

## **Matemática e música: Sistematização de analogias entre conteúdos matemáticos e musicais**

Carlos dos Santos-Luiz<sup>i</sup>

Instituto Politécnico de Coimbra, Portugal

Lisete Mónico<sup>ii</sup>

Universidade de Coimbra, Portugal

Sandra Campelos<sup>iii</sup>

Colégio Internato dos Carvalhos, Portugal

Carlos Fernandes da Silva<sup>iv</sup>

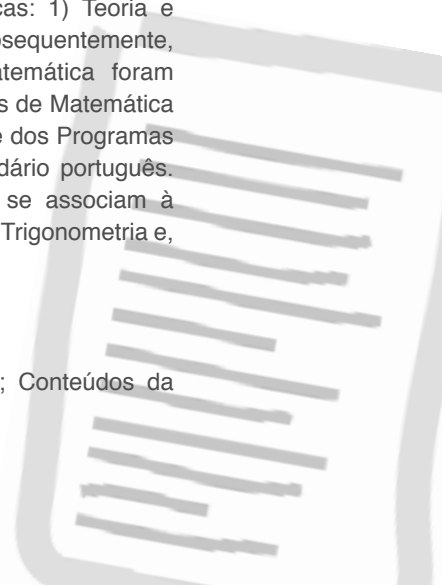
Universidade de Aveiro, Portugal

### Resumo

Matemáticos e físicos foram encontrando ao longo dos tempos analogias entre matemática e música. Paralelamente, músicos têm-se suportado na matemática para descrever a sua arte. Este artigo consiste numa sistematização das ligações entre conteúdos matemáticos e musicais. Os conteúdos musicais foram divididos nas seguintes temáticas: 1) Teoria e análise musicais, 2) Acústica e 3) Composição musical. Subsequentemente, em cada uma destas temáticas, as associações à matemática foram sistematizadas tendo em conta a organização dos Programas de Matemática e respetivas Metas Curriculares do Ensino Básico (3º ciclo) e dos Programas de Matemática A e B do 11º e 12º anos do Ensino Secundário português. Concluímos que os elementos e conceitos musicais que se associam à matemática distribuem-se pelas áreas da Aritmética, Álgebra, Trigonometria e, em especial, Geometria.

### Palavras-chave

Relação matemática e música; Conteúdos da matemática; Conteúdos da música; Programas de matemática



## Introdução

A associação entre música e matemática é conhecida desde a Antiguidade (Garland & Kahn, 1995; Harkleroad, 2006; Walker & Don, 2013), quando os pitagóricos exploraram a sua ligação (Harkleroad, 2006). Ao longo dos tempos, a música tem vindo a acompanhar a História da humanidade, exercendo diferentes funções. Encontra-se presente em todas as regiões do mundo, sendo transversal a culturas e épocas. Paralelamente, a matemática também é universal, transpondo fronteiras culturais, históricas e intelectuais (Garland & Kahn, 1995). Embora a música e a matemática possuam funções dissemelhantes na sociedade, diríamos mesmo aparentemente opostas, estão mais relacionadas do que possa parecer (Beer, 2008). Ambas partilham diversas variáveis, cujas ligações emergem entre determinados conteúdos da matemática e conteúdos musicais. Apesar da presença dos conceitos matemáticos na música, estes encontram-se essencialmente no âmbito da teoria da música e não na música em geral (Bahna-James, 1991).

Matemáticos e físicos como Pitágoras, Euclides, V. Galilei, G. Galilei, L. Euler e J. Kepler, entre outros, sentiram as analogias entre matemática e música. Por outro lado, os músicos recorreram à matemática para descrever a sua arte, tais como J.-P. Rameau, J. S. Bach, F. Chopin, A. Schönberg, J. Cage e I. Xenakis, entre outros (Rothstein, 2006). A música grega desempenhou um papel importante na evolução da matemática pura. Pitágoras protagonizou as experiências efetuadas no monocórdio, destacando-se a construção da escala musical com base nas razões perfeitas entre números naturais (Rodrigues, 2006). No tempo de Pitágoras, os estudos das proporções e razões harmónicas estabeleceram a essência da música. Porém, no final da Idade Média, esta perspetiva foi perdendo relevância à medida que a música se foi tornando mais complexa (Beer, 2008).

A divisão das ciências matemáticas em quatro partes pertence à escola pitagórica: Aritmética, Geometria, Música e Astronomia. Com base nesta categorização estabeleceu-se o *Quadrivium*, parte fundamental das sete artes liberais do *curriculum* medieval, que se completa com o *Trivium* (Gramática, Dialética e Retórica) (Devlin, 2002; Monteiro, 2012; Rodrigues, 2006). No contexto do *Quadrivium* a música assumiu uma posição relevante. A permanência do *Quadrivium* na Península Ibérica nas universidades (portuguesa e salmantense) e mosteiros (Santa Cruz de Coimbra, São

Vicente de Fora de Lisboa e Santa Maria de Ripoll, entre outros) deu-se até finais do século XV e decénios do XVI, para além da presença noutros países (Monteiro, 2012).

De facto, matemática e música têm interagido até ao presente (Harkleroad, 2006). No decurso do século XX, a linguagem musical foi matematizada (Lima, 2006), surgindo ideias matemáticas usadas pelos compositores como ferramentas básicas, desde a linha dodecafónica de A. Schönberg e os quadrados mágicos de P. M. Davies até ao uso da teoria dos grupos, fractais e superfícies geodésicas por I. Xenakis (Cross, 2006; Rothstein, 2006).

Não obstante alguns estudos identificarem ligações entre matemática e música, carece-se de literatura que elenque de forma sistemática estas relações abarcando simultaneamente outros domínios, tais como os programas escolares. Para além do estudo de Kells (n.d.), que fornece alguns exemplos a partir do documento *Curriculum Focal Points for Prekindergarten through Grade 8 Mathematics* da National Council of Teachers of Mathematics (2006), não nos foi possível encontrar outros estudos que compendiassem aquelas associações combinadas com programas ou recomendações sobre organização de programas escolares de matemática. Deste modo, a sistematização que elaborámos, e que é objeto deste estudo, é de nossa exclusiva autoria. Pretendemos, assim, constituir e contribuir com uma síntese de associações que sirva de base de trabalho para investigações futuras que se debrucem sobre as ligações entre matemática e música. Entre as possíveis áreas de intervenção destacamos o ensino e a aprendizagem da matemática por meio de aulas integradas de matemática e música, assim como a associação entre aprendizagem musical e desempenho matemático.

No seio da temática das aulas integradas de matemática e música, alguns estudos têm verificado que as lições que visam a inclusão de atividades musicais nas aulas de matemática têm efeitos positivos na aprendizagem desta disciplina (An, Kulm, & Ma, 2008), dado o ensino integrado ser desenhado através das ligações entre conteúdos das duas áreas (Still & Bobis, 2005). Exemplificando, no estudo de An e colaboradores (2008) foram selecionados aleatoriamente 35 alunos do 6º ano de escolaridade e submetidos a sessões de matemática de 90 minutos com música integrada. Os estudantes aprenderam a compor música pop e

recorreram a notação gráfica com o intuito do ato de composição ser baseado em regras matemáticas simples. Como resultados, os autores observaram uma melhoria nos alunos ao nível da atitude e crença relativamente à aprendizagem da matemática. Mais recentemente, An, Tillman, Boren, e Wang (2014) conduziram uma investigação com pré e pós-teste em crianças do 3º ano do Ensino Básico, com grupo experimental (classe de alunos com lições integradas de música e matemática) e grupo de controlo (classe equivalente de alunos, mas apenas com aulas de matemática convencionais), para avaliar e comparar as suas disposições para aprender matemática. Os grupos eram semelhantes no pré-teste no referente às variáveis em estudo. Porém, as medições no pós-teste mostraram que, após a intervenção com aulas integradas no grupo experimental, estes alunos obtiveram pontuações mais elevadas em crenças, atitude, utilidade, sucesso e confiança. Numa análise referente apenas ao grupo de estudantes de música, as mudanças das disposições para a matemática do pré para o pós-teste revelaram uma subida significativa nas seis medidas (motivação, atitude, crenças, utilidade, confiança e sucesso; efeitos experimentais classificados de médios a elevados). Os autores recomendam aos professores que dinamizem atividades musicais como contexto de aprendizagem da matemática, criando-se assim um ambiente de aprendizagem aliciante e agradável, conducente a melhorias nas disposições para aprender matemática. Adicionalmente, e na continuação da mesma linha de investigação, An e Tillman (2015) concluíram que "the students' mathematics achievement improved throughout the music mathematics lesson interventions" (p. 56). Num estudo dedicado ao modo como os professores integram atividades musicais nas aulas convencionais de matemática dos 1º e 3º anos do Ensino Básico, An, Capraro e Tillman (2013) mostraram que esta integração conduziu a resultados positivos em diversas aptidões matemáticas, designadamente ao nível do sentido numérico, álgebra, funções, medida, geometria, estatística, análise de dados, probabilidades e raciocínio matemático.

Paralelamente à área de investigação agora apresentada, referimos outra que respeita aos contributos da aprendizagem musical no desempenho académico, em particular matemático. De forma abrangente, os estudos apontam para uma associação positiva entre ambas as áreas (Cabanac, Perlovsky, Bonniot-Cabanac, & Cabanac, 2013; Helmrich, 2010; Hille &

Schupp, 2015; Schellenberg, 2006; Southgate & Roscigno, 2009). É de realçar que é possível continuar a observar uma associação positiva entre aprendizagem musical e performance matemática mesmo quando se controla o efeito do desempenho matemático prévio (Helmrich, 2010; Southgate & Roscigno, 2009), da inteligência (Schellenberg, 2006) e do nível socioeconómico (Hille & Schupp, 2015; Southgate & Roscigno, 2009).

Face ao exposto, o presente artigo tem por objetivo apresentar ligações entre conteúdos da matemática e conteúdos musicais. Em particular, pretendemos sistematizar associações entre tópicos/temas ou domínios de conteúdos matemáticos e elementos/conceitos musicais tendo por base os Programas de Matemática dos Ensinos Básico (3º ciclo) e Secundário portugueses.

## **Metodologia**

O artigo consiste numa análise qualitativa da literatura que identifica ligações entre matemática e música, e posterior sistematização da relação entre conteúdos da matemática e conteúdos musicais. Os procedimentos adotados que permitiram constituir as bases para a identificação e exame das relações entre conteúdos matemáticos e musicais foram os seguintes: (1) pesquisa de artigos e livros em repositórios de bases bibliográficas (e.g., B-on, Web of Knowledge, Emerald, Ebsco), usando a palavra-chave no título e no abstract "Matemática e Música", e (2) consulta de artigos e livros centrados na musicologia histórica e sistemática (Duckles et al., 1980); os procedimentos (1 e 2) permitiram revelar ligações intrínsecas entre matemática e música no âmbito das temáticas da Teoria e análise musicais, Acústica e Composição musical. Seguidamente, procedeu-se à sistematização das relações entre matemática e música atendendo à organização por: a) domínios de conteúdos matemáticos e conteúdos matemáticos do Programa de Matemática do Ensino Básico (3º ciclo) (Ponte et al., 2007), e respetivas Metas Curriculares definidas pelo governo português para o Ensino Básico da Matemática (Bivar, Grosso, Oliveira, & Timóteo, 2012); e b) tópicos e temas matemáticos dos Programas de Matemática A e B dos 11º e 12º anos do Ensino Secundário português (Silva, Fonseca, Martins, Fonseca, & Lopes, 2002a, 2002b, 2002c, 2002d).

No âmbito deste trabalho, a palavra "música" é usada no contexto da música erudita Ocidental, ou seja, no sistema musical utilizado na Europa Ocidental e Américas (Grout & Palisca, 1994).

## Resultados

Expomos a ligação entre conteúdos matemáticos e musicais repartidos por três temáticas musicais e que identificámos no âmbito das Teoria e análise musicais, Acústica e Composição musical. Em cada secção fazemos uma síntese dessa relação apresentando a literatura em que nos suportámos. Finalizamos com uma exposição em quadro, que sistematiza as ligações entre conteúdos da matemática e conteúdos musicais segundo os Programas de Matemática dos Ensinos Básico (3º ciclo) e Secundário portugueses.

### Teoria e análise musicais

No que concerne à teoria e análise musicais, o vínculo entre conteúdos da matemática e conteúdos musicais é exposto sob vários aspetos na literatura, a seguir elencados:

- (a) os intervalos musicais estão associados a relações numéricas e proporções (Beer, 2008; Benson, 2008; Ferreira, 2005; Harkleroad, 2006; Henrique, 2014; Miller, Vandome, & McBrewster, 2010; Wright, 2009), a operações aritméticas (adição, subtração, multiplicação e divisão) (Benson, 2008; Ferreira, 2005; Miller et al., 2010; Rodrigues, 2006; Wright, 2009), a logaritmos (Benson, 2008; Miller et al., 2010; Wright, 2009) e a exponenciais (Wright, 2009); e, ainda, aos números racionais nas escalas Pitagórica e Natural (Benson, 2008; Wright, 2009), aos números racionais nas escalas temperadas (Mesotónica e Temperamento igual), aos números irracionais nas escalas temperadas (Mesotónica e Temperamento igual) (Benson, 2008; Wright, 2009) e ao trítono (Rothstein, 2006);
- (b) as escalas Pitagórica, Natural e Mesotónica ligam-se com as relações numéricas e proporções (Beer, 2008; Ferreira, 2005; Harkleroad, 2006; Henrique, 2014; Miller et al., 2010; Wright, 2009) e os números racionais (Wright, 2009);

- (c) as escalas temperadas (Mesotónica e Temperamento igual) associam-se com os números irracionais (Beer, 2008; Wright, 2009) e os números racionais (Wright, 2009);
- (d) os acordes ligam-se com as relações numéricas e proporções (Beer, 2008; Rothstein, 2006);
- (e) a harmonia relaciona-se com os múltiplos inteiros (Beer, 2008) e as relações numéricas e proporções (Beer, 2008; Ferreira, 2005; Harkleroad, 2006; Miller et al., 2010; Rothstein, 2006; Steinhaus, 1969);
- (f) o timbre associa-se a funções trigonométricas (Harkleroad, 2006; Wright, 2009).

A afinidade estrutural entre música e matemática é visível quando fazemos uma análise relativa à representação simbólica e de padrão. Na execução de uma partitura, um músico tem de reconhecer símbolos próprios e, seguidamente, convertê-los numa ação motora. De forma idêntica, a tarefa da matemática consiste numa representação de padrões, assim como de relações, através de símbolos personalizados (Bahr & Christensen, 2000). Deste modo, a matemática e a música usam um sistema de notação especializado (Wollenberg, 2006).

A representação gráfica da música faz-se por meio de notação musical numa partitura, sendo que os conceitos matemáticos estão evidentes na sequência das notas em função do tempo (melodia e ritmo). Isto é, na partitura musical, a sucessão realizada da esquerda para a direita (eixo dos  $xx$ ) representa a passagem do tempo (ritmo/duração), ao passo que o eixo vertical (eixo dos  $yy$ ) reproduz a melodia (altura do som/frequência). No caso da matemática, o tempo é vulgarmente parametrizado pelo eixo horizontal (eixo dos  $xx$ ) (Bahr & Christensen, 2000; Rothstein, 2006; Wright, 2009). Assim, o processo de leitura de música tem paralelismo com o uso de gráficos por matemáticos (Bahr & Christensen, 2000). Saliente-se, ainda, que as notações musical e matemática possuem configurações muito abstratas (Devlin, 2002). Ao especificarmos o carácter simbólico da notação musical, emergem conceitos associados ao tempo/duração (pulsação, figuras musicais/duração das notas/sons, pausas, pontos de aumentação, ligaduras, barras e compassos), ao ritmo (acentuação e agrupamento das notas em

tempos) e à altura do som (claves, pentagrama e nota/frequência) que integram um espaço musical bidimensional, ou seja, de altura do som e de tempo (Geometria da música) (Bahr & Christensen, 2000; Harkleroad, 2006; Hodges, 2006; Nisbet, 1991; Rothstein, 2006; Wright, 2009). Adicionalmente, Hodges (2006) propõe a intensidade do som/sensação de intensidade como pretendente à terceira dimensão do espaço musical, a qual é observável na partitura através dos sinais de dinâmica (sinais de gradação de intensidade).

Sistematizando o agora mencionado, a associação entre conteúdos da matemática e conteúdos musicais emerge da seguinte forma:

- (a) o tempo associa-se com relações numéricas, proporções racionais e proporção irracional/proporção dourada (Ferreira, 2005);
- (b) a duração das notas (figuras musicais)/sons relaciona-se com múltiplos inteiros (Scimemi, 1999), relações numéricas (Scimemi, 1999), proporções (Wright, 2009) e operações aritméticas nas notas (multiplicação e divisão) (Miller et al., 2010), notas e pausas (adição, multiplicação e divisão), tercina (divisão) e ligaduras de prolongação (adição) (Wright, 2009);
- (c) os compassos ligam-se a relações numéricas (Nisbet, 1991);
- (d) o ritmo associa-se com relações numéricas e proporções (Ferreira, 2005);
- (e) a nota musical/som/frequência/altura do som liga-se com múltiplos inteiros (Benson, 2008; Harkleroad, 2006; Miller et al., 2010), operações aritméticas na Escala do Temperamento igual (multiplicação e divisão) (Miller et al., 2010), funções trigonométricas (Harkleroad, 2006; Wright, 2009) e logaritmos (Benson, 2008; Everest & Pohlmann, 2015; Howard & Angus, 2009; Wright, 2009);
- (f) a intensidade/sensação de intensidade relaciona-se com logaritmos (Benson, 2008; Everest & Pohlmann, 2015; Henrique, 2014; Howard & Angus, 2009).

No que se refere aos padrões geométricos/musicais ("frisos") e aos motivos musicais classificados pelas suas simetrias, assim como às séries de 12 sons, como elementos integrantes de composições musicais de certos compositores, os mesmos enquadram-se no domínio das ideias geométricas



(Bahr & Christensen, 2000; Benson, 2008; Harkleroad, 2006; Hodges, 2006; Rothstein, 2006; Simões, 1999, 2006; Wright, 2009). A título de exemplo de obras e compositores citem-se: fugas de J. S. Bach (Hodges, 2006), Sonata nº 2 em Fá M para piano, KV 280, de W. A. Mozart (Simões, 2006), *Le courlis cendré do Catalogue d'oiseaux* de O. Messiaen (Hodges, 2006) e Concerto para piano e orquestra, Opus 42, de A. Schönberg (Simões, 1999).

Segundo Wright (2009), o conceito de simetria aplica-se em música associado aos fenómenos de transformação (repetição de padrões) e de repetição de secções. Nas transformações encontramos a transposição, a retrogradação e a inversão (Harkleroad, 2006; Hodges, 2006; Rothstein, 2006; Scimemi, 1999; Simões, 2004, 2006; Wright, 2009) em várias obras, tais como nas de compositores de música de 12 sons (ex., A. Schönberg e M. Babbitt). No que diz respeito à repetição de secções, a palavra simetria é aplicada ao conceito de forma musical (Benson, 2008; Hodges, 2006; Wright, 2009), como é o caso da forma binária (AABB) e da forma ternária (ABA) (Wright, 2009). Estas temáticas remetem-nos para a composição musical, adiante abordada.

Os números de Fibonacci (sequência de números inteiros) e o número de ouro são conceitos matemáticos também interessantes (Beer, 2008; Harper, 2007), apesar de Wright (2009) mencionar que a associação entre matemática e música através destes conteúdos parece distante. No entanto, alguns estudiosos encontraram o número de ouro em peças musicais, nomeadamente ao nível da composição musical (ex., divisões formais e desenvolvimento de uma linha melódica) (Ferreira, 2005; Garland & Kahn, 1995). Como exemplo, este conceito foi observado em determinadas sonatas de D. Scarlatti (Harper, 2007), entre outras obras.

### **Acústica**

Na música, durante o século XVII, ocorreu um processo de mudança no sentido da mesma mudar de ciência para arte, apesar de manter um vínculo com as duas áreas. É possível encontrar várias ligações entre ciência e música neste período. Foi no século XVII que se iniciou a ciência acústica moderna, considerada a ciência do som (Wollenberg, 2006).

A música é uma arte que usa o som (Miller et al., 2010), sendo que este é considerado a matéria-prima da música e o fundamento da sua estrutura (Henrique, 2014). Na produção, propagação e percepção do som e da música encontramos relações sonoras e simbólicas que podem ser relacionadas com as ciências matemáticas (Lima, 2006; Rodrigues, 2006). Através da física concretiza-se um contacto evidente entre matemática e música. Por outro lado, a vertente acústica da música recorre à análise por meio da matemática (Harkleroad, 2006; Henrique, 2014). Adicionalmente, Henrique (2014) refere que a acústica musical, ao ser uma área de carácter científico, necessita da física e da matemática para abordar com rigor a maioria dos temas que dela fazem parte.

De seguida, recorrendo a literatura específica, mencionamos alguns trabalhos que focam conteúdos e temas no círculo da acústica musical. Henrique (2014) expõe uma panóplia de assuntos, dos quais se destacam os fundamentos físicos do som, a acústica dos instrumentos musicais (cordofones, aerofones, membranofones e idiofones), a acústica de salas, a percepção dos sons musicais, e a afinação, intervalos, escalas e temperamentos. Sempre que possível, o autor explora a associação entre matemática, física e música. O trabalho de Bibby (2006) explana também os temas da afinação e temperamento, reportando que na Grécia Antiga os sons musicais considerados consonantes associavam-se a relações numéricas simples. O autor analisa esta questão associada à transposição musical até à adoção da Escala do Temperamento igual. Ainda na esfera da temática da afinação, escalas e temperamentos, Harkleroad (2006), Benson (2008) e Walker e Don (2013) apresentam e comparam determinados sistemas de afinação. Para além do já mencionado por Wright (2009) acerca dos intervalos musicais, o autor foca também a medição destes através dos cents, assim como a conversão dos cents em relação matemática e a conversão da razão de um intervalo musical em cent. Entre outros aspetos abordados, encontramos a aplicação da escala logarítmica à altura do som, bem como a associação de funções periódicas à Trigonometria. O trabalho de Benson (2008) expõe uma série de assuntos onde é possível observar uma ligação com a matemática, particularmente no que se refere à caracterização do som puro, à análise de Fourier, à teoria da consonância e dissonância, aos instrumentos musicais, à música digital e à síntese de sons musicais. De

modo semelhante, Walker e Don (2013) fornecem informação sobre síntese de áudio digital. Taylor (2006) descreve vários temas dedicados à física do som, aos fenômenos acústicos, à psicoacústica e a aspetos associados à acústica dos instrumentos musicais. Henrique (2006) aborda igualmente os instrumentos, expondo os aspetos lineares e não-lineares concernentes ao comportamento dos mesmos do ponto de vista físico. A acústica do espaço, sendo este considerado um prolongamento do instrumento musical, é relatada por meio dos painéis de Schroeder, os quais são fundamentados na teoria dos números.

### **Composição musical**

No âmbito da composição musical, a matemática pode assumir uma função relevante. Apesar de muitos compositores terem construído obras tendo por base aspetos puramente musicais, as mesmas peças podem também ser descritas segundo princípios matemáticos. Como exemplos, refira-se a técnica de transposição aplicada a um determinado padrão musical, como no caso da melodia da primeira marcha *Pomp and Circumstance* de E. Elgar, ou da combinação da transposição com outras operações. Neste último caso, mencione-se *Das Musikalische Opfer (A Oferenda Musical)* de J. S. Bach, em que a segunda metade da peça consta da primeira metade mas tocada de forma retrógrada. Noutras situações, os compositores usaram a matemática de forma explícita nas composições musicais (Harkleroad, 2006). Rafael (2006) chega a referir que uma composição musical pode ter um resultado interessante mesmo que seja baseada em elementos matemáticos simples.

Como supradito, a presença da matemática na composição musical apenas se impôs no século XX (Lima, 2006). Deste modo, e ao longo do tempo, o próprio conceito de música foi sendo ampliado paralelamente ao alargamento dos horizontes no campo da composição musical (Henrique, 2014). A. Schönberg foi o primeiro compositor que aplicou de forma evidente a matemática na composição musical, nomeadamente por meio do dodecafonismo, um método de composição com 12 sons (Lima, 2006). Contudo, "o primeiro grande caso na história da música onde a composição musical está (...) associada à acústica, à musicologia, à filosofia e às matemáticas é o de Iannis Xenakis, que realizou (...) uma síntese genial entre

arte e ciência" (Lima, 2006, p. 46). Outro compositor de aplicação explícita da matemática na composição musical é M. Babbitt, utilizando a teoria de grupos de um modo muito complexo (Harkleroad, 2006).

Refira-se o trabalho de determinados investigadores onde é possível encontrar alguns aspetos que associam a matemática à composição musical. Começando por Rafael (2006), o autor declara que "ao nível da composição, as relações mais importantes, entre a matemática e a música, encontram-se essencialmente ao nível das alturas (...), ao nível dos timbres (...), mas também fundamentalmente ao nível dos ritmos, durações e forma (temporal)" (pp. 116-117). Grattan-Guinness (1999) aborda a utilização da numerologia em peças musicais de W. A. Mozart e de L. van Beethoven, bem como da gematria em obras de W. A. Mozart. Simões (1999, 2001, 2002, 2004), numa série de trabalhos, descreve algumas regras de composição propostas por determinados compositores no decurso do século XX, sendo que estas regras podem ser expressas em termos matemáticos. De modo idêntico, algumas propriedades musicais resultam daquela representação matemática. A autora apresenta as regras de composição no seio da música dodecafónica, do serialismo integral, da música minimal e da música estocástica. Harkleroad (2006) relata diversas técnicas de composição musical. Analisa técnicas usadas para variar temas, assim como alguma matemática que permite compreender a forma como essas técnicas se encontram relacionadas entre si, como acima afluído. Cite-se a transposição, a inversão ou a retrogradação de um determinado padrão musical, bem como a composição por meio de 12 sons aplicando ou não a teoria de grupos. Do mesmo modo, Oliveira (2009) utiliza a matemática explorando a teoria de grupos. Harkleroad (2006) consagra, ainda, um capítulo ao modo como certos compositores utilizam a aleatoriedade e a probabilidade. Através da análise de obras, Patriarca (2006) apresenta a música espectral como um sistema composicional relevante do final do século XX e início do século XXI, o qual utiliza a série de harmónicos. Expõe também a aplicação de fractais no âmbito da composição espectral.

Na secção seguinte apresentam-se em quadro os resultados analíticos acima expostos, que reportam as relações existentes entre matemática e música identificadas na literatura. Pretende-se que cada quadro sistematize as ligações entre conteúdos da matemática e conteúdos musicais seguindo

os Programas de Matemática do 3º ciclo do Ensino Básico (e respetivas Metas Curriculares) e do Ensino Secundário.

**Sistematização dos resultados de acordo com os programas nacionais de matemática dos Ensinos Básico (3º ciclo) e Secundário**

O Quadro 1 foi elaborado a partir da associação dos domínios de conteúdos matemáticos e conteúdos matemáticos do Programa de Matemática do Ensino Básico (3º ciclo) (Ponte et al., 2007) e das Metas Curriculares (Bivar et al., 2012) com os elementos e conceitos musicais mencionados na bibliografia especializada supracitada. O Quadro 2 resultou da combinação dos tópicos e temas matemáticos dos Programas de Matemática A e B dos 11º e 12º anos do Ensino Secundário (Silva et al., 2002a, 2002b, 2002c, 2002d) com os elementos e conceitos musicais igualmente mencionados na literatura supradita. Foram excluídos dos quadros os conteúdos matemáticos que não pertencem aos Programas de Matemática dos Ensinos Básico e Secundário portugueses, apesar desses conteúdos terem sido identificados nas rubricas anteriores.

**Quadro 1- Relação entre domínios de conteúdos matemáticos provenientes do programa e metas curriculares de matemática do Ensino Básico, e elementos/conceitos musicais**

Domínio de Conteúdos – Números e Operações (NO)	
Conteúdos matemáticos	Elementos/conceitos musicais
<i>Números naturais</i>	
Relações numéricas	Nota/som/frequência/altura do som Intervalos Acordes Harmonia Escalas Pitagórica, Natural e Mesotónica Tempo Duração das notas (figuras musicais)/sons Ritmo Compassos
<i>Números inteiros (Z+)</i>	
Múltiplos inteiros	Intervalos Harmonia Nota/som/frequência/altura do som Duração das notas (figuras musicais)/sons
<i>Números reais</i>	
Números racionais	Intervalos (Escalas Pitagórica, Natural e Mesotónica) Intervalos (Escalas temperadas – Mesotónica e Temperamento igual) Escalas Pitagórica, Natural e Mesotónica
Números irracionais	Intervalos (Escalas temperadas – Mesotónica e Temperamento igual) Escalas temperadas – Mesotónica e Temperamento igual Tritono
<i>Aritmética/Operações aritméticas</i>	
Adição	Intervalos Duração das notas (figuras musicais)/sons/pausas Ligaduras de prolongação
Subtração	Intervalos
Multiplicação	Nota/som/frequência/altura do som Intervalos Duração das notas (figuras musicais)/sons/pausas
Divisão	Nota/som/frequência/altura do som Intervalos Duração das notas (figuras musicais)/sons/pausas Tercina
Domínio de Conteúdos – Geometria e Medida (GM)	
Conteúdos matemáticos	Elementos/conceitos musicais
<i>Transformação geométrica</i>	
Simetrias Isometrias simples – translações, reflexões e rotações Padrões geométricos que envolvem simetrias Frises Lugares geométricos (mapas)	<i>Transformação e repetição de secções</i> Padrões musicais ("frises") e motivos musicais classificados pelas suas simetrias – transposição, retrogradação e inversão Séries de 12 sons (dodecatonismo) Forma musical
Domínio de Conteúdos – Álgebra (ALG)	
Conteúdos matemáticos	Elementos/conceitos musicais
Proporções racionais	Intervalos Acordes Harmonia Escalas Pitagórica, Natural e Mesotónica Tempo Duração das notas (figuras musicais)/sons Ritmo
Sequências (Números de Fibonacci e Número de ouro)	Forma musical (divisão da) Linha melódica (desenvolvimento de uma) Tempo Ritmo (mudanças de)

**Quadro 2 - Relação entre tópicos/temas matemáticos, provenientes dos programas de matemática A e B dos 11º e 12º anos do Ensino Secundário, e elementos/conceitos musicais**

Tema – Funções	
Tópicos matemáticos	Elementos/conceitos musicais
Funções trigonométricas (trigonometria)	Nota/som/frequência/altura do som Timbre
Funções exponenciais e logarítmicas (logaritmo)	Nota/som/frequência/altura do som Intervalos Intensidade/sensação de intensidade

### Discussão e conclusões

Com o presente artigo pretendeu-se contribuir para o entendimento abrangente da ligação entre "ciência do número" e "arte dos sons", ou seja, entre matemática e música. Especificamente, procurou-se apresentar conteúdos matemáticos e musicais que apontam para esta relação.

Os conteúdos matemáticos e musicais foram identificados em três temáticas musicais no seio da musicologia histórica e sistemática, ou seja, ao nível da Teoria e análise musicais, Acústica e Composição musical. Como acima mencionado, Bahna-James (1991) considera que as semelhanças entre matemática e música ocorrem sobretudo ao nível da teoria musical. O nosso estudo encontra-se em linha com o deste autor, dado termos identificado a maioria das associações no âmbito desta temática. Adicionalmente, Bahna-James (1991) reporta que a correlação entre matemática e teoria musical é maior quando a matemática é considerada a um nível elementar, designadamente no que toca à Aritmética, à Álgebra e à Geometria.

Da sistematização das ligações entre conteúdos matemáticos e musicais segundo a organização dos Programas de Matemática do 3º ciclo do Ensino Básico (e respetivas Metas Curriculares) e do Ensino Secundário, sobressaíram quatro áreas da matemática, isto é, a Aritmética, a Álgebra, a Trigonometria e, especialmente, a Geometria. No nosso estudo, foi possível identificar uma série de conteúdos matemáticos e musicais que se enquadram no tema da Geometria e que tornam a relação entre matemática e música muito perceptível, concretamente no que toca à ligação da transformação

geométrica (conteúdos matemáticos) com a transformação e repetição de secções (elementos e conceitos musicais). Um dos conteúdos refere-se aos padrões, aspeto que Bahr e Christensen (2000) consideram importante na sobreposição da matemática com a música, como acima mencionado. Tanto a música como a matemática utilizam símbolos e desenvolvem padrões (musicais no caso da música e numéricos no referente à matemática) e ambas baseiam-se em construções abstratas (Bahr & Christensen, 2000; Devlin, 2002). A compreensão do simbolismo e dos padrões é crucial às tarefas dos músicos e é uma regra usada na resolução de problemas matemáticos (Bahr & Christensen, 2000). Segundo estes autores,

(...) the more advanced the musician becomes, the greater is their capacity for comprehension of complexity, and the requirement to decipher and act upon the presentation of these abstract symbols. (...) As for the musician, as a mathematician becomes more advanced their capacity to abstract from and comprehend complex symbolic representations increases (Bahr & Christensen, 2000, p. 192).

Concretamente, o sistema de notação musical ao ter uma representação simbólica (Bahr & Christensen, 2000) tenta retratar os fenómenos auditivos de um modo espacial, permitindo aos músicos a exploração da associação visão-audição (Harkleroad, 2006). Os aspetos relacionados com o tempo e a altura do som correspondem a duas dimensões do espaço musical (Geometria da música) e encontram-se registados por meio de um sistema de representação escrita denominado partitura (Hodges, 2006). Para além da representação simbólica, uma composição musical (Lewin, 2011; Rothstein, 2006), assim como a matemática (Rothstein, 2006), explora o espaço através de uma topologia própria (Lewin, 2011; Rothstein, 2006). No caso específico da música refira-se, como exemplo, os fenómenos de transformação de melodias, por meio de padrões e motivos musicais, operados por compositores que utilizaram abundantemente ideias geométricas, tais como J. Desprez, J. S. Bach, L. van Beethoven, B. Bartók e A. Schönberg (Hodges, 2006).

Além desta ligação da música com a Geometria, concluiu-se também pela existência de associações entre um conjunto de conteúdos da matemática e conteúdos musicais que se enquadram na esfera de outras áreas da matemática, tais como a Aritmética, a Álgebra e a Trigonometria. As áreas temáticas da Aritmética, da Geometria e da Trigonometria tinham sido



já identificadas por Santos-Luiz (2007). Ao nível de uma análise mais fina, isto é, da ligação entre alguns conteúdos matemáticos e musicais, o nosso estudo, apesar de mais abrangente, suporta o de Bahna-James (1991). A investigação deste autor consistiu numa análise às respostas a um inquérito, aplicado a 124 estudantes de música de uma escola do Ensino Secundário, sobre as ligações entre matemática e música. Os resultados revelaram-se coincidentes com os nossos, embora apenas se tenham centrado ao nível da altura do som com a Aritmética, das relações tonais com a Aritmética e Álgebra, dos acordes com a Álgebra, e do ritmo com a Álgebra.

Apesar das limitações inerentes a qualquer investigação de natureza qualitativa, este estudo pretendeu ser um avanço no que toca à sistematização entre conteúdos da matemática e conteúdos musicais. O enquadramento, atendendo aos Programas de Matemática dos ensinos Básico e Secundário portugueses, apresentou, também, um carácter inovador. Como proposta de investigação futura pretendemos dar continuidade a esta investigação estendendo-a a outros níveis de ensino, designadamente ao Pré-escolar, aos 1º e 2º ciclos do Ensino Básico e ao Ensino Superior. Outra proposta consiste em sensibilizar os agentes educativos para as vantagens decorrentes do processo ensino-aprendizagem da matemática através de aulas integradas de matemática e música, onde a ligação e a sistematização entre conteúdos da matemática e da música sejam aplicadas.

## Referências

- An, S. A., & Tillman, D. A. (2015). Music activities as a meaningful context for teaching elementary students mathematics: A quasi-experiment time series design with random assigned control group. *European Journal of Science and Mathematics Education*, 3(1), 45-60.
- An, S. A., Capraro, M. M., & Tillman, D. A. (2013). Elementary teachers integrate music activities into regular mathematics lessons: Effects on students' mathematical abilities. *Journal for Learning through the Arts*, 9(1), 1-19.
- An, S. A., Kulm, G. O., & Ma, T. (2008). The effects of a music composition activity on Chinese students' attitudes and beliefs towards mathematics: An exploratory study. *Journal of Mathematics Education*, 1(1), 96-113.
- An, S. A., Tillman, D. A., Boren, R., & Wang, J. (2014). Fostering elementary students' mathematics disposition through music-mathematics integrated lessons. *International Journal for Mathematics Teaching & Learning*, 15(3), 1-18.

- Bahna-James, T. (1991). The relationship between mathematics and music: Secondary school student perspectives. *Journal of Negro Education*, 60(3), 477-485. doi:10.2307/2295499
- Bahr, N., & Christensen, C. A. (2000). Inter-domain transfer between mathematical skill and musicianship. *Journal of Structural Learning and Intelligent Systems*, 14(3), 187-197.
- Beer, M. (2008). Mathematics and music: Relating science to arts. *Mathematical Spectrum*, 41(1), 36-42.
- Benson, D. J. (2008). Music: A mathematical offering. *The Mathematical Intelligencer*, 30(1), 76-77. doi:10.1007/BF02985765
- Bibby, N. (2006). Tuning and temperament: Closing the spiral. In J. Fauvel, R. Flood, & R. Wilson (Eds.), *Music and mathematics: From Pythagoras to fractals* (pp. 13-27). Oxford, UK: Oxford University Press.
- Bivar, A., Grosso, C., Oliveira, F., & Timóteo, M. C. (2012). *Metas curriculares – Ensino básico – Matemática*. Lisboa, Portugal: Governo de Portugal, Ministério da Educação e Ciência. Disponível em: [http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Basico/Metas/Matematica/programa\\_matematica\\_basico.pdf](http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Basico/Metas/Matematica/programa_matematica_basico.pdf)
- Cabanac, A., Perlovsky, L., Bonniot-Cabanac, M. C., & Cabanac, M. (2013). Music and academic performance. *Behavioural Brain Research*, 256, 257-260. doi:10.1016/j.bbr.2013.08.023
- Cross, J. (2006). Composing with numbers: Sets, rows and magic squares. In J. Fauvel, R. Flood, & R. Wilson (Eds.), *Music and mathematics: From Pythagoras to fractals* (pp. 131-146). Oxford, UK: Oxford University Press.
- Devlin, K. (2002). *Matemática: A ciência dos padrões*. Porto, Portugal: Porto Editora.
- Duckles, V., Brown, H. M., Buelow, G. J., Lindley, M., Lockwood, L., Velimirović, M., & Bent, I. D. (1980). Musicology. In S. Sadie (Ed.), *The new grove dictionary of music and musicians* (6th ed., Vol.12, pp. 836-863). London, UK: Macmillan.
- Everest, F. A., & Pohlmann, K. C. (2015). *Master handbook of acoustics* (6th ed.) New York, NY: McGraw-Hill.
- Ferreira, M. P. (2005, janeiro a dezembro). Proporções na música da Antiguidade e Medieval. *Revista de Educação Musical*, 121-123, 5-23.
- Garland, T. H., & Kahn, C. V. (1995). *Math and music: Harmonious connections*. Palo Alto, CA: Dale Seymour Publications.
- Grattan-Guinness, I. (1999, novembro). Mozart 18, Beethoven 32: Sombras escondidas de números inteiros na música clássica. *Colóquio/Ciências - Revista Cultural Científica*, 24, 5-16.
- Grout, D. J., & Palisca, C. V. (1994). *História da música ocidental*. Lisboa, Portugal: Gradiva Publicações.
- Harkleroad, L. (2006). *The math behind the music*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- Harper, N. L. (2007). Golden section in the sonatas of Domenico Scarlatti: An examination of Kirkpatrick's crux. In A. Williamon & D. Coimbra (Eds.), *Proceedings of the International Symposium on Performance Science 2007* (pp. 1-6). London, UK: Taylor & Francis.

- 239-244). Utrecht, The Netherlands: European Association of Conservatoires (AEC).
- Helmrich, B. H. (2010). Window of opportunity? Adolescence, music, and algebra. *Journal of Adolescent Research*, 25(4), 557-577. doi:10.1177/0743558410366594
- Henrique, L. (2006). Regularidade e imprevisibilidade em música. In H. M. Matos & J. N. Tavares (Coords.), *Encontro Música e Matemática - Actas* (pp. 172-185). Porto, Portugal: Centro de Matemática da Universidade do Porto.
- Henrique, L. (2014). *Acústica musical* (5ª ed.). Lisboa, Portugal: Fundação Calouste Gulbenkian.
- Hille, A., & Schupp, J. (2015). How learning a musical instrument affects the development of skills. *Economics of Education Review*, 44, 56-82.
- Hodges, W. (2006). The geometry of music. In J. Fauvel, R. Flood, & R. Wilson (Eds.), *Music and mathematics: From Pythagoras to fractals* (pp. 91-112). Oxford, UK: Oxford University Press.
- Howard, D. M., & Angus, J. A. S. (2009). *Acoustics and psychoacoustics* (4th ed.). Oxford, UK: Focal Press.
- Kells, D. (n.d.). *The impact of music on mathematics achievement*. Disponível em: [http://media.kindermusik.com/docs/PDF/Kindermusik\\_Benefits\\_Music\\_and\\_Math\\_3\\_to\\_5\\_FullResearch.pdf](http://media.kindermusik.com/docs/PDF/Kindermusik_Benefits_Music_and_Math_3_to_5_FullResearch.pdf)
- Lewin, D. (2011). *Generalized musical intervals and transformations*. New Haven, CT: Yale University Press.
- Lima, C. (2006). Criatividade musical versus técnicas matemáticas? In H. M. Matos & J. N. Tavares (Coords.), *Encontro Música e Matemática - Actas* (pp. 45-63). Porto, Portugal: Centro de Matemática da Universidade do Porto.
- Miller, F. P., Vandome, A. F., & McBrewster, J. (Eds.). (2010). *Music and mathematics*. Mauritius, Republic of Mauritius: Alphascript Publishing.
- Monteiro, M. A. C. (2012). Da música no ensino e nas festividades universitárias de Coimbra no tempo de Camões. In *Actas do Colóquio Internacional Camões e os seus Contemporâneos* (pp. 323-350). Braga, Portugal: Centro Interuniversitário de Estudos Camonianos-Coimbra/Universidade Católica Portuguesa-Pólo de Braga/Universidade dos Açores.
- National Council of Teachers of Mathematics (2006). *Curriculum focal points for prekindergarten through grade 8 mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics. Disponível em: <https://www2.bc.edu/solomon-friedberg/mt190/nctm-focal-points.pdf>
- Nisbet, S. (1991). Mathematics and music. *The Australian Mathematics Teacher*, 47(4), 4-8.
- Oliveira, J. P. (2009). *Teoria analítica da música do séc. XX* (3ª ed.). Lisboa, Portugal: Fundação Calouste Gulbenkian.
- Patriarca, E. L. (2006). Música espectral e fractais. Consequências da análise sonora na composição. In H. M. Matos & J. N. Tavares (Coords.), *Encontro Música e Matemática - Actas* (pp. 77-90). Porto, Portugal: Centro de Matemática da Universidade do Porto.

- Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H. M., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H.,... Oliveira, P. A. (2007). *Programa de matemática do ensino básico*. Lisboa, Portugal: Ministério da Educação, Direcção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular. Disponível em: <http://sitio.dgicd.min-edu.pt/matematica/Documents/ProgramaMatematica.pdf>
- Rafael, J. (2006). Composição musical e estruturas matemáticas. O significado musical das proporções matemáticas: A forma dos números. In H. M. Matos & J. N. Tavares (Coords.), *Encontro Música e Matemática - Actas* (pp. 116-136). Porto, Portugal: Centro de Matemática da Universidade do Porto.
- Rodrigues, J. F. (2006). A matemática e a música numa perspectiva histórica. In H. M. Matos & J. N. Tavares (Coords.), *Encontro Música e Matemática - Actas* (pp. 147-171). Porto, Portugal: Centro de Matemática da Universidade do Porto.
- Rothstein, E. (2006). *Emblems of mind. The inner life of music and mathematics*. Chicago, IL: The University of Chicago Press.
- Santos-Luiz, C. (2007). The learning of music as a means to improve mathematical skills. In A. Williamon & D. Coimbra (Eds.), *Proceedings of the International Symposium on Performance Science 2007* (pp. 135-140). Utrecht, The Netherlands: European Association of Conservatoires (AEC).
- Schellenberg, E. G. (2006). Long-term positive associations between music lessons and IQ. *Journal of Educational Psychology, 98*(2), 457-468.
- Scimemi, B. (1999, novembro). Contraponto musical e transformações geométricas. *Colóquio/Ciências - Revista Cultural Científica, 24*, 60-68.
- Silva, J. C. (Coord.), Fonseca, M. G., Martins, A. A., Fonseca, C. M. C., & Lopes, I. M. C. (2002a). *Matemática A 11º ano: Cursos científico-humanísticos de ciências e tecnologias e de ciências socioeconómicas*. Lisboa, Portugal: Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário. Disponível em: <http://www.dgicd.min-edu.pt/ensinosecundario/index.php?s=directorio&pid=2&letra=M>
- Silva, J. C. (Coord.), Fonseca, M. G., Martins, A. A., Fonseca, C. M. C., & Lopes, I. M. C. (2002b). *Matemática B 11º ano: Curso científico-humanístico de artes visuais, cursos tecnológicos de construção civil e edificações, de electrotecnia e electrónica, de informática, de administração, de marketing e de desporto*. Lisboa, Portugal: Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário. Disponível em: <http://www.dgicd.min-edu.pt/ensinosecundario/index.php?s=directorio&pid=2&letra=M>
- Silva, J. C. (Coord.), Fonseca, M. G., Martins, A. A., Fonseca, C. M. C., & Lopes, I. M. C. (2002c). *Matemática A 12º ano: Cursos científico-humanísticos de ciências e tecnologias e de ciências socioeconómicas*. Lisboa, Portugal: Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário. Disponível em: <http://www.dgicd.min-edu.pt/ensinosecundario/index.php?s=directorio&pid=2&letra=M>
- Silva, J. C. (Coord.), Fonseca, M. G., Martins, A. A., Fonseca, C. M. C., & Lopes, I. M. C. (2002d). *Matemática B 12º ano: Curso científico-humanístico de artes visuais, cursos tecnológicos de construção civil e edificações, de electrotecnia e electrónica, de informática, de administração, de marketing e de desporto*.

Lisboa, Portugal: Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário.  
Disponível em: <http://www.dgidc.min-edu.pt/ensinosecundario/index.php?s=directorio&pid=2&letra=M>

- Simões, C. (1999, novembro). A ordem dos números na música do séc. XX. *Colóquio/Ciências - Revista Cultural Científica*, 24, 48-59.
- Simões, C. (2001, agosto). Mathématiques dodecaphoniques. *Pour la Science – Édition Française de Scientific American*, 286, 104-105.
- Simões, C. (2002). Mathematical aspects in the second viennese school of music. In C. P. Bruter (Ed.), *Mathematics and arts: Mathematical visualization in art and education* (pp. 105-117). Berlin, Germany: Springer-Verlag.
- Simões, C. (2004). A reorganização do som no século XX. In *Actas do Encontro ProfMat 2004* (pp. 5-11). Lisboa, Portugal: Associação de Professores de Matemática.
- Simões, C. (2006). Padrões matemáticos na obra de Mozart. In H. M. Matos & J. N. Tavares (Coords.), *Encontro Música e Matemática - Actas* (pp. 64-76). Porto, Portugal: Centro de Matemática da Universidade do Porto.
- Southgate, D. E., & Roscigno, V. J. (2009). The impact of music on childhood and adolescent achievement. *Social Science Quarterly*, 90(1), 4-21. doi:10.1111/j.1540-6237.2009.00598.x
- Steinhaus, H. (1969). *Mathematical snapshots*. New York, NY: Oxford University Press.
- Still, K., & Bobis, J. (2005). The integration of mathematics and music in the primary school classroom. In P. Clarkson, A. Downton, D. Gronn, M. Horne, A. McDonough, R. Pierce, & A. Roche (Eds.), *Proceedings of the Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia. Building Connections: Theory, Research and Practice* (pp. 712-719). Sydney, Australia: Mathematics Education Research Group of Australasia Inc.
- Taylor, C. (2006). The science of musical sound. In J. Fauvel, R. Flood, & R. Wilson (Eds.), *Music and mathematics: From Pythagoras to fractals* (pp. 47-60). Oxford, UK: Oxford University Press.
- Walker, J. S., & Don, G. W. (2013). *Mathematics and music: Composition, perception, and performance*. Florida, FL: CRC Press.
- Wollenberg, S. (2006). Music and mathematics: An overview. In J. Fauvel, R. Flood, & R. Wilson (Eds.), *Music and mathematics: From Pythagoras to fractals* (pp. 1-9). Oxford, UK: Oxford University Press.
- Wright, D. (2009). *Mathematics and music*. Providence, RI: American Mathematical Society.

## **MATHEMATICS AND MUSIC: SYSTEMATIZATION OF ANALOGIES BETWEEN MATHEMATICAL AND MUSICAL CONTENTS**

### Abstract

Over time, mathematicians and physicians have found analogies between mathematics and music. At the same time, musicians have found support in mathematics to describe their art. This article consists of a systematization of the connections between mathematical and musical contents. Musical content was divided into the subjects of: 1) Musical theory and analysis, 2) Acoustics and 3) Musical composition. Subsequently, within each of these subjects, the associations with mathematics were systemized based on the organization of Programmes of Mathematics in Basic Education and their Curriculum Targets (3rd cycle) and of Programmes of Mathematics A and B of the 11th and 12th years of Portuguese Secondary Education. We conclude that the musical elements and concepts associated with mathematics are distributed over the areas of Arithmetic, Algebra, Trigonometry and, especially, Geometry.

### Keywords

Mathematics and music relationship; Mathematics contents; Music contents; Mathematics programmes

## **MATEMÁTICAS Y MÚSICA: SISTEMATIZACIÓN DE SIMILITUDES ENTRE CONTENIDO MATEMÁTICO Y MUSICAL**

### Resumen

Matemáticos y físicos han encontrado a lo largo de los tiempos analogías entre las matemáticas y la música. Al mismo tiempo, los músicos se han apoyado en las matemáticas para describir su arte. Este artículo consiste en una sistematización de las conexiones entre contenidos matemáticos y musicales. Los contenidos musicales fueron divididos en los siguientes temas:

1) Teoría y análisis musicales, 2) Acústica y 3) Composición musical. Posteriormente, en cada uno de estos temas, las asociaciones con las matemáticas se sistematizaron basándose en la organización de los Programas de Matemáticas de la Educación Básica y sus Objetivos Curriculares (3er ciclo) y de los Programas de Matemáticas A y B de los 11 y 12 años de la Educación Secundaria Portuguesa. Llegamos a la conclusión de que los elementos musicales y los conceptos que se asocian con las matemáticas se distribuyen en las áreas de la Aritmética, Álgebra, Trigonometría y, en particular, Geometría.

Palabras-clave

Relación entre las matemáticas y la música; Contenidos de matemáticas; Contenidos de música; Programas de matemáticas

*Recebido em junho/2015*

*Aceite para publicação em novembro/2015*

- i Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Coimbra, Portugal.
- ii Faculdade de Psicologia e de Ciências da Educação, Universidade de Coimbra, Portugal.
- iii Colégio Internato dos Carvalhos, Vila Nova de Gaia, Portugal.
- iv Departamento de Educação, Universidade de Aveiro, Portugal.

---

Toda a correspondência relativa a este artigo deve ser enviada para: Carlos dos Santos-Luiz, R. Dom João III Solum, 3030-329 Coimbra. E-mail: cluis@esec.pt