Revista Portuguesa de Educação

Exploração de jogos equitativos por estudantes portugueses de engenharia

RESUMO

Neste artigo, estudantes do ensino superior exploram duas tarefas envolvendo a noção de jogo equitativo, a partir dos dois seguintes objetivos: (1) averiguar se um jogo é ou não equitativo; e (2) calcular prémios envolvidos num jogo equitativo. Participaram no estudo 49 estudantes que se encontravam a frequentar o 2.º ou 3.º ano de um curso de engenharia de uma instituição de ensino superior do norte de Portugal. Os estudantes responderam a um breve questionário com várias tarefas sobre jogos aleatórios, sendo aqui estudadas apenas duas dessas tarefas que tratam de jogos equitativos. Em termos de resultados, salienta-se um desempenho dos estudantes satisfatório no primeiro objetivo e díspar no segundo, sendo residual e satisfatório quando, respetivamente, são diferentes e iguais as probabilidades de os jogadores ganharem o jogo. Tendo em conta estes resultados e os processos de resolução adotados pelos estudantes, infere-se uma compreensão um tanto limitada da noção de jogo equitativo. Assim, perante os resultados do estudo, torna-se necessário aprofundar a formação dos estudantes acerca da definição, interpretação e aplicação da noção de jogo equitativo.

Palavras-chave: Probabilidades; Jogos equitativos; Desempenho; Estudantes; Ensino superior.

José António Fernandes [i]
Universidade do Minho, Portugal.

Gabriela Gonçalves [ii]
Instituto Superior de Engenharia do Porto, Portugal.

Joaquim Gonçalves [iii]
Instituto Politécnico do Cávado e do Ave, Portugal.

1. INTRODUÇÃO

Segundo Lightner (1991), a teoria de probabilidades está ligada ao jogo e remonta a tempos muito antigos. Sabe-se que por volta de 1200 a.C. existiam dados com forma cúbica construídos a partir de sucessivas transformações de ossos. Posteriormente, o jogo atingiu grande popularidade entre os gregos e romanos e, na Idade Média, a Igreja Católica lançou uma campanha contra o jogo de dados e de cartas pelo vício de beber e dizer palavrões nesses jogos.

Os jogos de sorte e azar estão na origem da teoria das probabilidades enquanto disciplina científica. Com efeito, em meados do século XVII, a correspondência mantida entre Chevalier de Méré e Blaise Pascal, em que se discutem dois célebres problemas envolvendo incerteza (Freudenthal, 1973), geralmente, é considerada estar na génese da ciência das probabilidades (Hacking, 1975), passando a ser legitimada pela razão e não mais com base no divino e outras crenças.

Para Fernandes e Palhares (2015), os jogos vêm desempenhando um papel importante na aprendizagem da matemática desde os primeiros anos escolares, podendo ser abordados segundo uma visão tradicional/instrumental ou relacional/construtivista. A adoção de uma das visões tem implicações ao nível da aquisição do conhecimento e das tarefas propostas, a que corresponde a prática de conteúdos já aprendidos e a resolução de exercícios ou a aprendizagem de novos conteúdos e a resolução de problemas, investigações e explorações. Portanto, a visão relacional/construtivista destaca-se pela sua abrangência concetual e por promover uma aprendizagem significativa e centrada no aluno.

Na vertente didática, em comparação com outro tipo de tarefas, são atribuídas várias vantagens aos jogos. Para Koparan (2019), "a aprendizagem baseada em jogos enriquece o contexto de aprendizagem, melhora o desempenho dos estudantes, aumenta a sua motivação, fornece a oportunidade de trabalhar em grupo e proporciona um ambiente de aprendizagem divertido" (p. 236, tradução nossa).

O interesse do uso de jogos nas práticas de ensino também é reconhecido nos programas escolares de matemática em Portugal. Incluída na dimensão "Ações Estratégicas de Ensino do Professor", a referência ao termo "jogo" ou "jogos" surge em todos os anos escolares, do 1.º ao 12.º ano, com maior incidência nos programas do 1.º ao 4.º ano (Direção-Geral da Educação, s.d.-a, s.d.-b).

Apesar da importância dos jogos aleatórios, tanto em termos científicos como didáticos, verifica-se que os estudantes revelam dificuldades no seu estudo (e.g., Cañizares et al., 1999; Mohamed & Ortiz, 2012). Por outro lado, porque o estudo dos jogos aleatórios requer noções de probabilidades, conclui-se que as dificuldades dos estudantes nesses jogos também se devem a dificuldades em probabilidades, sendo que essas dificuldades têm sido observadas em muitos estudos (e.g., Fernandes, 2018; Green, 1982; Watson, 2005).

Considerando o que foi referido anteriormente, no presente trabalho pretende-se indagar a realização de estudantes do ensino superior na exploração de jogos equitativos, operacionalizada nos dois seguintes objetivos: (1) averiguar se um jogo é ou não equitativo; e (2) calcular prémios envolvidos num jogo equitativo.

2. ENQUADRAMENTO TEÓRICO

Nesta secção, começa-se por expor e discutir alguns aspetos concetuais dos jogos aleatórios, seguindo-se a revisão de alguns estudos sobre jogos equitativos.

2.1. ASPETOS CONCETUAIS DOS JOGOS ALEATÓRIOS

Nos jogos aleatórios, para um prémio total em jogo, destacam-se dois tipos diferentes de jogos: (1) jogos de proporcionalidade direta, em que o prémio a receber é diretamente proporcional à probabilidade de o jogador ganhar o jogo e em que intervém a noção de esperança matemática, que é considerada uma noção intuitiva por Schlottmann e Anderson (1994); e (2) jogos de proporcionalidade inversa, em que o prémio a receber é inversamente proporcional à probabilidade de o jogador ganhar o jogo (Hernández-Solís et al., 2021). Estes últimos são designados jogos equitativos ou justos porque não favorecem nenhum jogador, isto é, nenhum jogador tem vantagem sobre os demais.

Recorrendo à noção de esperança matemática, num jogo com dois jogadores, sendo P o prémio total em jogo, p_1 e p_2 a probabilidade de cada jogador ganhar o jogo e g_1 e g_2, respetivamente, o ganho ou prémio de cada um, tem-se que: $g_1 = P \times p_1$ *e* $g_2 = P \times p_2$, em que P é a constante de proporcionalidade direta. Portanto, o prémio de cada jogador é diretamente proporcional à sua probabilidade de ganhar o jogo, o que significa que quanto menor/maior for a probabilidade de ganhar, menor/maior (proporcionalmente) será o prémio a receber. Ou seja, o jogo beneficia o jogador com maior probabilidade de ganhar. Resolvendo as equações anteriores em ordem a P, vem: $P = g_1/p_1$ e $P = g_2/p_2$, *donde* $g_1/p_1 = g_2/p_2$, que é equivalente a $g_1 \times p_2 = g_2 \times p_1$. Obteve-se, assim, uma nova relação que pode ser usada para estudar o jogo.

Nos jogos equitativos, que são objeto deste estudo, verifica-se a proporcionalidade inversa entre o ganho ou prémio a receber e a probabilidade de ganhar o jogo, o que significa que quanto menor/maior for a probabilidade de ganhar, maior/menor (proporcionalmente) será o prémio a receber. Portanto, num jogo com dois jogadores, sendo p_1 e p_2 a probabilidade de cada jogador ganhar o jogo e g_1 e g_2, respetivamente, o ganho ou prémio de cada um, tem-se que: $K = g_1 \times p_1$ e $K = g_2 \times p_2$, sendo K a constante de proporcionalidade inversa. Em consequência, num jogo equitativo, verifica-se a relação $g_1 \times p_1 = g_2 \times p_2$, a qual constitui um critério que pode ser usado no estudo dos jogos equitativos.

De entre os diferentes casos de jogos equitativos, alguns há em que é mais imediato e simples averiguar se o jogo é ou não equitativo, como acontece quando as probabilidades de os jogadores ganharem são iguais ou quando os prémios que recebem são iguais. Nesses casos, sendo o jogo equitativo, a aplicação da relação $g_1 \times p_1 = g_2 \times p_2$ leva a concluir que, quando as probabilidades são iguais $(p_1 = p_2)$, também os prémios são iguais $(g_1 = g_2)$; e, quando os prémios são iguais $(g_1 = g_2)$, também as probabilidades são iguais $(p_1 = p_2)$. Como alguns itens das tarefas do estudo se referem a estes casos, pode averiguar-se se nesses itens a menor dificuldade concetual se reflete num melhor desempenho dos estudantes (Batanero & Díaz, 2010).

2.2. ESTUDOS SOBRE JOGOS EQUITATIVOS

Nesta subsecção, reveem-se alguns estudos envolvendo a noção de jogo equitativo e em que participaram estudantes de diferentes níveis escolares.

Green (1982) desenvolveu um teste que aplicou a alunos do ensino secundário e pré-secundário, com idades compreendidas entre os 11 e 16 anos. No teste, incluía-se um item relativo ao lançamento de um dado, em que se indagavam os alunos sobre o prémio que devia receber um jogador que ganhava o jogo quando saísse um 1, quando o outro jogador recebia um centavo quando saísse um 2, 3, 4, 5 ou 6, se o jogo fosse equitativo. Verificou-se que 58% de todos os alunos responderam corretamente, ao afirmarem que o jogador devia receber cinco centavos. Trata-se, portanto, de um desempenho satisfatório dos alunos, o qual aumentou, sistematicamente, com o avanço do ano escolar.

Já no estudo de Fischbein e Gazit (1984), participaram alunos do 5.º, 6.º e 7.º ano numa experiência de ensino sobre conteúdos elementares de probabilidades. Nos questionários de avaliação da experiência de ensino, incluía-se um item questionando os alunos se a obtenção de um berlinde de cor branca de uma caixa com 10 berlindes brancos e 20 pretos ou de uma caixa com 30 berlindes brancos e 60 pretos é um jogo equitativo. A igual chance de obter o berlinde branco de qualquer das caixas foi afirmada por 49,6% de todos os alunos, verificando-se, também, um claro aumento da percentagem de respostas corretas com o avanço do nível escolar. Porém, muito menos alunos justificaram as suas respostas corretas.

Posteriormente, Cañizares et al. (1999) aplicaram novamente os itens de Green (1982) e de Fischbein e Gazit (1984), antes referidos, a alunos do 5.º e 6.º ano do ensino primário e do 1.º e 2.º ano da Educación Secundaria Obligatoria (ESO), de idades compreendidas entre os 10 e os 14 anos e sem ensino prévio de probabilidades. Em termos globais, verificou-se que 53% indicou o valor correto do prémio do jogador e 35% classificou corretamente o jogo como sendo equitativo, sendo que o desempenho dos alunos aumentou com o nível escolar, sobretudo entre o ensino primário e a ESO, e com o rendimento em matemática. Apesar de estes resultados poderem indiciar que os alunos possuem um substrato intuitivo que lhes permitirá estudar na escola esse conteúdo, o estudo também mostrou que muitos alunos adotaram estratégias de limitada validade na sua aplicabilidade, de que se salientam as comparações absolutas do número de casos favoráveis e de casos desfavoráveis.

Mais recentemente, Hernández-Solís et al. (2021) também aplicaram a alunos do 6.º ano (11–12 anos), do ensino primário, os jogos inicialmente aplicados por Green (1982) e Fischbein e Gazit (1984), tendo-se obtido, respetivamente, 32,7% e 16,4% de respostas corretas. Segundo os autores, as dificuldades dos alunos devem-se a considerar que, para ser equitativo, todos os jogadores devem jogar pelo mesmo resultado, a não ter em conta a independência dos ensaios sucessivos, a comparar probabilidades recorrendo a estratégias aditivas (comparar casos favoráveis, desfavoráveis ou a diferença entre eles), à falta de desenvolvimento do raciocínio proporcional e ao enviesamento de equiprobabilidade para calcular os prémios de cada jogador (Lecoutre, 1992).

Comparando os resultados obtidos nos dois itens, conclui-se que a percentagem de respostas corretas no estudo de Fischbein e Gazit (1984) foi superior à obtida no estudo de Cañizares et al. (1999), 49,6% versus 35%, enquanto essas percentagens no estudo de Green (1982) e de Cañizares et

al. (1999) foram próximas, 58% *versus* 53%. O melhor desempenho pode ter resultado da intervenção de ensino de probabilidades, no primeiro caso, e de que alguns alunos frequentavam um nível escolar mais avançado, no segundo caso. Já no estudo de Hernández-Solís et al. (2021), obtiveram-se percentagens de respostas corretas muito inferiores, 16,4% e 32,7%, as quais, segundo os autores, se devem ao facto de as tarefas não serem habituais na sua instrução.

Posteriormente, Ortiz et al. (2012) realizaram um estudo em que, além de outras questões, aplicaram também os dois itens tomados de Green (1982) e de Fischbein e Gazit (1984), agora a futuros professores dos primeiros anos. No item de Green (1982), 77,2% dos futuros professores identificaram corretamente o prémio do jogador para que o jogo seja equitativo, dos quais 69,5% argumentaram com a comparação das probabilidades de os adversários ganharem; no item de Fischbein e Gazit (1984), 70,6% dos futuros professores concluíram que o jogo era equitativo com base em argumentos adequados (correspondência e multiplicativo[1]). Portanto, o desempenho dos futuros professores foi muito melhor do que o dos alunos que participaram nos estudos anteriores e, segundo os autores, o elevado desempenho dos futuros professores revela um bom raciocínio probabilístico e uma conceção adequada de jogo equitativo.

1. Na estratégia de correspondência, estabelece-se um critério de proporcionalidade numa das frações e aplica-se esse critério à outra fração; na estratégia multiplicativa, comparam-se as duas frações obtidas pela regra de Laplace.

Num outro estudo, Mohamed e Ortiz (2012) questionaram futuros professores do ensino primário sobre a equidade de um jogo, em que se lançam dois dados e se determina a diferença entre o maior e o menor (ou igual) dos valores obtidos, estabelecendo-se que um dos jogadores ganha uma ficha quando se obtém a diferença 0, 1 ou 2 e o outro jogador ganha também uma ficha quando se obtém a diferença 3, 4 ou 5. Um pouco menos do que metade dos futuros professores (41,7%) respondeu corretamente, 37,8% respondeu incorretamente e 20,5% nem sequer respondeu. Logo, a maioria dos futuros professores, ao responder incorretamente ou não responder, revelou um escasso conhecimento do conceito de jogo equitativo. Comparativamente com o estudo de Ortiz et al. (2012), em que também participaram futuros professores, neste estudo, os futuros professores tiveram um desempenho muito inferior. Essa discrepância, muito provavelmente, deve-se ao facto de, neste estudo, estar implicada uma experiência composta, enquanto no estudo de Ortiz et al. (2012) estão implicadas duas experiências simples, tal como aconteceu no estudo de Fernandes et al. (2016), em que futuros professores dos primeiros anos sentiram muitas dificuldades em determinar probabilidades numa experiência composta.

Koparan (2019) estudou o desempenho de futuros professores de matemática em jogos aleatórios, que foram realizados no âmbito de uma intervenção de ensino em que se destacavam três momentos na atividade dos estudantes: (1) formular e registar as suas previsões sobre o que aconteceria; (2) observar e registar os resultados da simulação do jogo, usando materiais concretos (moedas, dados, cartas, …) e computadores; e (3) explicar e registar os resultados obtidos tendo em vista obter uma justificação teórica. Os resultados obtidos mostram que os estudantes tiveram dificuldades em fazer previsões antes de praticarem os jogos ou fizeram previsões incorretas, não desenvolveram estratégias adequadas para efetuar as previsões e manifestaram intuições erradas. Já as explicações dadas pelos

estudantes após a prática dos jogos, através da simulação, foram, em geral, corretas. Daí, o autor concluiu que os jogos e a simulação contribuíram para ligar o conhecimento de probabilidades dos estudantes a situações da vida real, promover o conhecimento matemático relativo aos jogos e compreender a relação entre a probabilidade frequencista e teórica.

Mais tarde, dois dos jogos estudados por Koparan (2019) foram aplicados a futuros professores de matemática chilenos por Rodríguez Alveal e Koparan (2023). Ainda neste estudo, a maioria dos estudantes classificou corretamente os jogos em equitativo e não equitativo. Para tal, determinaram as probabilidades a partir dos resultados das simulações ou da ideia de equiprobabilidade, sendo, todavia, poucos os estudantes que apresentaram explicações teóricas, tal como tinha acontecido no estudo anterior de Koparan (2019).

Também Hourigan e Leavy (2020) conduziram um estudo com futuros professores do ensino elementar, em que lhes foi pedido para definirem atividades equitativas e não equitativas para serem usadas em aulas do ensino primário. Os resultados do estudo mostram que a maioria dos estudantes conseguiu conceber atividades para ilustrar o conceito de equidade probabilística em vários geradores aleatórios. Especificamente, os estudantes revelaram maior facilidade no caso das fichas e roletas, enquanto cartas e dados constituíram um maior desafio para os estudantes. Para os autores, compreendem-se as maiores dificuldades dos estudantes no caso das cartas por, nesse gerador, estarem implicados dados multivariados.

3. MÉTODO

Na investigação, estuda-se a realização de estudantes do ensino superior em duas situações de jogo equitativo, a qual se operacionaliza através dos dois objetivos seguintes: (1) averiguar se um jogo é ou não equitativo; e (2) calcular prémios envolvidos num jogo equitativo.

No desenvolvimento do estudo, recorreu-se a uma investigação fundamentalmente de natureza quantitativa e de tipo descritivo (McMillan & Schumacher, 2014), em que se recorre a métodos rigorosos para analisar uma realidade preexistente, neste caso, a realização dos estudantes nas situações de jogo equitativo.

Participaram no estudo 49 estudantes de um Instituto Politécnico do norte de Portugal, que foram selecionados de uma amostra de conveniência e se encontravam a frequentar cursos de Licenciatura em Engenharia. À exceção de um, os estudantes eram todos do género masculino, com idades compreendidas entre os 19 e os 45 anos (média de 22,3 anos) e encontravam-se a frequentar o 2.º (84%) ou 3.º ano (16%) dos respetivos cursos. No estudo, os estudantes são identificados pela letra E (abreviatura de estudante) seguida do número que lhes foi atribuído (de 1 a 49).

Os dados do estudo foram obtidos através da aplicação de um questionário aos estudantes que incluía várias tarefas sobre jogos aleatórios e proporcionava espaços vazios onde os estudantes deviam registar as suas resoluções. Dessas tarefas, estudamos apenas duas, estabelecidas com base na literatura analisada (Hernández-Solís et al., 2021; Mohamed & Ortiz,

2012; Ortiz et al., 2012) e nas quais se exploram dois jogos equitativos (Figura 1). O questionário era confidencial, foi aplicado em regime de voluntariado, podendo o estudante desistir em qualquer momento; no entanto, não houve qualquer desistência. Os estudantes tiveram 90 minutos para responder ao questionário, o que se revelou um tempo suficiente, e foi-lhes garantido que qualquer futura publicação do estudo preservaria o anonimato. Na altura em que foi aplicado o questionário, tanto os estudantes do 2.º como do 3.º ano já tinham concluído o estudo do tema de probabilidades, incluído na disciplina de Estatística, e imediatamente antes de responderem foi-lhes explicada a finalidade do estudo e o que se esperava deles.

Figura 1

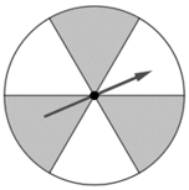
Enunciado das tarefas propostas aos estudantes

1. A Rita tem na sua caixa 10 bolas brancas e 30 pretas e o Luís tem na sua caixa 30 bolas brancas e 10 pretas. Cada um retira, ao acaso, uma bola da sua caixa, ganhando o jogo quem primeiro obtenha uma bola branca. Caso ambos obtenham uma bola branca ou uma bola preta, nenhum ganha, devolvem-se as bolas às caixas e o jogo continua.

a) Tanto a Rita como o Luís recebem 12 rebuçados de prémio. A Rita afirma que o jogo não é justo, que beneficia o Luís. Concorda com a Rita? Porquê?

b) Se a Rita receber 24 rebuçados, quantos deve receber o Luís para que o jogo seja equitativo?

2. Na figura seguinte está representada uma roleta dividida em seis setores iguais, três brancos e três cinzentos. Gira-se a roleta duas vezes e considera-se o setor em que o ponteiro para.



No jogo de girar a roleta duas vezes consecutivas, a Rita ganha se o ponteiro parar sempre num setor da mesma cor e o Luís ganha se o ponteiro parar em setores de cores diferentes.

a) Recebendo cada um 12 rebuçados de prémio, o Luís defende que o jogo é equitativo, enquanto a Rita afirma que o jogo favorece o Luís. Quem tem razão, a Rita ou o Luís? Porquê?

b) Estão em jogo 30 rebuçados para distribuir pela Rita e pelo Luís. Quantos rebuçados deve receber cada um para que o jogo seja equitativo?

Nota. Elaboração própria.

Observando a Figura 1, constata-se que as tarefas lidam com os dois principais problemas dos jogos equitativos (indagar se o jogo é ou não equitativo e determinar prémios no jogo), com experiências simples (tarefa 1) e compostas (tarefa 2) e com uma abordagem à equidade dos jogos a partir das probabilidades e dos prémios (tarefa 1) ou apenas recorrendo às probabilidades ou aos prémios (tarefa 2). Ora, tais atributos das tarefas destacam

a possibilidade de estabelecer comparações entre os desempenhos dos estudantes, o que ressalta o carácter inovador do estudo face a outros estudos antes revistos.

Por fim, no tratamento e análise de dados, começou-se por calcular as frequências dos tipos de respostas (corretas, parcialmente corretas e incorretas) dadas pelos estudantes aos itens das tarefas, bem como de não resposta, que são registadas em tabelas de frequências. De seguida, tendo em vista aprofundar as respostas dos estudantes, estudaram-se os processos de resolução por eles usados para obterem essas respostas, segundo cada tipo de resposta. Para tal, através da análise de conteúdo (Bardin, 2002), estabeleceram-se os respetivos processos de resolução, que são apresentados na próxima secção, de Apresentação de resultados, e determinaram-se as frequências de cada um deles.

4. APRESENTAÇÃO DE RESULTADOS

A apresentação de resultados organiza-se a partir de cada um dos objetivos do estudo: (1) averiguar se um jogo é ou não equitativo; e (2) calcular prémios envolvidos num jogo equitativo.

4.1. AVERIGUAR SE UM JOGO É OU NÃO EQUITATIVO

Neste objetivo, incluem-se os itens 1a) e 2a), sendo que em 1a) o jogo não é equitativo e em 2a) o jogo é equitativo. Em termos de resolução, no item 1a), os estudantes podiam recorrer à igualdade da proporcionalidade inversa relativa à Rita e ao Luís, considerando o número de rebuçados de um dos jogadores e determinando o número de rebuçados a receber pelo outro. Considerando os 12 rebuçados da Rita, as probabilidades de a Rita e o Luís ganharem o jogo e o número de rebuçados l a receber pelo Luís, tem-se: $12 \times 1/4 = l \times 3/4 \Leftrightarrow l = 4$. Portanto, sendo o jogo equitativo, o Luís deve receber quatro rebuçados e não os 12 referidos no enunciado, pelo que a Rita tem razão ao afirmar que o jogo não é justo. Pode chegar-se à mesma conclusão ao substituir na relação o número de rebuçados de cada jogador ($12 \times 1/4 = 12 \times 3/4$, ou seja, $3 = 9$), o que dá origem a uma proposição falsa. Ora, não se verificando a relação, conclui-se, também, que o jogo não é equitativo. No item 2a), recorrendo a cada um dos processos de resolução aplicados no item 1a), verifica-se que o Luís deve receber 12 rebuçados ou obtém-se uma proposição verdadeira, portanto, o Luís tem razão e o jogo é equitativo.

Em alternativa, no item 1a), sendo as probabilidades de ganhar o jogo diferentes (1/4 para a Rita e 3/4 para o Luís), para que o jogo seja equitativo, os prémios devem ser inversamente proporcionais a essas probabilidades, donde os prémios não podem ser iguais, como se diz no enunciado, e o jogo não é equitativo. Já no item 2a), sendo as probabilidades de ganhar o jogo iguais (1/2 tanto para a Rita como para o Luís), conclui-se que qualquer um deles deve receber o mesmo prémio, como se refere no enunciado, portanto, o Luís tem razão e o jogo é equitativo.

Na Tabela 1, registam-se as frequências dos tipos de resposta

(correta, parcialmente correta e incorreta) e de não resposta nos itens 1a) e 2a).

Tabela 1

Frequências dos tipos de resposta e não resposta nos itens 1a) e 2a)

Tipo de resposta	Itens			
	1a)		2a)	
	n	%	*n*	%
Correta	26	53,1	30	61,2
Parcialmente correta	3	6,1	1	2,0
Incorreta	11	22,4	9	18,4
Não resposta	9	18,4	9	18,4

Nota. Elaboração própria.

Observa-se pela Tabela 1 que a frequência de respostas corretas não é muito discrepante nos itens 1a) e 2a), sendo um pouco superior no item 2a). Em qualquer caso, mais de metade dos estudantes respondeu corretamente. A frequência de respostas parcialmente corretas é muito baixa em qualquer dos itens, portanto, não afeta significativamente o desempenho dos estudantes em qualquer dos itens.

Já as respostas incorretas destacam-se em ambos os itens, com uma frequência ligeiramente inferior no item 2a). Em ambos os itens, cerca de um em cada cinco estudantes respondeu incorretamente. Também a não resposta se salienta em qualquer dos itens, sendo a frequência igual em ambos. Considerando, conjuntamente, as frequências de respostas incorretas e não resposta, obtém-se uma frequência de 40,8% e 36,8% nos itens 1a) e 2a), respetivamente. Portanto, no sentido da prática escolar, estas percentagens mostram que os estudantes tiveram consideráveis dificuldades em verificar quando um jogo é ou não equitativo, salientando-se um desempenho dos estudantes um pouco superior no jogo equitativo (item 2a) do que no não equitativo (item 1a).

No item 2a), tratando-se de uma experiência composta, esperava-se um pior resultado do que no item 1a), o que não aconteceu. Esse resultado parece explicar-se pela possibilidade do estudo da equidade do jogo a partir apenas da igualdade das probabilidades, que terá prevalecido sobre a experiência composta.

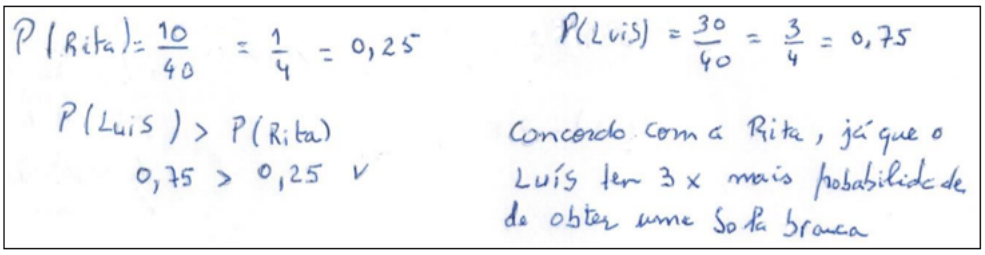
No sentido de perceber as razões que explicam o desempenho dos estudantes em ambos os itens, analisam-se seguidamente os processos de resolução dos estudantes em cada item, segundo os tipos de resposta.

Item 1a). Nas respostas corretas, que foram a maioria (26 ao todo), os estudantes referem-se às probabilidades de cada jogador ganhar o jogo e a partir dessas probabilidades declararam que concordavam com a Rita, ou seja, concluíram que o jogo não era equitativo. Ora, ao afirmar-se, no item 1a), que tanto a Rita como o Luís recebem 12 rebuçados de prémio, implica que o jogo só seria equitativo se ambos os jogadores tivessem a mesma probabilidade de ganhar. Porém, como as probabilidades são distintas, conclui-se que o jogo não é equitativo.

De entre estes estudantes, 15 calculam as probabilidades de cada jogador ganhar pela regra de Laplace; quatro indicam os valores das probabilidades de a Rita e o Luís ganharem o jogo, sem as calcularem; seis afirmam a menor/maior probabilidade de a Rita/o Luís ganhar o jogo sem indicar as respetivas probabilidades; e um referiu o maior número de bolas brancas da caixa do Luís. Na Figura 2, apresenta-se um exemplo de resolução em que se recorre à regra de Laplace para determinar as probabilidades.

Figura 2

Resolução do item 1a) pelo estudante E44



Nota. Elaboração do estudante E44.

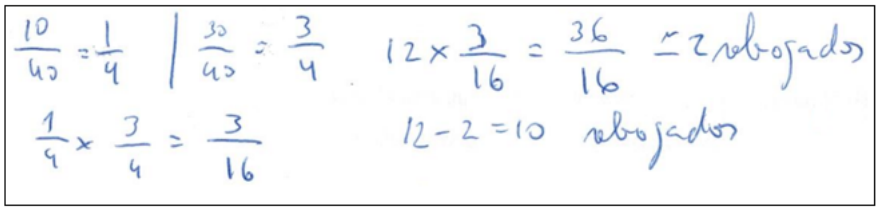
Observando a resolução, verifica-se que o estudante E44 começou por determinar corretamente a probabilidade de cada jogador ganhar; de seguida, comparou-as e concluiu que a probabilidade de o Luís ganhar é maior do que a da Rita. Finalmente, afirma concordar com a Rita, que o jogo não é equitativo, porque a probabilidade de o Luís obter uma bola branca é três vezes superior à da Rita.

Nas três respostas parcialmente corretas, os estudantes calcularam corretamente a probabilidade de cada jogador ganhar, mas não responderam se concordavam ou não com a Rita sobre a equidade do jogo, ou calcularam o quadrado de cada probabilidade de ganhar, como se se tratasse da experiência de extração de duas bolas brancas de cada caixa. Note-se que, neste último caso, a relação de ordem entre as probabilidades de a Rita e o Luís ganharem o jogo mantém-se, permitindo obter a conclusão correta no item.

Dos estudantes que deram uma resposta incorreta (11 ao todo), a maior parte (7 estudantes) começou por determinar as probabilidades corretas de os jogadores ganharem, multiplicou-as, aplicou a noção de esperança matemática para determinar o número de rebuçados que cada jogador deve receber (considerando 12 o total de rebuçados em jogo) e, finalmente, não decide sobre se o jogo é ou não equitativo, ou conclui erradamente que o jogo é justo. Na Figura 3, apresenta-se um exemplo de resolução deste tipo.

Figura 3

Resolução do item 1a) pelo estudante E14



Nota. Elaboração do estudante E14.

Na sua resolução, o estudante E14 começou por determinar corretamente a probabilidade de cada jogador ganhar, multiplicando-as depois. Seguidamente, considerando 12 como sendo o número total de rebuçados em jogo (quando é 24) e aplicando a proporcionalidade direta entre a probabilidade e o prémio a receber pelos jogadores e a operação de subtração, calcula o número de rebuçados dos jogadores, sem especificar os jogadores e sem decidir se o jogo é ou não equitativo. Não se entendem tais cálculos, já que o número de rebuçados a receber por cada jogador era dado no enunciado do item.

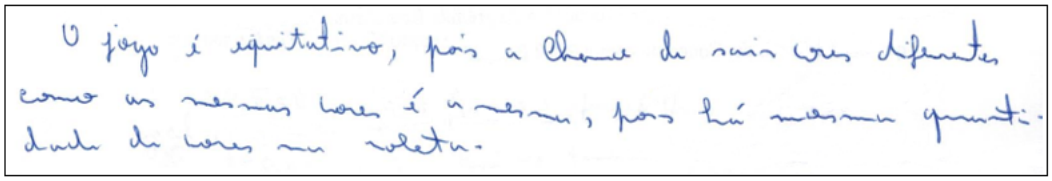
Das restantes quatro respostas, um estudante determina as probabilidades corretas de cada jogador ganhar, mas conclui erradamente; outro determina probabilidades erradas; outro afirma que ambos os jogadores têm a mesma probabilidade de ganhar, sem as indicar; e o último apresenta uma resolução incompreensível.

Item 2a). Nas respostas corretas, que foram a maioria (30 ao todo), os estudantes referem-se às probabilidades de cada jogador ganhar e com base na igualdade dessas probabilidades declaram que concordam com o Luís e, consequentemente, que o jogo é equitativo. Sendo dito no enunciado que ambos os jogadores recebem o mesmo número de rebuçados (12 cada um), o jogo será equitativo desde que seja igual a probabilidade de cada um deles ganhar, pois o produto dessa probabilidade pelo prémio a receber é constante para ambos os jogadores.

Destes estudantes, sete determinam a probabilidade de cada jogador ganhar pela regra de Laplace; dez indicam a igual probabilidade de a Rita e de o Luís ganharem, sem a calcularem; quatro referem ou indicam a igual probabilidade de cada jogador ganhar a partir do igual número de setores brancos e cinzentos ou da igual quantidade de cada cor; quatro afirmam a igual probabilidade recorrendo a um diagrama em árvore ou à enumeração dos casos possíveis e favoráveis; um declara a igual probabilidade sem a referir; e quatro dizem apenas que o Luís tem razão e/ou que o jogo é equitativo. Na Figura 4, apresenta-se um exemplo de resolução com base nas cores da roleta.

Figura 4

Resolução do item 2a) pelo estudante E9



Nota. Elaboração do estudante E9.

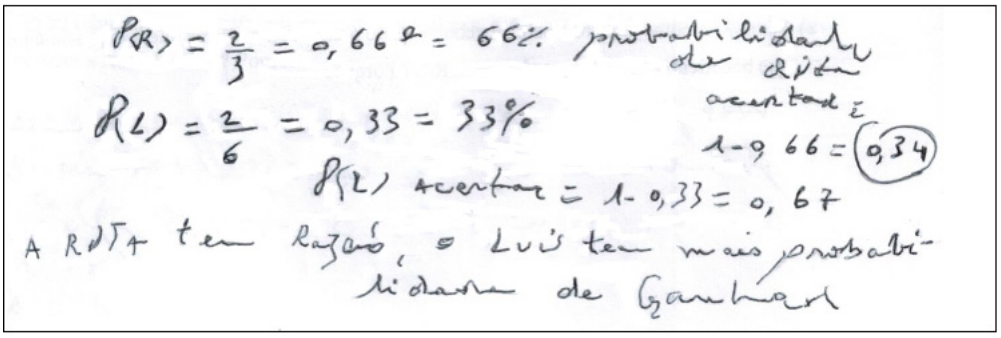
Na resolução do estudante E9, constata-se que ele observa que há a mesma quantidade de cada cor (branca e cinzenta) na roleta, inferindo que é igual a probabilidade de obter cores iguais ou diferentes nas duas vezes em que se gira a roleta e conclui que o jogo é equitativo. Conforme já foi dito antes, a igualdade das probabilidades garante que o jogo é equitativo apenas quando ambos os jogadores recebem o mesmo prémio, como acontece nesta situação.

Na única resposta parcialmente correta, o estudante calcula corretamente a probabilidade de cada jogador ganhar, aplica a noção de esperança matemática para determinar o número de rebuçados que cada jogador deve receber (considerando incorretamente o total de 12 rebuçados) e, por fim, conclui que o jogo é equitativo.

Nas respostas incorretas (num total de 9), a maior parte (7) dos estudantes calcula ou apenas indica, sem calcular, probabilidades erradas de os jogadores ganharem e, na sequência, respondem incorretamente; um apenas determina uma das probabilidades e não decide e outro apresenta uma resolução incompreensível. Na Figura 5, regista-se a resolução de um estudante que determina incorretamente as probabilidades.

Figura 5

Resolução do item 2a) pelo estudante E2



Nota. Elaboração do estudante E9.

Na resolução apresentada, o estudante E2 começa por calcular incorretamente as probabilidades de cada jogador ganhar; de seguida, determina as respetivas probabilidades dos acontecimentos complementares, ou seja, de cada jogador perder e conclui, também incorretamente, que a Rita tem razão e o Luís tem maior probabilidade de ganhar.

4.2. CALCULAR PRÉMIOS ENVOLVIDOS NUM JOGO EQUITATIVO

Neste objetivo, incluem-se os itens 1b) e 2b), sendo que em 1b) pede-se para determinar o prémio de um jogador conhecido o prémio do outro jogador e em 2b) pede-se para determinar o prémio de cada jogador quando é conhecido o prémio total em jogo, em qualquer caso supondo que se trata de um jogo equitativo. Em termos de resolução, no item 1b), substituindo as probabilidades de cada jogador ganhar, o número de rebuçados da Rita e o número de rebuçados, l, que o Luís deve receber na igualdade de proporcionalidade inversa, tem-se: $24 \times 1/4 = l \times 3/4 \Leftrightarrow l = 8$. Portanto, para que o jogo seja equitativo, o Luís deve receber oito rebuçados. Já no item 2b), os estudantes podem representar por l e $30\text{-}l$ o número de rebuçados que o Luís e a Rita devem receber, respetivamente, e estabelecer, de seguida, a igualdade de proporcionalidade inversa $1/2 \times (30 - l) = 1/2 \times l$, cuja resolução dá o valor $l = 15$. Logo, a Rita e o Luís devem receber 15 rebuçados cada um. Em alternativa, sabendo que é igual a probabilidade de cada jogador ganhar, cada um deve receber o mesmo prémio para que o jogo seja equitativo. Portanto, tanto a Rita como o Luís devem receber 15 rebuçados.

Na Tabela 2, registam-se as frequências dos tipos de resposta (correta, parcialmente correta e incorreta) e de não resposta nos itens 1b) e 2b).

Tabela 2

Frequências dos tipos de resposta e não resposta nos itens 1b) e 2b)

Tipo de resposta	Itens			
	1b)		2b)	
	n	%	*n*	%
Correta	3	6,1	28	57,1
Parcialmente correta	2	4,1	0	0
Incorreta	31	63,3	11	22,5
Não resposta	13	26,5	10	20,4

Nota. Elaboração própria.

Observando a Tabela 2, constata-se que a frequência de respostas corretas é muito díspar nos dois itens: no item 1b), essa percentagem é muito baixa, praticamente residual, enquanto no item 2b) mais de metade dos estudantes deu a resposta correta ao item. Tal como se verificou nos outros dois itens, as respostas parcialmente corretas são quase inexistentes no conjunto dos dois itens, donde têm um impacto muito diminuto no desempenho dos estudantes.

Nas respostas incorretas, mantém-se a discrepância entre as frequências dessas respostas nos dois itens, agora, com muito maior incidência no item 1b) do que no item 2b). Neste caso, quase dois em cada três estudantes e pouco menos de um em cada quatro estudantes responderam incorretamente, respetivamente, aos itens 1b) e 2b).

Por último, na não resposta, verifica-se uma considerável frequência em ambos os itens, com cerca de um em cada quatro estudantes e um em cada cinco estudantes a não responderem aos itens 1b) e 2b), respetivamente. Considerando, conjuntamente, as frequências de respostas incorretas e de não resposta, obtêm-se as frequências de 89,8% e 42,9% nos itens 1b) e 2b), respetivamente. Vendo estas percentagens como uma avaliação negativa, no sentido da prática escolar, constata-se o quão difícil foi para os estudantes resolverem corretamente o item 1b).

Tal como nos itens 1a) e 2a), no item 2b), tratando-se de uma experiência composta, esperava-se um pior resultado do que no item 1b), o que não aconteceu. Esse resultado parece explicar-se pela possibilidade do estudo da equidade do jogo a partir apenas da igualdade das probabilidades, que terá prevalecido sobre a experiência composta.

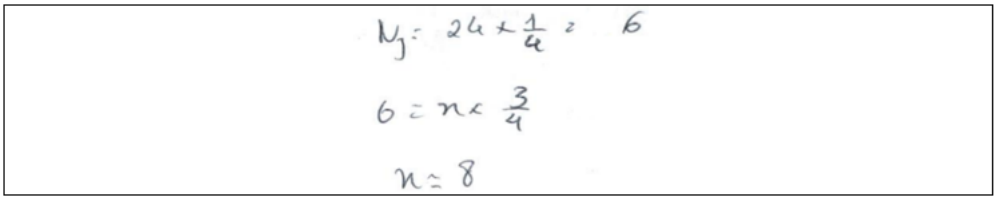
Tal como anteriormente, no sentido de perceber as razões que explicam o desempenho dos estudantes em ambos os itens, analisam-se seguidamente os processos de resolução dos estudantes em cada um deles, segundo os tipos de resposta.

Item 1b). Neste item, apenas houve três respostas corretas, que foram obtidas através da igualdade de proporcionalidade inversa, relativa à Rita e ao Luís, eventualmente aplicada em duas etapas: começa-se por determinar o número total de rebuçados em jogo a partir da probabilidade de o

Luís ganhar e do número de rebuçados da Rita ($x \times 3/4 = 24$), retirando-lhe, de seguida, o número de rebuçados da Rita para obter o número de rebuçados do Luís. Na Figura 6, apresenta-se a resolução de um estudante a título de exemplo.

Figura 6

Resolução do item 1b) pelo estudante E18



Nota. Elaboração do estudante E18.

Pela resolução do estudante E18, constata-se que ele aplicou, relativamente aos dois jogadores, a igualdade $24 \times 1/4 = 6$ e a equação $6 = x \times 3/4$, obtendo, desse modo, os oito rebuçados que o Luís deve receber. Observe-se que o processo de resolução do estudante é equivalente à equação $24 \times 1/4 = x \times 3/4$, que traduz a igualdade de proporcionalidade inversa e em que 6 é a constante de proporcionalidade.

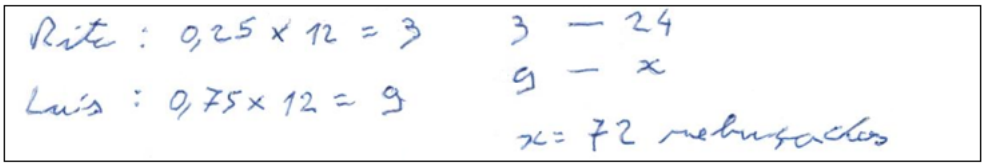
As duas respostas parcialmente corretas foram, também, obtidas através da igualdade de proporcionalidade inversa, relativa à Rita e ao Luís, mas em que era incorreta a probabilidade de cada um deles ganhar. Tal como aconteceu no item 1a), estes estudantes determinaram o quadrado das probabilidades corretas, como se se tratasse da experiência de extração (com reposição) de duas bolas brancas de cada caixa.

Nas respostas incorretas, verifica-se uma maior variedade de processos de resolução, sendo que 11 estudantes indicaram, sem calcular, ou calcularam o triplo do número de rebuçados da Rita, referindo que o Luís devia receber 72 rebuçados.

Menos estudantes, num total de cinco, explicitaram o anterior processo de resolução, indicando ou calculando o número de rebuçados que o Luís deve receber considerando que o jogo não é equitativo. Na Figura 7, exemplifica-se este processo de resolução.

Figura 7

Resolução do item 1b) pelo estudante E42



Nota. Elaboração do estudante E42.

O estudante E42, recorrendo à noção de esperança matemática e considerando o total de 12 rebuçados em jogo e a probabilidade de cada um deles ganhar, determina o número de rebuçados que cada jogador deve receber. De seguida, usa uma regra de três simples para calcular o número

de rebuçados que o Luís deve receber quando a Rita recebe 24 rebuçados. Repare-se que o estudante usou a proporcionalidade direta, que significa que quanto maior for a probabilidade de ganhar, maior é o prémio; portanto, sem impor que o jogo seja equitativo.

Já o estudante E23 apresentou uma resolução menos explícita, considerando que (75 × 24)/25 = 72 é o número de rebuçados que o Luís deve receber. Tal como no caso do estudante E42, também nesta resolução está envolvida a proporcionalidade direta entre o valor da probabilidade e o do prémio a receber, pois: $t \times 25\% = 24 \Leftrightarrow t = 96$, sendo t o número total de rebuçados em jogo e 96 × 75% = 72 rebuçados. Alternativamente, este valor também pode resultar diretamente da igualdade de razões: $75/l = 25/24 \Leftrightarrow l = (75 \times 24)/25 \Leftrightarrow l = 72$ rebuçados.

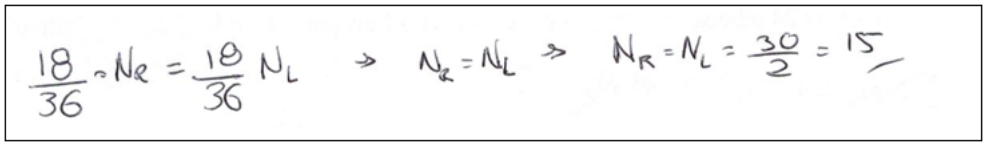
A maior parte dos estudantes que respondeu incorretamente (13) concluiu que o Luís deve receber 24 rebuçados, o mesmo número que a Rita. Destes estudantes, cinco justificaram a sua resposta pelo facto de se tratar de um jogo equitativo. A título de exemplo, o estudante E30 declara: "Para ser um jogo equitativo o Luís tem de receber o mesmo número de rebuçados". Assim, é possível que nas respostas dos estudantes esteja subjacente esta ideia de jogo equitativo, que só é válida quando as probabilidades dos jogadores também são iguais, o que não acontece nesta situação.

Por fim, dois estudantes apresentaram resoluções em que são incompreensíveis os processos de resolução por eles usados.

Item 2b). Comparativamente com o item 1b), neste item, mais de metade dos estudantes (28) respondeu corretamente, afirmando que a Rita e o Luís devem receber 15 rebuçados cada um, portanto, metade cada um. Nas resoluções, a maioria destes estudantes (20) refere apenas que cada jogador deve receber 15 rebuçados, como diz, por exemplo, o estudante E14: "15, metade para cada um". Já seis estudantes recorrem à noção de esperança matemática; um argumenta com a igual probabilidade de cada um deles ganhar; e, por último, também um recorre à proporcionalidade inversa entre a probabilidade de ganhar o jogo e o prémio a receber. Na Figura 8, apresenta-se o exemplo deste último tipo de resolução.

Figura 8

Resolução do item 2b) pelo estudante E20



Nota. Elaboração do estudante E20.

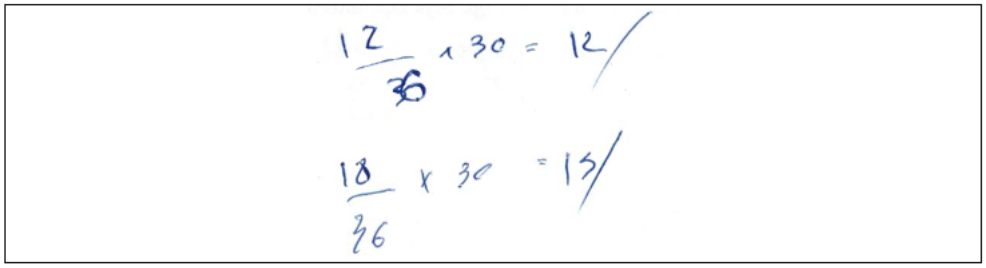
O estudante E20, na sua resolução, estabelece a igualdade da proporcionalidade inversa entre a probabilidade de ganhar e o prémio a receber para cada jogador e conclui que tanto a Rita como o Luís devem receber metade do total de rebuçados que estavam em jogo, ou seja, 15 rebuçados. Deve salientar-se que o facto de as probabilidades serem iguais facilitou a resolução do estudante; caso contrário, seria necessário representar o número de rebuçados de cada jogador por l e 30 - l, em que l representa o número de

rebuçados a receber por um dos jogadores e 30 - *l* o número de rebuçados a receber pelo outro.

Nas respostas incorretas (11 ao todo), cinco estudantes determinaram probabilidades incorretas de ganhar o jogo e aplicaram, na continuação, a noção de esperança matemática para determinar o número de rebuçados de cada jogador, como se exemplifica com a resolução registada na Figura 9. Os restantes seis estudantes indicaram apenas o número total de rebuçados que era dado (30 rebuçados) ou o número de rebuçados a receber por cada um dos jogadores sem apresentar qualquer explicação.

Figura 9

Resolução do item 2b) pelo estudante E28



Nota. Elaboração do estudante E28.

O estudante E28 apenas indica, sem calcular, as probabilidades de os jogadores ganharem, sendo uma delas incorreta (12/36), sem discriminar os respetivos jogadores, a Rita e o Luís. Depois, multiplica essas probabilidades pelo prémio total em jogo (30 rebuçados), aplicando a noção de esperança matemática, e obtém, assim, o número de rebuçados a receber pelos jogadores, que naturalmente é incorreto quando a probabilidade é incorreta. Note-se que, sendo iguais as probabilidades de ganhar de cada jogador, a aplicação da noção de esperança matemática permite determinar o número correto de rebuçados de cada jogador.

5. CONCLUSÃO E DISCUSSÃO

A realização do presente estudo teve por propósito avaliar a compreensão de estudantes do ensino superior acerca da noção de jogo equitativo. Para tal, estabeleceram-se os dois objetivos seguintes: (1) averiguar se um jogo é ou não equitativo; e (2) calcular prémios envolvidos num jogo equitativo.

No primeiro objetivo, "averiguar se um jogo é ou não equitativo", avaliado através dos itens 1a) e 2a), verificou-se que mais de metade dos estudantes respondeu corretamente a qualquer desses itens. No entanto, nas suas resoluções, os estudantes, quase sempre, apresentaram explicações válidas em situações algo restritas, que não são passíveis de ser aplicadas em todos os casos. Assim, no item 1a), sendo igual o prémio a atribuir a cada jogador, os estudantes constataram que as probabilidades de cada jogador ganhar eram diferentes e, daí, concluíram que o jogo não é equitativo; no item 2a), afirmaram que eram iguais as probabilidades de cada jogador ganhar, donde deduziram que o jogo é equitativo. Tendo em conta que é igual o prémio de

cada jogador, os raciocínios referidos anteriormente são válidos; contudo, considerando prémios diferentes, das iguais ou diferentes probabilidades de ganhar, não pode inferir-se que o jogo é equitativo.

Já no segundo objetivo, "calcular prémios envolvidos num jogo equitativo", avaliado através dos itens 1b) e 2b), verificou-se uma grande disparidade no desempenho dos estudantes nesses itens, com muito poucos (apenas 3) a responderem corretamente no item 1b) e mais de metade a fazê-lo no item 2b). No item 2b), como aconteceu no outro objetivo, os estudantes apresentaram nas suas resoluções, quase sempre, explicações válidas em situações um tanto restritas, que não podem aplicar-se em todos os casos. Assim, os estudantes afirmaram a equidade do jogo, que tinha sido estabelecida no item 2a), e concluíram que cada jogador deve receber o mesmo prémio, ou seja, metade do prémio total em jogo. Novamente, este raciocínio apenas é válido quando é igual a probabilidade de cada jogador ganhar. Já no item 1b), as probabilidades de cada jogador ganhar são diferentes e, consequentemente, para que o jogo seja equitativo, terão de ser diferentes os prémios de cada jogador.

A hipótese sobre o melhor desempenho dos estudantes em explorar um jogo equitativo quando as probabilidades de os jogadores ganharem são iguais ou quando os prémios que recebem são iguais foi sustentada pelo estudo. Nessa situação, o sucesso foi um pouco superior quando se tratava de averiguar se o jogo era ou não equitativo (item 2a) e muito superior no caso do cálculo de prémios envolvidos no jogo (item 2b). Nesses dois itens, não se esperava que os estudantes tivessem um melhor desempenho, pois estava em jogo uma experiência aleatória composta, na qual os estudantes têm, em geral, mais dificuldades (Fernandes et al., 2016); depreendendo-se que a possibilidade de explorar a equidade do jogo a partir da igualdade das probabilidades contribuiu para superar as dificuldades inerentes à experiência composta.

Em conclusão, por um lado, as percentagens de respostas incorretas e de não resposta e, por outro, nas suas resoluções, a ausência de explicações e explicações incompletas ou válidas apenas em casos específicos levam a concluir que os estudantes possuem uma compreensão um tanto limitada da noção de jogo equitativo, ao menos nos dois aspetos tratados no estudo: apurar se um jogo é ou não equitativo e determinar prémios de um jogo equitativo. A diminuição do desempenho dos estudantes quando se trata de explicar as suas resoluções também foi observada em vários outros estudos (e.g., Rodríguez Alveal & Koparan, 2023; Cañizares et al., 1999; Fischbein & Gazit, 1984; Koparan, 2019).

Por outro lado, Fernandes et al. (2025) estudaram os mesmos estudantes participantes desta investigação em jogos não equitativos e verificaram que a sua realização foi sistematicamente superior em todos os itens contemplados, o que poderá dever-se à maior complexidade concetual da proporcionalidade inversa, implicada nos jogos equitativos.

Obviamente que as dificuldades dos estudantes no estudo de jogos aleatórios também têm origem nos seus conhecimentos limitados de probabilidades, pois o estudo de tais jogos requer a determinação e aplicação de probabilidades. No presente estudo, verificou-se que muitos estudantes tiveram dificuldades em determinar as probabilidades solicitadas nos itens 1a) e 2a), as quais eram, seguidamente, aplicadas nos outros dois itens. Essas

dificuldades foram mais notórias no item 2a), em que os estudantes calcularam ou apresentaram (sem qualquer explicação) valores incorretos das probabilidades, o que, possivelmente, se deve ao facto de que, nesse item, está implicada uma experiência aleatória composta, enquanto no item 1a) está envolvida uma experiência aleatória simples (Fernandes et al., 2016).

Considerando os resultados de estudos antes revistos (Hourigan & Leavy, 2020; Koparan, 2019; Mohamed & Ortiz, 2012; Ortiz et al., 2012), em que também participaram estudantes do ensino superior, conclui-se que, em geral, os estudantes do presente estudo tiveram um desempenho um pouco inferior, o que sugere a necessidade de aprofundar a sua formação em probabilidades e, mais especificamente, em jogos aleatórios. Nesse sentido, a exploração de simulações, que, no estudo de Koparan (2019), apresentou vantagens evidentes, poderá constituir uma estratégia promissora.

Também o facto de se registar a definição de jogo equitativo no questionário não parece ter influenciado significativamente o desempenho dos estudantes, depreendendo-se que eles terão tido dificuldades em interpretar e aplicar a definição dada na resolução das tarefas. A existência de tais dificuldades recomenda o aprofundamento desta nova área de formação, devendo os estudantes desenvolver as suas capacidades interpretativas de enunciados e resultados.

Por fim, importa recordar que os resultados e conclusões apresentados dizem respeito exclusivamente ao grupo de estudantes participantes deste estudo, pertencentes a um curso de engenharia de uma única instituição do ensino superior português. Donde, não podem generalizar-se os resultados para outros cursos, instituições ou contextos educativos. Por outro lado, também o reduzido número de participantes e a homogeneidade da amostra constituem limitações importantes. Consequentemente, a validação e o aprofundamento destes resultados exigem a realização de estudos complementares, com amostras mais diversificadas e representativas.

AUTORIA DO ARTIGO

Contribuições dos autores: Conceptualização, JAF; Metodologia, JAF e GG; Validação, JAF, GG e JG; Análise formal, JAF, GG e JG; Escrita do rascunho original, JAF; Escrita das revisões e correções, GG e JG; Supervisão, JAF. Todos os autores leram e concordam com a publicação da versão deste manuscrito.

CONFLITO DE INTERESSES

Os autores declaram não existirem conflitos de interesses externos, diretos ou indiretos, pessoais ou financeiros relacionados com o presente artigo.

REFERÊNCIAS

Bardin, L. (2002). *Análise de conteúdo* (L. A. Reto & A. Pinheiro, Trads.). Edições 70.

Batanero, C., & Díaz, C. (2010). La toma de decisiones en condiciones de incertidumbre: El papel del juego en la enseñanza de la probabilidad. *Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *54*, 11–19.

Cañizares, M. J., Batanero, C., Serrano, L., & Ortiz, J. J. (1999). Comprensión de la idea de juego equitativo en los niños. *Números: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *37*, 37–55. https://hdl.handle.net/20.500.12285/numeros/325

Direção-Geral da Educação. (s.d.-a). *Aprendizagens Essenciais: Ensino Básico [Currículos escolares]*. Direção-Geral da Educação. https://www.dge.mec.pt/aprendizagens-essenciais-ensino-basico

Direção-Geral da Educação. (s.d.-b). *Aprendizagens Essenciais: Ensino Secundário [Currículos escolares]*. Direção-Geral da Educação. https://www.dge.mec.pt/aprendizagens-essenciais-ensino-secundario

Fernandes, J. A. (2018). Probabilidade de acontecimentos envolvendo aspetos lógicos. *Bolema*, *32*(60), 172–190. https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n60a09

Fernandes, J. A., Gea, M. M., & Batanero, C. (2016). Conocimiento de futuros profesores de educación primaria sobre probabilidad en experiencias compuestas. In C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández, & A. Berciano (Eds.), *Investigación en educación matemática XX* (pp. 178–187). SEIEM. http://hdl.handle.net/1822/51075

Fernandes, J. A., Gonçalves, G., & Gonçalves, J. (2025). Realização de jogos probabilísticos não equitativos por estudantes do ensino superior português. *Educación Matemática*, *37*(1), 193–220. https://doi.org/10.24844/EM3701.07

Fernandes, J. A., & Palhares, P. (2015). Exploração de conceitos probabilísticos nos primeiros anos de escolaridade através de jogos. *Jornal das Primeiras Matemáticas*, (4), 3–10. https://ludicum.org/jornal-das-primeras-matematicas/jpm-2015-no-4/jpm-2015-no-4-exploracao-de-conceitos-probabilisticos-nos-primeiros-anos-de-escolaridade-atraves-de-jogos/

Fischbein, E., & Gazit, A. (1984). Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions? An exploratory research study. *Educational Studies in Mathematics*, *15*(1), 1–24. https://doi.org/10.1007/BF00380436

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. D. Reidel Publishing Company. https://doi.org/10.1007/978-94-010-2903-2

Green, D. R. (1982). *Probability concepts in school pupils aged 11–16 years* [Tese de doutoramento, Loughborough University of Technology]. Loughborough University Research Repository. https://hdl.handle.net/2134/7409

Hacking, I. (1975). *The emergence of probability: A philosophical study of early ideas about probability, induction and statistical inference*. Cambridge University Press.

Hernández-Solís, L. A., Batanero, C., Álvarez-Arroyo, R., & Gea, M. M. (2021). Significados personales del concepto de juego equitativo en niños y niñas costarricenses. *Innovaciones Educativas*, *23*(34), 228–243. https://doi.org/10.22458/ie.v23i34.3429

Hourigan, M., & Leavy, A. M. (2020). Pre-service teachers' understanding of probabilistic fairness: Analysis of decisions around task design. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *51*(7), 997–1019. https://doi.org/10.1080/0020739X.2019.1648891

Koparan, T. (2019). Teaching game and simulation based probability. *International Journal of Assessment Tools in Education*, *6*(2), 235–258. https://doi.org/10.21449/ijate.566563

Lecoutre, M.-P. (1992). Cognitive models and problem spaces in "purely random" situations. *Educational Studies in Mathematics*, *23*(6), 557–568. https://doi.org/10.1007/BF00540060

Lightner, J. E. (1991). A brief look at the history of probability and statistics. *The Mathematics Teacher*, *84*(8), 623–630. https://doi.org/10.5951/MT.84.8.0623

McMillan, J. H., & Schumacher, S. (2014). *Research in education: Evidence-based inquiry* (7th ed.). Pearson.

Mohamed, N., & Ortiz, J. J. (2012). Evaluación de conocimientos de profesores en formación sobre el juego equitativo. *Números: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *80*, 103–117. https://hdl.handle.net/20.500.12285/numeros/838

Ortiz, J. J., Batanero, C., & Contreras, J. M. (2012). Conocimiento de futuros profesores sobre la idea de juego equitativo. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *15*(1), 63–91. http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33523151004

Rodríguez Alveal, F. R., & Koparan, T. (2023). Pensamiento probabilístico en profesores en formación matemática: Un acercamiento desde juegos aleatorios. *Revista Fuentes*, *25*(3), 293–304. https://doi.org/10.12795/revistafuentes.2023.22921

Schlottmann, A., & Anderson, N. H. (1994). Children's judgments of expected value. *Developmental Psychology*, *30*(1), 56–66. https://doi.org/10.1037/0012-1649.30.1.56

Watson, J. (2005). The probabilistic reasoning of middle school students. In G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 145–169). Springer. https://doi.org/10.1007/0-387-24530-8_7

i Centro de Investigação em Educação, Instituto de Educação, Universidade do Minho, Portugal.
https://orcid.org/0000-0003-2015-160X
jfernandes@ie.uminho.pt

ii Interdisciplinary Studies Research Center (ISRC); Departamento de Matemática, Instituto Superior de Engenharia do Porto, Portugal.
https://orcid.org/0000-0002-3584-5498
gmc@isep.ipp.pt

iii 2Ai - Applied Artificial Intelligence Laboratory; Departamento de Tecnologias da Computação e Informação, Instituto Politécnico do Cávado e do Ave, Portugal.
https://orcid.org/0000-0003-2219-1816
jgoncalves@ipca.pt

Toda a correspondência relativa a este artigo deve ser enviada para:

Nome: José António Fernandes

E-mail: jfernandes@ie.uminho.pt

Recebido em 11 de março de 2025

Aceite para publicação em 19 de agosto de 2025

Publicado em 16 de novembro de 2026

Exploring fair games by Portuguese engineering students

ABSTRACT

In this article, higher education students explore two tasks involving the notion of a fair game, based on the following two objectives: (1) to determine whether a game is fair or not; and (2) to calculate prizes involved in a fair game. The study included 49 students who were attending the 2nd or 3rd year of an engineering course at a higher education institution in the north of Portugal. The students responded to a brief questionnaire with several tasks about random games, with only two of these tasks dealing with fair games being studied here. In terms of results, it stands out that the students' performance is satisfactory in the first objective and uneven in the second, being residual and satisfactory when, respectively, the probabilities of the players winning the game are different and equal. Considering these results and the solution procedures adopted by students, a somewhat limited understanding of the notion of fair game is inferred. Therefore, given the results of the study, it is necessary to deepen the training of students on the definition, interpretation, and application of the notion of fair game.

Keywords: Probability; Fair games; Performance; Students; Higher education.

Exploración de juegos equitativos por estudantes portugueses de ingeniería

RESUMEN

En este artículo, estudiantes de educación superior exploran dos tareas que involucran la noción de juego equitativo, basándose en los dos objetivos siguientes: (1) descubrir si un juego es equitativo o no; y (2) calcular los premios involucrados en un juego equitativo. Participaron en el estudio 49 estudiantes de segundo o tercer año de ingeniería en una institución de educación superior del norte de Portugal. Los estudiantes respondieron a un breve cuestionario con varias tareas sobre juegos aleatorios, siendo aquí estudiadas únicamente dos de estas tareas que tratan sobre juegos equitativos. En términos de resultados, cabe destacar que el desempeño de los estudiantes fue satisfactorio en el primer objetivo y desigual en el segundo, siendo residual y satisfactorio cuando, respectivamente, las probabilidades de que los jugadores ganen el juego son diferentes e iguales. Teniendo en cuenta estos resultados y los procesos de resolución adoptados por los estudiantes, se puede inferir una comprensión algo limitada de la noción de juego equitativo. Por tanto, dados los resultados del estudio, es necesario profundizar la formación de los estudiantes respecto a la definición, interpretación y aplicación de la noción de juego equitativo.

Palabras clave: Probabilidad; Juegos equitativos; Desempeño; Estudiantes; Educación superior.