A ANÁLISE DE SEQUÊNCIAS PICTÓRICAS POR ALUNOS DO 4.º ANO DE ESCOLARIDADE NA PROMOÇÃO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO

Filipa Correia[1] & Neusa Branco[1,2]

[1]Instituto Politécnico de Santarém, Escola Superior de Educação
[2]UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

RESUMO

O presente artigo foca um estudo desenvolvido no âmbito do relatório de estágio da primeira autora integrado na Prática de Ensino Supervisionada do Mestrado em Educação Pré-escolar e Ensino do 1.º ciclo do ensino básico relativo à promoção do pensamento algébrico nos primeiros anos no trabalho com sequências pictóricas. O estudo visa compreender como é que alunos do 4.º ano analisam e generalizam sequências pictóricas crescentes, nomeadamente como determinam termos próximos, distantes e como expressam as suas generalizações. A metodologia é qualitativa de cariz interpretativo na modalidade de estudo de caso com três alunos. A recolha de dados é efetuada através de entrevistas clínicas gravadas em áudio e vídeo e das produções escritas destes alunos em duas tarefas com sequências pictóricas distintas que envolvem a descoberta de um termo próximo e um termo distante e uma generalização para determinar qualquer termo de sequências. Os resultados mostram que os três alunos utilizam estratégias distintas em ambas as tarefas, revelando a importância da estrutura dos termos pictóricos nas relações que os alunos estabelecem. Todos os alunos manifestam dificuldade em expressar a generalização.

Palavras-chave: Sequências pictóricas; generalização; pensamento algébrico.

ABSTRACT

This paper focuses on a study developed by the first author in her internship report on supervised teaching practice of the Masters in Pre-school Education and Teaching in primary school related with the promotion of algebraic thinking in the early years in the work with pictorial sequences. The study aims to understand how students of the 4th year analyze and generalize growing pictorial sequences, in particular how they determine near and far terms and how they express their generalizations. The methodology has a qualitative and interpretative nature with the design of case study with three students. Data collection is performed through clinical interviews recorded in audio and video and written production of these students in two tasks with different pictorial sequences involving the discovery of one near term and one distant term and a generalization to determine any sequence term. The results show that the three students use different strategies in both tasks revealing the importance of the structure of the pictorial terms in the relations that they establish. All students presents difficulty in expressing the generalization.

Keywords: pictorial sequences; generalizations; algebraic thinking.

INTRODUÇÃO

A exploração de sequências e regularidades é uma componente fundamental para desenvolver o pensamento algébrico dos alunos nos primeiros anos, sendo que esta abordagem precoce permite o surgimento gradual da noção de variável e de número generalizado. Esta exploração proporciona momentos de aprendizagem ricos e motivantes para os alunos sendo que põem em prática o seu poder matemático, desenvolvendo-o (NCTM, 1991; Vale & Pimentel, 2005). Ponte (2006b) e Ponte, Branco e Matos (2009) indicam que o pensamento algébrico promove o desenvolvimento da representação simbólica e das capacidades transversais em Matemática, nomeadamente a capacidade do aluno utilizar diferentes sistemas de representação, no âmbito da comunicação matemática; a capacidade de relacionar e generalizar, respeitando ao raciocínio matemático, e a capacidade de resolver problemas.

O presente artigo foca um estudo desenvolvido no âmbito do relatório de estágio da primeira autora integrado na Prática de Ensino Supervisionada do Mestrado em

Educação Pré-escolar e Ensino do 1.º ciclo do ensino básico que foca a promoção do pensamento algébrico nos primeiros anos no âmbito do trabalho com sequências pictóricas. O estudo tem como principal objetivo compreender como é que alunos no final do 1.º ciclo do ensino básico analisam e generalizam sequências pictóricas crescentes e quais as estratégias que utilizam em duas situações diferentes, procurando identificar aspetos que podem influenciar essas estratégias.

SEQUÊNCIAS PICTÓRICAS E A GENERALIZAÇÃO

Nos últimos anos em Portugal têm-se realizado investigações que destacam a importância da promoção do pensamento algébrico nos primeiros anos (Alvarenga & Vale, 2007; Barbosa, 2011; Canavarro, 2007; Mestre & Oliveira, 2011), incidindo principalmente na exploração de regularidades, de relações e no trabalho com as propriedades dos números e operações, na respetiva generalização e na sua representação, progredindo gradualmente para a representação simbólica.

Blanton e Kaput (2005), pioneiros neste domínio, caracterizam o pensamento algébrico como o processo de generalização de ideias matemáticas a partir da observação de um conjunto de evidências. Estas generalizações são estabelecidas através de argumentações, expressadas de forma cada vez mais formal, de acordo com a idade. Por sua vez, a Álgebra é vista como uma ferramenta para expressar essas generalizações e não apenas uma técnica.

A generalização desempenha um papel essencial perante uma atividade matemática, sendo uma capacidade inerente ao pensamento algébrico. Esta deve ser vista como um objetivo fundamental no ensino-aprendizagem da Matemática. Para Polya (1965, referido por Barbosa, 2009) a generalização não é um processo imediato, mas sim gradual que se inicia com a tentativa de entender os dados observados, fazendo analogias e testando casos especiais.

Ponte et al. (2009) mencionam que a generalização pode ser desenvolvida a partir da exploração de sequências e regularidades, onde os alunos podem identificar a lei de formação de uma dada sequência, sendo que esta pode ser identificada recorrendo a várias estratégias. A capacidade de generalização proporcionada por esse trabalho envolve, segundo Vale e Pimentel (2009), representações que os próprios alunos podem formular. Além disso, podem usar diferentes estratégias para determinar termos solicitados e para generalizar. Barbosa (2011) apresenta uma categorização dos vários tipos de estratégias utilizadas pelos alunos, quando resolvem problemas com sequências pictóricas crescentes, nomeadamente (i) contagem; (ii) termo unidade, sem ajuste, com ajuste numérico ou com ajuste contextual; (iii) diferença, recursiva, múltiplos da diferença sem ajuste, múltiplos da diferença com ajuste; (iv) explícita, e (v) tentativa e erro.

Lannin, Barker e Townsend (2006, referidos por Barbosa, 2009) revelam que existem diversos fatores que parecem ter influência sobre a estratégia que os alunos usam. Um dos fatores está relacionado com a estrutura das tarefas propostas. Por exemplo, o facto da sequência ser crescente faz com que os alunos tendam a demonstrar mais dificuldades na sua exploração do que em sequências repetitivas. A sequência crescente mantém uma regularidade previsível em relação ao termo anterior, mas modifica a sua estrutura de termo para termo (Moyer-Packenham, 2005). Assim, sequências crescentes são cognitivamente mais exigente o que sequências repetitivas.

Outro aspeto que também está relacionado com as tarefas e que influencia as estratégias utilizadas pelos alunos é a ordem do termo pedido, podendo ser próxima ou distante. Segundo Orton e Orton (1999) essa mudança pode resultar numa generalização correta ou não, sendo que os alunos quando confrontados com questões relacionadas com termos mais distantes da sequência podem passar de um método correto para um método incorreto baseado, muitas vezes, no estabelecimento de uma relação de proporcionalidade direta inexistente.

O estudo de Mestre e Oliveira (2011) aponta para a importância da exploração de termos distantes o que fará com que os alunos passem de estratégias recursivas para estratégias que lhes permita construir uma regra de formação da sequência. Assim, as autoras identificam que alunos de anos de escolaridade iniciais manifestam alguma capacidade de generalizar. Por sua vez, Mestre e Oliveira (2013) indicam que a generalização pode ser expressa de modo diversificado, como por exemplo em linguagem natural, mas, progressivamente, numa linguagem matemática mais formal, usando símbolos matemáticos.

A componente visual pode também influenciar a exploração e generalização da sequência. A visualização pode estar relacionada, segundo Sasman, Olivier e Linchevski (1999) com a complexidade da figura. Os autores fazem uma distinção entre figuras transparentes (a regra que caracteriza a sequência é evidente na estrutura das figuras) e não transparentes (a regra não é facilmente descoberta através da mera observação das figuras da sequência). Em suma, em todos os níveis de ensino, principalmente nos primeiros anos, a estrutura matemática da sequência é de extrema importância para o trabalho que os alunos desenvolvem no que respeita particularmente à generalização (Branco, 2013).

METODOLOGIA DO ESTUDO

O estudo segue uma metodologia qualitativa de cariz interpretativo na modalidade de estudo de caso. O estudo incidiu sobre três alunos do 4.º ano de escolaridade, sendo dada enfâse à compreensão do pensamento subjetivo dos participantes (Bogdan & Biklen, 1994; Ponte, 2006a). Os três alunos, Andreia, Bruna e Carlos (nomes fictícios) foram selecionados tendo em conta a informação disponibilizadas pela professora titular da turma relativamente ao seu desempenho académico em Matemática. Para o estudo era relevante que estes apresentassem níveis de desempenho diferentes, permitindo evidenciar a interpretação das estratégias de alunos com conhecimentos distintos. Os alunos revelavam três níveis de desempenho diferentes nas tarefas regulares de sala de aula, tendo Andreia um desempenho baixo, Bruna um desempenho regular e Carlos um desempenho elevado.

A recolha de dados foi efetuada através de duas entrevistas clínicas individuais gravadas em áudio e vídeo e de recolha documental relativa às produções escritas dos alunos, nas duas tarefas propostas. Cada uma das tarefas foi realizada pelos alunos em dois dias, em semanas distintas, durante cerca de 30 minutos. As duas tarefas envolviam sequências pictóricas crescentes lineares (Figura 1 e Figura 2), sendo em cada uma delas solicitado a determinação de um termo próximo e de um termo distante e que estabelecessem uma generalização que lhes permitisse determinar qualquer termo da sequência numérica associada à sequência pictórica.

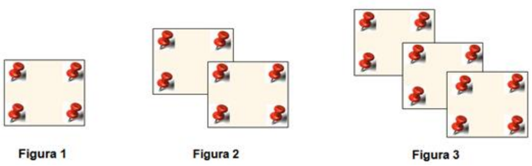

Figura 1 - Sequência da tarefa 1.

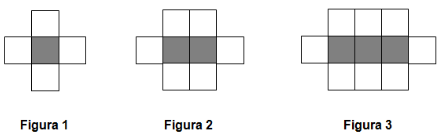

Figura 2 - Sequência da tarefa 2.

As sequências, apesar de serem lineares, não possuíam as mesmas características, podendo assim dar origem a análises e estratégias de generalização diferentes. Cada entrevista integrava uma das tarefas (Tarefa 1 na entrevista 1 e Tarefa 2 na entrevista 2), de modo a possibilitar a existência de diálogo entre o investigador e a criança para uma melhor compreensão das suas estratégias e dificuldades. Cada um dos alunos efetuou a sua resolução tendo em conta as suas experiências e a sua interpretação visual de cada sequência. As entrevistas contemplaram uma componente pessoal, que permitiu efetuar uma breve caracterização de cada aluno e uma componente específica que tinha por objetivo compreender o que estavam a fazer e porque o faziam. O questionamento visou perceber aspetos relevantes da forma como estavam a pensar (Oliveira & Cyrino, 2011).

Foram também recolhidos dados por meio da produção escrita dos alunos durante a resolução dessas tarefas, o que possibilitou a identificação de alguns processos cognitivos dos sujeitos, permitindo compreender as estratégias utilizadas pelos mesmos e detetar algumas dificuldades, por meio das representações utilizadas.

Os dados foram organizados por participante e por tarefa, sendo analisadas as produções escritas e as entrevistas clínicas de cada aluno em cada tarefa, de modo a constituir os três casos em estudo. A análise dos dados de cada um centrou-se nos três aspetos centrais em cada uma das tarefas: i) determinação de um termo próximo, ii) determinação de um termo distante, e iii) expressão de uma generalização. Deste modo procurámos identificar as estratégias e as representações dos alunos, tendo em conta as estratégias identificadas na revisão de literatura.

RESULTADOS

- Andreia

Andreia tem nove anos de idade e considera a Matemática muito difícil, sendo que, por vezes, não compreende as tarefas propostas e não as consegue realizar. Caracteriza-se como sendo uma má aluna a Matemática, pois mesmo quando realiza uma tarefa a sua resolução não está, na maioria das vezes, correta.

Tarefa 1

Na determinação de um termo próximo, Andreia desenha a figura quatro com quatro lembretes e dezasseis pioneses. Ao ser questionada em relação ao número de pioneses que tem a figura quatro e como o descobriu, refere que após ter desenhado a figura quatro contou os seus pioneses. Através da sua representação verificamos que interpreta as figuras de forma diferente do esperado, não mantendo a regularidade, pelo que lhe é solicitado que indique quantos pioneses tem a primeira figura, a segunda e a terceira, ao que responde quatro, oito e doze, respetivamente. De modo que Andreia verifique que, de facto o número de pioneses da figura dois e três não corresponde ao que menciona, sugere-se que faça a contagem. Nesse momento percebe que não faz a interpretação correta das representações e após essa contagem refaz a sua análise da sequência.

Andreia revê as suas respostas e efetua as alterações que considera necessárias. Neste segundo momento, volta a desenhar a figura quatro, representando quatro lembretes e apenas treze pioneses. Refere que agora tem em consideração as figuras anteriores da sequência, tendo mais uma vez realizado a contagem: "eu contei os pioneses da figura". Nesta situação verifica-se que a aluna não efetua a contagem dos pioneses de modo arbitrário, apresentando uma expressão (Figura 3) que permite identificar a regularidade da sequência que observa (adiciona sucessivamente 3 ao número de pioneses do 1.º termo da sequência).

$$4+3+3+3=13$$

Figura 3 – Registo de Andreia, questão 2 - tarefa 1.

No que respeita à descoberta de um termo distante, de ordem 15, Andreia começa por desenhar esse termo com quinze lembretes e quarenta e seis pioneses (Figura 4).

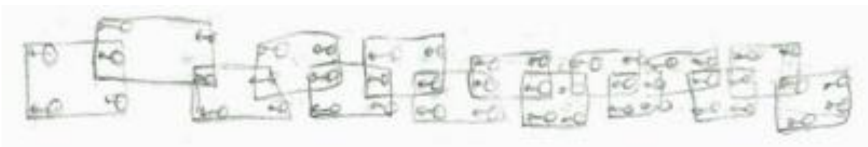

Figura 4 – Registo de Andreia, questão 3 - tarefa 1.

Andreia refere que para descobrir o número de pioneses tem de desenhar a figura e contar os pioneses, 46 no total. Contudo, regista 47 pioneses. Ao ser questionada reforça que obteve o número por contagem pelo que lhe é sugerido que escreva a operação que representa a contagem efetuada. Assim, regista a expressão da figura 15, que tem inicialmente um 4 no início e um 4 no final da expressão. Apercebe-se do erro e substitui o 4 apresentado na última parcela pelo número 3. Apesar disso, continua a indicar um resultado incorreto.

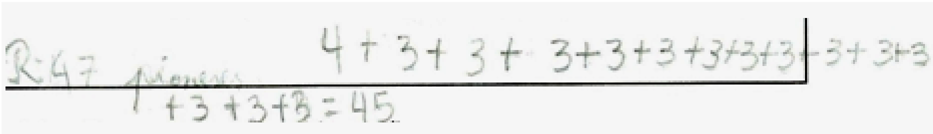

Figura 5 – Registo de Andreia, questão 3 - tarefa 1.

Nesta tarefa, Andreia não expressa qualquer regularidade de um modo geral referindo apenas que para descobrir o número de pioneses de qualquer figura tem de a desenhar e depois contar os pioneses. Deste modo, a aluna não estabelece qualquer generalização pois considera ter sempre de recorrer ao desenho para descobrir o número de pioneses de qualquer figura.

Tarefa 2

Andreia desenha quatro quadrados sombreados e dez brancos para representar o 4.º termo da sequência. Quando questionada a aluna menciona ter observado as figuras anteriores e identificado a relação entre o número da figura e o número de quadrados sombreados:

> **Investigadora:** Então fizeste quantos quadrados pretos ou escuros?
> **Andreia:** Ah… Fiz quatro.
> **Investigadora:** Como é que sabias que eram quatro quadrados escuros?
> **Andreia:** Porque na primeira figura só tinha um quadrado [escuro], na segunda tinha dois quadrados [escuros] e na terceira tinha três.
> **Investigadora:** Então?
> **Andreia:** Na quarta vai ter quatro quadrados [escuros].

Além disso, Andreia indica também que o número de quadrados brancos da figura quatro é 10, que calcula como mostra a expressão da figura 6:

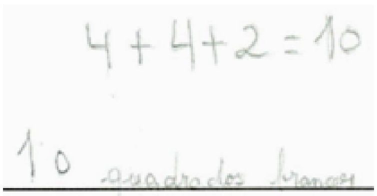

Figura 6 – Registo de Andreia, questão 2 - tarefa 2.

Na explicação oral, revela que a sua contagem tem em conta a estrutura do termo, identificando diversas partes: o conjunto de quadrados brancos da linha de cima; o conjunto de quadrados brancos da linha de baixo; e os dois quadrados brancos da linha do meio, tal como se verifica nas parcelas da expressão numérica (Figura 6).

Neste caso, a aluna decompõe a figura em partes relacionando-as com o número da figura, embora não explicite essa relação de num modo geral:

> **Investigadora:** Quatro mais quatro [lendo o registo da aluna], como é que tu contaste os quatro?
> **Andreia:** Ah, contei quatro mais quatro [apontando em cima e em baixo dos quadrados escuros] e mais dois.
> **Investigadora:** Os dois das pontas?
> **Andreia:** Sim.

Na determinação do termo distante, o 20.º termo, Andreia sente necessidade de efetuar a sua representação pictórica (Figura 7).

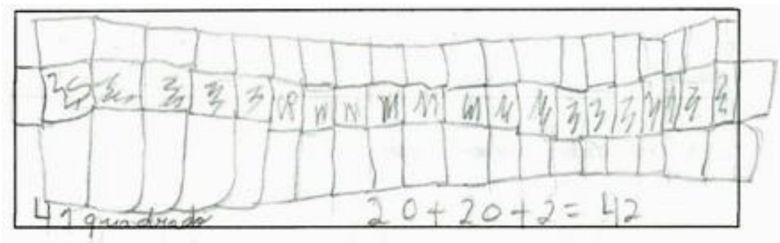

Figura 7 – Registo de Andreia, questão 3 - tarefa 2.

Oralmente explica como descobre a figura vinte:

> **Investigadora:** Como é que sabias que eram vinte quadrados pretos?
> **Andreia:** Porque na 1.ª tinha um quadrado preto, na 2.ª dois quadrados pretos e na 3.ª três quadrados pretos e na quarta quatro pretos.
> **Investigadora:** Então na vinte…na figura vinte era?
> **Andreia:** Vinte [quadrados sombreados]
> **(…)**
> **Investigadora:** E quantos quadrados brancos é que tu descobriste?
> **Andreia:** Quarenta, aí quarenta e duas. Eu contei 20 [apontando para os quadros brancos em cima dos sombreados].
> **Investigadora:** Vinte de cima?
> **Andreia:** Vinte de cima mais vinte debaixo e depois mais as duas do lado.

Andreia estabelece de modo claro a relação entre o número da figura e o número de quadrados sombreados na zona central da figura. Pela decomposição que faz de cada um dos termos, identifica também relações com o número de quadrados brancos, contando vinte quadrados brancos na parte superior, vinte na parte inferior e dois nas extremidades. Contudo, escreve dois resultados distintos, um resultante da contagem, 41, e outro, o correto, obtido pela expressão numérica, na qual revela uma regra explícita para o cálculo do número de quadrados.

Relativamente ao estabelecimento de uma generalização, Andreia expressa ainda a necessidade de desenhar a figura e contar os seus quadrados. Esta indicação revela que, apesar de ter estabelecido uma relação direta entre o número da figura e o número de quadrados brancos dessa figura, na determinação dos termos próximo e distante, não consegue expressar essa relação de modo geral.

- Bruna

Bruna tem dez anos de idade. Considera-se boa aluna, embora mencione que nos três anos anteriores foi melhor, obtendo mais sucesso. No que se refere ao que mais gostava nas aulas de Matemática indicou: fazer tabelas; decompor números; fazer contas, embora não apreciasse multiplicações e divisões.

Tarefa 1

Para determinar o termo próximo, Bruna desenha a figura quatro com quatro lembretes e dezasseis pioneses, após a observação das três figuras representadas. De modo a que verifique que a figura dois não segue a regularidade que está a usar para desenhar a figura 4, é-lhe solicitado que conte o número de pioneses nessa figura. A aluna conta sete pioneses, indicando que está um atrás da união dos dois lembretes. De modo a esclarecer esta situação é-lhe indicado que apenas existem os pioneses que estão visíveis. Posto isto, revê a sua resposta e desenha novamente a figura 4, representando quatro lembretes e apenas treze pioneses. Perante esta nova situação refere como obtém a figura:

> Desta vez foi…eu fiz…a… nas figuras, a primeira tinha sempre quatro [pioneses] uma folha [lembrete], mas quando ia à segunda, na primeira folha podia ter três e na segunda já podia ter quatro porque agarrava a segunda folha e eu com isso fui fazendo… Fiz três numa folha depois fazendo três noutra e depois mais três noutra e depois quando cheguei ao fim a…fiz…chegou a quatro [pioneses] em cada folha.

Quando indica o número de pioneses dessa figura, Bruna diz ter efetuado o cálculo mentalmente: três (pioneses) de um lembrete, três de outro lembrete, três de outro lembrete e quatro de outro lembrete, registando a expressão numérica $3+3+3+4=13$. Este registo e a explicação oral permitem aferir que não efetua uma contagem arbitrária, indicando a existência de uma regularidade ao longo da sequência. Conclui que cada lembrete tem sempre três pioneses à exceção do último lembrete que tem quatro, efetuando uma contagem por grupos de pioneses em cada lembrete.

Bruna usa a mesma estratégia na determinação de um termo distante, o número de pioneses da figura 15 da sequência. Novamente a expressão numérica que apresenta e a justificação oral revelam a contagem dos conjuntos de pioneses em cada lembrete, considerando que essa figura tem um total de 15 lembretes em que catorze deles têm três pioneses e um lembrete tem quatro (Figura 8):

> Porque fiz catorze vezes o três, mas sem ser com uma conta de vezes, com mais, porque (…) fazendo assim, eu conseguia chegar ao resultado porque se nas outras folhas…na figura quatro eu tinha que ter quatro folhas [lembretes] e em três folhas [em cada uma] eu tinha três [pioneses] e quando chegava ao fim tinha quatro [pioneses]. Na figura quinze em catorze vezes tinha que ter três (pioneses) e na última tinha que ter quatro.

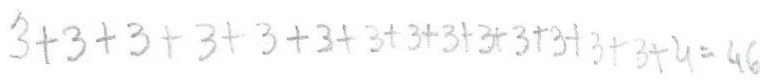
3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+4=46

Figura 8 – Registo de Bruna, questão 3 - tarefa 1

Bruna estabelece uma relação entre o número da figura e o número de lembretes que têm 3 pioneses (menos um que o número da figura), sendo que há sempre um lembrete com 4 pioneses.

Para indicar uma regra que lhe permite determinar o número de pioneses de qualquer figura, Bruna indica em linguagem natural que podia realizar uma adição ou uma multiplicação, mas não descreve de um modo geral os valores envolvidos nessas operações. Apresenta novamente o exemplo do cálculo que faz para obter o número de pioneses da figura 15 da sequência (Figura 9):

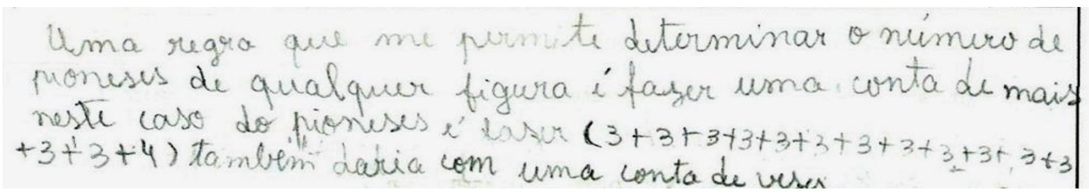
Uma regra que me permite determinar o número de pioneses de qualquer figura é fazer uma conta de mais neste caso do pioneses é fazer (3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3 +3+3+4) também daria com uma conta de vezes

Figura 9 – Registo de Bruna, questão 4 - tarefa 1

Bruna não consegue apresentar a regra de um modo geral, recorrendo sempre a um exemplo específico da sequência. No entanto, nesta situação a aluna não necessita recorrer ao desenho para saber o número de pioneses a considerar numa figura distante.

Tarefa 2

Na representação da quarta figura da sequência pictórica, termo próximo pedido, Bruna desenha quatro quadrados sombreados e dez quadrados brancos, tendo por base as regularidades que identifica nos termos anteriores, quando decompõe cada um dos termos em partes, que relaciona com a ordem:

> Na 1.ª tinha um [aponta para o quadrado branco de cima e o de baixo] depois um do lado e um do outro [aponta para os laterais], depois na 2.ª figura já tinha dois de um lado [aponta para os quadrados brancos de cima] e depois dois de outro [aponta para os quadrados brancos de baixo] e depois um de outro [aponta para os laterais]. Depois na 3.ª tinha três de um lado [aponta para os quadrados brancos de cima], três do outro [aponta para os quadrados brancos de baixo] e um do lado e outro do outro [aponta para os laterais]. Na 4.ª figura era só fazer quatro de um lado [aponta para os quadrados brancos de cima] depois quatro o outro lado [aponta para os quadrados brancos de baixo] depois mais duas [aponta para os laterais].

Esta descrição permite perceber que a aluna estabelece uma relação entre o número da figura e o número de quadrados sombreados, que estão dispostos numa linha central e que nas linhas acima e abaixo se encontram quadrados brancos em igual número, contando ainda com dois quadrados brancos, um em cada extremidade da linha central. De acordo com este raciocínio indica o número de quadrados brancos que a figura 4 tem por meio da expressão numérica $4+4+1+1=10$. Estabelece uma relação direta entre o número da figura e o número de quadrados sombreados, relacionando-o posteriormente com o número de quadrados brancos que varia em função da ordem do termo.

Na determinação do termo distante, o 20.º termo da sequência, Bruna faz o mesmo raciocínio, indicando a expressão numérica $20+20+1+1=42$. Assim, relaciona a ordem do termo com a constituição do termo pictórico, identificando existirem vinte quadrados brancos na linha de cima e vinte quadrados brancos na linha de baixo e mais dois na linha central, um em cada extremidade.

Quanto ao estabelecimento de uma generalização, a aluna menciona apenas que a regra envolve a realização de adições ou a multiplicação, tendo novamente referido as operações a realizar para o 20.º termo, para o qual faria duas vezes vinte e duas vezes um e adicionava os resultados. Bruna expressa uma relação direta entre o número da figura e o número de quadrados brancos, mas sempre relativamente a uma situação concreta e não de um modo geral.

- Carlos

O Carlos tem dez anos e diz que a área disciplinar da Matemática é “fixe” porque gosta de efetuar cálculos. Refere que perante situações desta disciplina inicialmente o “entusiasmo é muito mas depois se for uma ficha muito grande começa a ser secante”. O que mais gosta é de fazer divisões e o que menos gosta é de resolver problemas quando não os compreende.

Tarefa 1

Carlos desenha a figura com quatro lembretes e treze pioneses, indicando que ao longo da sequência acrescenta um lembrete, pelo que a figura quatro tem mais um lembrete do que a figura três da sequência. Como, inicialmente, não refere o número de pioneses é-lhe pedido que explique como descobre o número de pioneses da figura quatro. Carlos menciona que: “se cada figura tem quatro pioneses, então se a figura quatro teria quatro lembretes era quatro vezes quatro, os quatro lembretes vezes os quatro pioneses”. Contudo, esta justificação não é coerente com o que desenha. É-lhe então sugerido que conte em cada figura o número de pioneses para verificar que não corresponde ao que diz. Depois da contagem, conclui que a figura dois é composta por sete pioneses, alterando a sua interpretação inicial da sequência. Deste modo, identifica uma expressão numérica, evidenciando que um lembrete tem 4 pioneses e os restantes três lembretes têm 3 pioneses cada: “cada um agora tinha três [pioneses], este tinha quatro [último lembrete com quatro pioneses na figura 3] e aqui tinha três e este tinha quatro, o último tinha sempre quatro [figura quatro], mas os restantes tinham três. Então, a figura quatro era $3+3+3+4$”.

Na determinação do termo distante, Carlos procede de modo idêntico e justifica: “era a mesma coisa, era três vezes catorze que me deu quarenta e dois e depois como o último lembrete tinha quatro pioneses, era juntando mais quatro, que me deu quarenta e seis”. O registo está coerente com este raciocínio (Figura 10):

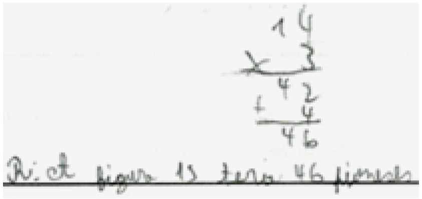

Figura 10 – Registo de Carlos, questão 3 - tarefa 1

É possível aferir que o aluno encontra uma regra que lhe permite descobrir eficaz e rapidamente o número de pioneses de qualquer figura, tendo em conta a constituição dos termos pictóricos. Contudo, quando solicitada uma regra geral, Carlos remete para a utilização da regra para um caso específico, a figura 12: "é a mesma coisa que dantes, é três vezes onze igual a trinta e três e depois o último lembrete tinha quatro pioneses que deu trinta e sete". A estratégia utilizada pelo aluno é explícita pois ele relaciona a ordem com o fator (número anterior ao da ordem) da multiplicação que faz por 3, embora não expresse a regra de modo geral.

Tarefa 2

No termo próximo solicitado nesta tarefa, Carlos refere ter observado que acrescenta um quadrado preto no centro e dois quadrados brancos, um em cima e um em baixo, de uma figura para a seguinte. Além disso, efetua o cálculo de $4+4+1+1$. Esta expressão permite perceber que o aluno decompôs a figura em partes que se relacionam com o número da figura ou são constantes: o conjunto de quadrados brancos da linha de cima; o conjunto de quadrados brancos da linha de baixo; e os dois quadrados brancos dos extremos.

Para a descoberta do termo distante solicitado, Carlos escreve a sequência numérica associada à sequência pictórica até ao 10.º termo, por ser metade de 20: $4-6-8-10-12-14-16-18-20-22$. Em seguida faz a adição: $22+22=44$, ou seja, o aluno considera que o termo de ordem 20 tem o dobro dos quadrados brancos do termo de ordem 10:

> Fui usando uma sequência, eu contei…a figura um tinha quatro [quadrados brancos] e depois a figura dois tinha seis quadrados brancos então a sequência é de dois em dois. Depois quando cheguei ao vinte e dois que era dez vezes [figura dez]) juntei mais vinte e dois que dá…que são as vinte vezes [figura vinte] que me deu quarenta e quatro.

Carlos utiliza a estratégia termo unidade sem ajuste, referida por Barbosa (2011). O aluno não efetua um ajuste ao resultado tendo em conta a constituição pictórica dos termos da sequência. Para que o aluno reflita sobre este seu raciocínio é incentivado a verificar se a mesma relação se verifica entre os termos 5 e 10:

> **Investigadora:** Então por essa lógica, metade de dez é quanto?
> **Carlos:** Metade de dez é cinco.
> **Investigadora:** Pronto. Então imagina que queríamos descobrir a figura dez e tu só ias descobrir até à figura cinco. Então dava quanto, a figura cinco tinha quantos quadrados brancos?
> **Carlos:** Um, dois, três, quatro, cinco. [O aluno conta na sequência numérica que já tinha construído].
> **Investigadora:** Se nós somássemos, (…) mais cinco não era? Mais outra figura cinco…
> **Carlos:** Dava vinte e quatro.
> **Investigadora:** Bate certo com a figura dez? [aluno confirma com o número de quadrados brancos que já tinha descoberto na figura dez].
> **Carlos:** Não.

Deste modo, conclui que com a estratégia de termo unidade sem ajuste não obtém uma resposta correta, pelo que dá continuidade à sua sequência numérica até ao 20.º termo, com uma estratégia de diferença recursiva (Figura 11).

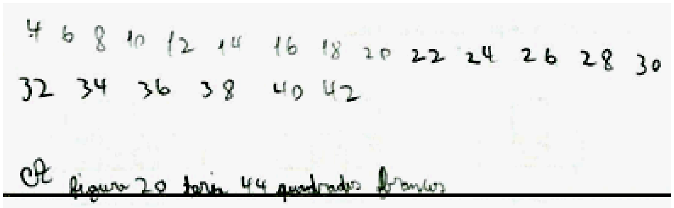

Figura 11 – Registo de Carlos, questão 3 - tarefa 2

Embora obtenha o resultado correto, Carlos não compreende porque é que a sua estratégia anterior não tinha tido sucesso, pelo que lhe é proposta a análise da consequência da duplicação sem ajuste nos termos pictóricos:

> **Investigadora:** A diferença entre quarenta e quatro e quarenta e dois qual é?
> **Carlos:** É de dois.
> **Investigadora:** É de dois. Vamos lá ver na figura (virando a folha). Deixa lá ver. Imagina, nós temos a figura um, queremos descobrir a figura dois. São quatro não são? [apontando para a figura um, quadrados brancos].
> **Carlos:** Sim.
> **Investigadora:** Se nós somássemos quatro quadrados brancos à primeira figura não ia dar a dois [figura dois] pois não?
> **Carlos:** Pois porque se não tinha que ter aqui dois e aqui dois [apontando para as extremidades laterais da figura dois].

Carlos verifica a repetição dos dois quadrados brancos da linha central quando faz a duplicação do termo, compreendendo assim a necessidade de fazer o ajuste na sua estratégia inicial.

No que respeita à generalização, Carlos regista a sequência numérica até ao 7.º termo e oralmente explica que para saber o número de quadrados brancos de qualquer figura constrói a sequência numérica até ao termo pretendido, adicionando sucessivamente dois valores, dando um exemplo específico.

DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

No primeiro contacto com a sequência pictórica da tarefa 1, os três alunos, efetuam uma interpretação inesperada. Cada aluno alega que de um termo para o seguinte é adicionado um lembrete e quatro pioneses. Após questionados sobre o número total de pioneses nos termos da sequência representados, todos referem que consideram existir um pionés não visível na imagem, com o qual contam. Esta interpretação está relacionada com a forma quadrangular dos lembretes e com o facto dos pioneses estarem colocados junto dos quatro vértices. Numa visualização rápida os alunos associam os quatro vértices do quadrado a quatro pioneses. Depois da realização da nova contagem, cada aluno conclui que não existem pioneses invisíveis e identificam o número correto. Nesta situação, esta sequência pode caracterizar-se como não transparente (Sasman et al., 1999), ou seja, a regra não é facilmente descoberta através de uma simples observação das figuras. Andreia recorre ao desenho e contagem na descoberta do termo próximo e distante. A utilização desta estratégia, principalmente na descoberta do termo distante, tornou-se morosa e ainda induziu a aluna em erro devido à contagem do número de pioneses ser extensa. Bruna e Carlos utilizam a estratégia de desenho e contagem para a descoberta do termo próximo, mas na descoberta do termo distante apresentam uma expressão numérica para a descoberta do número de pioneses, considerando que há sempre um lembrete com quatro pioneses e os restantes têm 3 pioneses, até se obter um número de lembretes igual ao número da figura. A estratégia utilizada para a descoberta do termo distante é explícita, apresentando uma regra que lhes permite calcular o número de pioneses de qualquer figura. Nenhum dos alunos consegue indicar uma regra geral para a determinação do número de pioneses. Andreia indica ter de recorrer sempre ao desenho e Bruna indica a necessidade de fazer adições sucessivas ou a multiplicação, recorrendo ao exemplo da figura 15, antes determinada. Por sua vez, Carlos, apesar de não expressar a regra de modo geral, relaciona a ordem com o número de vezes que aparece na parcela 3, sendo que adiciona sempre uma parcela igual a 4. Também este aluno tem necessidade concretizar, neste caso, para o termo de ordem 12.

Na tarefa 2, Andreia e Bruna utilizam uma estratégia explícita na descoberta do termo próximo e do termo distante. Também nesta tarefa, Andreia sente necessidade de desenhar as figuras (4 e 20) e contar o número de quadrados brancos em cada uma. Ambas identificam diversas partes nos termos pictóricos: o conjunto de quadrados brancos da linha de cima; o conjunto de quadrados brancos da linha de baixo; e os dois quadrados brancos nas extremidades da linha do meio, apoiando-se, assim, na estrutura visual e estabelecendo uma relação direta entre o número da figura e o número de quadrados brancos. Nesta situação, a sequência revela ser transparente (Sasman et al., 1999), ou seja, a regra é facilmente descoberta através de uma simples observação das figuras. Carlos utiliza duas estratégias distintas. No termo próximo utiliza uma estratégia explícita, mas no termo distante escreve a sequência numérica associada à sequência pictórica até ao 10.º termo e, como pretende obter o número de quadrados brancos da 20.ª figura, multiplica esse número de quadrados por 2, esquecendo-se de fazer os ajustes necessários. Carlos usa uma estratégia termo unidade, mas sem ajuste, que após o diálogo reconhece dar origem à existência de dois quadrados brancos a mais. No que respeita à generalização nesta tarefa, Andreia indica ser necessário desenhar a figura e contar os seus quadrados, o que revela que, embora tenha estabelecido uma relação direta entre o número da figura e o número de quadrados brancos nos termos próximo e distante, não consegue expressar essa relação de modo geral. Por sua vez, Bruna remete mais uma vez para as operações que tem de realizar, adição ou multiplicação. Na indicação das operações para um caso concreto, a aluna expressa uma relação direta entre o número da figura e o número de quadrados brancos. No entanto, teve necessidade de se basear num termo em específico para a relação. Carlos remete para a construção da sequência numérica até ao termo pretendido, adicionando sucessivamente dois valores ao termo anterior.

CONCLUSÃO

De um modo geral os alunos manifestam desempenhos diferentes perante a sequência apresentada. As estratégias apresentadas na tarefa 2 são de carácter mais formal do que as apresentadas na tarefa 1, principalmente no caso da Andreia e Bruna que passaram da estratégia de desenho e contagem, na tarefa 1, para uma estratégia explícita apoiada em expressões numéricas, na tarefa 2. Tal situação parece dever-se à diferente estrutura visual dos termos de cada uma das sequências pictóricas. Os termos da sequência da tarefa 2 permitem uma análise que torna evidente a relação entre a ordem e o número de elementos que constitui o termo, contribuindo para a elaboração de expressões numéricas eficazes na determinação dos termos. Além disso, os alunos revelam alguma dificuldade em comunicar matematicamente, uns mais que outros. Conclui-se assim que, as situações que visam a promoção do pensamento algébrico podem potenciar o desenvolvimento da representação simbólica e constituem uma oportunidade para os alunos expressarem o raciocínio matemático, fomentando assim também a comunicação matemática (Ponte, 2006b; Ponte et al. 2009).

A realização deste estudo evidencia, ainda, a importância que tem a seleção das tarefas, em particular, a seleção da sequência pictórica e a solicitação tanto de termos próximos como de termos distantes. A sequência crescente embora se prolongue mantendo uma regularidade previsível em relação ao termo anterior, modifica a sua estrutura de termo para termo (Moyer-Packenham, 2005), o que pode trazer dificuldades aos alunos. Segundo Orton e Orton (1999) os alunos quando confrontados com questões relacionadas com termos mais distantes da sequência podem passar de um método correto para a utilização de um método incorreto, com acontece com Carlos na tarefa 2. Contudo, a correta determinação de termos distantes pode potenciar a correta expressão da generalização ainda que se revele a partir de termos específicos, pela necessidade que os alunos revelam em concretizar as regras que encontram. Assim, todos manifestam dificuldade em expressar a generalização, necessitando de recorrer a uma figura específica para colocar em prática as regras que não conseguem indicar sem uma referência concreta. Essa dificuldade revela a importância de tornar frequente o trabalho de análise de sequências pictóricas de modo a contribuir para o desenvolvimento da capacidade de generalização dos alunos, promovendo assim o pensamento algébrico desde os primeiros anos.

É evidente a importância da componente visual proporcionada pelos termos pictóricos da sequência que pode, ou não, dificultar a exploração e a generalização da mesma. Esta visualização pode estar relacionada, segundo Sasman et al. (1999), com a complexidade da figura, evidenciando-se estas como figuras transparentes e não transparentes. Assim, o professor tem um papel importante na seleção das tarefas, devendo ter em conta a natureza da sequência, de crescimento ou de repetição, a sua estrutura matemática, quando crescente, a transparência dos termos pictóricos e as questões que coloca, tendo em atenção o nível de escolaridade dos alunos e a experiência que têm de exploração destas situações.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alvarenga, D., & Vale, I. (2007). A exploração de problemas de padrão. Um contributo para o desenvolvimento do pensamento algébrico. *Quadrante*, *15*(1), 27-55.

Barbosa, A. (2009). *Generalização de padrões em contextos visuais: um estudo longitudinal com alunos do 2.º ciclo do ensino básico.* Tese de Doutoramento, Universidade do Minho. Retirado de http://repositorium.sdum.uminho.pt/bitstream/1822/10561/1/tese.pdf.

Barbosa, A. (2011). Generalização de padrões em contextos visuais: Um estudo no 6.º ano de escolaridade. In M. H. Martinho, R. A. T. Ferreira, I. Vale, & J. P. Ponte (Eds), *Ensino e Aprendizagem da Álgebra. Atas do EIEM 2011* (pp. 327-345). Póvoa do Varzim: Sem publicação definida (Digital). Retirado de http://cmup.fc.up.pt/cmup/eiem/grupos/documents/19.Barbosa.pdf.

Blanton, M., & Kaput, J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, *36*(5), 412-446.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Porto: Porto Editora.

Branco, N. (2013). *O desenvolvimento do pensamento algébrico na formação inicial de professores dos primeiros* anos. Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa. Retirado de http://hdl.handle.net/10451/8860.

Canavarro, A. (2007). O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. *Quadrante 16*(2), 81-118.

Mestre, C., & Oliveira, H. (2011). Generalizar estratégias de cálculo: Um estudo sobre o pensamento relacional de alunos do 4.º ano de escolaridade. In *Atas do XXII Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Lisboa: APM (Digital).

Mestre C., & Oliveira, H. (2013). Um percurso na generalização matemática: uma experiência de ensino no 4.º ano. In A. Domingos, I. Vale, M.J. Saraiva, M. Rodrigues, M.C. Costa, R.A. Ferreira (Eds.), *Investigação em Educação Matemática 2013: Raciocínio Matemático* (pp. 254-276). Covilhã: SPIEM.

Moyer-Packenham, P. (2005). Using virtual manipulatives to investigate patterns and generate rules in algebra. *Teaching Children Mathematics, 11*(8), 437-444.

NCTM (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em Matemática escolar*. Lisboa: APM e IIE. (Tradução portuguesa da edição original de 1989).

Oliveira, H., & Cyrino, M. (2011). A formação inicial de professores de Matemática em Portugal e no Brasil: narrativas de vulnerabilidade e agência. *Interacções, 7*(18), 104-130.

Orton, A., & Orton, J. (1999). Pattern and the approach to algebra. In A. Orton (Ed.), *Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp 104-120). London: Cassell.

Ponte, J. P. (2006a). Estudos de caso em educação matemática. *Bolema, 25*, 105-132.

Ponte, J. P. (2006b). Números e álgebra no currículo escolar. In I. Vale, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos, P. Canavarro, & (Eds.), *Números e álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores* (pp. 5-27). Lisboa: SEM-SPCE.

Ponte, J. P., Branco, N., & Matos, A. (2009). *Álgebra no Ensino Básico.* Lisboa: ME-DGIDC. Retirado de http://repositorio.ul.pt/bitstream/10.

Sasman, M., Olivier, A., & Linchevski, L. (1999). Factors influencing students' generalization thinking processes. In O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23th International Conference for Psychology of Mathematics Education,* (Vol. 4, pp. 161-168). Haifa, Israel: PME.

Vale, I., & Pimentel, T. (2005). Padrões: um tema transversal no currículo. *Educação e Matemática*, *85*, 14-20.

Vale, I., & Pimentel, T. (2009). *Padrões no Ensino e Aprendizagem da Matemática – Propostas Curriculares para o Ensino Básico.* Viana do Castelo: Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo.