

EQUAÇÃO DE GREEN-AMPT PARA A INFILTRAÇÃO DA ÁGUA NO SOLO APROXIMAÇÕES NUMÉRICAS PARA EXPLICITAÇÃO DO VOLUME INFILTRADO

GREEN-AMPT EQUATION FOR WATER INFILTRATION INTO SOIL NUMERICAL APPROXIMATIONS TO THE EXPLICIT FORMULATION FOR THE ACCUMULATED WATER

FRANCISCO MERCÊS DE MELLO¹

RESUMO

O modelo de infiltração de Green-Ampt (1911), muito utilizado ainda hoje em Hidrologia, não permite explicitar de forma exacta o volume acumulado por infiltração em função do tempo. É neste contexto que se insere o presente estudo ,no qual são propostas duas soluções aproximadas. A primeira equação é original e a segunda resulta de modificações introduzidas numa das equações de Li *et al.* (1976). Analisaram-se os erros relativos provenientes da aplicação destas equações e apresenta-se um exemplo para melhor concretizar a aplicação destas aproximações numéricas.

Palavras-chave: infiltração, optimização numérica.

ABSTRACT

The Green-Ampt infiltration model (1911), still used in Hydrology nowadays, does not allow to have an exact explicitation of the accumulated infiltration water *versus* time. The present work tries to solve this problem by presenting two solutions. The first equation is original and the second is the result of some improvements made in one of Li *et al* equations (1976). The relative errors proceeding from these equation were discussed and one example is presented in order to concretize these numerical applications.

Key-words: infiltration, numerical optimization.

INTRODUÇÃO

A infiltração da água no solo é um processo de especial importância para o estudo da fase terrestre do ciclo hidrológico.

Green & Ampt (1911) desenvolveram uma equação de infiltração, monodimensional,

Professor Associado. Doutor em Engenharia Agrícola

baseada na lei de Darcy, onde intervêm parâmetros com verdadeiro significado físico. Este facto explica porque é que ainda hoje se recorre à sua aplicação em modelos hidrológicos de simulação e a atenção que diversos investigadores lhe continuam a dispensar no intuito de alargar os seus pressupostos.

De facto, para além de solos com perfil uniforme, para os quais a equação foi originalmente estabelecida, ela tem sido aplicada com bons resultados em solos onde a densidade aumenta com a profundidade (Childs & Baibordi, 1969), em solos onde a condutividade hidráulica aumenta com a profundidade (Bower, 1976) e até em solos com crosta à superfície (Hillel & Gardner, 1970; Ahuja, 1974). Também Bower (1969) mostrou que o teor de humidade inicial podia não ser uniforme e Morel-seytoux & Khanji (1974) verificaram que a fórmula de Green-Ampt para determinação da infiltrabilidade não variava quando se considerava simultaneamente o movimento do ar e da água.

Sucedem porém que, segundo o modelo de Green-Ampt, o volume acumulado por infiltração é uma função implícita do tempo, sendo portanto o seu cálculo um processo iterativo, moroso e pouco expedito, o que levou Li *et al.* (1976) a apresentarem fórmulas explícitas aproximadas. É neste contexto que se propõem duas aproximações numéricas para explicitação do volume total infiltrado, cujos erros relativos resultantes da sua aplicação são analisados comparativamente aos de uma das fórmulas já existentes.

EQUAÇÕES PROPOSTAS

Equação de Green-Ampt sob forma adimensional

O modelo de Green-Ampt, esquematizado na fig. 1, e considerando H_0 desprezável,

permite escrever a equação de infiltração na forma integrada:

$$I - M \cdot S \cdot \ln \left(1 + \frac{I}{M \cdot S} \right) = K \cdot t \quad (1)$$

onde se representa por:

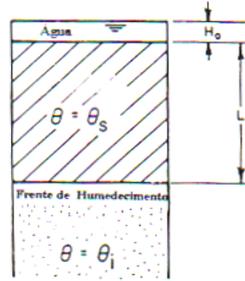


Figura 1 – Esquema do modelo Green-Ampt.

- I - o volume de água de infiltração acumulado no tempo t , por unidade de superfície;
- M - o défice de humidade do solo, $\theta_s - \theta_i$, sendo θ_s e θ_i as humidades à saturação e nas condições iniciais, respectivamente;
- S - a sucção na frente de humedecimento;
- K - a condutividade hidráulica na zona humedecida;
- t - o tempo decorrido desde o início da infiltração.

Definindo os parâmetros adimensionais I^* e t^* por:

$$I^* = \frac{I}{M \cdot S} \text{ e } t^* = \frac{t \cdot K}{M \cdot S} \text{ e dividindo ambos os}$$

membros de (1) por $M \cdot S$, vem:

$$I^* - \ln(1 + I^*) = t^* \quad (2)$$

Primeira equação proposta

Analisando o comportamento da expressão (2), ensaiou-se o seu ajustamento a uma equação do tipo:

$$I^* = \exp(a + b \cdot \ln(t^*) + c \cdot \ln^2(t^*) + d \cdot \ln^3(t^*)) \quad (3)$$

Para tal aplicou-se o método de optimização de Nelder e Mead (1964), onde os

parâmetros a, b, c e d foram determinados minimizando a soma dos quadrados da diferença entre os valores obtidos com a utilização da equação de Green-Ampt, expressão (2), e os obtidos com a equação (3), para os mesmos valores de t^* . Os resultados encontrados conduziram à equação:

$$I^* = \exp(0.765 + 0.684 \cdot \ln(t^*) + 0.032 \cdot \ln^2(t^*) + 0.002 \cdot \ln^3(t^*))$$

que se passa a designar por eq. 1 proposta

Segunda equação proposta

Desenvolvendo $\ln(1+I^*)$ em série de potências, tal como o fizeram Li *et al.* (1976), obtém-se:

$$\ln(1 + I^*) = 2 \left[\frac{I^*}{2+I^*} + \frac{1}{3} \left(\frac{I^*}{2+I^*} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{I^*}{2+I^*} \right)^5 + \dots \right]$$

Truncando a série, pode escrever-se:

$$\ln(1+I^*) \approx \frac{2 \cdot I^*}{2+I^*} \quad (4)$$

que por substituição em (2) dá:

$$I^* - \frac{2 \cdot I^*}{2+I^*} \approx t^*, \text{ ou seja}$$

$$-t^* \cdot I^* - 2 \cdot t^* \approx 0, \text{ cuja raiz positiva é}$$

$$I^* = \frac{1}{2} \cdot (t^* + \sqrt{t^{*2} + 8 \cdot t^*}) \quad (5)$$

Esta expressão constitui uma das soluções aproximadas de Li *et al.* (1976).

Aplicando o processo de otimização acima referido e partindo da expressão (5) ajustou-se uma equação do tipo:

$$I^* = A \cdot (t^* + \sqrt{B \cdot t^{*2} + C \cdot t^*})$$

Os resultados obtidos permitem escrever:

$$I^* = 0.715 \cdot (t^* + \sqrt{0.205 \cdot t^{*2} + 3.802 \cdot t^*})$$

que se passa a designar por eq. 2 proposta

ANÁLISE COMPARATIVA DAS FÓRMULAS PROPOSTAS. CONCLUSÕES

Na fig.2 podemos ver a variação do total infiltrado (I^*) em função do tempo para o modelo de Green-Ampt e para as equações propostas (eq.1 e eq.2) e para a expressão de Li *et al.* atrás referida (eq.3). O campo de variação de (t^* , I^*) é idêntico ao escolhido por diferentes autores, nomeadamente Chu (1978).

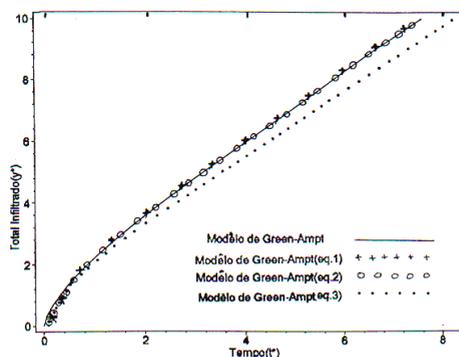


Figura 2 – Comparação do total infiltrado em função do tempo para as diferentes equações.

Analisando o comportamento das diferentes curvas pode concluir-se que as eq.1 e eq.2 propostas são quase coincidentes com a do modelo de Green-Ampt. Porém, a eq.3 afasta-se sistematicamente com valores inferiores aos teóricos.

Definiu-se o erro relativo percentual ε pela expressão:

$$\varepsilon = \frac{I^* - I_c^*}{I^*} \cdot 100$$

onde I_c^* representa o valor calculado pelas aproximações estudadas e I^* o valor correspondente fornecido pelo modelo de Green-Ampt.

Na fig.3 representa-se o erro relativo (%) para a eq.1 proposta. A partir do valor de $I^*=0.01$ este erro é pequeníssimo, atingindo

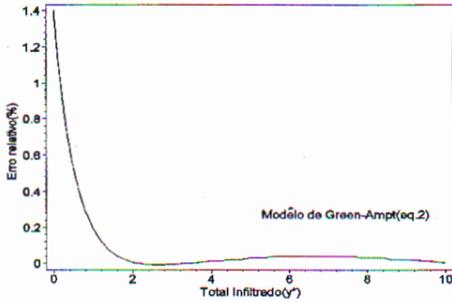


Figura 3 – Erro relativo do total infiltrado calculado com a eq.1.

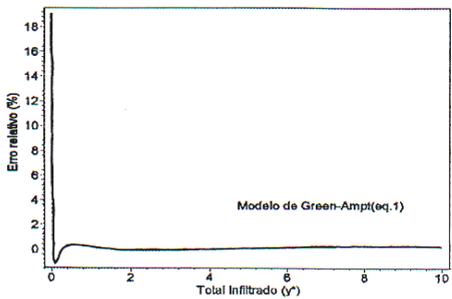


Figura 4 – Erro relativo do total infiltrado calculado com a eq. 2.

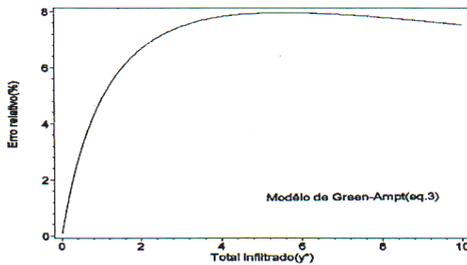


Figura 5 – Erro relativo do total infiltrado calculado com a eq.3.

para $I^* = 0.11$ o valor máximo de -1.1% .

Na fig.4 pode verificar-se que com a eq.2 ainda se praticam erros mais pequenos, que se consideram mesmo desprezáveis.

Já a eq.3 de Li *et al.* conduz sempre a erros por defeito e em todo o campo de variação dos Y^* , atingindo para $Y^* = 5.56$ o seu valor

máximo de sensivelmente 8% , como pode observar-se na fig.5 .

EXEMPLO

Suponhamos que pretendemos calcular a infiltração acumulada entre 5 e 49 minutos para um solo verificando os pressupostos de Green-Ampt e de que se conhecem os seguintes dados:

$$K = 0.0411 \text{ cm/min}$$

$$\Delta\theta = 0.224 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$$

$$S = -36.5 \text{ cm}$$

$$\text{Fazendo } M.S = 0.224.36.5\text{cm} = 8.176 \text{ cm,}$$

vem:

$$t_5^* = \frac{t.K}{M.S} = \frac{5.(0.0411)}{8.176} = 0.0251345 \text{ e}$$

$$t_{49}^* = \frac{49.(0.0411)}{8.176} = 0.246318$$

Entrando com estes valores nas diferentes equações temos:

eq.1 $Y_{49}^* - Y_5^* = 0.631154$

eq.2 $Y_{49}^* - Y_5^* = 0.633476$

eq.3 $Y_{49}^* - Y_5^* = 0.598637$

que corresponde a quantitativos já dimensionalizados por multiplicação por 8.176 cm, de:

eq.1 5.160 cm

eq.2 5.179 cm

eq.3 4.894 cm

Chong (1979), por processo iterativo, obteve para os mesmos dados o valor de 5.17cm, resultado que está mais próximo dos obtidos com as eq.1 e eq.2 propostas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ahuja, L.R. (1974) - Applicability of the Green-Ampt approach to water infiltration through surface crust. *Soil Science* 18 (5):283-288.
 Bower, H. (1969) - Infiltration of Water into Nonuniform Soil. J. Irrigation and Drainage Division.

- Am. Soc. Civ. Engrs* 95(IR4):451-462.
- Bower, H. (1976) - Infiltration into Increasingly Permeable Soils. *J. Irrigation and Drainage Division. Am.Soc.Civ.Engrs* 102(IR1):127-136.
- Childs, E.C.; Bybordi, M.(1969) - The Vertical Movement of Water in Stratified Porous Material. 1.Infiltration. *Water Resources Research* 5(2): 446-459.
- Chong, S.K.(1979) - *Infiltration prediction based on in-situ measurements of soil water properties*. Ph. D. Dissertation, University of Hawaii.
- Chu, S.T.(1978)-Infiltration During an Unsteady Rain. *Water Resources Research* 14. (3):461-466.
- Green,W.H.; Ampt, G. A.(1911) - Studies on soil physics-Part I-The flow of air and water through soils. *J of Agric. Sci* IV, May:1-24.
- Hillel, D.; Gardner, W. R.(1970) - Transient infiltration into crust topped profiles. *Soil Science* 109:410-416.
- Li, R.Stevens, M.; Simons, D. (1976) - Solutions to Green-Ampt Infiltration Equation. *J.Irrigation and Drainage Division. Am.Soc.Civ.Engrs* 102 (IR2):239-248.
- Morel-Seyroux, H. J.; Khanji, J.(1974) - Derivation of an Equation of Infiltration. *Water Resources Research* 10(4):795-800.
- Nelder, J.; Mead, R.(1964) - A Simplex Method for Function Minimization. *The Computer Journal* 7 : 308-315.