mente humana, necessária para resolver problemas que envolvessem grandezas contínuas infinitamente pequenas ou números infinitamente grandes, enquanto o *infinito actual* já admitia a existência de entidades de dimensão não finita, susceptíveis de formalizações.

Segundo Aristóteles (1996 [350 A.C.], livro III, cap. 4-8, p. 71-88, que admitiu o *infinito potencial* e negou qualquer possibilidade de tratar racionalmente o *infinito actual*:

> *Se é impossível que um lugar seja infinito e que todo o corpo ocupa um lugar, então é impossível que esse corpo seja infinito. (…) Pois bem, se o infinito não se pode quantificar – senão seria uma quantidade como de duas ou três coisas, pois isto é o que significa quantidade – assim também o que está num lugar é assim porque ocupa algum sítio: e isto para cima ou para baixo, ocupando uma das seis direcções, e cada uma destas apresenta um certo limite. Fica claro que na actualidade não existe um corpo infinito. (…) Tornando-se evidente que o infinito existe num sentido e noutro não. Pois bem, diz-se que é, por um lado, em potência e por outro em actualidade. (…) De maneira que existe um número infinito em potência e não em actualidade.*

Os paradoxos de *Aquiles* e da *Dicotomia* ilustram a impossibilidade de dividir a matéria até ao infinito. Na *Dicotomia*, Zenão afirma que um objecto que quer percorrer uma certa distância tem primeiro de percorrer metade dessa distância, mas antes tem de andar um quarto, e antes o primeiro oitavo e assim sucessivamente até uma infinidade de subdivisões. Em *Aquiles*, a ideia de subdivisão infinita é a mesma, apenas com a diferença de ser agora progressiva em vez de regressiva. Assim, Aquiles nunca conseguirá alcançar a tartaruga, que partiu à sua frente, já que quando ele chegar à posição inicial da tartaruga, ela já terá percorrido uma distância maior, e quando ele chegar a essa nova posição ela terá avançado um pouco mais e assim sucessivamente.

Segundo Boyer (1998 [1968], p. 52), "a Dicotomia e o Aquiles argumentam que o movimento é impossível sob a hipótese de subdivisibilidade indefinida do espaço e do tempo". Zenão mostrou que se os conceitos de contínuo e infinita divisão forem aplicados ao movimento de um corpo, então este torna-se impossível.

O paradoxo da *Seta* reflecte a impossibilidade de movimento se o espaço e o tempo forem compostos de partes indivisíveis. Zenão mostra que o movimento da seta é uma ilusão, pois ela está sempre parada. No *Estádio*, ele mostra que o intervalo de tempo que se considera não pode ser mínimo. Segundo Boyer (1998 [1968], p. 52), "a Flecha [Seta] e o Estádio, de outro lado, argumentam que também é impossível, sob a hipótese contrária — de que a subdivisibilidade do tempo e do espaço termina em indivisíveis".

Zenão apresentou paradoxos que mostravam as contradições existentes em considerar grandezas divisíveis infinitamente e em considerar grandezas indivisíveis.

Para Struik (1997 [1948], p. 82), "os argumentos de Zenão começaram a preocupar ainda mais os matemáticos, depois de terem sido descobertos os irracionais". Nas últimas décadas do século V A.C., os pitagóricos, discípulos de Pitágoras de Samos (580-500 A.C.), descobriram que não conseguiam estabelecer uma razão entre o lado e a diagonal de um quadrado através de números racionais, os conhecidos até então. Existem muitos outros exemplos de segmentos de recta ou curvas cujas medidas escapavam à Matemática grega. Tais medidas dos segmentos eram então consideradas grandezas e não números, sendo chamadas de incomensuráveis. O mais antigo texto sobre a história da Matemática, que conseguiu resistir intacto até aos nossos dias, é a obra *De architectura* de Marcus Vitruvius Pollio (90-20 A.C.), onde se afirma que Pitágoras descobriu os irracionais através de segmentos de recta incomensuráveis. No entanto, muitos historiadores actuais consideram que não terá sido ele próprio, mas os pitagóricos.

Os Diálogos de Platão (429-348 A.C.) mostram como os matemáticos da época ficaram profundamente perturbados com esta descoberta. A escola platónica, para contornar os *infinitesimais*, usou um método indirecto, muito rigoroso, nas demonstrações de cálculos de áreas e volumes, que envolvia somente o uso da lógica formal, o *método da exaustão* (assim intitulado por Grégoire de Saint-Vicent (1584-1667), em 1647). É, no entanto, de salientar que, para se poder aplicar este método, era necessário conhecer o resultado previamente. O infinito ficou assim eliminado da Matemática grega.

A Matemática de Demócrito de Abdera (460-370 A.C.) fundamentou-se na sua própria doutrina física do atomismo. Os problemas matemáticos que mais lhe interessavam eram os que exigiam um tratamento infinitesimal. Já desde os egípcios que se sabia que o volume de uma pirâmide se determina pelo produto de um terço do valor da área da base pelo valor da sua altura, mas Arquimedes (287-212 A.C.) chegou a escrever que esse resultado era de Demócrito, acrescentando, no entanto, que não tinha sido provado convenientemente por ele. Pois bem, se Demócrito acrescentou algo ao conhecimento egípcio só pode ter sido pela sua aplicação de técnicas infinitesimais. O atomismo de Demócrito refere-se à matéria, ao tempo e ao espaço, conduzindo directamente à noção de quantidade infinitesimal, mas depois da descoberta dos incomensuráveis e dos paradoxos de Zenão, a sua escola filosófica tornou-se muito impopular e estes argumentos já não eram aceites.

Para poder desenvolver silogismos novos, Arquimedes de Siracusa, conselheiro do rei Hierão, adoptou outro método, considerado pouco rigoroso, mas muito *produtivo*. O *Método* (segundo Heath (1981 [1921]), cujo título completo *On mechanical theorems, Method*), esteve perdido até ao verão de 1906, aquando da sua descoberta pelo dinamarquês Johan Heiberg (1854-1928) em Constantinopla. Esta grande obra foi escrita por volta de 250 A.C. e surge na forma de uma carta escrita por Arquimedes para Eratóstenes. Nesta carta ele descreve como obteve muitos dos seus resultados. Explicou que muitas das suas ideias apareceram através de um método mecânico e que posteriormente, teriam de ser demonstradas por uma prova geométrica rigorosa, já que ele considerava este método pouco rigoroso. Ele foi considerado um dos matemáticos gregos que mais contribuiu para o cálculo integral. Utilizou o *método da exaustão* para determinar um valor aproximado da área de um círculo.

O *método da exaustão*, inventado por Eudoxo de Cnido (408-355 A.C.), muito usado por Arquimedes, permite encontrar aproximações sucessivas de uma área por comparação com áreas conhecidas. Trata-se de um processo fundamental no cálculo. É necessário salientar, no entanto, que, no tempo de Arquimedes, não se consideravam somas infinitas de parcelas, mas apesar de os gregos não assumirem o infinito, este foi um dos métodos que mais contribuiu para o desenvolvimento de conceitos como o de limite.

Euclides de Alexandria, contemporâneo do primeiro Ptolomeu (306-283 A.C.), cuja obra mais importante *Elementos* era constituída por treze livros, pretendera reunir numa só obra todas as grandes descobertas realizadas até então pelos seus colegas matemáticos. Assim, nos *Elementos* de Euclides podemos ver a teoria das proporções de Eudoxo, a teoria dos irracionais de Teaetetus (417-369 A.C.) e a teoria dos cinco sólidos regulares de Platão. A teoria das proporções de Eudoxo permitiu resolver completamente o problema das grandezas incomensuráveis. Esta teoria encontra-se exposta no livro V dos *Elementos* de Euclides. Eudoxo evitou desta forma o problema dos irracionais e do infinito. Ele definiu a igualdade entre duas quaisquer razões.

Os gregos são os primeiros a tomar consciência da questão do infinito e, apesar de o terem negado, deixaram várias sementes que criaram fruto mais tarde.

3. A Europa na Idade Média

A queda de Roma em 476 e a queda de Constantinopla em 1453 costumam marcar quer o início quer o fim da Idade Média. Durante esta época, a ciência esteve mais ou menos estagnada e o pensamento medieval viveu à sombra das ideias de Platão e de Aristóteles. Os filósofos escolásticos debruçaram-se, também, sobre questões como o infinito. São Tomás de Aquino (1225-1274), tal como Aristóteles, não acreditava no *infinito actual*. Antes dele, alguns filósofos, poucos, se debruçaram sobre o tema com outro ponto de vista, tal como Santo Agostinho (354-430), bispo de Hipona, que, na sua obra *Civitas Dei* (capítulo XVIII do livro XII), aceita a sequência dos números inteiros como um *infinito actual* na mente divina. O infinito é entendido como um atributo de Deus. Acrescenta-se o *infinito absoluto*.

> *Dizer que nem a ciência de Deus é capaz de compreender as coisas infinitas é o que lhes falta ao atrevimento, para precipitar-se na voragem de profunda impiedade, que afirma não conhecer Deus todos os números. E muito certo que são infinitos. Com efeito, seja qual for o número que pretendas formar, não apenas pode aumentar pela adição de uma unidade, mas também, por maior que seja e por mais prodigiosa que seja a quantidade que encerra em si a razão e ciência dos números, não somente pode ser duplicada, mas também multiplicada ao infinito. (…) Tal infinidade conjunta de todos os números é que escapa à ciência de Deus, que compreende certa quantidade de números e ignora os demais? Quem o dirá, por mais louco que esteja?* (Santo Agostinho, 1993, p.83)

Com a queda de Constantinopla, em 1453, alguns sábios gregos foram conduzidos para as terras do ocidente, transportando com eles toda a sabedoria grega, o que permitiu que se traduzissem bastantes textos gregos originais. Um dos grandes tradutores matemáticos desta época era Johannes Müller (1436-1476), o Regiomontano, assim conhecido pela sua ligação à pequena cidade da Baviera, a sul do Meno, Könisberg.

O *horror* sentido pelos gregos ao infinito não se fez sentir tanto nos filósofos escolásticos, que mencionavam tal conceito com alguma frequência (mais para o fim da Idade Média). As especulações escolásticas sobre o infinito reavivam o problema e permitem o desenvolvimento do cálculo infinitesimal no século XVII.

Notemos, no entanto, que todos os desenvolvimentos matemáticos que ocorreram nesta época não podem ser comparados com as inúmeras e grandiosas descobertas ocorridas no tempo da Grécia antiga.

4. O século XVII

Este é um grande século para os matemáticos, pois é a época em que a geometria analítica e o cálculo são *inventados*, sendo denominado por muitos como o *século do génio*.

Em 1558, Federigo Comandino (1509-1575) traduz as obras de Arquimedes, permitindo, deste modo, o acesso dos latinos ao método de integração utilizado por Arquimedes, o que se traduziu no desenvolvimento do cálculo infinitesimal. Em 1586, o flamengo Simon Stevin (1546-1620) utiliza este método, na sua obra *Estática*, para determinar os centros de gravidade de figuras planas e toma um número infinito de somas. Também Johann Kepler (1571-1630) considerou somas infinitas. Segundo Struik (1997 [1948], p. 160), "nos trabalhos de Johann Kepler é particularmente evidente a influência estimulante da nova astronomia em problemas que envolviam longos cálculos, bem como considerações infinitesimais". Foi durante este período que *nasceu* o principal instrumento matemático que trata o infinito, o Cálculo Infinitesimal. O *método da exaustão* foi um grande catalisador dos métodos infinitesimais desenvolvidos no Renascimento para resolver problemas de áreas, de volumes, do movimento e da mecânica celeste.

O italiano Galileo Galilei (1584-1642) estabeleceu correspondências entre agregados infinitos. É a ele que se deve a primeira formulação explícita da noção de colecção infinita. Na sua obra *Diálogos relativos a duas novas ciências*, de 1638, Galilei estabeleceu uma correspondência de um para um, entre o conjunto dos números inteiros e o conjunto dos quadrados perfeitos, mas não afirmou que tinham o mesmo cardinal. Ao invés, concluiu que "os atributos *igual a*, *maior que* e *menor que* não devem ser utilizados para comparar quantidades infinitas". Esta obra consiste numa discussão sobre a dinâmica e a resistência dos materiais entre três personagens: *Salviati*, um homem sábio, bem informado cientificamente, *Sagredo*, um leigo inteligente e *Simplícius*, um homem que acredita *cegamente* nas concepções de Aristóteles. Galilei adopta o papel de *Salviati* e usa o infinitamente pequeno com um certo grau de fantasia, como quando *Salviati* diz a *Simplícius* que é fácil decompor um segmento de recta num número infinito de partes, mas noutra altura também refere que o infinito e os indivisíveis transcendem o nosso conhecimento. É ainda nesta obra que Galilei (1989 [1638], p. 40-41) apresenta um paradoxo sobre a quantidade de números inteiros e de quadrados perfeitos, concluindo que nem o número de quadrados é menor do que o da totalidade dos números, nem o último é maior do que o primeiro.

Salviati. *(…) Se eu disser que os números tomados na sua totalidade, incluindo os quadrados e os não quadrados, são mais numerosos do que os quadrados sozinhos, enunciarei uma proposição verdadeira, não é?*
Simplício. *Certamente*

Salviati. *De seguida, se eu perguntar agora quantos quadrados há, podemos responder, sem nos enganarmos, que há tantos quantas as raízes quadradas correspondentes, atendendo a que todo o quadrado tem a sua raiz e toda a raiz o seu quadrado, que um quadrado não tem mais do que uma raiz, nem uma raiz mais do que um quadrado.*
Simplício. *Exactamente.*
Salviati. *Mas se eu perguntar quantas raízes há, não se pode negar que há tantas quantos os números, porque todo o número é a raiz de algum quadrado. Assim sendo, será portanto preciso dizer que há tantos números quadrados como números, uma vez que eles são tantos como as raízes e que as raízes representam o conjunto dos números. No entanto dizíamos de princípio que há mais números do que quadrados, já que a maior parte dos números não são quadrados. (…)*
Sagredo. Então, qual a conclusão a tirar nestas condições?
Salviati. *Aos meus olhos, a única conclusão possível é dizer que o conjunto dos números, dos quadrados, das raízes é infinito; que o total dos números quadrados não é inferior ao conjunto dos números, nem este superior àquele. E finalmente, que os atributos igual, maior e menor não têm sentido para quantidades infinitas, mas somente para quantidades finitas.*

Em 1635, com Bonaventura Cavalieri (1597-1647), professor na Universidade de Bolonha e discípulo de Galilei, as ideias de Kepler foram sistematicamente desenvolvidas no livro *Geometria indivisibilius continuorum*. O livro de Cavalieri permitiu um maior entusiasmo dos matemáticos relativamente a problemas relacionados com os infinitesimais, como é o caso da procura de métodos para tentar encontrar a tangente a uma curva num dado ponto. Em 1655, Jonh Wallis (1616-1703) escreve *Arithmetica infinitorum*, tentando ultrapassar Cavalieri. Apesar de os seus métodos serem pouco rigorosos, salienta-se que Wallis escreveu, pela primeira vez, ∞ para representar 1/0, utilizou expoentes negativos, fraccionários e imaginários, introduziu séries infinitas…, e este estudo de séries infinitas permitiu apoiar Isaac Newton (1642-1727) que, enquanto permanecia em Lincolnshire, a sua terra natal, para fugir à peste que se propagava em Cambridge, escreveu a sua *teoria das fluxões* (1665-66), só publicada em 1742, com o título *Methodus fluxionum et serium infinitorium*. Nesta sua teoria, os infinitesimais eram denominados de *momentos de fluxões*. Newton introduz a noção de limite, embora expressa de uma forma extremamente confusa. A sua grande obra foi *Principia Mathematica* (1687).

Paralelamente a Newton, Gottfried Leibniz (1646-1716) encontrou também um novo cálculo, entre 1673 e 1676. A abordagem de Newton era essencialmente cinemática, enquanto a de Leibniz era geométrica. A notação matemática que usamos no cálculo de hoje, deve-se, essencialmente, a Leibniz, assim como os nomes *calculus differentialis* e *calculus integralis*. Por exemplo, ele fixou em dx e dy as diferenças menores possíveis (diferenciais) em x e y.

A sua primeira obra sobre o cálculo diferencial só foi publicada em 1684 e chama-se *Nova methodus pró maximis et minimis, itemque tangentibus qua nec irrationales quantitates moratur* (*Um novo método para máximos e mínimos e também para tangentes, que não é obstruído por quantidades irracionais*), nela mostrando que para determinar tangentes é necessário utilizar o cálculo diferencial e para calcular quadraturas é exigido o cálculo integral.

Numa das suas cartas a Foucher, em 1693, elogia Grégoire de Saint Vicent por ter determinado o local exacto onde Aquiles iria encontrar-se com a tartaruga, tendo resolvido este paradoxo de Zenão, aceitando desta forma o *infinito actual*. Grégoire de Saint Vicent refere explicitamente a soma de um número infinito de grandezas, considerações importantíssimas para o Cálculo integral. Esta manipulação de somas infinitas tornou-se então de uso corrente na Matemática. No entanto, há que salientar que Leibniz só concebia o infinito/infinitesimal como facilitador do cálculo e cujo resultado se exprimia sempre em função de quantidades finitas.

A *Teoria das fluxões* de Newton aproxima-se bastante do nosso cálculo, mas a eficácia da notação diferencial de Leibniz produziu uma maior aceitação. Segundo Augusto de Oliveira (2002) no prefácio à edição portuguesa do *Método das fluxões e das séries infinitas* de Newton (2004 [1742], p. III), "se reconhecemos Newton como criador pioneiro do Cálculo infinitesimal moderno (…) não devemos deixar de reconhecer que esse título deve ser partilhado com Gottfried Leibniz".

5. O século XVIII

Chegamos à época de Leonhard Euler (1707-1783), natural de Basileia, autor de 560 trabalhos publicados em vida e de muitos outros após a morte, considerado, por isso, um dos mais produtivos matemáticos de sempre. Segundo Struik (1997 [1948], p. 196-197), "o grande prestígio dos seus textos resolveu para sempre muitas questões controversas sobre a notação na álgebra e no cálculo infinitesimal". Euler utilizou a notação e a linguagem que nós ainda hoje usamos, tendo sido responsável, em grande parte, por exemplo, pela utilização que damos aos símbolos $e, \pi, i, \ldots$ A notação $f(x)$ para representar uma função de x também é da sua responsabilidade. Desta forma, a notação matemática comummente aceite provém essencialmente de Euler. Em 1748, escreveu *Introductio in analysin infinitorium* e o primeiro volume desta obra trata essencialmente de processos infinitos.

Segundo Boyer (1998 [1968], p. 306), "pode ser dito com justiça que Euler fez pela análise de Newton e Leibniz o que Euclides fizera pela geometria de Eudoxo e Teaetetus, ou o que Viète fizera pela álgebra de al-Khowarizmi e Cardano".

Sabe-se que Euler mantinha uma correspondência frequente com o matemático parisiense Jean Le Round d'Alembert (1717-1783), cujo cognome d'Alembert proveio da igreja de St. Jean Baptiste le Rond, em Paris. Entre 1751 e 1772 ele colaborou com Denis Diberot (1713-1784) na construção dos vinte e oito volumes da *Encyclopédie* (*Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers*).

Para d' Alembert, o cálculo deveria fundamentar-se na ideia de limite, tendo substituído a razão de duas quantidades infinitesimais pela concepção de limite. No entanto, a sua ideia não foi aceite pelos seus contemporâneos, tendo-se continuado a usar a linguagem de Leibniz e de Euler. Como d' Alembert pensava em grandezas geométricas, nunca aceitou a existência do *infinito actual* pensando sempre na sua forma *potencial*. Opôs-se aos pontos de vista destes dois matemáticos, afirmando que uma quantidade ou representa algo ou então não é nada. Segundo Struik (1997, p. 204), d' Alembert "chamou a uma quantidade limite de outra quando a segunda se aproxima da primeira mais que qualquer quantidade dada".

Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), foi um dos grandes matemáticos que viveu durante a Revolução francesa e rejeitou completamente a teoria de limites de Newton e de d' Alembert, dedicando-se à fundamentação do cálculo pela álgebra. Em 1797, escreveu a *Theorie dês fonctions analytiques*, utilizando a notação $f'(x), f''(x), \ldots f^{(n)}(x), \ldots$ para representar derivadas de várias ordens. Pensou poder eliminar a necessidade do uso de limites ou infinitésimos, mas, mais tarde, foram reveladas algumas falhas nos seus argumentos.

6. O século XIX

Surge uma nova geração de matemáticos, de mentes mais abertas, em parte, fruto da Revolução Francesa, inspirados por novas perspectivas e que irão revolucionar vários campos da ciência. Agora a Matemática é tida não apenas como uma ciência importante para a Mecânica e para a Astronomia, mas, ao invés, como uma ciência autónoma. Há uma separação dos matemáticos *puros* e dos *aplicados*. Tinha chegado a época de reflexão sobre os fundamentos da Matemática, já não bastava obter resultados, era necessário reflectir bem sobre o seu significado: o que é uma função de variável real, qual a relação das funções de variável complexa…, o que relançou novamente a discussão sobre o *infinito actual*.

Augustin Cauchy (1789-1857) tentou dar resposta, através do cálculo, a uma série de paradoxos que assombravam a Matemática desde o tempo de Zenão. Foi ele que fundamentou o cálculo que hoje utilizamos como podemos ver nos seus textos *Cours d' analyse de l' Ecole Royale Polytechnique* (1821), *Résumé des leçons sur le Calcul infinitésimal* (vol. I, 1823) e *Leçons sur le Calcul différentiel* (1829). Tornou fundamental o conceito de limite de d' Alembert, de função, de integral como limite de uma soma (ao invés de uma *antiderivação*), …

Na segunda metade do século XIX, surgiu, em Berlim, Karl Weierstrass (1815-1897), o qual, segundo Struik (1997 [1948], p. 256), "era a consciência matemática por excelência, metodologia e lógica". A importância do seu trabalho baseia-se na clarificação das noções de mínimo de uma função, de convergência uniforme, bem como no desenvolvimento de raciocínios que se baseiam no conceito de limite em geral. Salienta-se, ainda, que, enquanto professor, insistiu no rigor com que se deveriam usar as séries infinitas. Foi ele quem forneceu fundamentos sólidos para a Análise, eliminando os defeitos remanescentes do Cálculo.

Os esforços de Cauchy, Bernhard Bolzano (1781-1845) e Weierstrass em fundamentar rigorosamente os métodos do cálculo infinitesimal conduziram a uma formalização rigorosa com base na noção de limite. Este conceito permitiu um novo tratamento matemático do infinito.

Esta procura do rigor foi fortemente defendida por Leopold Kronecker (1823-1891), professor da Universidade de Berlim. Para ele, a Matemática devia basear-se no número e todo o número nos números naturais. Em 1886, num encontro que decorreu em Berlim, afirmou que "Deus fez os números inteiros e os homens fizeram o resto" ("Die Ranzen Zahlen hat der lIebe Gott Remacht. alies andere ist Menschenwerk“). Deste modo, recusou o *infinito actual*, o que estava em contraste com as teorias de Richard Dedekind (1831-1916) e de Georg Cantor (1845-1918).

O infinito ganha uma nova história com Bolzano, ao defender o *infinito actual* em *Paradoxos do infinito* (*Paradoxien des unendlichen*, livro publicado apenas em 1851, já depois da sua morte). Para ele, bastava caracterizar um conjunto pelas suas propriedades, e não ter de enumerar todos os elementos desse conjunto, ou seja, um conjunto é um todo. Aceitava o pressuposto de Arquimedes de que *o todo é maior que* *as partes*, embora se considerasse que, no caso dos conjuntos infinitos, as regras não eram tão *taxativas*.

Bolzano, nascido em Praga, tentou estabelecer um critério de comparação entre conjuntos infinitos. Analisou o paradoxo de Galilei relativamente à correspondência um a um entre os números inteiros e os quadrados perfeitos e mostrou, *vagamente*, que as correspondências entre um conjunto infinito e um seu subconjunto próprio são comuns a todos os conjuntos infinitos. No entanto, considerou que a existência de uma bijecção entre tais conjuntos não era suficiente para os considerar com o mesmo cardinal.

> *Quando dois conjuntos são infinitos, pode haver uma relação tal que, por um lado é possível associar cada elemento do primeiro conjunto com algum elemento do segundo de tal forma que nenhum elemento dos dois conjuntos fique sem associação e também que nenhum dos elementos tenha mais que uma associação, e por outro lado é possível que um conjunto possa conter o outro como uma parte de si.*
> (Bolzano, 1991 [1851], p. 64)

> *É insuficiente que se possam equiparar os elementos de dois conjuntos [infinitos] … Só se pode concluir uma igualdade destas multiplicidades se ambos os conjuntos forem determinados de modo idêntico.* (Bolzano, 1991 [1851], p. 67)

Bolzano sentiu necessidade dum novo conceito de infinito e justificou a existência de imensos paradoxos relativos a esta ideia pela falta de precisão do termo. Apesar dos seus esforços, não conseguiu solucionar o problema do infinito. Mas afinal o que é o infinito? Questão polémica a que Dedekind e Cantor tentaram responder.

Dedekind foi professor na Technishe Hochschule de Brunswick e construiu uma teoria rigorosa sobre os irracionais. A teoria das proporções de Eudoxo de Cnido foi uma das suas fontes de inspiração. Dedekind eliminou os *buracos* existentes na recta, criando os números reais. Os primeiros estudos sistemáticos de conjuntos infinitos são-lhe devidos. Estabeleceu uma correspondência biunívoca entre os pontos de uma recta e os números reais. Logo, Dedekind estabeleceu uma bijecção entre dois conjuntos infinitos, passando do *infinito potencial* para o *actual*. Um conjunto finito passa a ser aquele que não está em bijecção com nenhuma das suas partes. Define um conjunto infinito, em 1872, na sua obra *Stetigkeit und irrationale Zahlen* (*A continuidade e os números irracionais*) e expõe mais amplamente as suas ideias, em 1888, no livro *Was sind und was sollen die Zahlen?* (*O que são e para que servem os Números?*). Deste modo, "diz-se que um sistema [conjunto] S é infinito quando é semelhante a uma parte própria dele mesmo; caso contrário S diz-se finito" (citado em Boyer, 1998 [1968], p. 392), ou seja, o conjunto S é infinito se e só se for equipotente a uma sua parte própria.

Cantor, natural de S. Petersburgo, doutorado em Berlim, foi quem Kronecker mais criticou pela sua teoria de conjuntos (*Mengenlehre*) ou teoria das multiplicidades (*Mannigfaltigkeitslehre*). Ele aceitou o *infinito actual* e desenvolveu uma teoria que explicava os diferentes conjuntos infinitos, a teoria dos números cardinais transfinitos baseada num tratamento matemático do *infinito actual*. Como os números 1, 2, 3, 4… não permitem a contagem dos elementos dos conjuntos infinitos, Cantor criou um novo tipo de número: o transfinito. Existe, depois do finito, um transfinito que pode ser definido de forma precisa. Ao conjunto numerável atribui o menor cardinal transfinito $\aleph_0$ e ao contínuo atribuiu um número transfinito maior.

Para desenvolver os seus trabalhos em Análise foi necessário fazer uma construção rigorosa dos números reais que assentasse apenas na Aritmética. Para isso era necessário utilizar certos conjuntos de pontos, efectuar operações sobre estes conjuntos, considerar sucessões dos mesmos… E, tal como Cantor, também Dedekind e Weirstrass sentiram essa necessidade, porém ele foi mais longe. Acrescentemos ainda que os trabalhos elaborados sobre séries trigonométricas conduziram os matemáticos da altura a estudarem certos conjuntos de pontos particulares ligados à convergência das séries. A partir destes problemas de análise, Bolzano, Dedekind e Cantor encontraram os primeiros resultados da teoria de conjuntos.

Ao longo dos tempos foram-se tentando encontrar critérios de comparação entre conjuntos infinitos e, no século XIX, estava mais ou menos aceite que a existência de uma bijecção entre dois conjuntos permitia estabelecer a igualdade da quantidade dos seus elementos. Dado um conjunto infinito de referência e um outro conjunto infinito, será que podemos estabelecer uma correspondência bijectiva entre esses conjuntos? Em caso afirmativo, os conjuntos têm o mesmo tamanho, caso contrário podemos concluir que existem infinitos de tamanhos diferentes. Cantor mostrou, relativamente ao tamanho dos conjuntos, que há infinitos *iguais* e *diferentes*. Tal como Dedekind, ele tinha reconhecido a propriedade fundamental dos conjuntos infinitos, mas viu que os conjuntos infinitos não eram todos iguais.

Em 8 de Dezembro de 1873, Cantor escreveu uma carta a Dedekind (o que era bastante frequente) em que afirmava que os conjuntos dos números naturais e dos números reais não podiam ser postos em correspondência, e, no dia 23 desse mesmo mês, já tinha um artigo pronto com a prova de tal afirmação: *Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen* (*Sobre uma propriedade do conjunto de todos os números algébricos reais*), que só foi publicado no início do ano seguinte. É de referir que, a forma como foi redigido, conduz o leitor a uma alternativa do Teorema de Liouville em vez da existência de conjuntos não numeráveis.

Ficou então provado que os subconjuntos infinitos de • têm o mesmo cardinal, que o conjunto dos números racionais é numerável, que o conjunto dos números reais não é numerável e que o conjunto dos pontos de um quadrado é equivalente ao conjunto dos pontos do seu lado. Como o conjunto • é uma parte de • e uma parte de um qualquer conjunto não o pode exceder em quantidade de elementos, é natural que o conjunto • tenha menor cardinal que o conjunto •.

Nesta fase, Cantor decidiu procurar outros infinitos, isto é, os infinitos que estivessem entre • e • e os *maiores* que •. Uma conjectura natural para encontrar infinitos *maiores* seria considerar conjuntos contínuos a duas ou mais dimensões e, em 20 de Junho de 1877, Cantor mostrou a Dedekind uma prova que contradizia a sua própria intuição. Surpreendentemente, para os matemáticos da altura, conseguiu estabelecer uma bijecção entre $[0,1]$ e $[0,1]^n$ (qualquer $n \in$ •), patente no seu artigo *Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre* (*Uma contribuição para a teoria dos conjuntos*), concluído em 11 de Julho do mesmo ano, mostrando assim que •^{n} e •^{m} têm a mesma dimensão, quaisquer $n, m \in$ •. Pois bem, a prova de que existem conjuntos com um cardinal maior que o de • veio de outra proposição muito mais abrangente. O conjunto dos subconjuntos de um conjunto tem sempre mais elementos que o próprio conjunto. Donde se pôde concluir que existem infinitos maiores que •. Já a ideia da existência de infinitos intermédios entre • e •, não foi demonstrada ou refutada por Cantor. Ele próprio nunca conseguiu demonstrar que não pode existir um infinito intermédio entre o numerável e o contínuo, isto é, simbolicamente $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$. Esta sua ideia ficou conhecida pela *Hipótese do contínuo* (1878).

Foi ainda o principal responsável pela criação da *Deutshe Mathematiker-Vereinigung* (*União Alemã de Matemática*) e, em 1891, no primeiro encontro da associação, em Halle, leu um artigo sobre o seu *argumento diagonal* em que provava exactamente que, dado um conjunto, o conjunto das suas partes tem potência maior que esse conjunto.

As teorias de Cantor para a teoria de conjuntos revolucionaram então a Matemática. O *infinito actual* finalmente tinha sido incorporado na Matemática. Notemos que um *infinito actual* é aquele que pode ser concebido como uma entidade *completa*, ou seja, todos os seus elementos podem ser pensados num acto único.

Apesar de toda esta revolucionária e fabulosa teoria, aos poucos algumas contradições se foram descobrindo. O próprio Cantor, em 1895, descobriu que não podia haver *o conjunto de todos os conjuntos*, mas vários dos seus problemas foram posteriormente solucionados no século XX.

7. Já no século XX

O início deste século ficou marcado pelo segundo Congresso internacional de Matemática, que decorreu em Paris (1900). David Hilbert (1862-1943), de Königsberg, da Prússia, apresentou uma memorável conferência onde formulou uma lista de *23 Problemas Matemáticos* que precisavam de resposta. O primeiro referia-se à estrutura de continuidade dos números reais e, mais explicitamente, à *Hipótese do contínuo*. Ele questionou se haveria algum cardinal entre o contínuo e o numerável e se o contínuo poderia ser considerado bem ordenado. Relativamente ao *problema do contínuo* de Cantor sobre a potência ou cardinalidade do contínuo, ς, Hilbert questionou se é ou não a primeira a seguir à potência do numerável, $\aleph_0$.

> *Problema do Senhor Cantor relativo à potência do contínuo.*
> *Todo o sistema infinito de números reais, isto é, todo o conjunto de números (ou pontos), ou é equivalente ao conjunto dos números naturais 1, 2, 3, …, ou ao conjunto de todos os números reais, e por consequência ao contínuo, isto é, aos pontos de um segmento; de um ponto de vista equivalente, não há mais que dois conjuntos de números: os numeráveis e o contínuo.*
> *A partir deste teorema podemos concluir igualmente que o contínuo apresenta o número cardinal imediatamente a seguir ao do conjunto numerável.*
> *(…) O conjunto de todos os números não poderá ser ordenado de uma outra forma tal que todos os conjuntos parciais tenham um primeiro elemento? Dito de outra forma, será que o contínuo poderá ser considerado um conjunto bem ordenado?* (Hilbert, 1990 [1902], p. 13-14).

Relativamente à segunda parte do problema, é necessário referir o *Axioma da escolha*, formulado pelo alemão Ernst Zermelo (1871-1956), tendo proposto, em 1908, no seu artigo *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre* (*Investigações sobre os fundamentos da teoria de conjuntos*), a primeira axiomatização da teoria de conjuntos, evitando as contradições existentes. Mas como poderemos ter a certeza de que não existem outros conjuntos paradoxais? Pois bem, para um matemático, uma demonstração só é válida se for verificável. E, mais uma vez, surge um novo problema: a subjectividade inerente ao acto de verificar.

Hilbert, na conferência que deu a 4 de Junho de 1925, por ocasião do congresso organizado pela Sociedade Matemática de Westfália, em Münster, afirmou que "ninguém nos expulsará do paraíso que Cantor criou para nós".

> *A Análise matemática constitui, por si mesma, uma sinfonia do infinito. (…) Mas a Análise, por si só, não nos dá ainda a visão mais aprofundada da natureza do infinito. Para obtê-la servimo-nos de uma disciplina que se aproxima da especulação filosófica geral e que estava destinada a dar nova luz a todos os complexos problemas que se referem ao infinito. Esta disciplina é a teoria dos conjuntos que foi criada por Georg Cantor. (…) Esta parece-me a mais maravilhosa florescência do espírito matemático e, sem dúvida, uma das mais altas realizações da actividade racional humana pura.* (Hilbert, 1926, p. 239-240).

Tentou, através da verificação mecânica, mostrar a consistência do *paraíso que Cantor criou,* mas, na década de 1930, o trabalho *Teoremas de incompletude* de Gödel-Russell marcou um ponto de inflexão nos fundamentos da Matemática. Notemos que um sistema axiomático deve satisfazer três condições: ser consistente, ser completo e cada postulado ser independente dos demais. Em 1931, o austríaco Kürt Gödel (1906-1978) surpreendeu os matemáticos de então com uma demonstração de que o método axiomático apresenta limitações, ou seja, demonstrou que existem verdades matemáticas impossíveis de demonstrar por via lógica e qualquer sistema lógico não demonstra a sua consistência lógica.

A descoberta de Gödel "implica que a consistência de um sistema matemático não pode ser demonstrada excepto utilizando métodos mais poderosos do que os métodos de demonstração do próprio sistema" (Cohen, 1966, p. 7).

Em 1936, Gödel mostrou que a Hipótese do contínuo é compatível com a teoria de conjuntos de Zermelo-Fraenkel e, em 1963, Paul Cohen mostrou que a negação da Hipótese do contínuo também é compatível com os axiomas da teoria de Zermelo-Fraenkel.

Os trabalhos de Gödel, em 1936, e de Cohen, em 1963, mostraram que esta formulação não pode ser demonstrada/refutada tendo em conta apenas os axiomas habituais da teoria de conjuntos.

Acrescenta-se apenas que Cantor não reconhecia a existência dos infinitamente pequenos e foi preciso esperar pela Análise não standard, formulada por Abraham Robinson (1918-1974), em 1961, para os infinitesimais serem reconhecidos como entidades bem definidas e, assim, justificar os cálculos que os físicos faziam com eles.

8. Análise não standard

A utilização de números infinitesimais sempre foi muito controversa. Só com a descoberta do Cálculo, no século XVII, por Newton e Leibniz, é que o uso destes números se tornou mais frequente. Estes dois grandes matemáticos usaram métodos infinitesimais no desenvolvimento do Cálculo, mas foram incapazes de fazê-lo de forma precisa. Mesmo assim Newton conduziu à teoria dos limites, enquanto Leibniz baseou o seu raciocínio em termos de infinitésimos, conferindo-lhe um carácter mais algébrico.

Leibniz e os seus seguidores basearam o desenvolvimento da diferenciação e da integração em diferenças infinitamente pequenas de primeira ordem e ordens superiores, permitindo um rápido progresso do Cálculo. No entanto, existiam certas contradições que necessitavam ser eliminadas. Cauchy tentou solucionar o problema através do desenvolvimento rigoroso da Análise Matemática. Baseou a sua teoria no conceito de limite e o seu método foi formalmente reinterpretado por Weierstrass. Desta forma, a teoria de limites foi firmemente estabelecida, e o uso dos infinitesimais e infinitamente grandes foi praticamente banido da Análise.

Em 1934, Skolem representou números naturais infinitamente grandes através de funções da teoria de conjuntos que tendem para o infinito, retomando as ideias de Cauchy. Estes trabalhos foram de grande importância para a criação da Análise não-standard.

Em 1960, Robinson descobriu que a recta real pode não ser a melhor aproximação teórica de uma recta do espaço físico, ao formular a sua teoria rigorosa sobre infinitesimais actuais. A Análise não standard é uma técnica da Matemática que fornece uma fundamentação lógica para a ideia de um infinitesimal, ou seja, um número que seja menor que $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \cdots$ e simultaneamente maior que 0. A Análise não standard foi descoberta por Robinson em 1960 e surgiu, oficialmente, no seu artigo *Nonstandard Analysis* publicado em 1961.

É necessário saber matematicamente quando é que uma quantidade não nula é suficientemente pequena para ser desprezada ou não. Para resolver este tipo de problema, era necessário introduzir um novo número, ε, infinitesimal, ou seja, infinitamente pequeno, não nulo, simbolicamente, $\exists \varepsilon \neq 0 : \forall x \in$ •, $-x < \varepsilon < x$.

Com o desenvolvimento de novos métodos de construção de estruturas e com o progresso da Teoria de Modelos, foi possível a construção do sistema de números hiperreais, •*, ou seja, construiu-se um corpo não arquimediano que estende propriamente • com infinitamente grandes e pequenos. Uma das propriedades mais significativas deste novo conjunto é que todo o hiperreal finito, da forma $a+\varepsilon$, com $a \in$ • e ε infinitesimal, está infinitamente próximo de um único número real, denominado a sua parte standard.

Em 1976, o americano Howard Keisler propôs uma axiomática dos hiperreais no seu livro *Elementary Calculus: an infinitesimal approach* e, em 1977, um outro americano, Edward Nelson, também apresentou uma axiomática para a Análise não standard, pretendendo englobar todos os ramos da Matemática.

Em 1994, por ocasião da comemoração do aniversário da morte de Robinson, realizou-se em Portugal, na Universidade de Aveiro, o primeiro Colóquio Internacional de Matemática Não Standard.

Referências bibliográficas

ARISTÓTELES (1996 [350 a.C.]). *Física*. Madrid: Consejo superior de investigaciones científicas.
BOLZANO, Bernard (1991 [1851]). *Las paradojas del infinito*. México: Mathema.
BOYER, Carl (1998 [1968]). *História da Matemática*. (2ª edição). São Paulo: Editora Edgar Blücher Lda.
COHEN, Paul (1966). A teoria de conjuntos e a hipótese do contínuo. In GÖDEL, Kurt (1979). *O teorema de Gödel e a hipótese do contínuo*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian. p. 1-182.
GALILEI, Galileo (1989 [1638]). *Two new sciences*. Toronto: Wall & Thompson.
GÖDEL, Kurt (1964). O que é o problema do contínuo de Cantor? In GÖDEL, Kurt (1979). *O teorema de Gödel e a hipótese do contínuo*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian. p. 217-244.
HEATH, Thomas (1998 [1949]). *Mathematics in Aristotle*. Bristol: Thoemmes press.
HILBERT, David (1926). Sobre o infinito. *Mathematische Annalen*, vol. XCV. In HILBERT, David (2003 [1898-99]). *Fundamentos da geometria*. Lisboa: Gradiva. p. 234-255.
HILBERT, David (1990 [1902]). *Sur les problèmes futurs des Mathématiques*. Sceaux : Éditions Jacques Gabay.
NEWTON, Isaac (2004 [1742]). *O método das fluxões e das séries infinitas*. Associação de Professores de Matemática e Editorial Prometeu.
OLIVEIRA, Augusto (1994). Infinitésimos e infinitamente grandes: o âmago da dificuldade. In CARAÇA, Bento (1998 [1948]). *Conceitos fundamentais da Matemática*. (2ª edição). Lisboa: Gradiva.
SANTO AGOSTINGO (1999 [413-427]). *A cidade de Deus (contra os pagãos)*. (3ª edição). Petrópolis: Editora Vozes. Parte II.
STRUIK, Dirk (1997 [1948]). *História concisa das Matemáticas.* (3ª edição). Lisboa: Gradiva.