

A COPARTICIPAÇÃO DA TECNOLOGIA DIGITAL NA PRODUÇÃO DE CONHECIMENTO MATEMÁTICO

MARCELO BATISTA DE SOUZA

marcelo.souza@ufr.br | Universidade Federal de Roraima, Brasil

BÁRBARA CUNHA FONTES

barbaracfontes@gmail.com | Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Brasil

MARCELO DE CARVALHO BORBA

marcelo.c.borba@unesp.br | Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Brasil

RESUMO

O artigo discute um estudo exploratório envolvendo produção de vídeos, demonstrações matemáticas e estudantes de Graduação, matriculados na disciplina Geometria Analítica, da Universidade Federal de Roraima do Brasil. O objetivo da investigação foi compreender como a tecnologia digital coparticipa da produção de conhecimento matemático. Com o intuito de observar nas atividades aspectos que relacionam Álgebra e Geometria foi realizada uma investigação qualitativa. Desse modo, os dados produzidos a partir das observações e da análise dos vídeos possibilitaram: revelar o entendimento que os estudantes tiveram sobre demonstrações matemáticas; constatar que os estudantes consideram suficiente demonstrar uma proposição matemática particularizando a solução; perceber que a interação com as tecnologias digitais enriquece a comunicação de ideias matemáticas; e compreender que a coparticipação da tecnologia digital auxilia na produção de conhecimento matemático, na verificação das proposições e na visualização dos objetos.

PALAVRAS-CHAVE

educação matemática; vídeo digital; geometria analítica.



SISYPHUS

JOURNAL OF EDUCATION

VOLUME 7, ISSUE 01,

2019, PP. 62-82

DOI: <https://doi.org/10.25749/sis.15795>

THE CO-PARTICIPATION OF DIGITAL TECHNOLOGY IN THE PRODUCTION OF MATHEMATICAL KNOWLEDGE

MARCELO BATISTA DE SOUZA

marcelo.souza@ufr.br | Universidade Federal de Roraima, Brazil

BÁRBARA CUNHA FONTES

barbaracfontes@gmail.com | Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Brazil

MARCELO DE CARVALHO BORBA

marcelo.c.borba@unesp.br | Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Brazil

ABSTRACT

The article discusses an exploratory study involving video production, mathematical demonstrations and Undergraduate students, enrolled in the discipline Analytical Geometry, at the Federal University of Roraima, Brazil. The objective of the research was to understand how digital technology coparticipates in the production of mathematical knowledge. In order to observe aspects related to Algebra and Geometry, a qualitative investigation was carried out. Thus, the data produced from the observations and the analysis of the videos made it possible: to reveal the understanding students had about mathematical demonstrations; to verify that the students consider it sufficient to demonstrate a mathematical proposition particularizing the solution; to realize that interaction with digital technologies enriches the communication of mathematical ideas; and to understand that the co-participation of digital technology assists in the production of mathematical knowledge, in the verification of propositions and in the visualization of objects.

KEY WORDS

mathematics education; digital video; analytical geometry.



SISYPHUS

JOURNAL OF EDUCATION

VOLUME 7, ISSUE 01,

2019, PP. 62-82

DOI: <https://doi.org/10.25749/sis.15795>

A Coparticipação da Tecnologia Digital na Produção do Conhecimento Matemático

Marcelo Batista de Souza, Bárbara Cunha Fontes, Marcelo de Carvalho Borba

Uma técnica não é nem boa, nem má (isto depende dos contextos, dos usos e dos pontos de vista), tampouco neutra (já que é condicionante ou restritiva, já que de um lado abre e de outro fecha o espectro de possibilidades). Não se trata de avaliar seus “impactos”, mas de situar as irreversibilidades às quais um de seus usos nos levaria, de formular os projetos que explorariam as virtualidades que ela transporta e de decidir o que fazer dela.

Lévy, 1999, p. 26

INTRODUÇÃO

A experiência vivida no âmbito educacional produz reflexões sobre a utilização das tecnologias digitais na Educação Matemática. Uma delas, em especial, explora a disciplina Geometria Analítica (GA), ministrada pelo seu primeiro autor entre os anos de 2011 a 2016, para retratar como a tecnologia digital coparticipa da produção de conhecimento matemático.

Durante este período, algumas propostas de atividades envolveram demonstrações matemáticas para observar o comportamento dos estudantes na sala de aula e, com isso, nas soluções apresentadas por eles, foi possível perceber certa ênfase dada ao cálculo algébrico e uma dificuldade de articular as proposições matemáticas ao utilizar a representação visual.

Isto nos levou a pensar que estávamos diante de um problema possivelmente relacionado à Educação Básica. Embora ainda seja difícil de confirmar esta hipótese, é possível dizer, apoiado na experiência da sala de aula, que no Brasil vários estudantes egressos da rede pública vêm apresentando dificuldades de aprendizagem com a GA que ora podem estar associadas à formação do professor, ao material didático, à utilização de um software e/ou à falta de estrutura das escolas secundárias.

Apoiando-se em relatos de estudantes feitos ao longo do tempo e em ideias de pesquisadores da área da Educação Matemática fomentamos o desejo de investigar o problema. Surgiram então questionamentos que nortearam o nosso foco de trabalho dentre os quais destacamos os seguintes: (1) é possível utilizar apenas a Álgebra para realizar atividades de GA?; (2) e como a tecnologia digital pode coparticipar da produção de conhecimento matemático?

Estes questionamentos viabilizaram a inclusão da tecnologia digital na sala de aula integrado ao ensino de GA. No entanto, esta inovação trouxe algumas dificuldades para



os estudantes, principalmente quando elas estiveram associadas às demonstrações matemáticas, mas, por outro lado, possibilitou a criação de um cenário propício para investigar a sua coparticipação na produção de conhecimento matemático, tendo sido a escolha do tema influenciada por trabalhos como o de Bortolossi e Machado (2016), que explora o GeoGebra em atividades de geometria plana; de Powell e Pazuch (2016), que traz justificativas de professores em ambientes de Geometria Dinâmica (GD); e de Hadas, Hershkovitz e Scharz (2001), que procura utilizar a tecnologia para causar a surpresa e a incerteza no estudante.

O trabalho que aqui apresentamos explora o uso de tecnologias digitais no ensino de GA e segue uma abordagem qualitativa (Borba, Almeida, & Gracias, 2018; Goldenberg, 2004) adotando procedimentos como o registro de ocorrências no diário de campo e a observação participante em ambientes de aprendizagem presenciais e virtuais.

Na análise dos dados foram considerados: (1) os resultados finais da disciplina GA; (2) as discussões realizadas na sala de aula; (3) os registros da monitoria; (4) os atendimentos extraclasse; (5) a avaliação didático-pedagógica; (6) e os vídeos produzidos pelos estudantes.

Esclarecemos que em nossa análise nos limitamos apenas a mencionar os itens (1), (3) e (5), porque os dados relativos a estes itens não são públicos, são de propriedade exclusiva de uma instituição de ensino superior localizada na região norte do Brasil, a Universidade Federal de Roraima (UFRR), e nós não temos autorização para utilizá-los em nosso estudo investigativo.

De todo modo, o desenvolvimento do trabalho teve como propósito estimular a produção colaborativa de artefatos e vídeos digitais visando promover a superação de dificuldades relacionadas à aprendizagem. A produção dos dados foi realizada no período de 2014.2 a 2016.1, tendo participado da pesquisa um total de duzentos e cinquenta e um estudantes, de oito turmas da Graduação da UFRR.

O artigo está organizado e apresenta, sequencialmente: os trabalhos correlatos; o papel da demonstração matemática; a importância pedagógica do vídeo; a metodologia e os procedimentos adotados na análise dos dados; os vídeos digitais na sala de aula; alguns recortes de atividades de três produções de estudantes; as considerações e os trabalhos futuros; e as referências fecham o trabalho.

TRABALHOS CORRELATOS

O trabalho de Alsina (2007) descreve como as provas visuais oferecem oportunidades para melhor compreender a Matemática na sala de aula. Apoiando-se em ideias como esta, Hollebrands, Laborde e Sträßer (2008) associam o uso de tecnologias às demonstrações. Além disso, Sinclair e Robutti (2013) entrelaçam tecnologia, demonstração e GD para relacionar áreas de pesquisa que investigam como o software medeia a explicação, a verificação e a prova. Já o estudo de Batistela, Barbariz e Lazari (2016) sustenta a ideia de que o computador, em especial, pode dinamizar o processo de conjecturar e de demonstrar uma proposição matemática.



Em seus estudos exploratórios, Fonseca e Henriques (2018) apresentam compreensões sobre o papel do software GeoGebra na aprendizagem do Teorema do Valor Intermediário, Paulo e Ferreira (2018) trazem os resultados de uma investigação cujo objetivo era compreender o conhecimento matemático que é produzido pelo matemático profissional ao utilizar as tecnologias digitais, Neves e Borba (2018) analisam o papel dos recursos audiovisuais ao articular diferentes representações envolvendo a GA e Rodrigues (2018) ressalta as percepções de mestrandos sobre as suas competências de utilização das tecnologias digitais nas práticas educativas.

Na visão de Borba e Villarreal (2005) as interações ocorridas entre atores humanos e não humanos também produzem conhecimento matemático. Neste sentido, Borba, Scucuglia e Gadanidis (2015) abordam nuances acerca dessa “coletividade humano-tecnologias” no âmbito da Educação Matemática. Já Valencia e Yi (2012) exploram a Geometria na sala de aula utilizando software, PDFs animados e vídeos produzidos por estudantes ressaltando a interação estudante-com-GeoGebra. Após analisar ocorrências desta natureza, o estudo de Jacinto e Carreira (2017) revela como o estudante desenvolve a fluência tecno-matemática no processo de aprendizagem.

Em busca de oferecer oportunidades aos estudantes Souza (2016) relaciona Álgebra e Geometria explorando o ensino de GA auxiliado por software. Ao trabalhar o conteúdo de Álgebra Linear, Chiari (2015) busca compreender como as tecnologias digitais, incluindo o vídeo, influenciam os processos educativos. Em seu estudo, envolvendo Matemática Aplicada, Domingues (2014) enfatiza o ponto de vista dos estudantes ao abordar o vídeo nas aulas multimodais. Já Borba, Neves e Domingues (2018) discutem a produção de vídeos nas aulas de Matemática como uma ação colaborativa que envolve estudantes e professor.

Embora tenha duas décadas, o trabalho de Wood e Petocz (1999) já considerava importante o poder de comunicação do vídeo na aprendizagem matemática. Concordando com a ideia Holgate, Munyakazi, Adams e Smith (2013) acrescentam que esta tecnologia torna mais compreensível a verificação da aprendizagem em uma prova e é por esta razão que eles incentivam a produção de vídeos realizada por estudantes. Já o estudo de Souza e Borba (2018) estimula a produção colaborativa de artefatos e vídeos digitais ressaltando avanços qualitativos nos modos de aprendizagem. Inspirados em trabalhos como este, Souza, Amaral e Borba (2017) apresentam um ensaio integrado por tecnologias para explorar demonstrações matemáticas.

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E DEMONSTRAÇÕES

Trabalhar com demonstrações matemáticas na Educação Básica pode gerar muita discussão na realização das atividades. Independente do debate, cabe aos profissionais envolvidos com o processo educacional criar um ambiente favorável que contribua para a formação do estudante visando fazê-lo: adquirir competências para formular conjecturas e generalizações; estabelecer relações entre aspectos formais e intuitivos; elaborar e validar argumentações.

É difícil afirmar se, de fato, esta formação está acontecendo no Brasil. Nasser e Tinoco (2003) sugerem que argumentação e prova no ensino de Matemática tem sido



uma prática ausente na Educação Básica. Na visão de Dias (2009), este problema tem relação com o fato de os cursos de Licenciatura em Matemática não estarem conseguindo formar os futuros professores para trabalhar com demonstrações na sala de aula.

Motivado pelo tema, Garnica (2002) revela, em seu estudo, que as perplexidades surgidas enquanto professor de Matemática o impulsionaram a estudar provas formais ou demonstrações “rigorosas”, por considerá-las um elemento fundamental na formação deste profissional. Sendo assim, ele afirma ter vinculado a sua pesquisa de doutorado e a sua prática na sala de aula para buscar o significado dessa prova formal.

Em seu texto, Garnica (2002) ressalta que a trama de sua investigação mostra uma convergência nos discursos de professores de que a prova rigorosa é tida como elemento fundamental para as suas formações profissionais, embora eles tenham vindo de áreas de pesquisa diferentes e efetivamente atuem em cursos de Licenciatura em Matemática.

Desse modo, Garnica (2002) conclui em seu trabalho que a prova rigorosa seria fundamental na formação de professores não como mero recurso técnico, mas que, numa abordagem crítica, ela oferece condições de ampliar as visões destes profissionais sobre os modos de produção e de manutenção da “ideologia da certeza”. Borba e Skovsmose (2001) definem este termo como “uma estrutura de interpretação para um número crescente de questões que transformam a matemática em uma linguagem de poder” (p. 129). Na visão de Garnica (2002) explorar demonstrações matemáticas contribui para o surgimento de formas alternativas de tratamento que podem ser dadas às argumentações sobre objetos matemáticos.

Influenciados pelo uso da tecnologia outros pesquisadores têm se debruçado sobre questões que envolvem demonstrações matemáticas. Segundo Garnica (2002), este tema é polêmico e está cercado de paradoxos que focam validade, teoria e prática. No entanto, a comunidade científica continua trabalhando no desenvolvimento de pesquisas que possam trazer avanços para esta área do conhecimento, a exemplo de algumas delas publicadas na edição do *Third International Handbook of Mathematics Education* (2013).

Neste periódico, o estudo de Sinclair e Robutti (2012) destaca a evolução da noção de prova e o seu impacto nas investigações, incluindo o uso de software de GD e a relação de natureza epistemológica/cognitiva do arrastar e do medir com a prova. Contudo, reconhecem que a facilidade de arrastar e de conjecturar não garante o engajamento dos estudantes ao resolverem questões que exigem o rigor da prova.

As autoras acrescentam que tendências recentes na pesquisa têm investigado as configurações que emergem do ensino, o papel da tecnologia e a relação do trabalho do professor com a sua visão de conhecimento sobre a Educação Matemática. Por esta razão, sugerem que sejam realizadas investigações para orientar professores sobre a complexidade da relação entre seres humanos e tecnologia (Borba & Villarreal, 2005).

Neste sentido, Souza, Amaral e Borba (2017) apresentaram um ensaio que integrou vídeos e demonstrações matemáticas para apoiar as atividades da monitoria desenvolvidas em sala de aula. Os autores ressaltam ter investido na ideia de aproximar o conhecimento do estudante para enfatizar o desenvolvimento da sua habilidade, ao utilizar argumentos algébricos válidos compatíveis com o rigor da prova.

Em seu texto, esclarecem que alguns vídeos elaborados por eles foram inspirados nas anotações feitas em sala de aula, nos atendimentos extraclasse e nas discussões



ocorridas entre docente e monitor. Souza, Amaral e Borba (2017) acrescentam que este material teve como objetivo esclarecer dúvidas, estimular a produção de vídeos e fomentar discussões sobre exercícios que envolviam demonstrações matemáticas.

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E VÍDEOS

Segundo Moran (1995), a “força” do vídeo está na superposição e na interligação das linguagens – visual, falada, escrita e sensorial – que estão presentes nesta mídia. Para ele, essa composição de linguagens seduz, informa, entretém, bem como permite conhecer outros tempos e espaços sem sair fisicamente do lugar. O autor ressalta que o vídeo não modifica substancialmente a relação professor-estudante e, muito pelo contrário, ajuda o professor a realizar as suas atividades na sala de aula.

No caso do vídeo “A Parábola da Parábola” (ver Figura 1), que discute o tema de uma forma não convencional, o telespectador é levado a uma ponte em Portugal para refletir sobre esse objeto matemático. Nele, a música, o movimento e as animações são um diferencial quando comparado ao uso do quadro e giz. Borba e Domingues (2015) também perceberam o poder visual dessa tecnologia ao trabalharem com vídeos na sala de aula e ao realizarem algumas entrevistas com estudantes.

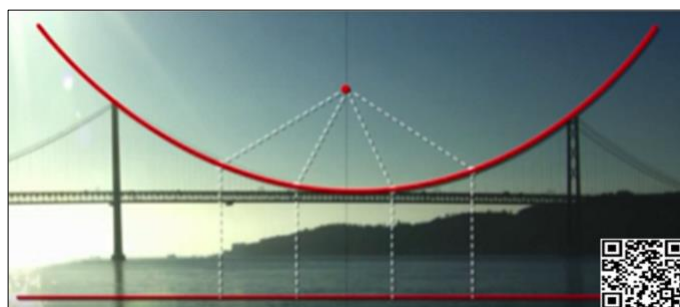


Figura 1. Recorte do vídeo¹ “A Parábola da Parábola”.

Fonte: <https://www.youtube.com/watch?v=vFhkxWUqQc&t=160s>

No vídeo mencionado na Figura 1, percebem-se diversas linguagens, como a: escrita, falada, gráfica, musical, entre outras. Esta composição e complementaridade oferece a possibilidade de compreensão da mensagem e desperta a atenção do estudante. Além disso, permite que o conteúdo seja explorado de uma forma não domesticada, uma vez que não é possível lançar um objeto no ar em câmera lenta e, ao mesmo tempo, traçar a curva aproximada desse movimento, conforme apresentado no vídeo.

Segundo Borba, Domingues e Lacerda (2015) esta mídia, por ser uma linguagem de aprendizagem e de comunicação da sociedade, “(...) está presente na rotina de estudos (...) – por meio de computadores, televisão e celulares inteligentes – mas nem sempre

¹ Utilize um leitor de QR Code para assistir o vídeo editado.

está em sala de aula” (p. 288) para aproximar o cotidiano do estudante e possibilitar que elementos da sua realidade e da sua cultura estejam presentes.

Moran (1995) concorda com ideias semelhantes a esta, por entender que o vídeo “aproxima a sala de aula do cotidiano, das linguagens de aprendizagem e comunicação da sociedade urbana, e também introduz novas questões no processo educacional” (p. 27). Desse modo, o autor traz contribuições em seu trabalho de como utilizar o vídeo de maneira não domesticada e de como selecioná-lo para atingir um objetivo específico da aula.

Já no vídeo “Em busca de um amor funcional” (ver Figura 2), produzido pelos estudantes do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais para o I Festival de Vídeos Digitais e Educação Matemática², percebe-se que para a sua confecção foi necessário: escolha criteriosa do tema; desenvolvimento do roteiro; tratamento de informações; edição/concepção de efeitos especiais; e complementaridade entre as linguagens.



Figura 2. Recorte do vídeo³ “Em busca de um amor funcional”.

Fonte: <https://www.youtube.com/watch?v=WQR81vJU8oI&list=PL9a8WG34PnC-FUYCL5Q8IQV84ghdj3GKf&index=26>

Neste vídeo, os estudantes estruturaram os seus conhecimentos a respeito das funções e os reorganizaram para comunicar uma ideia matemática por meio de uma história engraçada. Desse modo, ele mostra que trabalhar com atividades exploratórias pode desenvolver nos estudantes: organização e reorganização do pensamento; percepção crítica; criatividade; iniciativa; autonomia; sensibilidade; e habilidade para o trabalho colaborativo.

Pires, Miranda e Lagarto (2014) concordam que o uso do vídeo pode ser uma ferramenta didática, capaz de motivar e tornar o ambiente da aula mais participativo. Acrescenta Ferreira (2014) que isso é oportuno para transformar a produção de vídeos em um laboratório de estudo. Neves e Fontes (2016) ressaltam que isso oferece ao estudante a possibilidade de integrar tecnologias, explorar a transdisciplinaridade e ideias matemáticas que estão além do seu nível de ensino.

No estudo de Oechsler (2018) ela destaca que os estudantes, apoiados nas etapas sugeridas por Oechsler, Fontes e Borba (2017), produziram vídeos valorizando oralidade, escrita, representação visual, gesto, áudio, imagem, figurino e cenário. A autora afirma que estes elementos potencializaram a comunicação multimodal e

² Evento realizado pelo Grupo de Pesquisa em Informática, outras Mídias e Educação Matemática (GPIMEM) da Universidade Estadual Paulista – campus de Rio Claro / SP. Maiores informações estão disponíveis em: <https://www.festivalvideomat.com/>

³ Utilize um leitor de QR Code para assistir o vídeo editado.



possibilitaram aos seus produtores explorar o conteúdo matemático utilizando a tecnologia digital. Segundo ela, a combinação destes elementos com o uso de uma linguagem não formal da Matemática mostra que a produção de vídeos se configura como um processo de caráter coletivo e multimodal, além disso, ressalta sinais de aprendizagem na interação de seres-humanos-com-mídias.

Dessa forma, acreditamos ser fundamental que o professor medeie, conduza e direcione o processo de produção de vídeos explorando aspectos e conceitos relevantes para que os objetivos de uma aula ou de uma atividade sejam atingidos. A nosso ver, a justificativa para trabalhar esses objetivos com licenciandos torna-se importante por diversas razões, dentre elas, desenvolver um conjunto de habilidades para utilizar esta mídia em uma aula de matemática, investindo em oficinas, minicursos, entre outros, e explorar as questões discutidas nesta seção envolvendo atividades teóricas e práticas.

METODOLOGIA E PROCEDIMENTOS

Com o intuito de analisar as estratégias utilizadas pelos estudantes nas atividades e observar a exploração de aspectos do conhecimento matemático foi realizada uma investigação qualitativa (Goldenberg, 2004). A partir dos registros da manipulação do software e das ideias comunicadas por meio do vídeo foi possível descrever o significado atribuído às ações dos sujeitos na análise dos dados.

Na visão de Borba, Almeida e Gracias (2018) “vários autores (...) que seguem a pesquisa qualitativa enfatizam a compreensão, ou seja, que conhecer é compreender de modo profundo, em um processo quase infundável” (p. 77). Desse modo, e apoiados nestes autores, foi isto que buscamos fazer.

Para tentar elucidar como os estudantes relacionavam os conhecimentos (geométricos e algébricos) utilizando a tecnologia foram exploradas cinco atividades envolvendo questões relacionadas à demonstração matemática, todas extraídas da obra de Steinbruch e Winterle (1987). Estas atividades visaram a produção de um vídeo, ou de um artefato digital, no intuito de gerar aprendizado ao estudante e de facilitar o entendimento de qualquer pessoa interessada em assisti-lo.

Além disso, as atividades realizadas nos semestres de 2014.2 a 2016.1 tiveram o propósito de investigar: (1) a expressão da aprendizagem manifestada no vídeo, ou artefato digital, produzido pelo estudante; (2) e como essas produções poderiam se tornar um objeto de ensino e de aprendizagem utilizado por professores e estudantes. No caso deste artigo, a ênfase será dada ao item (1), em especial a três vídeos que foram produzidos por estudantes como uma atividade proposta na disciplina GA.

Na análise destas produções o olhar dos pesquisadores se voltou para as seguintes questões: (1) os vídeos revelam o entendimento que os estudantes tiveram sobre demonstrações matemáticas? (2) como os estudantes interagiram com as tecnologias digitais ao realizarem as atividades? (3) de que maneira a tecnologia coparticipou da produção de conhecimento matemático? Para buscar responder a todas elas, a análise dos vídeos se apoiou na proposta de Powell, Francisco e Maher (2004).



Sendo assim, e na busca de identificar elementos capazes de responder a estas questões e de ampliar a compreensão sobre os dados produzidos, os vídeos foram assistidos várias vezes para observar a forma como as ideias matemáticas são apresentadas e para avaliar as potencialidades desta mídia como “instrumento gerador de aprendizagem”, o que é chamado por Powell, Francisco e Maher (2004) de evento crítico.

EXPLORANDO VÍDEOS DIGITAIS NO ENSINO DE GEOMETRIA ANALÍTICA

Motivado pelas questões apresentadas na Introdução e em Metodologia e Procedimentos, o primeiro autor deste trabalho investiu na produção de artefatos e vídeos digitais. Desse modo, ele explorou o ensino de GA auxiliado por software e, utilizando tecnologias como o vídeo, buscou estimular o pensar-com-tecnologias para que o estudante pudesse avançar do calcular para o: pensar; ler; interpretar; compreender; argumentar; recalculer; relacionar; e visualizar (Souza, 2016).

Assim, ele observou os sujeitos investigados com o intuito de produzir dados e relatar experiências para ampliar a sua compreensão sobre os elementos que emergiam no processo de aprendizagem. Nesse sentido, trabalhou conteúdos matemáticos com uma abordagem vetorial valorizando o conhecimento do estudante, a exemplo do volume do paralelepípedo que foi calculado utilizando a interpretação geométrica do módulo do produto misto. A Figura 3 destaca a imagem do vídeo produzido pelo professor para explorar este conteúdo matemático.

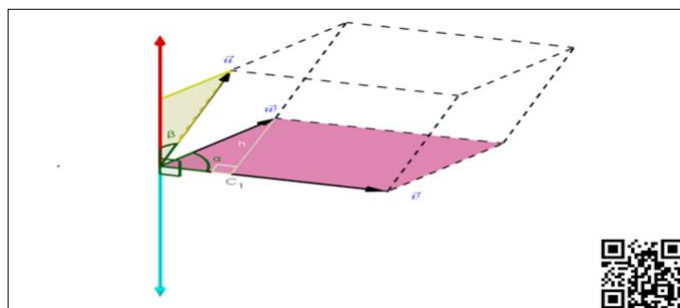


Figura 3. Recorte do vídeo⁴ “Interpretação geométrica do módulo do produto misto”.

Fonte: <https://youtu.be/QIzyKo4dgCM>

Este artefato serviu como recurso complementar à sala de aula e colaborou para ampliar a discussão acerca do conteúdo em si e sobre o uso do GeoGebra. Na simulação (ver Figura 3) foram criados objetos preservando as propriedades do paralelepípedo que estão vinculadas ao módulo do produto misto. Esta mediação tecnológica possibilitou relacionar conhecimentos adquiridos, explorar demonstrações

⁴ Utilize um leitor de QR Code para assistir o vídeo editado.



matemáticas e estimular os estudantes a produzirem artefatos e vídeos digitais. Outros exemplos que envolvem produção de artefatos e vídeos digitais podem ser encontrados em Souza (2016), Souza, Amaral e Borba (2017) e Souza e Borba (2018).

ESTIMULANDO A PRODUÇÃO COLABORATIVA NAS DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS

Durante a realização das atividades, as observações feitas pelo professor sobre o comportamento dos estudantes o permitiram enxergar que a ênfase dada ao cálculo algébrico ofuscava a visualização geométrica e, desse modo, ele optou pela aposta de investir na utilização da tecnologia para conectar estes saberes no ensino de GA. A partir daí, os estudantes foram se envolvendo com as atividades e percebendo esta necessidade, o que abriu espaço para observá-los enquanto exercitavam as suas capacidades de argumentação lógica e de visualização geométrica.

A respeito da atividade 1, proposta por Steinbruch e Winterle (1987), “Mostrar que se \vec{u} é ortogonal a \vec{v} e \vec{w} , \vec{u} é também ortogonal a $\vec{v} + \vec{w}$ ” (p. 92), inicialmente foi sugerido aos estudantes que representassem como estavam visualizando a questão e solicitado que fizessem um esboço utilizando lápis e papel ou o GeoGebra. Os estudantes entenderam que a representação geométrica os ajudaria a visualizar o conceito de ortogonalidade entre dois vetores. A Figura 4 destaca a imagem de um vídeo produzido pelo estudante A.

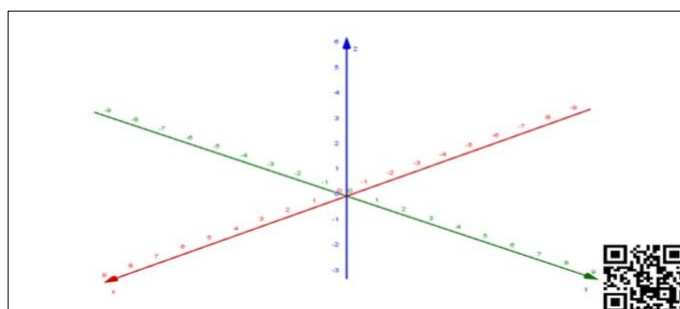


Figura 4. Recorte de um vídeo⁵ apresentado pelo estudante A.

Fonte: <https://www.youtube.com/watch?v=9inSZ2WZCgk>

Posteriormente na sala de aula, a discussão sobre as possibilidades de se desenvolver o cálculo algébrico foi iniciada, de modo que observando os vários casos particulares fosse possível generalizar a solução para o problema. Os estudantes compreenderam que, embora valesse para inúmeros casos, o artefato digital produzido não poderia garantir a veracidade da proposição para todos eles, por conta da limitação do software.

⁵ Utilize um leitor de QR Code para assistir o vídeo editado.

Foi observado pelos estudantes que sendo \vec{u} ortogonal a \vec{v} e, ao mesmo tempo, ortogonal a \vec{w} , então o produto interno (escalar) entre eles seria igual à zero. Ou seja, utilizando a notação algébrica $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0 \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ (i), $\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle = 0 \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{w} = 0$ (ii) e somando as equações (i) e (ii), encontraram $\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} = 0$. Desse modo, o vetor \vec{u} colocado em evidência gerou $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = 0$ (iii) $\Rightarrow \langle \vec{u}, (\vec{v} + \vec{w}) \rangle = 0$. Logo, foi possível concluir que se \vec{u} é ortogonal a \vec{v} e \vec{w} , \vec{u} é também ortogonal a $\vec{v} + \vec{w}$.

Além disso, o vídeo permitiu que fosse detetada a compreensão do estudante sobre o produto escalar e, também, sobre o que ele pensa ser uma demonstração matemática quando ele destaca na sua produção os textos descritos a seguir.

Estudante A:

Declaramos 3 vetores $u = (1, 0, 1)$, $v = (-2, 3, 2)$ e $w = (2, 5, -2)$. Somamos os vetores v e w . Representado por $c = (0, 8, 0)$. Agora verificamos se são ortogonais (produto escalar = 0). $a = u \cdot v$, $b = u \cdot w$, $d = u \cdot c$.

Além disso, o vídeo mostra que o estudante conclui a sua demonstração destacando tanto algebricamente quanto geometricamente que $a = b = d = 0$.

Embora o vídeo não contenha áudio, nele se observa que, a partir de um caso particular, o estudante A se apropria do GeoGebra para “verificar” um possível resultado e concluir a demonstração da proposição matemática. Desse modo, percebe-se que o estudante utilizou a tecnologia apenas como uma ferramenta de verificação e de ilustração. Na visão de Borba e Villareal (2005) utilizar a tecnologia auxilia no entendimento da prova, o que não significa dizer que o artefato digital criado para esse fim se configure como uma prova formal.

Já na atividade 2, proposta por Steinbruch e Winterle (1987), “Sendo $\vec{u} \neq \vec{0}$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$ vetores do \mathcal{R}^3 , mostrar que $(\vec{u} + \vec{v}) \times (\vec{u} - \vec{v}) = 2\vec{v} \times \vec{u}$ ” (p. 95), a discussão entre os estudantes ocorreu de forma tranquila, por eles já estarem familiarizados com o conteúdo de GA. A partir daí, uma desconstrução de ideias que relaciona demonstrações matemáticas à questões complicadas foi iniciada.

A Figura 5 destaca a imagem da produção de um vídeo realizada pelo estudante B. Nesta questão, a maioria dos estudantes escolheu explorar o lado da igualdade $(\vec{u} + \vec{v}) \times (\vec{u} - \vec{v})$ para mostrar que ele é igual a $2\vec{v} \times \vec{u}$. Dessa forma, desenvolveram o produto para encontrar $\vec{u} \times \vec{u} - \vec{u} \times \vec{v} + \vec{v} \times \vec{u} - \vec{v} \times \vec{v} = 2\vec{v} \times \vec{u}$ e aplicando as propriedades $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$ e $\vec{v} \times \vec{v} = \vec{0}$, reduziram a expressão para $-\vec{u} \times \vec{v} + \vec{v} \times \vec{u} = 2\vec{v} \times \vec{u}$. Ora, ao substituírem a propriedade $-\vec{u} \times \vec{v} = \vec{v} \times \vec{u}$, eles então conseguiram mostrar que $(\vec{u} + \vec{v}) \times (\vec{u} - \vec{v}) = 2\vec{v} \times \vec{u}$.



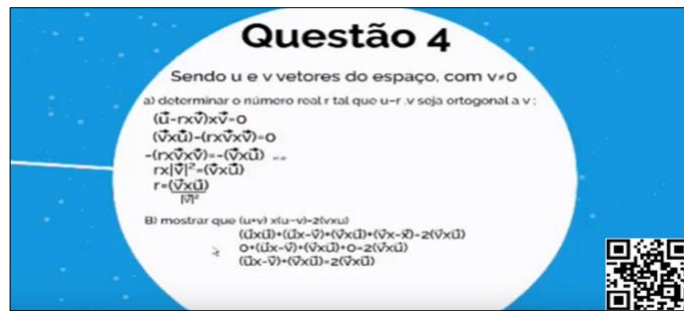


Figura 5. Recorte de um vídeo⁶ apresentado pelo estudante B.
 Fonte: https://www.youtube.com/watch?v=aUm8aD_nYTI

Com relação ao vídeo produzido pelo estudante B (ver Figura 5), o GeoGebra não foi explorado em nenhum momento por escolha pessoal do seu produtor. De qualquer forma, no desenvolvimento da atividade o software Prezi é utilizado para apresentar a solução, evidenciada pela fala do estudante que explica o significado das expressões algébricas exploradas no vídeo, conforme é possível observar nos recortes a seguir.

Estudante B:

... aplicando a distributiva... entre essas duas expressões chegamos a isso... há... tem uma propriedade que diz que u vezes u... e v vezes menos v dá zero... então substituindo os valores ficamos com as expressões u vezes menos v... e v vezes u é igual a dois vezes v vezes u... a outra expressão em que diz que u vezes menos v equivale a v vezes u... então substituindo temos que v vezes u mais v vezes u é igual a dois vezes v vezes u... simplificando essa expressão temos que dois vezes v vezes u é igual a dois vezes v vezes u... comprovando assim que u mais v vezes u menos v é igual a dois vezes v vezes u.

Percebe-se nesta produção que o estudante B utiliza a tecnologia de uma forma domesticada ao enfatizar o cálculo algébrico para comunicar uma ideia matemática. Além disso, ele não explora animações, construções geométricas e muito menos um software de GD para relacionar áreas do conhecimento matemático.

Na atividade 3, proposta por Steinbruch e Winterle (1987), “Demonstrar que o segmento cujos extremos são os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e igual à sua metade” (p. 95), foi sugerido aos estudantes que não se esquecessem de dar ênfase a uma abordagem vetorial. Desse modo, ao utilizarem o software perceberam que as propriedades geométricas da figura criada (conjunto de objetos) no GeoGebra foram preservadas, no momento em que os seus vértices eram arrastados na tela do computador.

Após a manipulação do software, os estudantes trabalharam com a suposição por hipótese de que o ponto $E = (B + C)/2$ (iv) e que o ponto $D = (A + C)/2$ (v), produziram um único valor para o ponto C . Desse modo, após isolarem C em (iv) e (v)

⁶ Utilize um leitor de QR Code para assistir o vídeo editado.

obtiveram $C = 2 * E - B$ e $C = 2 * D - A$. Ao compararem esses dois resultados para C , encontraram $2 * E - B = 2 * D - A$, e adicionarem o número $- 2 * D + B$ aos dois lados da igualdade, demonstram ter a consciência de que a expressão $2 * E - B - 2 * D + B = 2 * D - A - 2 * D + B$ (vi) se manteria inalterada.

A partir daí, aplicaram a propriedade existência do elemento oposto em (vi) e a reduziram para $2 * E - 2 * D = - A + B$ (vii). Após colocarem em evidência a constante, trocaram as parcelas $- A$ por B de posição (e vice-versa) em (vii), ficando $2 * (E - D) = B - A$, e reescreverem os termos utilizando a notação vetorial, chegaram a expressão $2\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AB}$, o que implica dizer que $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Dessa forma, como foi encontrada uma constante $k \in \mathfrak{R}$, então foi possível concluir que $\overrightarrow{DE} // \overrightarrow{AB}$ e que sendo $k = \frac{1}{2}$ então \overrightarrow{DE} é igual a metade de \overrightarrow{AB} .

O vídeo produzido pelo estudante C possibilitou avaliar como as suas ideias foram articuladas para demonstrar a proposição matemática apresentada na atividade 3. Algumas destas ideias são apresentadas nos recortes a seguir.

Estudante C:

... vamos criar o ponto médio do segmento AB... tá aqui o ponto médio D... agora vamos criar o ponto médio E... aqui está o ponto E... agora para ligar esses pontos nós usaremos um segmento de reta... nomeado como f... para provar que esse segmento... é paralelo... isto já está bem claro... basta olhar a figura... agora para provar que ele é a metade do segmento... a que vai do ponto C até o ponto B... nós dividiremos a por dois... então comparamos o resultado com o resultado do segmento f... vejamos... metade CB igual a... que é o segmento a dividido por dois... aqui está um vírgula cinquenta e dois... é a metade desse segmento a... que vai do ponto B até o ponto C... repare que ele é igual ao segmento f... e aqui está que... eles são paralelos e o segmento f é igual a metade do segmento a.

A Figura 6 destaca a imagem de um vídeo produzido pela estudante C.

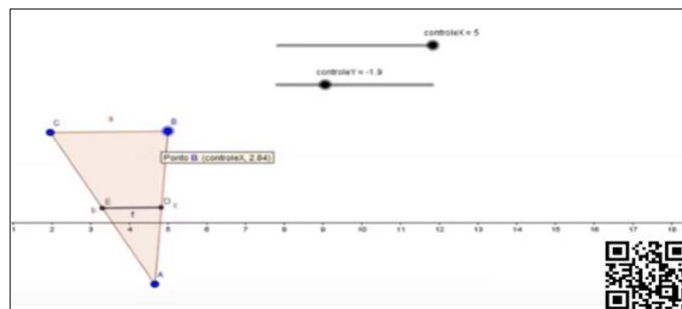


Figura 6. Recorte de um vídeo⁷ apresentado pelo estudante C.

Fonte: https://www.youtube.com/edit?o=U&video_id=iCH8BhdWlsc

⁷ Utilize um leitor de QR Code para assistir o vídeo editado.



A partir de um caso particular, note que o estudante se apoia no uso do software GeoGebra para concluir a demonstração da proposição matemática. Desse modo, percebe-se que ele também utilizou a tecnologia como uma ferramenta de verificação e de ilustração, embora tenha buscado relacionar as construções geométricas ao enunciado da proposição matemática.

CONSIDERAÇÕES

Os dados analisados nesta investigação consideraram os resultados finais da disciplina GA, as discussões realizadas na sala de aula, os registros da monitoria, os atendimentos extraclasse, a avaliação didático-pedagógica e os vídeos produzidos. A análise buscou detectar a coparticipação da tecnologia digital no processo de aprendizagem de cento e oitenta e sete estudantes que produziram oitenta e três artefatos, vídeos e animações sobre conteúdos de GA.

Ressaltamos que a análise feita se pautou na metodologia qualitativa proposta por Goldenberg (2004) e Borba, Almeida e Gracias (2018), autores que são referências na arte de pesquisar. Reforçamos ainda que as razões de não apresentarmos dados objetivos neste trabalho se justificam por não termos apoiado nossa investigação na metodologia quantitativa e também pelo que já foi esclarecido na Introdução.

De qualquer forma, a estratégia empregada nesta investigação buscou estimular a utilização da tecnologia digital apoiada em diferentes abordagens, a exemplo dos Trabalhos Correlatos já apresentados, como os de Souza e Borba (2018), Neves e Borba (2018), Borba, Neves e Domingues (2018), Souza (2016), Alsina (2007), Valencia e Yi (2012), Jacinto e Carreira (2017), Wood e Petocz (1999) e Holgate et al. (2013), sem ter a pretensão de responder as questões apresentadas na Introdução e em Metodologia e Procedimentos. As atividades foram pautadas pela integração entre Álgebra/Geometria e tecnologia/demonstração, visando explorar as capacidades do estudante de: ler; escrever; interpretar; raciocinar logicamente; relacionar; argumentar; e visualizar.

Com relação às questões levantadas na seção Metodologia e Procedimentos, a análise dos vídeos possibilitou:

- *revelar o entendimento que os estudantes tiveram sobre demonstrações matemáticas* – Algo semelhante pode ser observado nos estudos de Sousa (2010) que mostra os estudantes apresentando um grau de assimilação significativo e obtendo uma melhora considerável no uso da linguagem matemática e das técnicas de demonstração, de Borba (2010) que discute como o software pode modificar a matemática produzida na sala de aula ressaltando algumas particularidades do aspecto visual, proporcionadas pelas tecnologias computacionais, e de Souza e Borba (2018) que destaca a compreensão sobre o artefato digital não poder garantir a veracidade de uma proposição matemática para todos os casos, por conta da limitação do software;
- *constatar que os estudantes consideram suficiente demonstrar uma proposição matemática particularizando a solução* – Seguir este caminho é um procedimento natural e isto se repete em alguns trabalhos como o de Rodrigues



(2010) que destaca os estudantes tendendo a usar exemplos particulares como forma de validar as conjecturas que formulam evoluindo posteriormente para justificações mais gerais, o de Souza e Borba (2018) que, ao explorar Geometria e Álgebra, ressalta o comportamento que eles tiveram ao se deparar com hipótese/tese e particularização/generalização da solução e o de Boavida (2005) ao sustentar que, envolvê-los em experiências de prova, oferece oportunidade para destacar que uma conjectura não provada salienta as limitações do raciocínio indutivo e tem carácter provisório;

- *perceber que a interação com as tecnologias digitais enriquece a comunicação de ideias matemáticas* – Reforçam esta constatação investigações como as de Neves e Fontes (2016) ao perceberem que os vídeos favorecem a comunicação de ideias matemáticas e tornam visíveis elementos do pensamento matemático, de Oechsler (2018) ao afirmar que os vídeos potencializam a comunicação multimodal e oferecem a possibilidade de no processo de produção ser utilizado gesto, áudio, oralidade, escrita, representação visual, imagem em movimento, figurino e cenário e o de Silva (2018) ao compreender que a produção de vídeos não se configura, nem didática e nem pedagogicamente, como uma prática habitual dos licenciandos, mas que ela representa possibilidades e potencialidades para as suas formações docentes;
- *compreender que a coparticipação da tecnologia digital auxilia na produção de conhecimento matemático, na verificação das proposições e na visualização dos objetos* – Exploram aspectos semelhantes os estudos de Borba, Neves e Domingues (2018) que analisam o papel dos recursos audiovisuais no processo de articulação de diferentes representações e o potencial do vídeo para discutir como o conhecimento é construído, de Souza (2016) que busca aproximar o conhecimento do estudante, enfatizando o desenvolvimento de sua habilidade gráfica associado à minimização do cálculo algébrico e o de Borba e Villarreal (2005) que consideram o status da visualização na pesquisa Matemática um procedimento que auxilia no entendimento da prova, mas que não se configura como uma prova formal, conforme destacamos anteriormente.

Outro ponto que vale ressaltar é a importância da mediação do professor, durante o processo de produção de um vídeo, que amplia as possibilidades de explorar as dúvidas relacionadas ao conteúdo, à tecnologia, entre outros, a exemplo do que fez Souza e Borba (2018), Oechsler (2018) e Souza (2016), além de discutir a integração da Álgebra com a Geometria e da tecnologia com as demonstrações, em um ambiente que favoreça a troca de informações e de conhecimento entre professor e estudante. Isto pode ser observado nos estudos de Sinclair e Robutti (2013) e de Hollebrands, Laborde e Sträßler (2008).

Este trabalho visou identificar como a tecnologia digital coparticipa da produção de conhecimento matemático e de que maneira ela fomenta a produção de significado que é dado a uma demonstração. Ele está sendo desenvolvido dentro do Projeto “Vídeos Digitais na Licenciatura em Matemática a Distância” que é apoiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) do Brasil, tendo sido aprovado nos editais de Produtividade em Pesquisa – CNPq (Processo nº 303326/2015-8) e no Universal – CNPq (Processo: 400590/2016-6).



Para trabalhos futuros, pretende-se investir em atividades colaborativas que gerem vídeos acessíveis e que estimulem a produção de conhecimento sobre conteúdos de Álgebra Linear, em um ambiente online, e que ampliem a nossa compreensão sobre como essas produções poderiam se tornar um objeto de ensino e de aprendizagem utilizado por professores e estudantes.

Esta empreitada se apoia em um estudo que aborda os avanços do uso da tecnologia digital no campo da Educação Matemática. Na oportunidade, Borba, Askar, Engelbrecht, Gadanidis, Llinhares e Aguiar (2016) destacaram blended learning, e-learning e mobile learning como tendências no cenário atual, que podem ajudar a entender como a tecnologia digital está desconstruindo a noção de sala de aula, visto que ela tem transformado os papéis de estudantes e de professores.

Além disso, pretendemos apoiar futuras investigações em trabalhos que envolvam cinema e matemática, como os de Bastos, Rezende Filho e Pastor Junior (2015) que discute a produção de um vídeo educativo realizada por licenciandos para relatar um estudo sobre recepção fílmica e modos de leitura, de Coelho (2015) que explora o uso do cinema como ferramenta educativa oferecendo a possibilidade de atribuir significado ao conteúdo de análise combinatória, de Silva (2016) que reflete sobre conceitos de ciência e de matemática, historicamente contextualizados e apoiados pela linguagem cinematográfica e de Ferreira, Barra, Costa e Cunha Junior (2015) que traz reflexões sobre como o ensino de Matemática pode ser feito através de gêneros textuais que privilegiem a compreensão de conteúdos.

REFERÊNCIAS

- ALSINA, C. (2007). Visual proofs: images for understanding Calafate Delta 2007. *The Sixth Southern Hemisphere Conference on Teaching and Learning Undergraduate Mathematics and Statistics*, 1(5), 26-30. El Calafate, Argentina.
- BASTOS, W. G., REZENDE FILHO, L. A. C., & PASTOR JUNIOR, A. A. (2015). Produção de vídeo educativo por licenciandos: um estudo sobre recepção fílmica e modos de leitura. *Revista Ensaio*, 17(1), 39-58.
- BATISTELA, R. F., BARBARIZ, T. A. M., & WANG, H. (2016). Um estudo sobre demonstração matemática por/com computador. *REVEMAT*, 11 (Ed. Filosofia da Educ. Matemática), 204-215.
- BOAVIDA, A. M. R. (2005). *A argumentação em matemática: investigando o trabalho de duas professoras em contexto de colaboração*. (Tese de doutoramento). Universidade de Lisboa, Lisboa.
- BORBA, M. C. (2010). Softwares e internet na sala de aula de matemática. Comunicação apresentada no *X Encontro Nacional de Educação Matemática*. Salvador, Brasil.
- BORBA, M. C., ALMEIDA, H. R. F. L., & GRACIAS, T. A. S. (2018). *Pesquisa em ensino e sala de aula: diferentes vozes em uma investigação*. Belo Horizonte: Autêntica.



- BORBA, M. C., ASKAR, P., ENGELBRECHT, J., GADANIDIS, G., LLINHARES, S., & AGUIAR, M. S. (2016). Blended learning, e-learning and mobile learning in mathematics. *ZDM Mathematics Education (Print)*, 48, 549-610.
- BORBA, M. C., & DOMINGUES, N. S. (2015). O uso de tecnologias em aulas de Matemática Aplicada: vídeos em um ambiente de aprendizagem multimodal. In M. ROSA, M. A. BAIRRAL & R. B. AMARAL (Orgs.), *Educação Matemática, Tecnologias Digitais e Educação a Distância: pesquisas contemporâneas* (pp. 187-222). São Paulo: Editora Livraria da Física.
- BORBA, M. C., DOMINGUES, N. S., & LACERDA, H. D. G. (2015). As tecnologias audiovisuais em educação matemática investigadas no GPIMEM. In C. C. SANT'ANA, I. P. SANTANA & R. S. AMARAL (Orgs.), *Grupo de Estudos em Educação Matemática: ações cooperativas constituídas por várias vozes* (pp. 285-312). São Carlos: Pedro e João.
- BORBA, M. C., NEVES, L. X., & DOMINGUES, N. S. (2018). A atuação docente na quarta fase das tecnologias digitais: produção de vídeos como ação colaborativa nas aulas de matemática. *Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana*, 9(2).
- BORBA, M. C., SCUCUGLIA, R., & GADANIDIS, G. (2015). *Fases das tecnologias digitais em educação matemática: sala de aula e internet em movimento* (2ª edição). Belo Horizonte: Autêntica.
- BORBA, M. C., & SKOVSMOSE, O. (2001). A ideologia da certeza em educação matemática. In O. SKOVSMOSE, *Educação matemática crítica: a questão de democracia* (pp. 127-148). Campinas: Papirus.
- BORBA, M. C., & VILLARREAL, M. E. (2005). *Humans-With-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking: information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization*. New York: Springer.
- BORTOLOSSI, H. J., & MACHADO, E. J. C. (2016). Usando o GeoGebra em dispositivos móveis para explorar invariantes geométricos na sala de aula. Comunicação apresentada no *XII Encontro Nacional de Educação Matemática*. São Paulo, Brasil.
- CHIARI, A. S. S. (2015). *O papel das tecnologias digitais em disciplinas de álgebra linear a distância: possibilidades, limites e desafios*. (Tese de doutoramento). Universidade Estadual Paulista "Julio de Mesquita Filho", Rio Claro, Brasil.
- COELHO, R. M. F. (2015). *O uso do cinema como ferramenta educativa no ensino de matemática: uma experiência com alunos do ensino médio de Ouro Preto (MG)*. (Dissertação de mestrado profissional). Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, Brasil.
- DIAS, M. S. S. (2009). *Um estudo da demonstração no contexto da licenciatura em Matemática: uma articulação entre os tipos de prova e os níveis de raciocínio geométrico*. (Tese de doutoramento). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, Brasil.



- DOMINGUES, N. S. (2014). *O papel do vídeo nas aulas multimodais de matemática aplicada: uma análise do ponto de vista dos alunos*. (Dissertação de mestrado). Universidade Estadual Paulista “Julio de Mesquita Filho”, Rio Claro, Brasil.
- FERREIRA, J. C. D. (2014). A produção de vídeos no ensino de ciências: O Professor-Autor e as Tecnologias Digitais. *Atas do III Congresso Internacional TIC e Educação*. Universidade de Lisboa, Portugal.
- FERREIRA, R. V. J., BARRA, R. F., COSTA, M. A., & CUNHA JUNIOR, R. V. (2015). A linguagem fílmica no ensino de matemática: educando para a compreensão da geometria e da cidadania. In *Anais do XII Congresso Nacional de Educação (EDUCERE)*. Curitiba, Brasil.
- FONSECA, V., & HENRIQUES, A. (2018). A aprendizagem do teorema do valor intermédio numa abordagem exploratória com recurso ao GeoGebra. In *Atas do V Congresso Internacional TIC e Educação*. Universidade de Lisboa, Portugal.
- GARNICA, A. V. M. (2002). As demonstrações em Educação Matemática: um ensaio. *Bolema*, 15(18), 91-99.
- GOLDENBERG, M. (2004). *A arte de pesquisar: como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais* (8ª edição). Rio de Janeiro: Record.
- HADAS, N., HERSHKOWITZ, R., & SCHWARTZ, B. (2001). The role of contradiction and uncertainty in promoting the need to prove in dynamic geometry environments. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 127-150.
- HOLGATE, D., MUNYAKAZI, J., ADAMS, L., & SMITH, D. (2013). Assignment submission via video in a large first year calculus class. In *Anais do The Ninth Southern Hemisphere Conference on Teaching and Learning Undergraduate Mathematics and Statistics (DELTA)*. Kiama, Australia.
- HOLLEBRANDS, K., LABORDE, C., & STRÄBER, R. (2008). Technology and the learning of geometry at the secondary level. In K. HEID & G. BLUME (Eds.), *Research in technology and the teaching and learning of mathematics: Research syntheses* (pp. 155-203). Charlotte, NC: Information Age Publishing.
- JACINTO, H., & CARREIRA, S. (2017). Mathematical Problem Solving with Technology: the Techno-Mathematical Fluency of a Student-with-GeoGebra. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 15(6), 1115-1136.
- LÉVY, P. (1999). *Cibercultura* (Tradução de Carlos Irineu da Costa) (3ª edição). São Paulo: editora 34.
- MORAN, J. M. (1995, janeiro/abril). O vídeo na sala de aula. *Comunicação & Educação*. (São Paulo), 2, 27- 35.
- NASSER, L., & TINOCO, L. A. A. (2003). *Argumentação e provas no ensino de matemática* (2ª edição). Rio de Janeiro: UFRJ/Projeto Fundão.



- NEVES, L. X., & BORBA, M. C. (2018). Multiple representations in the study of analytical geometry: video production in a distance online pre-service teacher education program. In *Proceedings of the Southern Hemisphere Conference on the Teaching and Learning of Undergraduate Mathematics and Statistics* (pp. 83-95) Lajeado: Editora Univates.
- NEVES, L. X., & FONTES, B. C. (2016). Uma análise de eventos críticos na produção de vídeos sobre problemas de geometria analítica. In *Anais do XII Encontro Nacional de Educação Matemática*. São Paulo, Brasil.
- OECHSLER, V. (2018). *Comunicação Multimodal: produção de vídeos em aulas de Matemática*. (Tese de doutoramento). Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro, São Paulo, Brasil.
- OECHSLER, V., FONTES, B. C., & BORBA, M. C. (2017). Etapas da produção de vídeos por alunos da educação básica: uma experiência na aula de matemática. *Revista Brasileira de Educação Básica (Belo Horizonte, MG) 2(1)*, 71-80.
- PAULO, R. M., & FERREIRA, M. J. A. (2018). Ser-com-as-tecnologias-digitais na produção do conhecimento matemático. In *Atas do V Congresso Internacional TIC e Educação*. Universidade de Lisboa, Portugal.
- PIRES, A. I. T., MIRANDA, G. L., & LAGARTO, J. R. (2014). Classificação dos Vídeos Produzidos num Estúdio de Televisão Digital numa Escola do Ensino Secundário. In *Atas do V Congresso Internacional TIC e Educação*. Universidade de Lisboa, Portugal.
- POWELL, A. B., FRANCISCO, J. M., & MAHER, C. A. (2004). Uma abordagem à análise de dados de vídeos para investigar o desenvolvimento das ideias matemáticas e do raciocínio de estudantes (Tradução: Antonio Olimpio Junior). *Bolema (Rio Claro, SP)*, 17(21).
- POWELL, A. B., & PAZUCH, V. (2016). Tarefas e justificativas de professores em ambientes virtuais colaborativos de geometria dinâmica. *Zetetiké, 24(2)*, 191-207.
- RODRIGUES, M. (2010). O processo de demonstrar na aula de matemática: um olhar sobre a comunicação emergente. In *Anais do XXI Encontro de Investigação em Educação Matemática*. Aveiro, Portugal.
- RODRIGUES, M. (2018). Percepções de competências de ensino com recurso a tecnologias digitais: um estudo com futuros docentes. In *Atas do V Congresso Internacional TIC e Educação*. Universidade de Lisboa, Portugal.
- SILVA, S. R. P. (2018). *Vídeos de conteúdo matemático na formação inicial de professores de Matemática na modalidade a distância*. (Tese de doutoramento). Universidade Estadual Paulista “Julio de Mesquita Filho”, Rio Claro, Brasil.
- SILVA, T. C. (2016). Cinema, conhecimento científico e formação de professores: a trajetória de René Descartes pelo neorrealista Roberto Rossellini. In *Anais do Encontro Nacional de Educação Matemática*. São Paulo, Brasil.



- SINCLAIR, N., & ROBUTTI, O. (2013). Technology and the role of proof: the case of dynamic geometry. In M. A. CLEMENTS, A. J. BISHOP, C. KEITEL, J. KILPATRICK & LEUNG F. K. S. (Eds.), *Third international handbook of mathematics education* (pp. 571-596). New York: Springer.
- SOUSA, E. K. V. (2010). *Um estudo sobre o ensino-aprendizagem das demonstrações matemáticas*. (Dissertação de mestrado). Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, Brasil.
- SOUZA, M. B. (2016). Ensino de geometria analítica auxiliado por software. In *Anais do XXII Encontro Nacional de Educação Matemática*. São Paulo, Brasil.
- SOUZA, M. B., AMARAL, R. B., & BORBA, M. C. (2017). Ensaio: integrando vídeos e demonstrações matemáticas. In *Anais do VII Congresso Internacional de Ensino de Matemática*. Canoas, RS, Brasil.
- SOUZA, M. B., & BORBA, M. C. (2018). Estimulando a produção colaborativa de artefatos e vídeos digitais sobre conteúdos de geometria analítica. In *Anais do III Fórum do GT-6 da Sociedade Brasileira de Educação*. Vitória, Brasil.
- STEINBRUCH, A., & WINTERLE, P. (1987). *Geometria Analítica*. São Paulo: Pearson Makron Books.
- VALENCIA, G., & YI, T. (2012). True Exploration and Visualization of Geometry with Technology. In *Anais do International Conference on Technology in Collegiate Mathematics (ICTCM)*. Orlando, Florida: ICTCM.
- WOOD, L. N., & PETOCZ, P. (1999). Video in Mathematics Learning at the Secondary-tertiary Interface The Challenge of Diversity. Comunicação apresentada no *The Second Southern Hemisphere Conference on Teaching and Learning Undergraduate Mathematics and Statistics (DELTA)*. Laguna Quays, Australia.

*

Received: November 29, 2018

Final version received: February 11, 2019

Accepted: February 21, 2019

Published online: February 28, 2019

