Revista da UIIPS – Unidade de Investigação do Instituto Politécnico de Santarém,
Vol. VI, N. º 1, 2018, pp. 95-109
ISSN: 2182-9608
https://revistas.rcaap.pt/uiips/

ERROS COMETIDOS PELOS ALUNOS DE 6.º ANO A OPERAR COM NÚMEROS RACIONAIS

Errors committed by 6th grade students when operate with rational numbers

Liliana Almeida
Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Santarém
lilianaluisalmeida@gmail.com

Neusa Branco
Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Santarém
UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
neusa.branco@ese.ipsantarem.pt

RESUMO

O presente artigo apresenta um estudo desenvolvido no âmbito do relatório de estágio para a obtenção do grau de mestre da primeira autora. Foca-se na análise de erros de alunos em situações que envolvem números racionais. O estudo segue uma metodologia qualitativa, num design de estudo de caso, que se foca nas produções escritas de 58 alunos de 6.º ano no âmbito de quatro tarefas. Cada tarefa integra uma questão matemática e uma resolução que os participantes têm de analisar e identificar se estão ou não corretas. Duas das tarefas envolvem expressões numéricas e outras duas envolvem problemas. Os resultados deste estudo mostram que a maioria dos alunos ao finalizarem o 2.º ciclo revela dificuldades na resolução de problemas com números racionais. Contudo nas expressões numéricas com os números fracionários a maioria mostra-se conhecedora das regras das operações.

Palavras-chave: Erros dos alunos; Matemática; Números racionais; Resolução de problemas.

ABSTRACT

This article presents a study that was developed in the context of the internship report of the first author's in the training program to obtain the master's degree. It focuses on the analysis of the students' mistakes in mathematical situations with rational number. The study follows a qualitative methodology on a case study focused on 58 students' essays (aged 11) within four tasks. Each task consists of a mathematical question and a resolution which the students must analyse and identify whether it is right or wrong. Two of the tasks involves numerical expressions and the other two consist of problems.

The results of this study show that most of the students at the end of the 6th grade (aged 11) has difficulties on problem solving with rational numbers. However, most of them know the rules of operations in numerical expressions with fractional numbers.

Keywords: Mathematics; Problems solving; Rational numbers; Students' mistakes analysis.

1 INTRODUÇÃO

Este artigo baseia-se num estudo desenvolvido no âmbito do relatório de estágio para a obtenção do grau de mestre da primeira autora focado na análise de erros por parte de alunos do 2.º ciclo do ensino básico em situações que envolvem números racionais. É no âmbito dos números racionais, em particular, dos números fracionários que os resultados no âmbito da matemática são de grande insucesso, principalmente quando envolvem a representação na forma de fração. De acordo com Monteiro, Pinto e Figueiredo (2005) "as fracções são um dos temas do ensino básico em que os alunos apresentam mais dificuldades" (p. 47). As mesmas autoras afirmam que "as crianças operam com os símbolos sem terem ideias das quantidades e dos conceitos subjacentes" (p. 47). Tal situação evidencia que grande parte dos alunos não revela desenvolvimento do sentido de número racional.

O presente estudo tem como objetivo identificar os principais erros cometidos pelos alunos no 6º ano, nomeadamente na resolução de tarefas que envolvem números racionais, contemplando a análise de erros em situações de resolução de problemas e resolução de expressões numéricas.

2 ENSINO-APRENDIZAGEM DOS NÚMEROS RACIONAIS

De acordo com o Programa de Matemática do Ensino Básico (ME-DGIDC, 2007), documento curricular em vigor no momento da prática pedagógica da primeira autora, os números racionais adquirem elevada relevância no 1º ciclo, de tal modo que começam a ser trabalhados:

> nos dois primeiros anos com uma abordagem intuitiva a partir de situações de partilha equitativa e de divisão da unidade em partes iguais, envolvendo quantidades discretas e continuas. É nos 3.º e 4.º anos que o estudo destes números vai ser aprofundado, quer recorrendo a problemas que permitem trabalhar outros significados das frações, quer introduzindo números representados em forma decimal. (ME-DGIDC, 2007, p. 15)

Muitos são os estudos que têm sido realizados em torno dos números racionais, nomeadamente, para compreender a complexidade que envolve o seu ensino e a sua aprendizagem. A abordagem ao tópico dos números racionais exige da parte dos alunos alguma capacidade de abstração, sendo por isso importante pensar o seu percurso de aprendizagem. Representar um número é atribuir uma designação e um número racional pode ser representado por um numeral decimal, uma fração, uma percentagem, um ponto na reta numérica ou em linguagens natural ou pictórica (Quaresma & Ponte, 2012). A multiplicidade de representações e de significados que estes números comportam, requerem que os alunos compreendam e que estabeleçam abstrações para as quais podem não estar cognitivamente preparados.

No 2.º ciclo do ensino básico, os alunos aprofundam os conhecimentos sobre números racionais. Neste nível de ensino devem ter ainda a possibilidade de explorar múltiplas tarefas de representações abstratas a partir de representações concretas recorrendo a variados modelos, materiais manipuláveis, tarefas que integrem situações do quotidiano do aluno, assim como tarefas exploratórias estimulantes que desenvolvam nos alunos capacidades de compreensão dos conceitos matemáticos. De acordo com *National Council of Teachers of Matematics* (NCTM, 2007) estes modelos facilitam a utilização das representações com compreensão e flexibilizam a passagem para representações equivalentes na resolução de problemas. O aluno compreende mais facilmente os conceitos matemáticos a partir de situações do seu quotidiano permitindo que as aprendizagens se concretizem corretamente. Deste modo, é importante que sejam proporcionadas experiências com representações diversificadas, estabelecendo relações entre elas, de modo a privilegiar os conhecimentos dos alunos e a facilitar a sua compreensão de ideias mais abstratas. Brocardo (2010) refere a importância de os professores refletirem sobre a forma como estes números são abordados, destacando três princípios fundamentais: Princípio 1 - Usar contextos e modelos apropriados – usar diferentes contextos que permitam aprofundar a compreensão dos números racionais e as destrezas de cálculo; Princípio 2 - Desenvolver gradualmente as «grandes» ideias subjacentes aos números racionais - considerar os sentidos das operações e os diferentes significados das frações; Princípio 3 - Construir significados e relações – compreender os vários conjuntos numéricos e a capacidade de efetuar cálculos usando os números nas suas diferentes representações.

Tais princípios requerem um trabalho devidamente planeado centrado na compreensão dos números e das operações, nas diferentes formas de representação do número, quer na forma de fração, de decimal e percentagem. Os números racionais envolvem distintos significados pelo que, será necessário para isso uma abordagem que contemple esta multiplicidade. Monteiro e Pinto (2009) afirmam que as frações podem assumir os seguintes significados: (i) *Relação parte - todo de uma unidade contínua.* Situação em que a fração faz uma comparação entre a parte e o todo, o denominador indica o número de partes em que a unidade está dividida e o numerador as partes que foram escolhidas; (ii) *Relação parte – todo de uma unidade discreta.* O denominador representa o total de unidades e o numerador as unidades escolhidas; (iii) *Quociente entre dois números inteiros.* Resulta de situações de partilha equitativa, em que o numerador revela o número de coisas a ser partilhado e o denominador o numero de recetores dessa partilha; (iv) *Operador partitivo multiplicativo.* O numerador indica uma multiplicação e o denominador uma divisão; (v) *Medida.* Compara-se uma grandeza com outra tomada como unidade; (vi) *Razão.* Quociente entre duas partes do mesmo todo. As mesmas autoras afirmam que “uma fração é uma representação versátil e muito rica, porque permitem expressar diferentes relações” (p. 12). Contudo, esta multiplicidade de representações pode trazer ambiguidades. Muitas dificuldades em operar com frações estão relacionadas com a compreensão de que a fração representa uma quantidade e que implica compreender a relação dessa com a parte do todo. É fundamental que o aluno compreenda os diversos significados e a diversidade de unidades. Ponte e Quaresma (2011, referindo Post et al., 1986) salientam que “a noção quantitativa de número racional dos alunos deve incluir a compreensão de que os números racionais têm grandezas relativas e absolutas, e que podem ser entendidos tanto no sentido absoluto como no sentido relativo” (p. 221). Torna-se necessário que o professor organize tarefas que levem o aluno a compreender os números racionais em toda a sua complexidade. Para Monteiro e Pinto (2009) não existe uma sequência linear, sendo importante partir de diferentes estratégias que traduzem uma situação, o que permite aos alunos a construção progressiva dos seus modelos que servirão de base a um conhecimento mais formal. Quaresma (2010) conclui que os alunos desenvolvem melhor a sua compreensão e o seu sentido de número racional ao trabalharem simultaneamente as várias representações de número racional, nos diferentes significados, com diferentes tipos de unidades e com tarefas de natureza diversificada. Deste modo destaca-se a importância de criar situações com sentido para os alunos conseguirem operar corretamente com estes números na multiplicidade que os envolve. Para isso, o NCTM (2017) afirma que é necessário que o professor apresente tarefas que permitam o uso de procedimentos, fórmulas ou algoritmos numa perspetiva que não esteja meramente ligada ao significado ou à memorização de procedimentos. Nos números racionais, a resolução de problemas contextualizados e com significado promove aprendizagens conscientes e devidamente estruturadas. A resolução de problemas com números racionais exige procedimentos com conexões, nomeadamente porque necessitam de uma compreensão mais profunda dos conceitos matemáticos. Muitas vezes, as dificuldades na resolução de problemas com os números racionais prendem-se com o facto de os alunos não conseguirem estabelecer essas conexões. Ainda, de acordo com NCTM (2017) “um ensino eficaz da matemática envolve os alunos na discussão e na resolução de tarefas que promovem o raciocínio matemático e a resolução de problemas” (p. 17).

3 ERROS COMETIDOS PELOS ALUNOS ENVOLVENDO NÚMEROS RACIONAIS

Na análise das produções dos alunos, o professor pode tomar um erro de um aluno como um ponto de partida para a aprendizagem. Segundo Correia (2010), a análise feita pelo professor permite explorar a dificuldade dos alunos e utilizar os erros como ferramentas para o processo de construção de conhecimento do aluno, levando-o aos questionamentos sobre suas respostas. Os erros cometidos pelos alunos aparecem como uma pista para o professor poder recriar os seus métodos e reorganizar a sua prática, a fim de organizar a aprendizagem do aluno. Para Ponte e Serrazina (2000) os erros não traduzem sempre falta de conhecimento, pelo que estes devem de ser tidos em conta como um modo de aprendizagem positivo no processo de aquisição de conhecimento. Também Brousseau (1983) salienta que o erro não é somente o efeito da ignorância, da incerteza do acaso, podendo resultar do efeito de um conhecimento anterior que no momento se revela inadaptado. Correia (2010) afirma ainda que todo o raciocínio é lógico mesmo os que conduzem ao erro, e estes erros precisam ser compreendidos para serem superados. Assim, o professor deve desenvolver no aluno a capacidade de compreender e interpretar corretamente raciocínios matemáticos, não se centrando apenas num conhecimento mecanizado assente em regras de operações.

Nos números racionais, nomeadamente quando representados na forma de fração, os alunos apresentam grandes dificuldades. Revelam dificuldades no cálculo com frações, no respeito pelas prioridades das operações, na conversão entre representações de um número racional, sendo que muitas vezes os resultados obtidos, ainda que sem sentido, não são questionados pelos alunos que acabam por os aceitar como corretos. Esta situação é muito usual na resolução de problemas sendo um sinal evidente que os alunos não desenvolveram corretamente a sua compreensão do número e das operações. Monteiro e Pinto (2009) referem que "uma das maiores dificuldades inerentes ao estudo das frações prende-se com a questão da unidade tomada como o todo a ser fraccionado" (p. 14), enumeram ainda erros relacionados com: (i) a comparação dos números $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$ os alunos mencionam que $\frac{1}{4}$ é maior que $\frac{1}{3}$, precisamente porque 4 é maior que 3; (ii) $\frac{1}{2} = 1{,}2$, as representações não estão relacionadas com os números que representam e (iii) na adição de frações é comum os alunos adicionarem numeradores e os denominadores. O estudo realizado por Aksoy e Yazlik (2017) enumeram diversos erros cometidos pelos alunos, sendo desses exemplos, os erros relacionados com as operações de frações em expressões numéricas e operações na resolução de problemas com frações. No que respeita à adição e subtração de fração, os autores verificam dificuldades nos alunos em compreender a relação entre numerador e denominador, quando na adição de frações apresentam como resultado apenas a soma dos numeradores. Os alunos comentem menos erros quando as frações têm igual denominador do que quando um denominador é múltiplo de outro. Parecem compreender o numerador e o denominador como se de dois números diferentes se tratasse, não compreendendo a noção de equipartição associada ao denominador. O principal erro na operação é o de adicionarem tanto numerador como denominador para obter o numerador e o denominador do resultado. No caso da multiplicação, em situações em que um fator é um número natural e outro fator é uma fração unitária multiplicam o número natural pelo denominador. Em situações em que a fração surge como operador, verificam que alguns alunos dividem o todo pelo numerador e multiplicam o resultado pelo denominador, Dada a parte para descobrir o todo, adicionam o valor absoluto da parte dada com a fração que representa essa parte do todo ou apresentam a divisão entre a fração e a quantidade dada, como se a divisão gozasse da propriedade comutativa. Tavares (2012, citando Oliveira, 1994) consigna que as dificuldades relativamente à compreensão do conceito de número racional reportam-se para: (i) a transposição de conceções sobre os números inteiros para os números racionais; (ii) a incompreensão da relação parte-todo; (iii) o não reconhecimento da unidade de referência, e (iv) o não ter em conta o sentido da covariação. Na abordagem às frações, Monteiro e Pinto (2009) afirmam que "aparentemente os alunos parecem ter compreendido, visto que conseguem memorizar os procedimentos na altura em que estão a ser trabalhados, mas passado um tempo, esquecem e confundem os algoritmos das operações" (p. 12). Para estas autoras, "as dificuldades dos alunos assentam nos diferentes significados das frações, com a concepção da unidade e com o ensino precoce e descontextualizado dos símbolos e algoritmos" (p. 89). De modo a minimizar os erros que comente, o professor deve ter atenção à seleção de tarefas que propõe aos alunos, procurando que estas contemplem um elevado desafio cognitivo que vise a compreensão das ideias matemáticas, afastando-se de um ensino essencialmente mecanicista centrado em símbolos e na aplicação de procedimentos.

4 METODOLOGIA DO ESTUDO

O presente estudo segue uma metodologia qualitativa, tratando-se de uma abordagem em que o investigador está presente no trabalho de campo, observa, faz uma avaliação do fenómeno em estudo e por fim analisa. Envolve a descrição, a indução, a teoria fundamentada e o estudo das perceções pessoais (Bogdan & Biklen, 1994), procurando compreender uma determinada realidade, identificando os principais erros cometidos pelos alunos no 6º ano, em dois contextos matemáticos, situações de resolução de problemas e resolução de expressões numéricas.

O estudo, de natureza descritivo, segue um design de estudo de caso, baseando-se fortemente num trabalho de campo ou em análise documental (Ponte, 1994, referindo Yin, 1984). Neste estudo constitui o caso um conjunto de 58 alunos de três turmas do 6.º ano de escolaridade de uma Escola Básica 2, 3 (Turma B, D e E). Para a investigação foram selecionadas três turmas, uma delas onde a primeira autora desenvolveu a prática pedagógica em Matemática e Ciências Naturais. As restantes turmas selecionadas possuíam professores de Matemática distintos, garantido à investigação diferentes contextos de análise. A recolha de dados é feita por meio de produções escritas dos alunos em quatro tarefas que lhes são propostas. Cada tarefa apresenta uma questão matemática e algumas resoluções de alunos à questão. Aos participantes é solicitado que analisem as resoluções dadas e identifiquem se estas respondem ou não ao que é solicitado, podendo identificar erros de resolução em expressões numéricas e problemas. Esta abordagem visa aferir se os alunos apresentam destreza para identificar possíveis erros, estimulando ainda a apresentação de estratégias e ideias matemáticas próprias, que consideram válidas para dar resposta às questões matemáticas iniciais. As tarefas propostas apresentam-se em seguida, nas figuras 1 a 4.

1. Calcula o valor da seguinte expressão numérica:

$$\frac{1}{4}+\frac{4}{5}\times\frac{1}{2}$$

Apresenta os cálculos:

a) A Margarida apresentou a seguinte resolução. Concordas com a resolução apresentada pela Margarida. Justifica a tua resposta apresentando os cálculos, caso seja necessário.

$$\frac{1}{4}+\frac{4}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{20}+\frac{16}{20}\times\frac{1}{2}=\frac{21}{20}\times\frac{1}{2}=\frac{21}{40}$$

Figura 1: Tarefa 1.

2. Na piscina existem 30 chapéus-de-sol: $\frac{1}{3}$ são azuis, $\frac{1}{5}$ são vermelhos e os restantes são verdes. Quantos chapéus-de-sol são verdes?

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}= \frac{5}{15}+\frac{3}{15}=\frac{8}{15}$$

$$\frac{8}{15}\times 30 = \frac{240}{15} = 16$$

a) Concordas com a solução apresentada pelo João? Justifica apresentando todos os cálculos, caso seja necessário.

Figura 2: Tarefa 2.

3. Calcula o valor da seguinte expressão numérica:

Apresenta os cálculos:

a) A Mafalda apresentou a seguinte resolução. Concordas com a resolução apresentada pela Mafalda. Justifica.

$$\frac{7}{5}\times\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\right) = \frac{7}{5}\times\left(\frac{3}{12}+\frac{8}{12}\right) = \frac{7}{5}\times\frac{11}{12}=\frac{77}{60}$$

Figura 3: Tarefa 3.

4. O Ricardo comprou 3 embalagens com 20 CD cada uma, já utilizou $\frac{1}{2}$ dos CD de uma embalagem, $\frac{1}{4}$ dos CD de outra e $\frac{1}{5}$ dos Cd da terceira embalagem. Juntando os cd que sobraram nas três embalagens, quantos cd tem ao todo o Ricardo?

(O Manuel e o Simão apresentaram duas propostas de resolução diferentes).

1. Indica a resolução que te parece ser a correta. Justifica a tua resposta.

Resolução do Manuel:	Resolução do Simão:
a)	**a)**
20 : 2 = 10 ⟶ 10	20 : 2 = 10
20 : 4 = 5 ⟶ 15	20 : 4 = 5
20 : 5 = 4 ⟶ 16	20 : 5 = 4
10 +15+16 = 41	10 + 4 + 5 = 19
b)	**b)**
$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{2}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{3}{4}+\frac{1}{5}=\frac{15}{20}+\frac{4}{20}=\frac{19}{20}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{2}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{3}{4}+\frac{1}{5}=\frac{15}{20}+\frac{4}{20}=\frac{19}{20}$
60 -19 =41	
R: O Ricardo tem 41 CD.	R: O Ricardo tem 19 CD.

Figura 4: Tarefa 4.

A recolha dos dados decorreu em período letivo da disciplina de Matemática na presença dos professores das respetivas turmas, garantindo um ambiente semelhante de prática pedagógica. Contudo, todas as duvidas levantadas pelos alunos seria da responsabilidade da investigadora, primeira autora, esclarecer já que esta esteve presente em todos os momentos da recolha de dados, garantido que não haveria intervenção da professora comprometendo os resultados. Antes da distribuição dos enunciados, a investigadora explicou o objetivo do trabalho. A recolha foi realizada no final do ano letivo após a realização da prova final de Matemática.

Os dados foram organizados por tarefas, fazendo-se uma primeira análise das respostas dos alunos por turma, procurando verificar se estas identificam o erro nas resoluções apresentadas. Depois dessa análise global é feita uma análise de conteúdo das respostas dos alunos em cada tarefa, verificando-se as interpretações que fazem nas operações e na resolução de problemas. As respostas dos alunos serão organizadas em quatro categorias diferentes, de acordo com a análise que fazem das tarefas, respondeu corretamente e justificou, respondeu corretamente, não respondeu corretamente e não respondeu.

5 APRESENTAÇÃO DE RESULTADOS

5.1 Resultados globais obtidos por turma

De modo global é possível evidenciar que nas três turmas as tarefas 1 e 3 referentes às expressões numéricas são aquelas em que os alunos apresentam menos dificuldades. Nas tarefas 2 e 4 os alunos apresentam muitas dificuldades na interpretação dos problemas, assim como em operar com números fracionários, não fazendo análise adequada das resoluções apresentadas. Apresentamos em seguida os resultados relativos a cada uma das turmas nas quatro tarefas.

Turma 6.º B.

A Figura 5 mostra o gráfico dos resultados globais da turma 6.º B por tarefa.

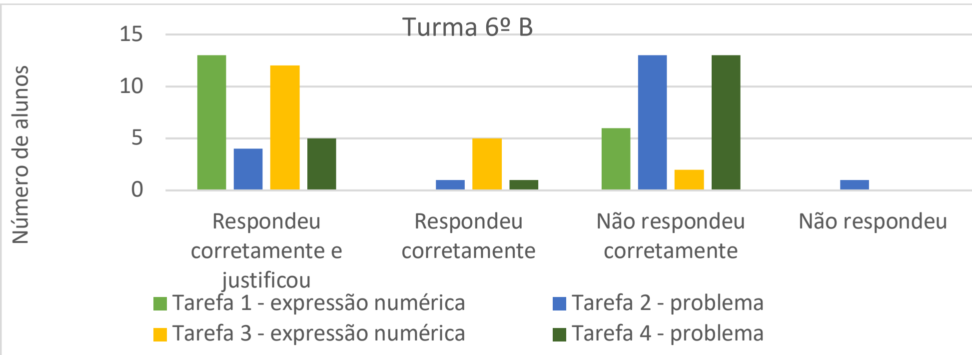

Figura 5: Classificação respostas dos alunos da turma B.

Na tarefa 1, 13 alunos responderam acertadamente mencionando o erro apresentado na resolução. Os restantes seis alunos não souberam identificar o erro, desconhecendo em alguns casos a regra da prioridade das operações. Noutras situações, embora reconheçam que a primeira operação é a multiplicação, cometeram um erro nas operações. Na multiplicação após a multiplicação realizam a adição com as frações com denominadores diferentes. Na tarefa 2 apenas quatro alunos resolveram corretamente e justificaram as suas respostas e um aluno respondeu corretamente, mas não justificou. Treze alunos não responderam corretamente e um aluno não deu qualquer resposta. Na tarefa 3 a maioria dos alunos, 12, respondeu corretamente e apresentou a devida justificação e cinco alunos responderam corretamente, mas não apresentaram justificação. Apenas dois alunos não responderam corretamente. Os resultados da tarefa 4 assemelham-se aos da tarefa 2, evidenciando as dificuldades dos alunos em resolver problemas. Apenas cinco alunos responderam acertadamente e justificaram a sua resposta e um aluno respondeu corretamente, mas não justificou. Treze alunos não responderam corretamente ao problema.

Turma 6.º D.

A Figura 6 apresenta os resultados globais do 6.º D em cada tarefa.

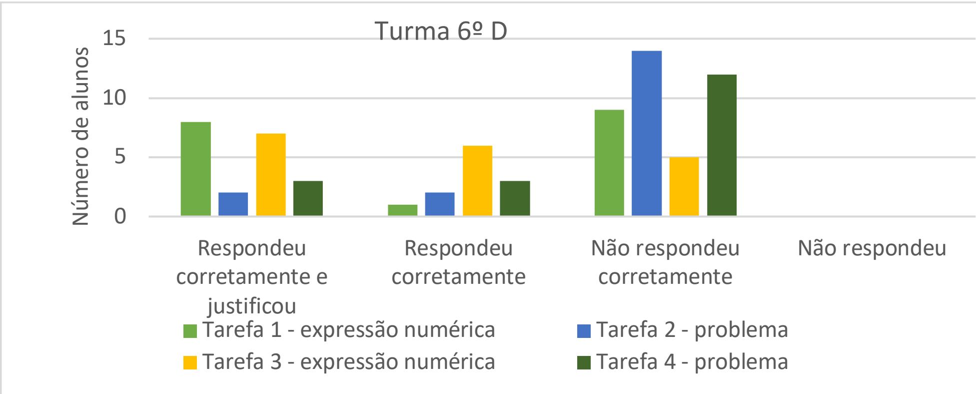

Figura 6: Classificação respostas dos alunos da turma D.

Na tarefa 1 apenas oito alunos responderam acertadamente e justificaram a sua resposta e um aluno acertou, mas não justificou a sua resposta. Os restantes nove alunos não responderam corretamente. Na tarefa 2, à semelhança da turma B, os alunos revelaram muitas dificuldades na interpretação de problemas ou da resolução dada, sendo que 14 alunos não conseguiram chegar a uma resposta correta. Somente, dois alunos foram capazes de responder corretamente justificando, o mesmo número de alunos afirmou que o problema não estava resolvido corretamente, mas não apresentaram justificação. Na tarefa 3 apenas sete alunos resolveram a expressão numérica corretamente, respeitando as regras das operações com números fracionários. Contudo, seis alunos consideram a resolução apresentada como certa, mas não justificaram a sua resposta. Apenas cinco alunos não conseguiram dar uma resposta correta. Por fim, na tarefa 4, sendo um problema, os resultados revelam um número reduzido de respostas corretas. Apenas três alunos responderam corretamente e justificaram e igualmente três alunos responderam, mas não apresentaram justificação. Doze alunos responderam erradamente e um aluno não deu qualquer reposta.

Turma 6.º E.

A Figura 7 apresenta os resultados globais da turma 6.º E.

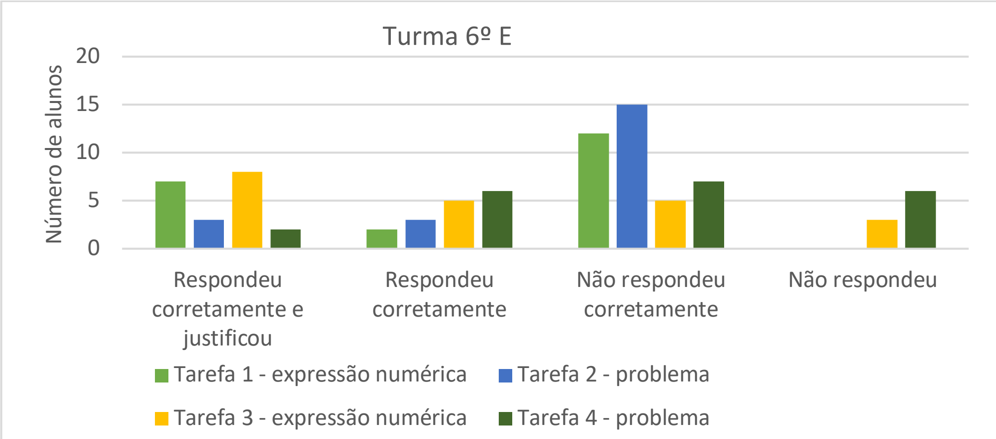

Figura 7: Classificação respostas dos alunos da turma E.

Os resultados na turma E, à semelhança dos anteriores, evidenciam maiores dificuldades nas tarefas 2 e 4. Na tarefa 1, somente sete alunos responderam corretamente e justificaram, 2 responderam corretamente, mas não justificaram e 12 alunos não responderam corretamente. Na tarefa 2, três alunos responderam acertadamente e justificaram as suas respostas, três responderam corretamente sem justificar e 15 alunos não responderam corretamente. Na tarefa 3, oito alunos responderam e justificaram corretamente a sua resposta, seis alunos responderam incorretamente e três alunos não deram qualquer resposta. A tarefa 4, apenas dois alunos responderam corretamente e justificaram as respostas, seis alunos responderam corretamente sem justificar, seis alunos não responderam corretamente e seis não deram qualquer resposta.

5.2 Análise dos erros dos alunos

Tarefa 1.

Nesta tarefa, apenas na turma B a maioria dos alunos revelou ser capaz de resolver expressões numéricas com frações de modo a identificar o erro. Já as turmas D e E apresentam mais dificuldades na identificação do erro, prioridades das operações. Dos 58 alunos em estudo, 31 respondeu acertadamente. Nos alunos que erraram registaram-se algumas dificuldades em identificar os erros na resolução apresentada. A resolução da figura 8 exemplifica o erro mais comum. A maioria dos alunos que erra na resolução da expressão fá-lo porque não respeita a prioridade das operações. O aluno B erradamente resolve a adição e depois a multiplicação. Contudo, na adição usa frações equivalentes para ter iguais denominadores e aplicam corretamente o procedimento da multiplicação de frações.

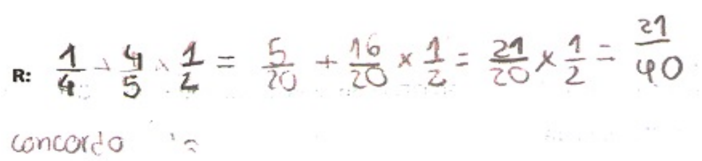

Figura 8: Erro do aluno B à tarefa 1.

Na sua resolução, o aluno C (figura 9) procura frações equivalentes para resolver a adição e respeita a prioridade das operações. Contudo, comete um erro na realização da multiplicação uma vez que também nesta situação substitui os fatores por frações equivalentes para obter o mesmo denominador em ambos os fatores e a seguir obter o produto multiplicando os numeradores e mantendo o denominador. O aluno usa o algoritmo da adição para obter o produto.

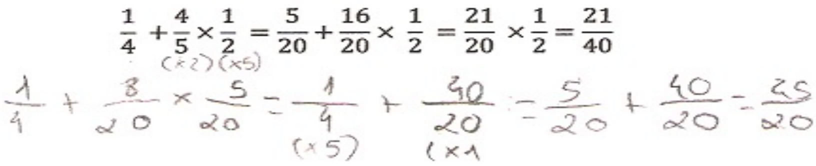

Figura 9: Erro do aluno C à tarefa 1.

Tarefa 2.

Os alunos revelaram muitas dificuldades em identificar o erro no contexto de situações problemáticas que envolvem números racionais. Os resultados foram semelhantes nas 3 turmas, sendo que cerca de 72% dos alunos não conseguiram resolver a questão corretamente. Alguns alunos não identificaram o que estava em falta na resolução ou indicaram que o processo usado estava errado e *reconheceram* a necessidade de subtrair uma quantidade a 30 para saber quantos são os chapéus verdes, ou seja os restantes, relativamente aos vermelhos e azuis. Alguns alunos usam a representação decimal apesar de se tratar de uma dízima infinita periódica. O aluno X erra na adição de decimais por usar 0,20 e 0,3 e ignorar o valor posicional dos algarismos, obtendo a soma 0,23 (figura 10). Além disso, usa as quantidades relativas como se de absolutos se tratasse e por isso erra ao retirar 23 centésimas a 30 unidades. Novamente ignora o valor posicional dos algarismos e conclui que são sete chapéus verdes.

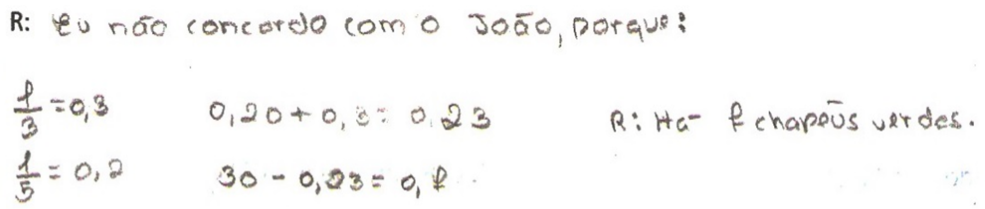

Figura 10: Resposta do aluno X à tarefa 2.

À semelhança do exemplo anterior, o aluno Y utiliza o numeral decimal (figura 11). Neste caso determina que $\frac{1}{3}$ azuis correspondem a 0,3(3) e que $\frac{1}{5}$ os vermelhos correspondem a 0,20. Contudo, usa um valor aproximado da dizima infinita. Adiciona os numerais decimais de modo correto, mas também ele confunde valor relativo com valor absoluto. Nestes dois exemplos, os alunos revelam não entender o número racional no seu significado de operador. Os alunos não questionam o resultado que obtêm, revelando fragilidades no desenvolvimento do sentido de número racional. Apesar de revelarem compreensão de que é necessário determinar a parte restante, os alunos não conseguem estabelecer a relação que existe entre os valores relativos ($\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{5}$) e o valor absoluto (30).

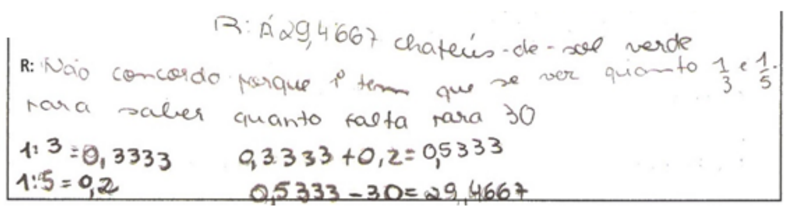

Figura 11: Resposta do aluno Y à tarefa 2.

Na resolução da Figura 12, o aluno Z aceita a resolução como certa, nomeadamente, porque os cálculos estão corretos embora não seja a resposta ao problema. Este erro foi apresentado pela maioria dos alunos que não resolveu corretamente o problema. Podemos verificar que o erro dos alunos se prende com a dificuldade na interpretação do problema, do que é dado e do que é solicitado.

azuis vermelhos

R: $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{5}{15} + \frac{3}{15} = \frac{8}{15}$ / $\frac{8}{15} \times 30$ chapéus $= \frac{240}{15} = 16$ verdes

concordo.

Figura 12: Resposta do aluno Z à tarefa 2.

Tarefa 3.

Os alunos teriam de validar a resolução apresentada de uma expressão numérica, sendo que a solução estava correta. Os alunos tinham de identificar a prioridade das operações em expressões com parenteses. A maioria dos alunos respondeu corretamente, validando a resolução apresentada e fazendo prova disso com uma resolução pormenorizada da expressão numérica. No total dos 58 alunos em estudo, cerca de 74% resolveram corretamente a expressão numérica, 21% não responderam corretamente e os restantes 5% não responderam. As turmas D e E têm resultados semelhantes e destaca-se a turma B com apenas dois alunos a não responder corretamente. Nesta situação, embora o resultado global seja positivo algumas resoluções apresentam erros relacionados com a adição de frações com denominadores diferentes, tal como se verifica na resposta do aluno Y (figura 13).

R: Não, não concordo.

$$\frac{7}{5} \times \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3}\right) = \frac{7}{5} \times \left(\frac{3}{7}\right) = \frac{21}{35}$$

Figura 13: Resposta do aluno Y à tarefa 3.

Nesta resolução o aluno não procura obter frações equivalentes às dadas para realizar a adição com frações de igual denominador. Assim, adiciona tanto o numerador como o denominador, demonstrando que desconhece a grandeza que a fração representa e o seu significado como parte de um todo, reconhecendo o que representa o numerador e o denominador. No que respeita à multiplicação utiliza o algoritmo correto. Outro dos erros comuns incide sobre a multiplicação, alguns alunos substituíram os fatores por frações equivalentes de modo a terem denominadores iguais, contudo multiplicam apenas o numerador e o produto ficou com denominador igual ao dos fatores (figura 14).

$$\frac{7}{5}\times\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\right)=\frac{7}{5}\times\left(\frac{3}{12}+\frac{8}{12}\right)=\frac{7}{5}\times\frac{11}{12}=\frac{77}{60}$$

$$\frac{7}{5}\times\left(\frac{1}{4}_{(3)}+\frac{2}{3}_{(4)}\right)=\frac{7}{5}\times\left(\frac{3}{12}+\frac{8}{12}\right)=\frac{7}{5}_{(\times 12)}\times\frac{11}{12}_{(5)}=\frac{87}{60}\times\frac{55}{60}=\frac{4785}{60}\xrightarrow{:4}\frac{957}{15}$$

R: Naõ concordo dá $\frac{957}{15}$

Figura 14: Resposta do aluno X à tarefa 3.

Um outro aluno considera a resolução errada, assumindo que para adicionar frações é necessário igualar denominadores e também numeradores, multiplicandos os termos da mesma fração por valores diferentes (figura 15). Para o aluno W, a primeira fração deve ser substituída por uma outra em que o numerador deve ser multiplicando por 2, enquanto o denominador dessa fração deve ser multiplicado por 3. Na segunda fração, o denominador deve ser multiplicado por 4 enquanto o numerador deve ser multiplicado por 1 para se obter 2 e não 8.

$$\frac{7}{5}\times\left(\frac{1^{\times 2}}{4_{\times 3}}+\frac{2^{\times 4}}{3_{\times 4}}\right)=\frac{7}{5}\times\left(\frac{3}{12}+\frac{8}{12}\right)=\frac{7}{5}\times\frac{11}{12}=\frac{77}{60}$$

Não concordo, porque $2\times 1=2$ não 8

Figura 15: Resposta do aluno W à tarefa 3.

Tarefa 4.

Esta tarefa reporta novamente para a situação problemática em que a percentagem de alunos a responder corretamente é reduzida. Grande parte dos erros está associada à dificuldade de interpretação incorreta do problema e não a erros de cálculo. Apenas 35% dos alunos responderam corretamente ao problema, 55% não resolveram corretamente e cerca de 10% não responderam. A maioria dos alunos aprova a resolução incorreta por não fazer a correta relação entre o que é dado, partes utilizadas e o que é pedido, quantidade restante, tal como se verifica na resposta do aluno Z (figura 16). O aluno usa a fração no seu significado de operador e realiza corretamente a multiplicação, obtendo as quantidades de CD refere a cada parte de embalagem utilizada. Adiciona as quantidades obtidas de CD utilizados, mas não indica a quantidade de CD que resta que é questionada no problema.

A resolução do Simão.

$\frac{20}{1}\times\frac{1}{2}=\frac{20}{2}=10$ $\quad\frac{20}{1}\times\frac{1}{4}=\frac{20}{4}=5$

$\frac{20}{1}\times\frac{1}{5}=\frac{20}{5}=4$ $\quad 4+10+5=19$

Figura 16: Resposta do aluno Z à tarefa 4.

Esta estratégia foi apresentada por muitos dos alunos, podendo não ter interpretado corretamente o que era solicitado ou não ter compreendido o significado de cada fração em relação a cada caixa de 20 CD e posteriormente em relação ao total de CD de que disponham. Verifica-se que não compreenderam que o valor que responderam representa a quantidade de CD que foi utilizada e não a quantidade de CD de que ainda dispõem.

Na resolução da figura 17 o aluno revela dificuldades em operar com números racionais. Neste exemplo, o aluno X fez sucessivas adições de numerador e denominador, com frações com denominador diferente. Podemos concluir que o aluno não consegue estabelecer uma relação entre as frações e a grandeza discreta que representam nem usar a fração como operador e revela também dificuldades na utilização do algoritmo da adição.

$\frac{2}{6}+\frac{3}{11}+\frac{5}{15}+\frac{6}{19}+\frac{7}{24}+\frac{10}{28}+\frac{11}{33}=\frac{44}{136}$ $\qquad$ $\frac{2}{6}+\frac{3}{11}+\frac{5}{15}+\frac{6}{19}+\frac{7}{24}+\frac{10}{28}+\frac{11}{33}=\frac{44}{136}$

Nenhuma das duas me parece correta.

Figura 17: Resposta do aluno X à tarefa 4.

6 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

As tarefas com expressões numéricas foram aquelas em que os alunos revelaram menos dificuldades. Contudo, muitas das resoluções apresentavam erros, sendo possível identificar os principais erros cometidos pelos alunos a operar com os números fracionários em cada tarefa. Nas tarefas que envolvem expressões numéricas (tarefas 1 e 3) a maioria dos alunos revela conhecer a prioridade das operações. Contudo, alguns alunos ainda comentem alguns erros neste aspeto. Além disso, os erros que mais cometem estão relacionados com (i) adicionar frações com diferentes denominadores aplicando o procedimento idêntico ao da multiplicação, ou seja, operam sem igualar denominadores e adicionam numeradores e também denominadores, e (ii) efetuar a multiplicação como se de uma adição se tratasse, substituindo as frações por frações equivalentes com o objetivo de obter frações com o mesmo denominador e multiplicando os numeradores mantendo iguais os denominadores. Nas tarefas que apresentam problemas (tarefas 2 e 4), os alunos apresentam dificuldades na interpretação dos problemas, sendo que na tarefa 2 compreendem que é possível transformar uma fração num numeral decimal, mas fazem-no quando se trata de uma dízima infinita periódica, perdendo assim o valor exato. Nestas situações revelam não compreender o número racional no seu significado de operador, usando-o como se fosse um valor absoluto. Por sua vez, na tarefa 4, os alunos não estabelecem a relação correta entre as frações e o todo, não identificando corretamente o significado de operador subjacente ao número racional. Também nesta situação revelam não compreender o que é pedido, não fazendo a diferença para o todo. Assim, os erros cometidos pelos alunos são erros por falta de compreensão e domínio dos procedimentos ao operar com os números, nomeadamente, erros de prioridade das operações e erros por dificuldades na interpretação dos problemas. É particularmente relevante que os seus desempenhos sejam piores na resolução de problemas. Segundo Wearne e Hibert, (1988, referido em Monteiro & Pinto, 2005), há alunos que conseguem memorizar todos os procedimentos dos algoritmos, resolvem corretamente longas expressões numéricas, mas não sabem mobilizar esse conhecimento para resolver problemas elementares. Esta situação decorre da ênfase nos símbolos como realidades próprias, desprovidos de contexto, sem que os alunos desenvolvam a sua compreensão das representações e dos modelos. Nas duas situações emerge o significado de operador no qual também evidenciam dificuldades. Monteiro e Pinto (2005) afirmam que muitas das dificuldades dos alunos do ensino básico estão diretamente relacionadas com os “diferentes significados das frações, com a concepção da unidade e com o ensino precoce e descontextualizado dos símbolos e algoritmos” (p. 89).

7 CONCLUSÃO

A maioria dos alunos, finalizando o 2.º ciclo, revela compreensão dos números racionais como operador e como quociente. Contudo, as dificuldades na distinção entre o valor relativo e o valor absoluto ainda são bastante relevantes para alguns alunos. Tal como apontam Aksoy e Yazlik (2017), os alunos procuram aplicam operações de modo aleatório entre os valores dados apenas para obterem um resultado, evidenciando dificuldades na compreensão dos problemas. São vários os erros cometidos por alunos envolvendo as operações com números racionais, tanto tando usam frações como quando operam com números na representação decimal. Os erros cometidos na adição e na multiplicação revelam as dificuldades na compreensão dos racionais, não sendo capazes aplicar os procedimentos com compreensão, mas procurando usá-los de forma mecanizada. Os resultados evidenciam que os alunos revelam particular dificuldade em reconhecer erros nas resoluções apresentadas nas situações problemáticas. Nesta situação, a dificuldade na interpretação do problema associada à dificuldade com os números racionais, usando muitas vezes métodos errados, evidencia a importância do trabalho destas situações na sala de aula. O NCTM (2007) identifica que os alunos devem ter oportunidades para formular, discutir e resolver problemas complexos que exijam um esforço significativo e que, posteriormente, devem ser encorajados a refletir sobre o seu próprio raciocínio. Destacamos por isso a necessidade de pensar o modo como o tema é abordado, reportando para a ideia de Monteiro e Pinto (2005) de que o desenvolvimento do sentido do número racional necessita de tempo, devendo ser contemplados os diferentes significados dos números racionais e as conexões entre as diferentes formas de representação.

8 REFERÊNCIAS

Aksoy, N., & Yazlik, D. (2017). Student Errors in Fractions and Possible Causes of These Errors. *Journal of education and training studies, 5*(11), 219-233. Disponível em https://doi.org/10.11114/jets.v5i11.2679

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Porto: Porto Editora.

Brocardo, J. (2010). Trabalhar os números racionais numa perpectiva de desenvolvimento do sentido de número. *Educação e Matemática, 109*, 15-23.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles espistémologiques et les problémes en matematiques. *Rechercher en Didactique des Mathématiques, 2*, 165-198.

Correia, C. (2010). Os erros no processo Ensino/Aprendizagem em matemática em educação*. Teoria e prática, 20* (34), 169-186.

Ministério da Educação – Direção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular (ME-DGIDC) (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: ME-DGIDC.

Monteiro, C., & Pinto, H. (2005). A aprendizagem dos números racionais. *Quadrante, 14*(1), 89-106.

Monteiro, C., Pinto, H., & Figueiredo, N. (2005). As fracções e o desenvolvimento do sentido do número racional. *Educação e Matemática, 85*, 47-51.

Monteiro, C., & Pinto, H. (2009). *Desenvolvendo o sentido do número racional*. Lisboa: APM.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a Matemática escolar* (Tradução do original de 2000). Lisboa: APM

NCTM (2017). *Princípios para a Ação: assegurar a todos o sucesso em matemática* (Tradução do original de 2014). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (1994). O estudo de caso na investigação em educação matemática. *Quadrante, 3*, 3-18.

Ponte, J. P., & Serrazina, L. (2000). *Didáctica da matemática no 1.º ciclo*. Lisboa: Universidade Aberta.

Ponte, J. P., & Quaresma, M. (2011). A aprendizagem da comparação e ordenação de números racionais através de uma abordagem exploratória. In M. H. Martinho, R. A. T. Ferreira, I. Vale, & J. P. Ponte (Eds.), *Ensino e Aprendizagem da Álgebra: Encontro de Investigação em Educação Matemática* (pp. 219-238). Póvoa do Varzim: SEM/SPCE.

Quaresma, M. (2010). Ordenação e comparação de números racionais em diferentes representações: uma experiência de ensino (Dissertação de Mestrado em Educação, Universidade de Lisboa).

Quaresma, M., & Ponte, J. P. (2012). As tarefas e a comunicação numa abordagem exploratória no ensino dos números racionais. In P. Canavarro, L. Santos, A. M. Boavida, H. Oliveira, L. Menezes, & S. Correia (Eds.), *Práticas de ensino da Matemática* (pp. 215-227). Castelo de Vide: SPIEM.

Tavares, C. (2012). *Conhecimentos dos futuros professores do 1º ciclo do Ensino Básico sobre Números Racionais* (Dissertação de Mestrado em Educação, Universidade de Lisboa)